arXiv:2603.25601v1 [math.SP] 26 Mar 2026

半经典算子的 WKB 方法：如何跨越焦散（以及更多）

武玉诺·桑。

2026年3月27日

摘要

Wentzel、Kramers 和布里渊提出的求解薛定谔方程近似解的方法，开创了微局部分析和半经典分析的蓬勃发展。若不加修改地使用，这种方法似乎会在焦散处失效，但马斯洛夫指出，简单的推广便能克服这一困难。本文在简要回顾历史之后，借助微局部分析的最新进展，采用 [63]的微局部层论方法，对这一推广后的马斯洛夫-WKB方法作统一论述。这一框架严格证明了一个自由度下，一般半经典算子（伪微分算子和 Berezin–Toeplitz 算子）特征值所满足的玻尔–索末菲–爱因斯坦–布里渊–凯勒量子化条件。我们还回顾了一些应用和推广。

1 EBK与WKB

1926年，几乎同时，三篇论文相继发表，提出了新近发表的薛定谔方程 [60]的近似解：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V\Psi = E\Psi, \tag{1.1}$$

其中， m 是粒子质量， $V:\ x \mapsto V(x)$是势， $\Psi:\ x \mapsto \Psi(x)$是波函数，而 E 是能量特征值。这三位作者分别是 Wentzel [69]（收稿日期为1926年6月18日）、布里渊 [4, 5]（收稿日期为1926年7月1日和1926年10月13日）以及 Kramers [45]（收稿日期为1926年9月9日）。

*雷恩大学、CNRS、IRMAR — UMR 6625，法国雷恩 F-35000

这个近似解如今称为 WKB 试探形式，其形式为

$$\Psi(x) = a_\hbar(x) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\varphi(x)\right), \tag{1.2}$$

其中约化普朗克常数 $\hbar$ 被视为一个小的实参数，而函数 $a_\hbar(x)$可按 $\hbar$的非负整数次幂作渐近展开：

$$a_\hbar(x) = a_0(x) + \hbar a_1(x) + \hbar^2 a_2(x) + \cdots$$

在某种合适的拓扑下。导数项前出现小参数这一事实（1.1）使得极限 $\hbar \to 0$ 成为奇异极限，也就是说，“动能”项 $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2}$ 不应被视为小于“势能”项 $V\Psi$。WKB 试探形式（1.2）通过相位的高度振荡行为体现了这一点（函数 φ 为实值函数。）

无论从历史角度还是科学角度来说，若能回到1926年，采访这三位科学家，了解同一个想法如何同时出现在他们脑海中，都会很有意思。如今要对此进行研究，需要具备历史学家的专业能力，而我并不具备；我唯一能说的是，布里渊的论文提到了Wentzel，而Kramers的论文——顺便一提，这篇论文是在乌得勒支撰写的[1], ——确实提到了布里渊和Wentzel的工作，因此很难为通常采用的三个姓名首字母排序方式找到合理依据[2]。我不清楚这种提及是否是相互的。

另一方面，这个想法绝非凭空而来。早在1899年，霍恩就发表了几篇论文 [41, 42] ，用相同的试探形式处理同一个微分方程，而他的研究本身又建立在施图姆等人的先前研究之上。历史文献通常也会提到杰弗里斯的工作 [43], 。有趣的是，这些工作发表于著名的薛定谔论文问世前几个月。因此，很难说 WKB 试探形式在1926年真的是全新的。相反，薛定谔一发表他的方程，许多研究者便尝试寻找求解方法，并提出了这种试探形式，这一点并不令人意外。

WKB 方法真正有趣之处在于，据我所知，这些作者是最早意识到霍恩等人的渐近展开实际上揭示了哈密顿的旧古典力学与薛定谔的新量子力学之间关系的人。

[1]代斯特拉特——这个故事中的另一个名字——大部分职业生涯都在这里度过。[2]如果不考虑法国科学院院报的那篇短文 [4]，WKB 的排列顺序反映了各篇论文的发表日期。法国研究者常用 BKW，因为它按字母顺序排列——或者说，出于一个不那么光彩的原因。

特别是，相位 φ 必须满足如今所称的哈密顿–雅可比方程：

$$H\left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = E\,, \tag{1.3}$$

其中 H 是哈密顿函数[3]：

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\|\xi\right\|^2 + V(x)\,.$$

更令人着迷的是，他们展示了这一试探形式如何为旧量子论的 EBK 量子化规则提供一种非常简单的论证。

这一规则是玻尔—索末菲量子化公式的推广。它指出，要使能量 E 成为薛定谔算子的正确特征值，就应满足以下几何方程：

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\oint_{\gamma_E} \xi \,\mathrm{d}x = n \in \mathbb{Z}, \tag{1.4}$$

其中，γ_E 表示相空间中能量为 E的一条闭合经典轨道，而 ξ是经典动量（在物理学文献中记作 p），与位置坐标 x （常记作 q）共轭。整数 n 称为量子数。

与 WKB 一样，EBK 也是由三位作者姓名首字母拼接而成：爱因斯坦、布里渊（就是同一位布里渊）和凯勒。不过这一次，与 WKB 不同，历史脉络十分清晰。简单来说，爱因斯坦 [29]基于几何考量提出了这一量子化规则（当然也借鉴了更早的研究，尤其是玻尔、埃伦费斯特、爱泼斯坦、施瓦茨希尔德和索末菲的工作）；随后，布里渊展示了它与薛定谔的新量子力学之间的联系（引用的正是 WKB 部分所提及的那篇论文！）；最后，凯勒 [44]解释说，为了提高精确度，这些规则需要作出修正（如今也称为马斯洛夫修正）：

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\oint_{\gamma_E} \xi\, dx = n + \frac{\mu}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.5}$$

其中 μ 称为（凯勒—）马斯洛夫指标；它根据环路 γ_E 的拓扑性质定义，并用于补偿焦散或转向点处的相位跃迁。这条极其简单的规则（部分）由 WKB 试探形式证明，它依据经典轨迹施加离散能级，并通过拓扑信息进行修正，从而架起经典力学与量子力学之间的桥梁。

[3]从现在起，我将质量 m 纳入新的半经典参数 $\frac{\hbar}{m}$ 中。 —

2 从 WKB 到微局部分析

故事并未就此结束。事实上，我更愿意说，WKB 试探形式是一个全新而迷人的数学发展方向的起点，这一方向的广度令人望而生畏：微局部分析。

事实上，数学家们花了几十年时间，才终于为 WKB 方法提供了严谨的论证。第一个问题来自转向点，也就是焦散。这些点上，近似不再一致，实际上还会发散。对于一维薛定谔方程，这些转向点在哈密顿量一侧对应粒子动量 ξ 为零的位置 x 。因此，能级集在该处有一条竖直切线，进而相位函数 φ 的导数变为无穷大，这使得无法用光滑函数求解哈密顿-雅可比方程。

此时，很难不注意到，相比之下，EBK 量子化规则在转向点处完全没有奇异行为。那么，EBK 是否比 WKB 更好，或者适用范围更广？我们确实很容易这样认为，因为 EBK 不仅没有奇异性，还可以推广到任意类型的哈密顿函数，而不局限于薛定谔算子所对应的哈密顿函数。这表明，它可以用于求解由更一般的偏微分方程引出的特征值问题。三十年后，Lax 将 WKB 方法推广到了大类算子上 [46], ，但仍受焦散问题的限制。看来，马斯洛夫 [53] 率先对 WKB 试探形式作出了实质性的推广，借助部分傅里叶变换，使其能够处理焦散。随后，赫尔曼德 [39, 40], 也受到佐藤的微函数理论的启发 [59], ，将这一切整合为一套卓越的理论，如今称为（齐次）微局部分析。遗憾的是，赫尔曼德既不想以量子力学来阐释他的理论，也不打算将其应用于这一领域。他关注的是一般偏微分方程分布解的正则性理论，并未使用任何小参数 $\hbar$。代斯特拉特 [23]率先重新引入半经典参数 $\hbar$ ，以便运用微局部分析重现马斯洛夫的结果。半经典分析由此诞生。在此过程中，代斯特拉特依托于赫尔曼德与他本人近期发展的傅里叶积分算子理论 [24] （这一理论沿袭了一系列思想，其中尤其包括埃戈罗夫的工作 [28]），从而推广了 WKB 解的概念，如今称为半经典拉格朗日分布。形式上（也就是说，忽略积分的收敛问题），拉格朗日分布就是标准 WKB 试探形式的线性叠加，如下所示：

如下：

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(x,\theta)}\, a_\hbar(x,\theta)\, \mathrm{d}\theta\,. \tag{2.1}$$

3 拉格朗日流形观点

考虑相空间 $\mathbb{R}^{2n}$，其配备了典范辛形式$\omega = \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}\xi_j \wedge \mathrm{d}x_j$。拉格朗日[4]（子）流形是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的一个子流形，其维数为 n，且辛形式在其上消失。例如，“水平纤维” $\{\xi = \text{const}\}$ 是一个拉格朗日子流形（正如我们稍后将看到的，它具有一定的重要性）。当然，同样的概念也可推广到任意辛流形。拉格朗日流形与薛定谔方程有什么关系？艾伦·温斯坦曾说过一句如今已广为人知的话：“一切都是拉格朗日流形。”[68]。我不打算对此作出完整论证，但让我解释一下，为什么薛定谔方程的任何 WKB 解——即使是在广义的马斯洛夫意义下（2.1）——都与一个拉格朗日流形相关联。

回顾一下，相位 φ是哈密顿–雅可比方程的一个解

$$H\left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = E. \tag{3.1}$$

因此，我们得到能级集的一个自然子集，它由所有对 $(x,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x})$ 构成，这就是 φ的微分的图像。我断言，这个图像是一个拉格朗日子流形。事实上，将辛形式 $\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x$ 限制在该图像上，可得到：

$$\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x_{\restriction \Lambda_\varphi} = \mathrm{d}(\xi\, \mathrm{d}x)_{\restriction \Lambda_\varphi} = \mathrm{d}(\,\mathrm{d}\varphi) = 0. \tag{3.2}$$

