arXiv:2603.25656v1 [math.FA] 26 Mar 2026

关于圆形基彭哈恩曲线及幂零偏等距算子的 Gau–Wang–Wu 猜想

Eric Shen[a]

[a]莫斯科国立大学，莫斯科，*119991*，俄罗斯

摘要

我们研究有限维空间上基彭哈恩曲线由以原点为中心的同心圆组成的线性算子。我们称这类算子具有圆性。旋转不变算子就是这类算子的一个例子。对于每个范数不超过一的算子，我们关联一个由部分等距算子构成的无限序列，并研究圆性何时能够沿该序列双向传递。特别地，我们引入一类算子，其中上述序列中的每个偏等距算子都具有圆性，并证明这类算子的范围比旋转不变算子更广。因此，每个这样的算子都为关于幂零偏等距算子的 Gau–Wang–Wu 猜想提供了一个反例。我们还讨论了该猜想可能的改进。最后，我们提出一种判断矩阵是否旋转不变的方法，该方法适用于数值实验。

1. 引言

设 A 是作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子。其数值域 为

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathcal{H},\ \|x\| = 1\}.$$

数值域总是凸的。在有限维情形下，它是实代数曲线 $C(A)$ 的凸包，即基彭哈恩曲线，由

电子邮箱地址： erick.2013@yandex.ru (Eric Shen)

这一族曲线的包络线

$$\{e^{-i\theta}(\lambda_j(\theta)+i\mathbb{R}) : \theta\in(-\pi,\pi],\ j=1,\dots,n\},$$

其中 $\lambda_j(\theta)$是厄米矩阵束的特征值

$$H_A(\theta) := \mathrm{Re}(e^{-i\theta}A) = \frac{1}{2}\big(e^{-i\theta}A + e^{i\theta}A^*\big).$$

如果 A 具有圆性，则称之为具有圆性： $H_A(\theta)$的谱与 θ无关。等价地， A 的基彭哈恩曲线是以原点为圆心的若干个圆的并集。众所周知，这一性质还有许多等价刻画，例如，当且仅当 A 的数值影子具有旋转不变性时， A 才具有圆性，参见 [2] 和 [1]。我们在第 3 节简要回顾一些更直接的刻画，参见命题 3.12 和命题 3.13。

还有一种更强的对称性概念。

定义 1.1。若对每个 $\theta\in\mathbb{R}$，矩阵 A与 $e^{i\theta}A$酉相似，则称矩阵 $A\in M_n$ 是旋转不变的。

算子的旋转不变性是一种严格的结构条件，即旋转不变算子酉相似于一个分块移位。参见定理 5.1。论文 [3] 提出了关于部分等距算子的三个猜想，其中包括以下猜想。

猜想 1.2 (Gau–Wang–Wu)。 如果 A 是一个酉不可约的幂零偏等距算子，且其数值域是以原点为圆心的圆盘，那么 A 具有旋转不变性。

另外两个猜想中的一个已由 Wegert 和 Spitkovsky 在 [11], 中完全证明；最后一个猜想也已取得部分进展，参见例如 [4],[9] 以及近期的预印本 [7]。

Gau、Wang 和 Wu 证明了维数不超过 6 时的猜想 1.2，并建立了一个结构定理：在典范的偏等距算子表示中

$$A=\begin{bmatrix}0 & B\\ 0 & C\end{bmatrix},\qquad B^*B+C^*C=I,$$

A 的旋转不变性等价于 C [3, 的旋转不变性。定理 4.7]。与 Gau、Wang 和 Wu 的方法不同，在本研究中，我们采用这样的视角：研究的主要对象

是压缩算子 C，而整个偏等距算子 A 则被视为通过某种构造 $\mathcal{A}(C)$ 得出的结果。

首先，在第 3 节中，我们回顾如何从任意压缩算子 C构造偏等距算子 $\mathcal{A}(C)$，见定义 3.1。由于偏等距算子本身也是压缩算子，因此可以反复执行此过程。这便得到偏等距塔

$$T_0 := C, \qquad T_{j+1} := \mathcal{A}(T_j),$$

我们证明，每个 T_j 具有圆性，当且仅当缺陷铅笔

$$H_C(\theta) + \tau(I - C^*C)$$

对每个实数 τ都等谱，见定理 3.8。这为猜想 1.2 提供了一大类具有圆性的反例，即它们的基彭哈恩曲线仅由同心圆组成。例如，见例 3.15。

在第4节中，我们进一步研究 C 的圆性与 $\mathcal{A}(C)$的圆性之间的关系。特别地，我们证明，若 C 的阶数至多为 4，则 $\mathcal{A}(C)$具有圆性仅当 C 具有圆性时才成立。见定理4.3及其后的推论 4.4。我们证明，对于阶数为 5 的 C，这一结论未必成立，见命题4.7。此外，对于阶数为 4 的 C，其逆命题已不成立，见例4.5。利用本节的结果，我们构造了一个酉不可约幂零偏等距算子，它的数值域是圆形的，却不具有圆性。也就是说，它的基彭哈恩曲线并非仅由圆组成。见命题4.8。