（刘维尔 1-形式 $\alpha = \xi \mathrm{d}x$ 具有这种显著的“自明”性质：当将其限制在余切丛的一个截面——即一个 1-形式——上时，它会还原出该 1-形式本身，也就是这里的 $\mathrm{d}\varphi$。）

对于广义 WKB Ansatz 的情形，如方程（2.1）所示，并且在 φ 满足一般条件时，我们可由驻相引理得知，积分局部化在映射的临界点上

$$\theta \mapsto \varphi(x,\theta),$$

[4]我在此遵循 Weinstein 的用法，[67] 采用完全形容词化的形式“lagrangian”——也就是说，不使用大写“L”；我也赞同 Weinstein，将词尾写作“ian”而不是“ean”；毕竟，约瑟夫·路易·拉格朗日出生时名为朱塞佩·路易吉·拉格朗吉亚。

也就是说，在集合

$$C_\varphi = \left\{ (x,\theta) \;\middle|\; \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(x,\theta) = 0 \right\}.$$

在这些局部化点处， $\Psi(x)$的渐近展开变为通常的 WKB 试探形式。因此可以证明，如果它是薛定谔方程的解，那么必然满足哈密顿–雅可比方程

$$H\left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\theta)\right) = E, \quad \text{where } (x,\theta) \in C_\varphi.$$

同样，可以验证， C_φ 在映射下的像

$$(x,\theta) \mapsto \left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\theta)\right)$$

是一个拉格朗日子流形。值得注意的是，我们可以反过来证明，有一类（非空的）拉格朗日分布，在局部具有（2.1）的形式，并且可以与任意拉格朗日子流形相关联；这是马斯洛夫的主要成就之一。赫尔曼德将其推广到更一般的情形（但针对的是齐次拉格朗日子流形），随后代斯特拉特也作出了推广。关于这一问题的详细解释，我推荐阅读代斯特拉特的论文 [23]。由此可知，要为薛定谔方程（或任何适当的半经典方程，见下文）的（广义）WKB 解找到合适的相位，只需在所需的能级集 $H(x,\xi) = E$中找到一个任意的拉格朗日子流形即可。

拉格朗日流形有许多神奇之处，其中之一是这样的拉格朗日流形在 H 的哈密顿流下会自动保持不变 。事实上，如果 v 与 Λ相切，那么

$$\omega(\mathcal{X}_H, v) = -\,\mathrm{d}H \cdot v = 0\,,$$

第一个等式定义了哈密顿向量场 $\mathcal{X}_H$ ，第二个等式则表明 v 与 H 的水平集相切。因此， $\mathcal{X}_H$ 与 Λ辛正交。但由于 Λ是拉格朗日流形，其辛正交补就是它本身，因此 $\mathcal{X}_H$ 与 Λ相切！ [5]

我们现在可以看出，用 WKB 试探形式以一阶精度 $\mathcal{O}(\hbar)$求解薛定谔方程，实质上就是在相空间中寻找一个不变的拉格朗日子流形。（这里的“不变”始终指在经典哈密顿量 H所生成的哈密顿流下不变。）

[5]关于 WKB 近似几何的更多细节，可以参阅这本优秀的著作 [3]。

读者或许会疑惑，为什么我们在这里引入一般的拉格朗日流形，而本文主要关注的却是一维情形：相空间是 $\mathbb{R}^2$，即一个二维曲面，而拉格朗日流形在该空间中不过是一条曲线。原因之一是，WKB论文的第一部分讨论薛定谔方程的近似解，实际上适用于任意维数，因此定义了一般的拉格朗日子流形，并为波函数 Ψ提供了很好的几何解释。然而，第二部分旨在论证玻尔–索末菲量子化条件，其处理要精细得多，只适用于一维情形，或可分离系统、完全可积系统。不过，这也是我们的第二个理由：事实证明，即便在一维情形下，要严格论证玻尔-索末菲条件，我们的主要工具也将是傅里叶积分算子；而傅里叶积分算子本身实际上是在高维空间中定义的 WKB 函数。

4 半经典算子与微局部解

微局部分析最初是为（半经典）伪微分算子发展起来的。伪微分算子是一大类线性算子，其中包括所有系数光滑的微分算子（因此也包括薛定谔算子）[6]。后来人们发现，整套理论也可以应用于一类截然不同的算子，即所谓的贝雷津–托普利茨算子（例如参见 [50]）。这类算子并非微分算子。相反，对于每个固定的 $\hbar$值，它们作用于一个有限维希尔伯特空间，其维数随着 $\hbar \to 0$趋于无穷大。本文遵循 [51,附录 A], 中的一个想法，将半经典算子称为半经典伪微分算子或贝雷津–托普利茨算子。两种情形下，我们都用 $\mathcal{H}$ 表示其作用所在的自然希尔伯特空间（在贝雷津–托普利茨情形下，该空间依赖于 $\hbar$），并用 M 表示相空间（因此，在 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ 和 $M = \mathbb{R}^{2n}$ 分别对应伪微分情形）。

在 Berezin-Toeplitz 情形中，$\hbar$ 的可取值是量子化的：通常，$\hbar = 1/k$ 且 $k \in \mathbb{N}^*$。然而，我撰写本文时偏重于伪微分算子；因此，为了简化记号，当实际想表达“$\hbar$ 可取且位于 $]0,1]$内”时，我们会说“$\hbar \in]0,\ 1]$”。我们

[6]严格来说，系数需要具有适度增长；对于薛定谔算子，这意味着 V 必须光滑，且在无穷远处至多呈多项式增长。按照当前的微局部术语，我们的算子的符号必须属于适当的类，本文中我们将始终默认这一点。详情请参见 [70] 。

还将 $(x,\ \xi)$ 记作相空间中的一点，尽管对于一般的辛流形而言，可能不存在这样的整体坐标。在 Berezin-Toeplitz 量子化方案中，WKB 相位 $e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(x)}$ 必须替换为预量子线丛的一个全纯截面，该截面在某个拉格朗日流形 Λ 上平坦，见 [7]。（这也涵盖了“广义 WKB Ansatz”（2.1）。）

设 P 是一个符号为 $H(x,\ \xi)$ 的半经典算子。若 $\psi \in \mathcal{H}$ 是方程 $(P-E)\psi = 0$ 的 N 阶 WKB 解，意即 ψ 是一个拉格朗日分布，其对应的拉格朗日子流形包含于能级集 $H = E$ 中，并且 ψ 是一个 N 阶准模态，则称之为

$$(P-E)\psi = \mathcal{O}(\hbar^N). \tag{4.1}$$

例如，当 $P = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ 时，它是可以说最简单的半经典算子，此时 $\psi(x) = Ce^{\frac{i}{\hbar}Ex}$，$x \in \mathbb{R}$ 是一个平面波，也是一个与拉格朗日流形 $\{(x,\ \xi)$ 相关联的拉格朗日分布；$\xi = E\}$，并且是方程 (4.1) 任意阶的 WKB 解。

对于拉格朗日分布，当 $k = 1$ 时，准模态条件 (4.1) 自动成立。然而，对于更大的 k，要想得到更高阶的解，就必须求解哈密顿–雅可比方程之外的输运方程。本文不讨论输运方程，因为在半经典傅里叶积分算子的更一般理论中，它们会被隐含其中。

我们希望方程 (4.1) 在何种意义下，或何种拓扑下成立？使用微局部解的概念会很方便：若且唯若方程 (4.1) 在该点的某个邻域内经过微局部投影后，在 $\mathcal{H}$ 范数下成立，就称它在相空间中的点 (x,ξ) 附近微局部地成立。这里，微局部投影指的是一种半经典算子，其符号在 (x,ξ) 的某个小邻域内为 1，在某个紧集之外为 0。若元素 $u_\hbar \in \mathcal{H}$ 在集合 $\Sigma \subset M$ 中微支持[7]，则称它在 Σ 之外是微局部地 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$。微局部支集也称为半经典波前集。参见例如 [51, 定义 A.1 和 A.4]

利用半经典单位分解，可以证明微局部解的集合具有良好的层结构。这意味着，若在两个不同的小开集上分别定义了两个解，这两个开集有非空交集，且两个解在交集上重合，那么就可以将它们粘合起来，在这两个开集的并集上得到一个解。正如我们将看到的，可以

[7]甚至称为“微支持”

总能选择第二个解，使其在这个交局部截面上重合。换言之，层在第一个开集上的任意截面，都可以延拓为这两个开集并集上的截面。然而，即使有一族开集覆盖了一个紧致不变拉格朗日子流形，如果该流形不是单连通的，层的整体截面也未必总是存在。若它存在（这通常会对 E施加一些条件），那么该解实际上会延拓为方程（ L^2 的一个真正的整体解，其中4.1）。因此，这证明了（至少对于自伴算子而言），能量 E 与 $\hbar^{k}$算子 P的谱之间的距离不超过。这些思想由 Colin de Verdière 在开创性论文 [9]中付诸实践。

现在让我们更精确地看看它在一维情形中如何运作。

5 玻尔-索末菲余循环

设 P 是一个自伴半经典算子，其在谱窗 $[E_1, E_2]$ 中具有离散谱（例如，带有限制势的薛定谔算子，或任意定义在紧致凯勒流形上的贝雷津–托普利茨算子）。

从现在起，我们假设 P 只有一个自由度：相空间是二维的，并且区间 $[E_1, E_2]$ 包含在 P 的主符号 H 的正则值集合中。此外，我们假设 $H^{-1}([E_1, E_2])$ 是紧致的。我们在此不仅希望使用 WKB 试探形式来求得 $(P-E)\psi = 0$ 的近似解，还要证明所有 解确实都能以这种方式得到，进而精确描述 P 在 $[E_1, E_2]$ 中的谱。

对于薛定谔算子，具体的证明可见文献，例如 Voros 的精彩讲座 [62]。但对于如此一般性的陈述，采用完整的微局部方法更为恰当。据我所知，论文 [57, 12, 34] 是最早运用深层微局部分析推导玻尔-索末菲规则的论文之一。在这里，我计划做到“更加微局部”，也就是说，我们从描述相空间中某一点附近的局部问题开始，并尝试从局部过渡到整体。策略遵循 [63, 65], ，但我会在这里给出更多细节。

给定任意函数 $\hbar \mapsto E(\hbar)$，我们用 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{(P,E)}$ 表示 $P - E(\hbar)$的微局部解层。换言之，在开子集 $\Omega \subset M$ 上， $\mathcal{D}$ 的截面集合 $\mathcal{D}(\Omega)$就是 Ω 上方程（$P - E(\hbar))\psi_\hbar = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$的微局部解空间$\psi_\hbar$ 。

首先注意，根据标准的半经典椭圆性，若 $E(\hbar) \to E_0$，则$\mathcal{D}$ 支撑在能级集 $H = E_0$ 上。由于相空间具有

二维，这个水平集通常只是一条曲线，因此其本身就是一个拉格朗日子流形。关键结果如下：它表明，在 H的任意正则点附近， $\mathcal{D}$ 局部由 WKB 解给出。

命题 5.1 ([63]) 在任意正则点 m 处 H，$(P-E)\psi = 0$ 的微局部解空间是一维的，更准确地说：

- 存在一个固定的[8] 邻域 Ω，它包含 m；对于任意 $E \in H(\Omega)$，都存在一个 *WKB* 解（即拉格朗日分布）$\Psi_\hbar = \Psi_{\hbar,\, E}$，它光滑地依赖于 E，且满足 $\|\Psi_\hbar\| = 1$，使得

$$(P-E)\Psi_\hbar = \mathcal{O}(\hbar^\infty) \ on\ \Omega\,.$$

- 若 $\psi = \psi_\hbar$ 在 m 和 $\|\psi_\hbar\| = 1$ 附近满足$(P-E)\psi_\hbar = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$，则存在一个 *WKB* 解 $\Psi_\hbar$ 和一个常数相位 $C = C(E,\hbar) \in U(1)$，使得

$$\psi_\hbar - C(\hbar)\Psi_\hbar = \mathcal{O}(\hbar^\infty) \ on\ \Omega\,.$$

在这两种情形中，余项 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$关于 E局部一致。

当我们说 WKB 解光滑地依赖于 E 时，我们的意思是，在 (2.1) 中，相位 φ和振幅 $a_\hbar$ 都光滑地依赖于E，且关于 $\hbar$一致。这一陈述可视为 [24] 的一个半经典变体；它依赖于傅里叶积分算子（FIO）理论。

傅里叶积分算子或许是微局部分析中最强大的工具。它们广为人知的一种用途是将相空间上的正则变换量子化为酉算子。若 U 是一个将正则变换（即 辛微分同胚） χ量子化的傅里叶积分算子，那么对于任意符号为 $H(x,\ \xi)$的半经典算子 P，其共轭算子

$$U^{-1}PU$$

仍是一个半经典算子，其符号为 $H\circ\chi + \mathcal{O}(\hbar)$（这一结论称为埃戈罗夫定理）。例如参见 [7, 命题 4.3]或 [70, 定理 11.5]。

值得注意的是，我们在这里又看到了 Weinstein 的“辛信条”的一个例证： [68], 因为傅里叶积分算子也是拉格朗日分布！（更准确地说， χ 在乘积空间 $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}$ 中的图像自动就是一个拉格朗日

[8]即 与 $\hbar$无关

子流形[9], , 根据定义，傅里叶积分算子是这样一种算子：其施瓦茨核是与该图像相关联的拉格朗日分布。）

命题 5.1 的证明。由于 m 是正则的：$\mathrm{d}H(m) \neq 0$，因此在 m 附近存在局部典范坐标 (x,ξ)，使得当 $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$ 保持在原点的某个邻域 $\tilde{\Omega}$ 内时，$H(x,\xi) - H(m) = \xi$（这就是达布 - 卡拉泰奥多里定理的内容）。令 U 为与这一变量替换相关联的傅里叶积分算子。令 $E_0 = H(m)$。于是，在 m 附近微局部地有，

$$U^{-1}(P - E_0)U = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{O}(\hbar)\,.$$

通过标准步骤（*WKB 输运方程就隐藏在这里！*参见 [64, 第 3 节。2] 或奠基性论文 [24, 命题 6.1。4] ——在齐次情形下。）可以将 U 乘以一个适当的酉半经典算子 V 使得，令 $U := UV$，

$$\tilde{U}^{-1}(P - E_0)\tilde{U} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\,.$$

在坐标中进行计算，可以证明命题5.1 对算子 $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} - E$成立；事实上，它的解是平面波 $\psi(x) = Ce^{\frac{i}{\hbar}Ex}$。这就证明了该命题，其中

$$\Psi_\hbar = C\tilde{U}e^{\frac{i}{\hbar}(E-E_0)x}\,.$$

由于 $E \in H(\Omega)$，存在 $(x_0,\xi_0) \in \Omega$，使得 $\xi_0 = E - E_0$；因此，$e^{\frac{i}{\hbar}(E-E_0)x}$ 的微支撑与 $\tilde{\Omega}$ 相交，我们可以用一个统一常数对其进行归一化。对于任意固定的 E，这样的 $\Psi_\hbar$ 确实是与拉格朗日流形 $\{H = E\}$ 相关的广义 WKB Ansatz，这一事实源于 U 的施瓦茨核是一个拉格朗日分布。通过驻相论证可以证明，半经典算子 V 的作用不会改变这一点（这称为半经典傅里叶积分算子演算，参见例如 [31, 第 9.7] 节或 [7, 命题 2.7]）。□

注 5.2 在命题 5.1中，能量参数 E 纯粹是装饰性的。事实上，若 P还依赖于一个附加参数 λ，那么命题的参数版本仍然成立。因此，可以令 $P_E := P - E$ 并将 $P_E\Psi_\hbar = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$ 中的解视为 E 的函数。这一观察对于谱问题有着深远的意义，因为其中的“谱”参数并非以线性方式出现。△

[9]当乘积 $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ 配备直和辛形式 $\omega \oplus(-\omega)$ 时，这一结论成立；该乘积有时记作 $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$

该命题使我们能够以简单的方式理解方程 $(P-E)\psi = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$ 的微局部解层 $\mathcal{D}$，其中能量E 是 H的正则值：此时，该层就是一个平坦丛，这意味着对于水平集 $H(x,\xi) = E$上的每个点 $m = (x_0, \xi_0)$，都存在一个 U 的邻域 U，在其中任意两个微局部解相差一个乘法常数。

因此，至少从理论上讲，确定层何时存在一个整体截面（也就是说，在能级集 $H = E$的完整邻域内存在一个微局部解）并不困难：当平坦丛是平凡丛时便是如此；等价地说，其第一切赫上同调群 $\check{H}^1(\mathcal{D})$（模 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$）为零。

如何计算这个上同调？当 E 是 H的正则值时，我们知道水平集 $H = E$是有限条闭合光滑（嵌入）曲线 $\mathscr{C}_k = \mathscr{C}_k(E)$、 $k = 1$、.....、 d的并集。我们固定一条 j，并将$\mathcal{D}_k$ 记为 $\mathcal{D}$ 在 $\mathscr{C}_k$的一个小管状邻域上的限制。曲线$\mathscr{C}_k$与圆微分同胚，并具有由哈密顿向量场 $\mathcal{X}_H$给出的自然定向；根据假设，该向量场在曲线上处处不为零。设 Ω_j、 $j = 1$、.....、 N_k 是由小球构成的 $\mathscr{C}_k$的开覆盖，每个小球上命题 5.1 均成立，且其中心 $z_j \in \mathscr{C}_k$ 沿 $\mathscr{C}_k$的定向依次排列。对于每个 j，该命题给出一个生成 $\mathcal{D}(\Omega_j)$的 WKB 函数 $\Psi_\hbar^j$。将其限制到 $\Omega_j \cap \Omega_{j+1}$ 上（下标按N_k取模），命题的唯一性部分便给出一个常数相位 $C_j = C_j(E,\hbar) \in U(1)$，使得

$$\Psi_\hbar^{(j+1)} = C_j \Psi_\hbar^{(j)} + \mathcal{O}(\hbar^\infty) \text{ on } \Omega_j \cap \Omega_{j+1}\,. \tag{5.1}$$

定义 5.3 赋值$\Omega_j \cap \Omega_{j+1} \mapsto C_j$ 称为曲线 $\mathscr{C}_k$的玻尔-索末菲余循环 。

（这确实是切赫上同调意义下的一个余循环。）

命题 5.4 在 $\mathscr{C}_k$ 的一个邻域内存在$(P-E)$ 的微局部解，当且仅当对$(E,\hbar)$，方程成立

$$C_1(E,\hbar)\cdots C_{N_k}(E,\hbar) = 1 + \mathcal{O}(\hbar^\infty). \tag{5.2}$$

证明。 解存在当且仅当玻尔-索末菲余循环是一个余边界，即 存在常数 $d_j = d_j(E,\hbar) \in \mathbb{C}^*$, $j = 1, \dots N_k$，使得

$$C_j = d_{j+1}^{-1} d_j + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\,. \tag{5.3}$$

事实上，在这种情况下，由（5.1）可知，局部截面 $d_j \Psi_\hbar^{(j)}$ 在交集 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$上实际上重合（模 $\Omega_j \cap \Omega_{j+1}$）。因此，它们