在第5节中，我们讨论以下问题：给定一个具有圆性的算子，如何检验它是否旋转不变？现有的一般判据只有在处理相对较小的矩阵时，才能高效地用于数值实验。我们回顾已有的结构性结果，并提出一种适用于大型算子数值实验的旋转不变性检验方法，见定理5.3及其后的推论 5.5。作为示例，我们应用该方法构造一族具有任意偶数阶、具有圆性但不旋转不变的矩阵，见定理 5.6。

2. 预备知识

定义2.1。线性算子 $A \in M_n$ 称为偏等距算子，若其满足

$$\|Ax\| = \|x\| \ \ for\ all\ x \perp \ker A. \tag{2.1}$$

我们先进行标准约化。

命题 2.2 (偏等距算子的标准形)。 设 A 是一个核非平凡的偏等距算子。那么，经过酉相似变换后，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \qquad on\ \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^d,$$

其中 $m = \dim \ker A,\quad d = \dim(\ker\ A)^{\perp}$，且

$$B^*B + C^*C = I_d. \tag{2.2}$$

反过来，任何满足(2.2) 的这种形式的矩阵都是偏等距算 $y.$

我们的主要工作与 Gau、Wang 和 Wu 的以下结果密切相关。

定理 2.3 ([3],定理 4.7)。 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

是一个具有标准形的偏等距算子。当且仅当 C 是旋转不变的， A 才是旋转不变的。

为便于后文使用，我们记录如下标准的不可约性判据。

命题 2.4 ([3],命题 2.6)。矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

酉不可约，当且仅当 C 酉不可约且 B 满行秩。

我们注意到 $||C|| \leq 1$。为简便起见，本文将满足该不等式的算子称为压缩算子。

3. 偏等距塔与缺陷铅笔圆性

是否存在一种比旋转不变性严格更弱的条件，能够在压缩算子 C 与其对应的部分等距算子 $\mathcal{A}(C)$之间相互传递？本节将对此问题给出肯定的回答。由此，我们还得到一类针对原始 Gau-Wang-Wu 猜想（关于幂零偏等距）的反例。

核心思想是反复将压缩算子 C 转化为其对应的偏等距算子 $\mathcal{A}(C)$。这会产生一种新的圆性概念，它自然地介于 C的通常圆性（等价地说，即 $H_C(\theta)$的等谱性）与 C 自身更强的旋转不变性之间。

定义 3.1. 设 $C \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个压缩算子，并令

$$D_C := I - C^*C \geq 0.$$

定义一个映射

$$B_C : \mathbb{C}^n \to \operatorname{Im} D_C,$$

使得 B_C在$\operatorname{Im}\ D_C \subseteq \mathbb{C}^n$上作用为平方根 $D_C^{1/2}$，并将$(\operatorname{Im}\ D_C)^{\perp}$映为零。 C 对应的偏等距算子为

$$\mathcal{A}(C) := \begin{bmatrix} 0 & B_C \\ 0 & C \end{bmatrix} \in M_{n+\operatorname{rank} B_C}(\mathbb{C}).$$

C 的偏等距塔是序列

$$T_0 := C, \qquad T_{j+1} := \mathcal{A}(T_j), \quad j \geq 0.$$

注 3.2。 这里需要指出，这一定义相当于选择一组坐标。也就是说，可以用满足 $B_C'^*B_C' + C^*C = I$ 的其他矩阵 B_C' 替换 B_C，从而得到另一个偏等距算子。但只要 B_C' 与 B_C 的行秩相同，这个新的偏等距算子就与 $\mathcal{A}(C)$酉相似。

从 C 到 $\mathcal{A}(C)$ 并不会从酉等价的角度为 C 增添任何额外信息，如下所示：

命题 3.3。 $\mathcal{A}(C)$ 与 $\mathcal{A}(C')$ 酉相似，当且仅当 C 和C' 酉相似。

证明。 假设对于某个固定的酉矩阵 U，有 $C' = UCU^*$。那么可以找到一个分块酉矩阵

$$W := U_1 \oplus U$$

使得

$$W\mathcal{A}(C)W^* = \begin{bmatrix} 0 & U_1 B_C U^* \\ 0 & UCU^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B_{C'} \\ 0 & C' \end{bmatrix} = \mathcal{A}(C').$$

现在注意到， C 是算子 $\mathcal{C} = \Pi\mathcal{A}(C)|_{(\ker \mathcal{A}(C))^\perp}$ 的矩阵，其中 Π 是投影到 $(\ker \mathcal{A}(C))^\perp$ 上的正交投影算子。因此，只要 $\mathcal{A}(C)$ 与 $\mathcal{A}(C')$ 酉相似， C 与 C' 也具有同样的性质。

□

下面的命题说明反复进行该构造会产生什么结果：

命题 3.4. 设 C, B_C, D_C, T_j 关于 $j \geq 0$ 满足定义 *3.1*，并记 $d =$ 秩 D_C。则在适当的标准正交坐标下，

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C \end{bmatrix},$$

其中前 $j-1$ 个块的行和列均为 $d \times d$。

证明。 根据定义，

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & B_C \\ 0 & C \end{bmatrix}, \qquad T_1^* T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_C^* B_C + C^* C \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(0_d, I_n).$$

因此， $B_{T_1} = \begin{bmatrix} I_d & 0 \end{bmatrix}$，由此可得

$$T_2 = \mathcal{A}(T_1) = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & B_C \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}.$$

现在假设对于某个 $j \geq 2$，在适当的坐标下，

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C \end{bmatrix},$$

其中前 $j-1$ 个 $d \times d$ 块行和块列。

因此

$$T_j^* T_j = \operatorname{diag}(0_d, I_{(j-1)d+n}), \qquad I - T_j^* T_j = \operatorname{diag}(I_d, 0_{(j-1)d+n}),$$

于是再一次

$$B_{T_j} = \begin{bmatrix} I_d & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

并且我们看到

$$T_{j+1} = \mathcal{A}(T_j) = \begin{bmatrix} 0 & B_{T_j} \\ 0 & T_j \end{bmatrix}$$

具有完全相同的块结构，只是多出一个 I_d 块。 □

注释 3.5. 命题 *3.4* 与经典的压缩算子 *Schäffer* 等距扩张密切相关，见 *[8]*。令 $E = \operatorname{Im} \Delta_C$，其中 $\Delta_C = (I - C^*C)^{1/2}$，并令

$$V_C(h, \xi_1, \xi_2, \ldots) = (Ch, \Delta_C h, \xi_1, \xi_2, \ldots), \qquad h \in \mathbb{C}^n,\ \xi_j \in E,$$

是 $\mathbb{C}^n \oplus \ell^2(\mathbb{N}, E)$ 上的 *Schäffer* 等距算子。若将命题 *3.4* 的矩阵中的块直和项顺序倒置，则 T_j 成为 V_C 在该有限维子空间上的压缩

$$\mathbb{C}^n \oplus E \oplus \cdots \oplus E \qquad (j \ \textit{copies of}\ E).$$

因此，偏等距算子塔可以看作 *Schäffer* 扩张的一列有限维截断。换言之，经过这种重新排序后，这些截断的伴随构成一个归纳系统，其归纳极限为V_C^*。

此外，每个 T_j 的 Kippenhahn 多项式由基矩阵 T_0确定，如下述命题所示：

命题 3.6。 与前文一样，设 $D = I - C^*C$ 且设 $d = \text{秩}\, D$。定义多项式 $\phi_{-1} = 0$、 $\phi_0 = 1$ 和

$$\phi_{m+1}(z,r) = z\phi_m(z,r) - r^2\phi_{m-1}(z,r). \tag{3.1}$$

那么，对每个 $j \geq 1$,

$$\det\big(zI - 2rH_{T_j}(\theta)\big) = \phi_j(z,r)^d \det\left(zI - 2rH_C(\theta) - r^2\frac{\phi_{j-1}(z,r)}{\phi_j(z,r)}D\right). \tag{3.2}$$

证明。 固定 $j \geq 1$。由命题 3.4，在适当的坐标下， T_j 具有所述的分块形式。令

$$K_j(\theta) := zI - 2rH_{T_j}(\theta) = zI - re^{-i\theta}T_j - re^{i\theta}T_j^*.$$

Let

$$U_j(\theta) := \operatorname{diag}\big(I_d, e^{i\theta}I_d, e^{2i\theta}I_d, \ldots, e^{ij\theta}I_n\big).$$

由于 T_j的（$k, k+1$）分块在 $1 \leq k \leq j-1$时为 I_d，而（$j, j+1$）分块为B_C，（$j+1, j+1$）分块为 C，直接进行分块计算可得

$$U_j(\theta)^*\big(re^{-i\theta}T_j\big)U_j(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & rI_d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rI_d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & rI_d & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & rB_C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & re^{-i\theta}C \end{bmatrix},$$