可以通过微局部单位分解拼接起来，从而在 $\mathscr{C}_k$ 的一个完整邻域上构造出解。

反过来，若存在这样的全局截面 $\Psi_\hbar$，根据命题 5.1，存在常数 d_j 使得 $\Psi_\hbar = d_j \Psi_\hbar^{(j)} + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$ 在每个 Ωj上成立。由 (5.1) 可知，(5.3) 成立。

接下来要说明余边界方程 (5.3) 与 (5.2) 等价的原因。由于指标 j 是模 N_k取值的，显然 (5.3) 蕴含 (5.2)。反过来，若 (5.2) 成立，我们令 $d_1 = 1$, $d_j = (C_1 \cdots C_{j-1})^{-1}$ 对于$j = 2$，.....，C_k，于是得到

$$d_1^{-1} d_{N_k} = (C_1 \cdots C_{N_k - 1})^{-1} = C_{N_k} + \mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

这就证明了 5.3) 对于 $j = N_k$ 成立（其他 j 的情形自动成立。） □

方程 (5.2) 称为曲线 $\mathscr{C}_k$的玻尔-索末菲条件。由于不同 k 对应的曲线彼此不相交，我们得到：

命题 5.5 存在 $\mathcal{D}$ 的非平凡截面，即 在 $H = E$ 的某个邻域上的微局部解，当且仅当与曲线 $\mathscr{C}_1$、.....、$\mathscr{C}_d$ 相关的玻尔-索末菲条件中至少一个 得到满足。

此时，尚不清楚如何将这一玻尔-索末菲条件与 EBK 预测联系起来。下面的命题给出了这一联系。

命题 5.6 半经典作用量 $A_k(E、\ \hbar)$: $= \log(C_1 \cdots C_{N_k})$ 具有如下形式的渐近展开

$$A_k(E, \hbar) = \frac{1}{\hbar} A_{k,0}(E) + A_{k,1}(E) + \hbar A_{k,2} + \hbar^2 A_{k,3} + \cdots \tag{5.4}$$

其系数为光滑系数$A_{k,\ j}$；并且

$$A_{k,0} = \int_{\mathscr{C}_k} \alpha\,, \tag{5.5}$$

其中 α 是刘维尔 *1*-形式。

证明。 我们使用与命题 5.1 的证明中相同的量子达布-卡拉西奥多里标准形，这次在每个 Ωj 上重复进行。因此，通过选取 $\Psi_\hbar^{(j)}$: $= \tilde{U}_j e^{\frac{i}{\hbar}(E - H(m))x}$，我们可以得到玻尔-索末菲余循环 (C_j)。（如果将 E 视为参数，见注记 5.2，我们可以直接取$\Psi_\hbar^{(j)}$: $= \tilde{U}_j 1$。）

由（5.1），我们在$\Omega_j \cap \Omega j{+}1$上微局部地得到：

$$C_j = e^{-\frac{i}{\hbar}(E - H(m))x} U_j^{-1} U_{j+1} e^{\frac{i}{\hbar}(E - H(m))x} + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\,.$$

由于 C_j 是常数，可以在$\Omega_j \cap \Omega_{j+1}$中的任意一点处对其求值。由于 U_j 和 U_{j+1} 的施瓦茨核都是拉格朗日分布，即具有（2.1）的形式，其振幅 $a_\hbar$ 具有关于 $\hbar$的整数次幂渐近展开，因此，对于每个固定的 E， C_j 必具有如下形式的渐近展开：

$$C_j \sim e^{\frac{i}{\hbar}S_0}(a_0 + \hbar a_1 + \hbar^2 a_2 + \cdots), \tag{5.6}$$

并且所有系数都关于 E 光滑地依赖。由于 $|C_j| = 1 + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$，我们必有 $|a_0| = 1$。因此我们也可以写成

$$C_j \sim e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j\geq 0}\hbar^j S_j},$$

(正如布里渊 [5]所指出的)，由此得到（5.4）。

为了计算 A_k,0，回想一下， $\Psi_\hbar^{(j)}$ 是与曲线 $\mathscr{C}_k \subset \{H = E\}$相关联的 WKB 解。因此，在拉格朗日流形 $\mathscr{C}_k$上的任意点 m 附近，我们有相位函数 φ_j，如（2.1）所示；利用（3.2），将此相位视为 $\mathscr{C}_k$ 上的函数，可得 $\mathrm{d}\varphi_j = \alpha$，其中 $\alpha = \xi \mathrm{d}x$ 是刘维尔 1-形式。在 $\Omega_j \cap \Omega_{j+1}$上的点 m 处对（5.1）求值，可推得（5.6）的系数 $S_0 = S_0^{(j)}$ 具有如下形式

$$S_0^{(j)} = \varphi_{j+1}(m) - \varphi_j(m)$$

但由于 $\mathrm{d}(\varphi_{j+1} - \varphi_j) = 0$，函数 $\varphi_{j+1} - \varphi_j$ 为常数，而所有这些常数构成的集合，即 $(S_0^{(j)})_{j=1,\ \ldots,\ N_k}$ 恰好是与闭1-形式 α 在 $\mathscr{C}_k$上的切赫余循环。（例如参见 [3, 附录 C]。）因此， $\sum_{j=1}^{N_k} S_0^{(j)} = \int_{\mathscr{C}_k} \alpha$，由此得到（5.5）。□

实际上，也可以描述第二项$A_{k,\ 1}$；在伪微分情形下，如果 P 没有次主符号，$A_{k,\ 1} = \mu^{\frac{\pi}{2}}$ 其中 μ是 $\mathscr{C}_k$ 的（凯勒–莱雷–）马斯洛夫指标，在 $\mathbb{R}^2$中，它始终等于2。关于贝雷津–托普利茨情形，参见 [7]。对于薛定谔算子的特殊情形，已知一种迭代方案，可求得 $A_{k,\ j}$ 对所有 j 均成立 [14, 2]。

6 准模态和特征值

现在，让我们将命题 5.1 的微局部结果提升为关于真正特征值和特征函数的具体结论，从而充分证明 EBK 规则。

首先，正如预期，广义 WKB 构造将为我们提供良好的准模态，即满足以下方程的解 $(\Psi_\hbar, E(\hbar))$

$$\|(P - E(\hbar))\Psi_\hbar\|_{\mathcal{H}} = \mathcal{O}(\hbar^\infty)\,.$$

但我们还能得出更多结论：精确特征函数必须与这些准模态相差 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$，因此，$[E_1, E_2]$ 中的整个谱在 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ 意义下（包括重数在内的所有可能意义）都与使微局部 WKB 构造成立的那些 E 的集合相差不远。

文献中关于玻尔-索末菲规则的大多数论述都作了一个简化假设，即能级集是连通的[10]；这完全可以理解，因为这样表述会简单得多，而加入连通分支一事“专家们都熟知”。确实，从辛几何的角度看，这并无区别，因为每个分支都可以单独处理[11]。微局部处理也同样类似。然而，要证明 WKB 解穷尽整个谱（这正是本节的目标），还需要一个额外论证，我们将在此给出。实现这一点的一种方法（同样，这是专家们都知道的，我并不自称有多大原创性）是利用这样一个事实：与不同分支相关的准模彼此正交，模 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ [7, 命题 2。6]。

关于玻尔-索末菲规则，最早的数学论述之一出自 Helffer 和 Robert [34]；有趣的是，他们受量子隧穿的启发，确实考虑了多个连通分支，但附加了一个对称性假设，意味着哈密顿流在 $H^{-1}(E)$上的所有周期都相等，因此得以应用 Colin de Verdière [11]的一个思路。

定理 6.1（玻尔-索末菲特征值）设 P 是一个具有一个自由度的自伴半经典算子，其谱为 $\sigma(P)$。考虑一个谱窗 $I = [E_1, E_2]$，其中只包含主符号 H 在 P 上的正则值。此外，假设对于某个 $\epsilon > 0$，$H^{-1}(I + [-\epsilon, \epsilon])$ 在相空间 M 中是紧的。那么 $\sigma(P)$ 是离散的，其描述如下。

[10]近期论文 [21]是一个值得注意的例外。[11]事实上，这里存在一个据我所知从未被讨论过的拓扑细微之处：整体纤维化与半整体纤维化之间有所区别——也就是说，在一个连通分支的邻域内：如果假设 $H^{-1}(E)$是紧的，那么它就是若干个圆的并；而在任意一个圆 $\mathscr{C}$附近，作用-角定理特别指出，相邻的纤维也紧致且连通.....这意味着：在的一个饱和邻域内；但这并不意味着 H 的相邻整体纤维 $M \to \mathbb{R}$ 是紧致的。

1. 存在一个整数 $d \geq 0$，使得对每个 $E \in I$，能级集 $H^{-1}(E)$ 都是 d 条光滑曲线 $\mathscr{C}_1(E)$，...，$\mathscr{C}_d(E)$ 的不交并。

2. 存在光滑函数 $E \mapsto A_{k,j}(E)$，对于 $k = 1, \ldots, d$ 和 $j \in \mathbb{N}$，以及光滑函数 $I \times]0,1] \ni (E,\hbar) \mapsto A_k(E;\hbar)$，它们具有渐近展开

$$A_k(E;\hbar) \sim \frac{1}{\hbar} \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j A_{k,j}(E)$$

在光滑拓扑下，使得 $\sigma(P) \cap I$ 与 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$模意义下相同，并且计入重数后，它与不交并 $\bigsqcup_{k=1}^{d} \sigma_k(\hbar)$相同，我们将其记为

$$\sigma(P) \cap I = \bigsqcup_{k=1}^{d} \sigma_k(\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^\infty) \tag{6.1}$$

with

$$\sigma_k(\hbar) := A_k(\,\cdot\,;\hbar)^{-1}(2\pi\mathbb{Z})\,. \tag{6.2}$$

确切地说，对于 P 的每个特征值 $E = E(\hbar)$，任取区间 $B = [E - \hbar^N, E + \hbar^N]$，当 $\hbar$ 足够小时，该区间的谱重数等于非空集合 $\sigma_k \cap B$ 的个数。