因为对于 $1 \leq k \leq j-1$,

$$e^{-i(k-1)\theta}\, re^{-i\theta}\, e^{ik\theta} = r,$$

对于 B_C分块也同理,

$$e^{-i(j-1)\theta}\, re^{-i\theta}\, e^{ij\theta} = r.$$

取伴随可得

$$U_j(\theta)^*\big(re^{i\theta}T_j^*\big)U_j(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ rI_d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & rI_d & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & rI_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & rB_C^* & re^{i\theta}C^* \end{bmatrix}.$$

因此

$$M_j(\theta) := U_j(\theta)^* K_j(\theta) U_j(\theta)$$

恰好是

$$M_j(\theta) = \begin{bmatrix} A_j & E \\ E^* & S(\theta) \end{bmatrix},$$

其中

$$A_j = J_j \otimes I_d, \qquad S(\theta) = zI_n - re^{-i\theta}C - re^{i\theta}C^* = zI_n - 2rH_C(\theta),$$

with

$$J_j = \begin{bmatrix} z & -r & 0 & \cdots & 0 \\ -r & z & -r & \cdots & 0 \\ 0 & -r & z & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -r \\ 0 & \cdots & 0 & -r & z \end{bmatrix},$$

and

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -rB_C \end{bmatrix} = (e_j \otimes (-rI_d))B_C,$$

一个 $jd \times n$ 块列，其中唯一的非零 $d \times n$ 块是最后一个。

J_j 的行列式满足递推关系 (3.1)，因此

$$\det J_j = \phi_j(z, r), \qquad \det A_j = (\det J_j)^d = \phi_j(z, r)^d.$$

首先假设 $\phi_j(z, r) \neq 0$，等价地说， A_j 可逆。于是由舒尔补可得

$$\det M_j(\theta) = \det A_j \, \det\big(S(\theta) - E^* A_j^{-1} E\big).$$

Now

$$A_j^{-1} = J_j^{-1} \otimes I_d,$$

因此，当我们将 A_j^{-1} 夹在 E^* 和 E 之间时，只有 J_j^{-1} 的 (j, j) 元素有贡献。事实上，写作 $e_j = (0, \ldots, 0, 1)^T \in \mathbb{C}^j$，

$$E = (e_j \otimes (-rI_d))B_C.$$

因此

$$E^* A_j^{-1} E = B_C^*(e_j^* \otimes (-rI_d))(J_j^{-1} \otimes I_d)(e_j \otimes (-rI_d))B_C$$
$$= r^2(e_j^* J_j^{-1} e_j)B_C^* B_C \ = r^2 (J_j^{-1})_{jj} B_C^* B_C.$$

根据余因子公式,

$$(J_j^{-1})_{jj} = \frac{\det J_{j-1}}{\det J_j} = \frac{\phi_{j-1}(z,r)}{\phi_j(z,r)}.$$

由于 $B_C^* B_C = D$, 我们得到

$$E^* A_j^{-1} E = r^2 \frac{\phi_{j-1}(z,r)}{\phi_j(z,r)} D.$$

将其代入舒尔补恒等式，当 $\phi_j(z,\ r) \neq 0$ 时，得到 (3.2)。最后，(3.2) 两边都是关于 z 的多项式，因此该恒等式对所有 z 均成立。

□

写出 $z = 2ru$ 并利用第二类切比雪夫多项式，可得

$$\det\big(zI - 2rH_{T_j}(\theta)\big) = (2r)^n r^{jd} U_j(u)^d \det\big(uI - H_C(\theta) - \tau_j(u)D\big), \quad (3.3)$$

其中

$$\tau_j(u) := \frac{U_{j-1}(u)}{2U_j(u)}.$$

这引出了核心概念。

定义 3.7。 压缩算子 C 具有缺陷铅笔圆性，如果对每个实数 τ，其谱

$$H_C(\theta) + \tau(I - C^*C)$$

与 θ无关。

定理 3.8。 对于任意压缩算子 C，以下条件等价:

(i) C 的偏等距塔的每一层都具有圆性; (ii) C 具有缺陷铅笔圆性。

证明。 假设 (ii) 成立。那么，对于每个 j 和 u，(3.3) 右侧的行列式都与 θ 无关，因此每个

$$\det\bigl(zI - 2rH_{T_j}(\theta)\bigr)$$

与 θ 无关。因此，每个 T_j 都具有圆性。

反过来，假设每个 T_j 都具有圆性。固定满足 $|u| > 1$ 的 $u \in \mathbb{R}$。那么对于所有 j，$U_j(u) \neq 0$，并由 (3.3) 可知，多项式

$$F_\theta^{(u)}(\tau) := \det\bigl(uI - H_C(\theta) - \tau D\bigr)$$

在所有点 $\tau = \tau_j(u)$ 处都完全不依赖于 θ。由于 $\deg_\tau F_\theta^{(u)} \leq d$，要得出同样的结论对每个 η 都成立，只需知道 $\tau_j(u)$ 两两不同。