3. $A_{k,0}(E) = \int_{\mathscr{C}_k(E)} \alpha$，其中 α 是刘维尔 *1*-形式，且映射$E \to A_{k,0}(E)$ 是从 I 到其像的微分同胚。

4. 特别地，如果 $d = 1$，那么当 $\hbar$ 足够小时，I 中的谱是简单的，且谱隙的阶为 $\mathcal{O}(\hbar)$。

5. 如果 P 没有次主符号，那么 $A_{k,\,1}$ 就是 $\mathscr{C}_k$ 的凯勒–马斯洛指标。

注 6.2 这里有两处技术细节，我们将略而不论：

1. “两个依赖于 $\mathbb{R}$、随 $\hbar$ 变化，并且模 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ 重合（包括重数）的子集”的精确定义：见 [30, 定义 1。5]。这一概念很自然，但需要仔细处理集合的“边界”。见下文证明的步骤 4。2. 伪微分 [23]（另见 [31, 第 5 节。13]）和贝雷津–托普利茨 [7]情形下凯勒–马斯洛指标的精确定义。

△

证明。

步骤 1. 离散谱。只有在伪微分情形下才需要这一步，此时相空间 M 不是紧的；这一结果如今已是标准结论。取一个光滑函数 f，使其在 I 上等于 1，且其支集紧包含于 $I + [-\epsilon, \epsilon]$中。于是 $1_I f = 1_I$，因此由泛函演算可得$1_I(P) = 1_I(P)f(P)$。符号 $f(H(x,\xi))$及其所有导数在紧集 $H^{-1}(I + [-\epsilon, \epsilon])$之外均为零，因此根据伪微分泛函演算，$f(P)$是紧算子（参见 [22, 定理 8.7、定理 9.4], 以及 [31,第 13.6]节）。因此，$1_I(P)$也是紧算子，这意味着其值域是有限维的。

步骤 2。准模态。固定 $k \in \{1, \dots, d\}$。我们定义映射 A_k为命题5.6中的半经典作用量。

因此，映射 $E \to A_{k,\,0}(E)$ 是能量集 $H = E$上的作用积分；经典计算表明，其导数是映射 $E \mapsto \tau_k(E)$，其中 $\tau_k(E)$ 是 H 在 $\mathscr{C}_k(E)$上的哈密顿流的周期。由于 E 是正则值，哈密顿向量场在该水平集上不能为零，因此 $\tau_k(E) \neq 0$。这表明 $A_{k,\,0}$ 是一个微分同胚，从而映射 $\hbar A_k(\,\cdot\,;\hbar)$ 在 $\hbar$ 足够小时可逆。这也意味着其逆映射 $G_k(\hbar) := [\hbar A_k(\,\cdot\,;\hbar)]^{-1}$ 可按 $\hbar$的幂作渐近展开。因此，为方便起见，我们可以通过博雷尔求和对所有 $\hbar \in \,]0,\ 1]$ 定义该逆映射模$\mathcal{O}(\hbar^\infty)$，并仍将其记作 $G_k(\hbar)$。

由此可得（6.2）

$$E(\hbar) \in \sigma_k(\hbar) \iff E(\hbar) = G_k(\hbar)(2\pi\hbar n) \qquad \text{对于某个 } n \in \mathbb{Z} \tag{6.3}$$

（当然，整数 n 需要满足这样的条件：$2\pi n$ 必须属于 $A_k(\,\cdot,\ \hbar)$ 的值域。）

对于这样一个族 $\{E(\hbar);\, \hbar \in J\}$，其中 $J \subset \,]0,\ 1]$ 在零处聚集，我们可以应用命题 5.4，得到方程 $(P - E)\Psi_\hbar = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$ 的一个微局部解，定义在 $\mathscr{C}_k$的一个邻域内。通过在 $\mathscr{C}_k$ 之外进行微局部截断，并使其在其他 $\mathscr{C}_{k'}$ 上消失，$k' \neq k$我们得到一个归一化准模态 $\Psi_\hbar^{(k)}$：

$$\left\| (P - E)\Psi_\hbar^{(k)} \right\|_{\mathcal{H}} = \mathcal{O}(\hbar^\infty)\,.$$

根据谱定理，必定存在一个元素 $\lambda(\hbar) \in \sigma(P)$，使得$|\lambda(\hbar) - E(\hbar)| = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$。这表明

$$\sigma_k \subset \sigma(P) + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\,.$$

步骤 3. 微支撑。设 $\psi = \psi_\hbar \in \mathcal{H}$ 是 P 的特征函数，对应特征值 $E = E(\hbar) \in I$。假设 $E(\hbar) \to E_0$，至少对 $\hbar$的某个子序列中的取值成立。根据半经典椭圆性，ψ 的微支撑包含于 $H^{-1}(E_0)$；若将 $\|\psi\| = 1$归一化，则该微支撑非空。该微支撑在 H 的哈密顿流下保持不变（例如，这可由命题 5.1 得出）。因此，它是有限条曲线 $\mathscr{C}_k(E_0)$ 的并集。设 W_k 是 $\mathscr{C}_k(E_0)$ 的一个饱和邻域：当 E 足够接近 E_0时，整条曲线 $\mathscr{C}_E$ 都包含在 W_k中。

现在，ψ 在 W_k 上的微局部限制是层 $\mathcal{D}$对所有 E 在 E_0附近的截面，因此根据命题5.4 ，相应的玻尔–索末菲条件必须成立：因此 $E \in \sigma_k(\hbar)$。这表明

$$\sigma(P) \subset \sigma_k + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\,.$$

步骤 4。重数。为简便起见，我们没有在定理中明确陈述有关重数的结果，参见备注6.2。这里给出一个更精确的陈述；我们在文献中未能找到这一结果（尽管它与 [35]中采用的方法相差不远），直到最近才在贝雷津–托普利茨情形中出现 [21]。虽然思路很简单（ E的重数应恰好等于满足 k 的 $E \in \sigma_k$ 的数量），但由于边界效应，正确的陈述更为复杂（当 $\hbar$ 任意微小地变化时，特征值可能悄然进入或离开任意给定的集合，而这可能无法被察觉，因为 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ 误差）。

我们来证明以下结论：

> 对于 P 的每个特征值 $E = E(\hbar) \in I$，令 $N \geq 2$，再令 $B = B(\hbar)$ 为以 $E(\hbar)$ 为中心、半径为 $\hbar^N$ 的球。令 $N' > N$，并令 $\tilde{B}$ 为半径为 $\hbar^N - \hbar^{N'}$ 的稍小球。当 $\hbar$ 足够小时，
>
> 1. B 的谱重数至少等于满足 σ_k 与 B 相交的 k 的个数˜; ˜
> 2. B 的谱重数至多等于满足 σ_k 与 B 相交的 k 的个数。

这里，我们使用术语“ P 的 B谱重数”来表示其谱投影算子的秩。首先要指出，在每个 σ_k中，讨论都很简单：如果两个能量 $E_1(\hbar)$ 和 $E_2(\hbar)$ 相差至少 Ch^N，$N \geq 1$那么它们必定对应于 n_1 和n_2 中不同的整数（6.3）：因此 $|n_1(\hbar) - n_2(\hbar)| \geq 1$，于是

$$|E_1(\hbar) - E_2(\hbar)| \geq c\hbar$$

对于某个 $c > 0$。

令 $B = B(\hbar)$ 为以某个能量 $E(\hbar) \in I$为中心、半径为 $\hbar^{N}$的球，其中 $N \geq 2$；再令 B 为如陈述中所示的一个稍小的球，使得$B + \mathcal{O}(\hbar^{\infty}) \subset B$。根据上述论证，当 $\hbar$ 足够小时，每个集合 $\sigma_k + \mathcal{O}(\hbar^{\infty})$ 至多包含 B 的一个元素。如果这对两个不同的整数 $k \neq \ell$都成立，那么相应的 WKB 准模在不同的曲线上微支持，因此它们的内积为 $\mathcal{O}(\hbar^{\infty})$。所以当 $\hbar$ 足够小时，它们不可能共线；这意味着，根据谱的变分刻画， B 的谱重数至少等于满足 σ_k 与 B相交的 k 的数量。

反过来，如同前一步，值域为$1_{\tilde{B}}(P)$的任意特征函数都必须支撑在某些 $\mathscr{C}_k$ 的并集上，因此在微局部意义下等于相应 WKB 准模的线性组合。由于我们有一组特征函数的正交归一基，并且 WKB 准模彼此之间几乎正交，我们可以推知，谱重数不会超过这些 k 的数量。

□

我们从证明中可以看出，特征函数和准模态实际上都有精确的描述。

定理6.3（玻尔-索末菲特征函数）与定理*6.1*相同的假设下，

1. P 的任意准模（因而任意特征函数）模$\mathcal{O}(\hbar^{\infty})$后，等于 *WKB* 解的线性组合。*2.* 这些 *WKB* 解中的每一个，其近似特征值为 $E = E(\hbar)$，都必须对应一个分量 $\mathscr{C}_k$ ，使得 σ_k 与 E周围半径为 $\mathcal{O}(\hbar^{\infty})$的球相交。*3.* 对于每个 k，在曲线 $\mathscr{C}_k$上，玻尔-索末菲条件（*5.2*）的任意解 $E(\hbar)$，当 $\hbar$ 足够小时，都可以与 P的一个唯一特征值相对应；相应的 *WKB* 试探形式是一个准模。

7 焦散?