如果 $u = \cosh t > 1$，那么

$$U_j(u) = \frac{\sinh((j+1)t)}{\sinh t}, \qquad \tau_j(u) = \frac{1}{2}\frac{\sinh(jt)}{\sinh((j+1)t)}.$$

如果 $u = -\cosh t < -1$，那么

$$U_j(u) = (-1)^j\frac{\sinh((j+1)t)}{\sinh t}, \qquad \tau_j(u) = -\frac{1}{2}\frac{\sinh(jt)}{\sinh((j+1)t)}.$$

无论哪种情况，数值 $\tau_j(u)$ 都两两不同，因为

$$\frac{\sinh((j+1)t)}{\sinh((j+2)t)} - \frac{\sinh(jt)}{\sinh((j+1)t)} = \frac{\sinh^2 t}{\sinh((j+1)t)\sinh((j+2)t)} > 0.$$

因此，$F_\theta^{(u)}$ 与 $F_{(u)\,0}$ 在无穷多个互不相同的实数点上相等，故二者恒等。这证明了对每个 $|u| > 1$，缺陷铅笔圆性成立。

现在固定 $\tau \in \mathbb{R}$。对于每个 θ，函数

$$\nu \mapsto \det\bigl(\nu I - H_C(\theta) - \tau D\bigr)$$

是关于 ν 的次数为 n 的多项式。它在 $\theta = 0$ 处与相应的多项式对所有 $|\nu| > 1$ 都相等，故对所有 $\nu \in \mathbb{R}$ 都相等。因此，对每个实数 τ，缺陷铅笔圆性成立。

□

由于缺陷秩等于 τ 中行列式的次数，因此只有有限多个层级需要考虑。

推论 3.9。 设 $d = \operatorname{rank}(I - C^*C)$。则以下条件等价:

(i) C 的偏等距塔的每个层级都是圆的;

(ii) T_1、T_2、…、T_{d+1} 具有圆性。

如果希望将基矩阵也包括在内，那么 T_0、T_1、…、T_d 也足够。

证明。 只需证明蕴含关系 (ii) $\Longrightarrow$ (i)。固定满足 $|u| > 1$的 u 。根据定理 3.8，只需证明

$$F_\theta^{(u)}(\tau) = \det\big(uI - H_C(\theta) - \tau D\big)$$

对于所有 τ，它都与 θ无关。多项式 $F_{(u)\theta}$关于 τ的次数至多为 d，而层级 $T_1, \dots,$ T_{d+1} 提供了 $d+1$ 个不同的取值 $\tau_1(u) \dots, \tau_{d+1}(u)$，因此插值可以确定整个多项式。

□

此外，还可以用迹词重述。

定义 3.10。 取一个压缩算子 C 并令 $D = I - C^*C$。对于整数$k \geq 1$、$0 \leq m \leq k$和 $0 \leq \ell \leq k - m$，令 $\mathcal{W}_{k,\,m,\,\ell}$（$C$、$C^*$、$D$）为字母表 $\{C, C^*, D\}$ 中所有长度为 k 、恰有 m 个字母 D 且恰有 ℓ个字母 C^*的字组成的集合。定义

$$\Omega_{k,m,\ell}(C) := \sum_{w \in \mathcal{W}_{k,m,\ell}(C,C^*,D)} \operatorname{tr} w(C, C^*, D).$$

定理 3.11。 对于压缩算子 $C \in M_n$，以下条件等价:

（i）压缩算子 C 的偏等距塔的每一层都具有圆性;

（ii）对于每个 $1 \leq k \leq n$、每个 $0 \leq m \leq k$以及每个满足 $2\ell \neq k - m$的 ℓ ，

$$\Omega_{k,m,\ell}(C) = 0.$$

证明。 根据定理 3.8，只需刻画缺陷铅笔圆性。取 $\tau \in \mathbb{R}$ 并记

$$M_\tau(\theta) := H_C(\theta) + \tau D = \frac{1}{2}\big(e^{-i\theta}C + e^{i\theta}C^*\big) + \tau D.$$

$M_\tau(\theta)$ 的谱与 θ 无关，当且仅当

$$\operatorname{tr}(M_\tau(\theta)^k), \qquad 1 \leq k \leq n,$$

根据牛顿恒等式，这些量与 θ 无关。

现在展开 $M_\tau(\theta)^k$。含有 m 个字母 D、ℓ 个字母 C^*，以及 $k-m-\ell$ 个字母 C 的字贡献标量因子

$$2^{-(k-m)}\tau^m e^{i(2\ell-(k-m))\theta}.$$

因此，$\tau^m e^{i(2\ell-(k-m))\theta}$ 在 $\mathrm{tr}(M_\tau(\theta)^k)$ 中的系数等于 $2^{-(k-m)}\Omega_{k,\,m,\,\ell}(C)$。因此，$\theta$ 的独立性等价于每个非零傅里叶系数都为零，即

$$\Omega_{k,m,\ell}(C) = 0 \qquad \text{whenever } 2\ell \neq k-m.$$

这就证明了二者等价。 □

我们将缺陷铅笔圆性与以下刻画进行比较（例如参见 [6]）。

命题 3.12 ([6, 定理 1.1 和 3.1])。设 $B \in M_n$。

(i) B 具有圆性，当且仅当对每个 $1 \le k \le n$ 和每个$0 \le \ell < k/2$,

$$\sum_{\substack{|w|=k \\ \#(B^* \text{ in } w)=\ell}} \operatorname{tr} w(B, B^*) = 0.$$

等价地，$H_B(\theta)$ 与所有 θ的 $H_B(0)$ 酉相似。

(ii) B 是旋转不变的，当且仅当

$$\operatorname{tr} w(B, B^*) = 0$$

对 B中的每个字 w，若 B 和 B^*的数量不同，则 B^*。

因此，缺陷铅笔圆性自然地处于这两个条件之间：旋转不变性 $\Longrightarrow$ 缺陷铅笔圆性 $\Longrightarrow$ 圆性。事实上，如果 $U_\theta^* C U_\theta = e^{i\theta} C$，那么 $U_\theta^* D\, U_\theta = D$ 也成立，因此

$$U_\theta^*\big(H_C(0) + \tau D\big)U_\theta = H_C(\theta) + \tau D.$$

在迹恒等式层面上，旋转不变性要求每个单独的不平衡迹都为零，缺陷铅笔圆性要求聚合的缺陷字和 $\Omega_{k,\,m,\,\ell}$为零，而通常的圆性则要求字母表 $\{C, C^*\}$中的聚合非平衡和为零。

同样的比较也有行列式方面，例如参见[6]中的定理 1.1。

命题 3.13。 算子 C 具有圆性，当且仅当

$$\det\big(uI - H_C(\theta)\big)$$

与 θ无关。

同时，我们证明了缺陷铅笔圆性等价于下列对象与 θ无关：

$$\det\big(uI - H_C(\theta) - \tau(I - C^*C)\big)$$

对所有实数 u，τ。据我们所知，旋转不变性尚无类似的刻画。这引出了以下一个自然的问题。

问题 3.14. 旋转不变性是否存在一种同样自然的行列式形式的改写，类似于圆性和缺陷铅笔圆性的行列式判据？

最后，我们给出一个具有缺陷铅笔圆性的压缩算子示例。

例 3.15. 幂零压缩算子

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

不是旋转不变的，但其偏等距塔中的每个算子都具有圆性。

证明。 事实上，不平衡迹

$$\mathrm{tr}(C^2C^*C^2C^*) = \frac{1}{200} \neq 0$$

根据命题 3.12(ii)，可知 C 不是旋转不变的。另一方面，对于

$$D = I - C^*C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1/10 & 71/100 & -1/10 \\ 0 & 0 & -1/10 & 71/100 \end{pmatrix},$$

直接进行符号计算可得

$$\Delta(\theta;\alpha,s,t)=\det\big(\alpha I+s(e^{-i\theta}C+e^{i\theta}C^*)+tD\big)$$

与 θ无关。更准确地说,

$$\Delta(\theta;\alpha,s,t)=\frac{1}{40000}\Big(40000\alpha^4+126800\alpha^3t-33200\alpha^2s^2+148764\alpha^2t^2 \\ -54672\alpha s^2t+76503\alpha t^3+3364s^4-22097s^2t^2+14539t^4\Big).$$

对所有的 α， s， $t\in\mathbb{C}$均成立。等价地,

$$\det\big(uI-H_C(\theta)-\tau D\big)$$

对所有实数 u， τ，均与 θ无关。因此， C具有缺陷铅笔圆性。结论现由定理 3.8 得出。 □

特别地，若 $A=\mathcal{A}(C)$是(3.4)的第一个关联偏等距算子，则 A 和 C 都具有圆性，但二者都不是旋转不变的。换言之， $\mathcal{A}(C)$是一个反例，反驳了关于幂零偏等距的 Gau-Wang-Wu 猜想。