与大多数关于 WKB（准）模态的文本相比，例如 [32], 或许令人惊讶的是，这里完全不需要讨论转向点，也不需要引入艾里函数。事实上，在我们的处理中，焦散被巧妙地忽略了。它们到底去哪儿了?

正如前几节所见，WKB 解本质上定义在曲线 $\mathscr{C}_k$ 上，这些曲线是相空间M中的光滑拉格朗日子流形。在通常的伪微分背景下，会出现一个问题：我们最终需要的特征函数只依赖位置变量， x；而一般来说，曲线 $\mathscr{C}_k$ 无法用 x作整体参数化。

定义 7.1 设 $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ 是一个拉格朗日流形。若点 $(x,\xi) \in \Lambda$使得映射 $(x,\xi) \to x$ 限制在 Λ 上时不是局部微分同胚，则称该点为焦散。

因此，若 $n=1$，则 $\mathbb{R}^2$ 中的任意闭光滑曲线 $\mathscr{C}$ 都至少有两个焦散，它们对应于 x 在曲线上的极值。 $\mathscr{C}$ 的马斯洛夫指标是该曲线与垂直纤维化的交数：也就是说，曲线的切线穿过垂直方向的次数，按代数方式计数：$+1$ 若有向曲线局部位于垂直切线的左侧。对于 $\mathbb{R}^2$ 中逆时针定向的圆，其马斯洛夫指标为 2。根据同伦不变性， $\mathbb{R}^2$ 中任意光滑环路的马斯洛夫指标都是 ± 2。

注记 7.2 在 Berezin-Toeplitz 范畴中，不存在焦散问题，因为希尔伯特空间的元素 $\mathcal{H}$ 直接定义在相空间 M上。事实上，我们本可以通过 FBI 变换将伪微分算子变换为 Berezin-Toeplitz 算子（在非紧相空间 $\mathbb{C}^n$中），从而完全避免焦散问题。这不是我们在此采用的方法，但可以高效地实现，参见 [55, 26]。 △

从辛几何的角度看，由于 Darboux-Carathéodory 定理， $H^{-1}(E)$ 中的任意正则点都起着相同的作用，无论是在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中，还是在紧致 Kähler 流形中；无论它是否为焦散点。由于我们的方法是量子化 Darboux-Carathéodory 坐标图，微局部描述完全避开了焦散。不过，仔细看来，焦散仍然存在：它们会影响用于量子化 Darboux-Carathéodory 坐标图的傅里叶积分算子的核的广义 WKB Ansatz（ θ 2.1）中变量的维数。根据驻相法，这一维数会体现在两个 WKB 解之间的过渡常数的渐近展开中，而这正是我们的玻尔-索末菲余循环（5.6）；参见命题5.6的证明。于是，在最终结果定理6.1中，焦散分析仅留下马斯洛夫指标这一痕迹，它导致了量子数中著名的$\frac{1}{2}$平移。

8 应用

定理6.1 的表述非常精确，因此关于 P 在 $I=[E_1,E_2]$ 中的特征值的几乎任何渐近性结论，都应当可以直接由此推出。以下列举几个例子；这些例子专家们想必早已熟知，但我们未能在文献中找到明确表述。其假设与该定理的假设相同。

推论 8.1（谱的稠密性）给定任意 $E_0\in I$，存在一族特征值 $E(\hbar)\in\sigma(P)$ 使得 $E(\hbar)\to E_0$，更准确地说，$E(\hbar)-E_0=\mathcal{O}(\hbar)$。

证明。 应用公式（6.2）。令 $c(\hbar)=\hbar A_k(E_0;\hbar)$。我们有

$$c(\hbar)=c_0+\mathcal{O}(\hbar)\qquad c_0=A_{k,0}(E_0)\,,$$

以及 $G_k(\hbar)(c(\hbar))=E_0+\mathcal{O}(\hbar^\infty)$。令 $n(\hbar)=\lfloor\frac{c(\hbar)}{2\pi\hbar}\rfloor\in\mathbb{Z}$，于是

$$|2\pi n(\hbar)\hbar-c(\hbar)|\le 2\pi\hbar.$$

由于 $G_k(\hbar)$ 关于 $\hbar$ 局部利普希茨连续，我们得到

$$G_k(\hbar)(2\pi n(\hbar)\hbar)-G_k(\hbar)(c(\hbar))=\mathcal{O}(\hbar)$$

由（6.2）我们得到 $E(\hbar)\in\sigma(P)$ 其中

$$G_k(\hbar)(2\pi n(\hbar)\hbar)=E(\hbar)+\mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

由此得到该结果。 □

在上述结果中，我们注意到，用于标记特征值的量子数 $n(\hbar)$ 可以依赖于 $\hbar$，而距离 $|E(\hbar)-E_0|$通常无法比 $\mathcal{O}(\hbar)$ 更优。另一个问题是，考察当 $\hbar$变化时，给定的、固定的n所对应的特征值如何变化。这正是下面命题所关注的内容。

推论 8.2 ($\hbar$-单个特征值的行为) P 在 I 中的所有特征值«模 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$»关于 $\hbar$ 光滑依赖，具体含义如下：对于任意 $\varepsilon>0$ 和任意 $N\ge 2$，存在 $\hbar_1>0$ 使得下述结论成立。设 $\hbar_0\in\,]0,\hbar_1]$，并取一个特征值 $E(\hbar_0)\in\sigma(P)\cap[E_1,E_2]$。存在一族特征值 $\{E(\hbar)\ \ \hbar\in\,]0,1]\}$，以及一个光滑映射 $\hbar\mapsto\lambda(\hbar)$，只要 $\lambda(\hbar)\in I$，

$$|E(\hbar)-\lambda(\hbar)|\le\varepsilon\hbar^N\,.$$

在伪微分情形下，当 $\hbar$ 足够小时，这个族总会离开区间 I。

证明。我们使用由（6.1）给出的双射。对于 $\hbar = \hbar_0$，这定义了一个整数 $k \in \{1, \dots, d\}$，用于标记能级集的一个连通分支；还定义了另一个整数 $n \in \mathbb{Z}$ （量子数），用于标记近似特征值 $A_k(\cdot;\ \hbar_0)^{-1}(2\pi n)$。我们令 $\lambda(\hbar) := G_k(\hbar)\ (2\pi\hbar n)$，如（6.3）所示，结论便得证。换言之，我们只需将（6.1）重新表述为

$$\sigma(P) \cap I = \bigsqcup_{\substack{k=1,\dots,d \\ n\in\mathbb{Z},\ 2\pi\hbar n \in \mathrm{Dom}(G_k(\hbar))}} G_k(\hbar)(2\pi\hbar n) + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$$

这将谱表示为由 (k, n) 索引的 $\hbar$-光滑分支的并集。

注意， $G_k(\hbar) = G_{k,0} + \mathcal{O}(\hbar)$，且 $G_{k,0}$ 是作用变量 $E \mapsto A_{k,0}(E)$ 的倒数。在伪微分情形中，作用量是 $\mathscr{C}_k$ 下方的面积，因此除非 E 是临界值，否则它不可能为零。这意味着 $G_{k,0}(0)$ 不可能属于 I，从而迫使特征值离开这个区间。□

请注意，特征值的 漂移 会迫使它们离开任何由正则值构成的区间；这一现象已在 [17]中针对一般量子可积系统作过描述。

由此推论可知，所有特征值都属于光滑分支。一般而言，与不同连通分支相关联的分支可能相交。当 $\hbar$ 连续变化时（在伪微分背景下），精确特征值究竟会沿着这些分支变化，还是会“跳”到另一条分支，从而产生避免交叉，对于一般伪微分算子而言似乎仍是一个未解问题。当然，对于一维薛定谔算子，由于谱的简单性，我们知道所有交叉都必定会避免。

推论 8.3（穷人隧穿效应）假设两个连通分支 $\mathscr{C}_k$、$\mathscr{C}_\ell$ 是“量子对称”的（例如，它们可由一个仿射辛映射互相交换，且 P 在相应的亚纯辛变换下保持不变；或者 P 是一个具有对称势阱的薛定谔算子）。那么我们有特征值双重态 $E_k(\hbar)$ 和 $E_\ell(\hbar)$，满足

1. $E_k(\hbar) = E_\ell(\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$；
2. 以 $E_k(\hbar)$（或 $E_\ell(\hbar)$）为中心、半径为 $\hbar^N$, $N \geq 2$ 的任意球的谱重数至少为 2。当 $d = 2$ 时，谱重数恰为 2。

证明。对称性确保两个连通分支的玻尔-索末菲余循环相同。因此，结论可直接由定理6.1得出。□

参见 [25] ，其中详细讨论了与玻尔-索末菲规则相关的一维伪微分算子的隧穿现象。

现在来计算特征值的数量。通常的魏尔定律（例如参见 [22,定理 10.1]）给出了 I中（按重数计）特征值的数量：

$$\mathcal{N}(P, I; \hbar) = \frac{1}{2\pi\hbar}\mathrm{Vol}(H^{-1}(I)) + \mathcal{O}(1)$$

其中 Vol 表示辛体积。因此，$\mathrm{Vol}(H^{-1}(I)) = \int_{H^{-1}(I)} |\omega|$ 由斯托克斯定理可知为（回忆一下 $\mathrm{d}\alpha = \omega$）

$$\begin{aligned}\left|\int_{H(x,\xi)=E_2} \alpha - \int_{H(x,\xi)=E_2} \alpha\right| &= \sum_{k=1}^{d} \left|\oint_{\mathscr{C}_k(E_2)} \alpha - \oint_{\mathscr{C}_k(E_1)} \alpha\right| \\ &= \sum_{k=1}^{d} |A_{k,0}(E_2) - A_{k,0}(E_1)| \,.\end{aligned}$$

利用定理 6.1 我们不仅可以在近似中再推进一步，而且还能出人意料地（也许吧）得到一个没有余项的精确表达式。

推论 8.4（精确魏尔定律）假设 P 没有次主符号。令 $E_j(\hbar) \in I$，其中 $\hbar \in]0, 1]$ 或 $\hbar$ 属于某个在 0 处聚积的子集，满足

1. $\tilde{E}_j(\hbar) \to E_j \ \text{as}\ h \to 0$;
2. $\mathrm{dist}(\tilde{E}_j, \sigma(P)) \geq \epsilon\hbar \ \text{for some}\ \epsilon > 0.$

那么，当 $\hbar$ 足够小时，P 在 $I := [\tilde{E}_1(\hbar), \tilde{E}_2(\hbar)]$中的特征值数量恰好为

$$\mathcal{N}(P, \tilde{I}; \hbar) = \sum_{k=1}^{d} \lfloor \tfrac{1}{2\pi} A_{k,0}(\tilde{E}_2) + \tfrac{1}{2} \rfloor - \lfloor \tfrac{1}{2\pi} A_{k,0}(\tilde{E}_1) + \tfrac{1}{2} \rfloor \,. \tag{8.1}$$

此外，对于固定区间 I，这给出

$$\mathcal{N}(P, I; \hbar) = \frac{1}{2\pi\hbar}\mathrm{Vol}(H^{-1}(I)) + \frac{1}{2\pi}\big(\tau_k(E_2) - \tau_k(E_1)\big) + \delta(\hbar) + \mathcal{O}(\hbar)\,,$$

其中 $\tau_k(E)$ 是 H 在 $\mathscr{C}_k(E)$上的哈密顿流的周期，而$|\delta(\hbar)| < 1$。

证明。 我们利用分解（6.1），并计算每个集合$N_k(\hbar)$ 中的元素个数 $\sigma_k(\hbar)$。

根据（6.2）， $N_k(\hbar) = \#(A_k(\,\cdot\,;\hbar)^{-1}(2\pi\mathbb{Z}))$；换句话说，它是满足以下条件的整数 $n \in \mathbb{Z}$ 的个数：存在某个 $E \in I$，使得 $A_k(E;\hbar) = 2\pi n$。由于$A_{k,\,0}$ 是局部微分同胚，因此当 $\hbar$足够小时， A_k 是从I 到其像的单调双射，所以 $N_k(\hbar)$就是区间 $[\beta_1, \beta_2]$内整数的个数，其中 $\beta_j := \beta_j(\hbar) = A_k(E_j(\hbar);\hbar)/2\pi$, $j = 1,\ 2$。根据假设， β_j与整数之间的距离至少为 $\tilde{\epsilon}$，其中 $\tilde{\epsilon}$取决于 ϵ。因此它们不可能是整数，而且

$$N_k(\hbar) = \lfloor \beta_2(\hbar) \rfloor - \lfloor \beta_1(\hbar) \rfloor .$$

我们有

$$\beta_j(\hbar) = \frac{1}{2\pi\hbar} A_{k,0}(\tilde{E}_j) + \frac{1}{2\pi} A_{k,1}(\tilde{E}_j) + \mathcal{O}(\hbar)$$

并且，如果 P 没有次主符号，我们有$A_{k,\,1}(E) = \pi$。此外，当 $\hbar$足够小时，余项 $\mathcal{O}(\hbar)$小于 $\frac{\epsilon}{2}$，此时和$\frac{1}{2\pi\hbar} A_{k,\,0}(E_j) + \frac{1}{2\pi} A_{k,\,1}(E_j)$也不可能是整数。由此可得

$$N_k(\hbar) = \lfloor \tfrac{1}{2\pi\hbar} A_{k,0}(\tilde{E}_2) + \tfrac{1}{2} \rfloor - \lfloor \tfrac{1}{2\pi\hbar} A_{k,0}(\tilde{E}_1) + \tfrac{1}{2} \rfloor .$$

对 k求和后，我们得到模 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$意义下的正确数值。但由于我们所求的是一个整数，因此当 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ 余项足够小$\hbar$ 时，可以忽略该余项，从而证明了（8.1）。

最后，我们可以写成

$$N_k(\hbar) = \tfrac{1}{2\pi\hbar} A_{k,0}(\tilde{E}_2) - \tfrac{1}{2\pi\hbar} A_{k,0}(\tilde{E}_1) + \delta$$

其中 $|\delta| < 1$。选取满足 $E_j - E_j = \mathcal{O}(\hbar)$ 的 E_j，并在二阶处作泰勒展开，得到：

$$N_k(\hbar) = \tfrac{1}{2\pi\hbar}(A_{k,0}(E_2) - A_{k,0}(E_1)) + \tfrac{1}{2\pi}(\tau_k(E_2) - \tau_k(E_1)) + \delta + \mathcal{O}(\hbar) \quad (8.2)$$

由此得到所需结果。 □

当然，在该推论的陈述中，我们可以将区间 I 替换为任意闭子区间。

次主符号消失这一假设并非关键；使用$A_{k\text{的正确取值},\,1}$（即马斯洛夫指数与 $\mathscr{C}_k$ 上次主符号的积分之和，参见 [63]。

这也可由定理6.1推论的陈述中总是存在。实际上，在伪微分情形下，我们甚至可以选择 $E_j(\hbar) = E_j$，前提是我们选取$\hbar$的一个子序列；这是推论8.2中的漂移现象所致。

反问题。定理6.1 对于求解反问题也至关重要。这里只提薛定谔情形：我们希望从谱 V 中恢复势 [15], ；以及一般的伪微分或贝雷津–托普利茨情形，在这些情形下，我们可以在辛同胚意义下恢复主符号 [66, 49]。在这两种情形中，玻尔-索末菲规则都至关重要。

9 超越 EBK

我们在此介绍的层方法有一个优点，那就是容易推广。本文最后，我们将探讨 WKB/EKB 方法的一些扩展。

更小的误差。 尽管大小为 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$的误差项已经极为精确，但对于量子隧穿效应等一些重要应用来说仍然不够。在解析性假设下，可以达到更高的精度，即 $\mathcal{O}(e^{-\epsilon/\hbar})$。这需要借助 Sjöstrand 的微局部理论 [61], ，该理论最近已被证明可推广到 Berezin-Toeplitz 算子 [56, 18, 8, 20]。Duraffour 最近 [26], 基于伪微分情形下 [36], 的思想，获得了指数精度的玻尔-索末菲规则；Deleporte-Le Floch 则在 Berezin-Toeplitz 情形下 [21] 取得了这一结果。

可积系统。 正如 Brillouin [5], 已经指出的那样，半经典作用量的方程 $e^{\frac{i}{\hbar}S_\hbar}(x)$ 在一维情形下，或在变量可分离时，可以通过求积求解。事实上，我们还可以更进一步。相空间维数为 $2n$的量子完全可积系统，是由 n 个两两对易的自伴半经典算子组成的集合（$P_1, \ldots, P_n$）。相应的经典符号（$H_1, \ldots, H_n$）构成一个刘维尔可积系统。由于 Darboux-Carathéodory 定理可推广到这类可积系统，因此可以证明，整个微局部策略均适用，见 [63, 64]。由此既可构造系统的 WKB 解，它们是联合准模态，也可得到联合谱的玻尔-索末菲规则。据我所知，这些联合玻尔-索末菲规则的首次数学处理见于 [12, 6, 1]。 [65]对这些结果作了综述。

奇点。 虽然 Darboux-Carathéodory 定理只适用于正则 点，但微局部层策略出人意料地可以扩展到包含奇点的能级集。例如，一个局部极值

势的 V。最简单的情形是椭圆奇点，此时哈密顿量是谐振子的微局部扰动；参见 [33, 10, 48, 19]。最引人注目的应用涉及双曲点（例如，V的局部最大值）。Colin de Verdière-Parisse [16] 针对伪微分情形完成了相关研究，而 Le Floch [47] 则研究了贝雷津–托普利茨情形。核心思路是将命题 5.1 扩展到临界点的一个邻域。可以证明，这一次微局部解空间的维数不是一，而是 二。当然，等值集不再是圆，而是带有横截交点的浸入曲线。每个交点处的分支数（4）恰好与微局部解空间的维数 2 相吻合，并通过令一个与临界纤维拓扑相关的行列式为零，得出新的奇异 玻尔-索末菲条件 [16]。退化奇点的类似问题，例如四次振子 $\xi^2 + x^4 + \mathcal{O}(x^5)$，仍未得到充分解决；参见 [13, 52]。

非自伴算子。 鉴于微局部方法需要大量运用实辛几何，将其推广到非自伴算子似乎并不稳妥；也就是说，推广到符号不一定取实值的半经典算子。然而，事实证明这是可行的，复化相空间中的辛正规形仍然非常有效。对于自伴伪微分算子的微小非自伴扰动，Rouby [55], 沿着 Melin-Sjöstrand [54] 和 Hitrik [37]的开创性工作，得到了带有 $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$余项的玻尔-索末菲规则。将其推广到更一般的一维算子，目前仍是一个活跃的研究领域，参见例如 [38, 21, 27, 58]。