4. Gau-Wang-Wu 猜想的一种弱化

与前文一样，设 C 是一个压缩算子， $A=\mathcal{A}(C)$是其关联偏等距算子。我们刚才描述的（反）例表明，可以尝试弱化猜想 1.2，将旋转不变替换为具有圆性。此外，本节还将证明，这种弱化后的猜想一般也不成立，参见命题4.8。我们还将证明，无论 C 具有圆性还是 A 具有圆性，都不能保证另一个矩阵也具有相同性质。也就是说，本节将探究 A 的圆性在多大程度上能够推出 C的圆性，反之亦然。

定义

$$P_C(x,y):=\det(I-xC-yC^*),\qquad Q_C(x,y):=\det(I-xC-yC^*-xyD),$$

其中与前文一样， $D=I-C^*C$。

命题 4.1. 对于每个 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和每个 $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\det\bigl(zI - e^{-i\theta}A - e^{i\theta}A^*\bigr) = z^{m+d}\, Q_C\left(\frac{e^{-i\theta}}{z}, \frac{e^{i\theta}}{z}\right). \tag{4.1}$$

同样,

$$\det\bigl(zI - e^{-i\theta}C - e^{i\theta}C^*\bigr) = z^{d}\, P_C\left(\frac{e^{-i\theta}}{z}, \frac{e^{i\theta}}{z}\right). \tag{4.2}$$

因此:

(i) A 具有圆性，当且仅当 $Q_C(x,y)$ 仅依赖于 xy；(ii) C 具有圆性，当且仅当 $P_C(x,y)$ 仅依赖于 xy。

证明。 从

$$zI - e^{-i\theta}A - e^{i\theta}A^* = \begin{bmatrix} zI_m & -e^{-i\theta}B \\ -e^{i\theta}B^* & zI_d - e^{-i\theta}C - e^{i\theta}C^* \end{bmatrix},$$

出发，我们对左上块 zI_m 应用舒尔补，并使用 $B^*B = D$:

$$\begin{aligned} \det\bigl(zI - e^{-i\theta}A - e^{i\theta}A^*\bigr) &= z^m \det\left(zI_d - e^{-i\theta}C - e^{i\theta}C^* - z^{-1}D\right) \\ &= z^{m+d} \det\left(I_d - \frac{e^{-i\theta}}{z}C - \frac{e^{i\theta}}{z}C^* - \frac{1}{z^2}D\right). \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{z^2} = \frac{e^{-i\theta}}{z} \cdot \frac{e^{i\theta}}{z},$$

这正是 (4.1)。公式 (4.2) 是显然的。最后，对θ 的依赖仅通过在乘积 $xy = z^{-2}$固定时 $x = e^{-i\theta}/z$ 和 $y = e^{i\theta}/z$ 的相位体现，因此对所有 θ 都具有等谱性，等价于变量对 $(x,\ y)$ 的径向性。 □

对 $t \in \mathbb{R}$ 定义

$$H(t) := \frac{1}{2}\bigl(e^{-it}C + e^{it}C^*\bigr), \qquad K(t) := \frac{i}{2}\bigl(e^{it}C^* - e^{-it}C\bigr).$$

考虑两个迹函数

$$T_1(t,\mu) := \operatorname{tr}\bigl((\mu I - H(t))^{-1}K(t)\bigr), \tag{4.3}$$

$$T_2(t,\lambda) := \operatorname{tr}\bigl((\lambda^2 I - \lambda H(t) - \tfrac{1}{4}(I - C^*C))^{-1}\lambda K(t)\bigr). \tag{4.4}$$

引理 4.2. *1.* $T_1(t,\mu) \equiv 0$ 当且仅当 $P_C(x,y)$ 仅依赖于 xy。

2. $T_2(t,\lambda) \equiv 0$ 当且仅当 $Q_C(x,y)$ 仅依赖于 xy。

证明。我们证明关于 P_C的结论；关于 Q_C 的证明类似。

对于多项式 $R(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$，条件 $R \in \mathbb{C}[xy]$ 等价于：对每个固定的 $\rho \in \mathbb{C}$，函数

$$t \longmapsto R(\rho e^{-it}, \rho e^{it})$$

~与 t无关。事实上，若 $R(x,y) = R(xy)$，则结论显然成立。反过来，若

$$R(x,y) = \sum_{p,q} a_{pq} x^p y^q,$$

then

$$R(\rho e^{-it}, \rho e^{it}) = \sum_{p,q} a_{pq} \rho^{p+q} e^{i(q-p)t}.$$

若对每个 ρ，该函数都与 t 无关，则所有满足 $p \neq q$的傅里叶系数都必须为零，因此 $R \in \mathbb{C}[xy]$。

将此应用于 $R = P_C$。对于 $\mu \in \mathbb{C}$，令

$$x = \frac{e^{-it}}{2\mu}, \qquad y = \frac{e^{it}}{2\mu}.$$

那么，根据 $H(t)$ 的定义，

$$I - xC - yC^* = I - \frac{1}{2\mu}(e^{-it}C + e^{it}C^*) = I - \frac{1}{\mu}H(t),$$