致谢。 我谨向 Antide Duraffour 和匿名审稿人致以诚挚谢意，感谢他们给予的积极反馈，以及提出的宝贵意见和修正建议。

参考文献

[1] C.Anné 和 A.-M. Charbonnel. 多个对易哈密顿量的玻尔-索末菲条件。*Cubo*，6(2):15–34，2004。

[2] P. N. Argyres. 玻尔-索末菲量子化规则与 Weyl 对应。《物理学·物理·菲齐卡》，2:131–139，1965年11月。

[3] S. Bates 和 A. Weinstein.《量子化几何讲义》，伯克利数学讲义第 8 卷。美国数学学会，1997年。[4] L. Brillouin. 薛定谔波动力学：一种通过连续近似求解的通用方法。《科学院周报》，183(1):24–26，1926年。[5]L. Brillouin. 关于波动力学的评论。《物理学与镭》，7(12):353–368，1926年。[6] A.-M. Charbonnel. 对易伪微分算子的联合谱的半经典行为。《渐近分析》，1:227–261，1988年。[7]L. Charles. 托普利茨算子的准模态与玻尔-索末菲条件。《偏微分方程通讯》，28(9- 10):1527–1566，2003年。[8]L. Charles. 解析 Berezin–Toeplitz 算子。《数学杂志》，299(1- 2):1015–1035，2021年。[9] Y. Colin de Verdière. 黎曼流形上的准模态。《数学研究发明》，43:15–52，1977年。[10] Y. Colin de Verdière. 对易伪微分算子的联合谱 I。《杜克数学杂志》，46(1):169–182，1979年。[11] Y. Colin de Verdière. 关于双特征线均为周期轨道的椭圆算子的谱。《瑞士数学评论》，54:508–522，1979年。[12] Y. Colin de Verdière. 对易伪微分算子的联合谱 II。《数学杂志》，171:51–73，1980年。[13] Y. Colin de Verdière. 奇异拉格朗日流形与半经典分析。《杜克数学杂志》，116(2):263–298，2003年。[14] Y. Colin de Verdière. 任意阶的玻尔-索末菲规则。《亨利·庞加莱年刊》，6(5):925–936，2005年。[15] Y. Colin de Verdière. 半经典逆问题 II：势的重构。载于《分析与力学的几何方面》，《数学进展》第 292 卷，第 97–119 页。Birkhäuser/Springer，纽约，2011年。

[16] Y. Colin de Verdière 和 B. Parisse. 奇异 Bohr-Sommerfeld 规则。《数学物理通讯》，205:459–500，1999年。[17] M. Dauge、M. Hall 和 S. V˜u Ngo. c. 量子可积系统的渐近格、良好标记及旋转数。《离散与连续动力系统》，42(12):5683–5735，2022年。[18] A. Deleporte. 带解析符号的托普利茨算子。《几何分析杂志》，31(4):3915–3967，2021年4月。[19] A. Deleporte. 解析托普利茨算子的 WKB 本征模构造。《纯粹与应用分析》，5(2):213–260，2023年6月。[20] A. Deleporte、M. Hitrik 和 J. Sjöstrand. 解析 Bergman 投影的直接方法。《图卢兹数学科学学院年刊（第六辑）》，33(1):153–176，2024年。[21] A. Deleporte 和 Y. Le Floch. 非自伴 Berezin-Toeplitz 算子及复拉格朗日态的正则 Bohr-Sommerfeld 规则，2025年。预印本 arXiv 2504.00965。[22] M. Dimassi 和 J. Sjöstrand. 半经典极限下的谱渐近，第268卷，伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，1999年。[23] J. J. Duistermaat. 振荡积分、拉格朗日浸入与奇点的展开。《纯粹与应用数学通讯》，27:207–281，1974年。[24] J. J. Duistermaat 和 L. Hörmander. 傅里叶积分算子 II。《数学学报》，128:183–269，1972年。[25] A. Duraffour. 一维中的微局部量子隧穿效应与解析估计。博士论文，雷恩大学，2024年。[26] A. Duraffour. 解析微局部 Bohr-Sommerfeld 展开，2025年。预印本 arXiv 2501.06046，即将在《谱理论杂志》发表。[27] A. Duraffour、Y. Guedes-Bonthonneau 和 S. V˜u Ngo. c. 非自伴伪微分算子的指数精确 Bohr-Sommerfeld 展开。准备中。[28] J. V. Egorov. 伪微分算子的正则变换。《数学科学进展》，24(5 (149)):235–236，1969年。

[29] A. Einstein. 论 Sommerfeld 与 Epstein 的量子化条件。德国物理学会会刊，19:82–92，1917年。[30] R. Fahs、L. Le Treust、N. Raymond 和 S. V˜u Ngo. c. 罗宾磁拉普拉斯算子的边界态。《数学文献》，29:1157–1200，2024年。[31] V. Guillemin 和 S. Sternberg. 半经典分析。International Press，波士顿，MA，2013年。[32] B. C. Hall. *WKB*近似，第305–331页。Springer New York，纽约，NY，2013年。[33] B. Helffer 和 D. Robert. 椭圆量子哈密顿算子谱的半经典行为。《傅里叶研究所年刊》，31(3):169–223，1981年。[34] B. Helffer 和 D. Robert. 广义势阱与半经典渐近。《庞加莱研究所年刊：理论物理》，41:291–331，1984年。[35] B. Helffer 和 J. Sjöstrand. 半经典极限下的多势阱。I。《偏微分方程通讯》，9:337–408，1984年。[36] B. Helffer 和 J. Sjöstrand. Harper 方程的半经典分析。I。《法国数学学会回忆录（新辑）》，34，1988年。[37] M. Hitrik. 一维半经典算子的边界谱行为。《国际数学研究通知》，64:3417–3438，2004年。[38] M. Hitrik 和 M. Zworski. 史瓦西黑洞的过阻尼准正规模，2025年。预印本 arXiv 2406.15924。[39] L. Hörmander. 傅里叶积分算子 I。《数学学报》，127:79–183，1971年。[40] L. Hörmander. 线性偏微分算子分析，第I–IV卷。Springer，1983–90年。[41] J. Horn. 关于含任意参数的二阶线性微分方程。《数学年刊》，52(2):271–292，1899年。[42] J. Horn. 关于含变参数的线性微分方程。《数学年刊》，52(2):340–362，1899年。

[43] H. Jeffreys. 关于二阶线性微分方程某些近似解的研究。伦敦数学会会刊，s2-23(1):428–436，1925年。[44] J. Keller. 非可分系统的修正玻尔–索末菲量子条件。《物理年鉴》，4:180–188，1958年。[45] H. A. Kramers. 波动力学与半整数化量子化。《物理学杂志》，39(10):828–840，1926年。[46] P. D. Lax. 振荡初值问题的渐近解。《杜克数学杂志》，24(1):627–646，1957年。[47] Y. Le Floch. 一维托普利茨算子的奇异玻尔–索末菲条件：双曲情形。《分析与偏微分方程》，7(7):1595–1637，2014年。[48] Y. Le Floch. 一维托普利茨算子的奇异玻尔–索末菲条件：椭圆情形。《偏微分方程通讯》，39(2):213–243，2014年。[49] Y. Le Floch. 一维托普利茨算子的逆谱理论。博士论文，雷恩第一大学，2014年。[50] Y. Le Floch. 紧致凯勒流形上贝雷津–托普利茨算子的简要介绍。CRM短期课程。Springer，尚，2018年。[51] Y. Le Floch 和 S. V˜u Ngo. c. 量子半托里克系统的逆谱问题。预印本 arXiv 2104.06704v3（105页），2021年。[52] N. Martynchuk 和 S. V˜u Ngo. c. 关于奇点的辛几何。预印本 arXiv:2305.01814，2023年。[53] V. P. Maslov. 微扰理论与渐近方法。Dunod，巴黎，1972年。[54] A. Melin 和 J. Sjöstrand. 二维非自伴算子的玻尔–索末菲量子化条件。*Astérisque*，(284):181–244，2003年。[55] O. Rouby. 一维自伴算子的非自伴扰动的玻尔–索末菲量子化条件。《国际数学研究通知》，2018(7):2156–2207，2017年1月。[56] O. Rouby、J. Sjöstrand 和 S. V˜u Ngo. c. 半经典极限下的解析 Bergman 算子。《杜克数学杂志》，169(16):3033–3097，2020年。

[57] G. V. Rozenbljum. 圆上伪微分算子的近似相似与谱渐近行为。*TrudyMoskov. Mat. Obshch.*，36:59–84，294，1978年。[58] N. Réguer. 具有解析正则性的椭圆临界值附近非自伴托普利茨算子的特征值。准备中，2025年。[59] M. Sato. 偏微分方程超函数解的正则性。载于*Actes Congrès Int. Math.*，第2卷，第785–794页，1970年。[60]E. Schrödinger. 作为特征值问题的量子化。《物理学年鉴》，384(6):489–527，1926年。[61] J. Sjöstrand. 微局部解析奇点。载于*Astérisque, 95*，Astérisque第95卷，第1–166页。法国数学学会，巴黎，1982年。[62] A. Voros. 薛定谔方程的谱与*BKW*方法，奥赛数学出版物81第9卷。巴黎南大学数学系，奥赛，1982年。[63] S. V˜u Ngo. c. 具有焦点-焦点型临界流形的可积系统的玻尔–索末菲条件。《纯粹与应用数学通讯》，53(2):143–217，2000年。[64] S. V˜u Ngo. c. 动量映射临界点邻域内完全可积系统的半经典正规形。《渐近分析》，24(3,4):319–342，2000年。[65] S. V˜u Ngo. c. 半经典可积系统：从局部到整体。Panoramas et Synthèses第22卷。法国数学学会，2006年。[66] S. V˜u Ngo. c. 伪微分算子的辛逆谱理论。载于《分析与力学的几何方面》，《数学进展》第292卷，第353–372页。Birkhäuser/Springer，纽约，2011年。[67] A. Weinstein. 辛流形及其拉格朗日子流形。《数学进展》，6:329–346，1971年。[68] A. Weinstein. 辛“范畴”。载于 H.-D. Doebner、S. I. Andersson 和 H. R. Petry 编，《数学物理中的微分几何方法》，第45–51页，柏林、海德堡，1982年。Springer Berlin Heidelberg。[69] G. Wentzel. 为波动力学目的而推广量子条件。《物理学杂志》，38(6):518–529，1926年。

[70] M. Zworski。《半经典分析》，《数学研究生教材》第138卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012年。