因此

$$P_C\left(\frac{e^{-it}}{2\mu}, \frac{e^{it}}{2\mu}\right) = \det\left(I - \frac{1}{\mu}H(t)\right) = \mu^{-n}\det(\mu I - H(t)).$$

对 t 求导。由雅可比公式可得

$$\frac{d}{dt}P_C\left(\frac{e^{-it}}{2\mu}, \frac{e^{it}}{2\mu}\right) = -P_C\left(\frac{e^{-it}}{2\mu}, \frac{e^{it}}{2\mu}\right) T_1(t,\mu).$$

首先假设 $T_1(t,\mu) \equiv 0$。那么上面的导数为零，因此对每个 μ，$t \mapsto P_C(e^{-it}/(2\mu)\ e^{it}/(2\mu))$ 都是常数。根据第一段，这意味着 $P_C \in \mathbb{C}[xy]$。

反过来，假设 $P_C \in \mathbb{C}[xy]$。那么

$$t \longmapsto P_C\left(\frac{e^{-it}}{2\mu}, \frac{e^{it}}{2\mu}\right)$$

与 t 无关，因此其导数为零。于是

$$P_C\left(\frac{e^{-it}}{2\mu}, \frac{e^{it}}{2\mu}\right) T_1(t,\mu) = 0.$$

对于固定的 t，这对所有充分大的 μ 都成立；对于这样的 μ ，因子$P_C(e^{-it}/(2\mu)\ e^{it}/(2\mu))$ 非零。因此，对于所有充分大的μ，$T_1(t,\ \mu) = 0$；又由于它是关于 μ 的有理函数，故恒等于零。所以$T_1(t,\ \mu) \equiv 0$。

□

在低维情形下，只有当 C 也具有圆性时， $\mathcal{A}(C)$ 才具有圆性，具体如下述定理所示。

定理4.3. 设 C 是一个阶数至多为4的幂零压缩算子。若 $T_2 \equiv 0$，则 $T_1 \equiv 0$。

证明。 将 T_2 在 $\lambda = \infty$处展开，得到

$$T_2(t,\lambda) = \sum_{N\geq 0} \lambda^{-(N+1)} A_N(t). \tag{4.5}$$

前几个系数为:

$$A_0 = \operatorname{tr}(K), \tag{4.6}$$
$$A_1 = \operatorname{tr}(HK), \tag{4.7}$$
$$A_2 = \frac{1}{4}\operatorname{tr}(K) + \frac{3}{4}\operatorname{tr}(H^2K) - \frac{1}{4}\operatorname{tr}(K^3), \tag{4.8}$$
$$A_3 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(HK) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(H^3K) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(HK^3), \tag{4.9}$$

接下来我们还需要 A_4 和 A_5，但它们相当繁琐:

$$\begin{aligned}A_4 = {} & \frac{1}{16}\operatorname{tr}(K) + \frac{5}{8}\operatorname{tr}(H^2K) - \frac{1}{8}\operatorname{tr}(K^3) + \frac{5}{16}\operatorname{tr}(H^4K) \\ & - \frac{5}{16}\operatorname{tr}(H^2K^3) - \frac{5}{16}\operatorname{tr}(HKHK^2) + \frac{1}{16}\operatorname{tr}(K^5), \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}A_5 = {} & \frac{3}{16}\operatorname{tr}(HK) + \frac{5}{8}\operatorname{tr}(H^3K) - \frac{3}{8}\operatorname{tr}(HK^3) + \frac{3}{16}\operatorname{tr}(H^5K) \\ & - \frac{3}{16}\Big(\operatorname{tr}(H^3K^3) + \operatorname{tr}(H^2KHK^2) + \operatorname{tr}(H^2K^2HK)\Big) - \frac{1}{16}\operatorname{tr}(HKHKHK) \\ & + \frac{3}{16}\operatorname{tr}(HK^5). \end{aligned} \tag{4.11}$$

同样，将 T_1 在无穷远处展开:

$$(\mu I - H(t))^{-1} = \frac{1}{\mu}\Big(I - \mu^{-1}H(t)\Big)^{-1} = \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H(t)^n}{\mu^n}.$$

因此

$$T_1(t,\mu) = \operatorname{tr}\big((\mu I - H(t))^{-1}K(t)\big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{tr}(H(t)^nK(t))}{\mu^{n+1}}.$$

特别地,

$$T_1(t,\mu) \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tr}(H(t)^nK(t)) = 0 \text{ for all } n \geq 0.$$

现在证明，若 $T_2 \equiv 0$，则

$$\operatorname{tr}(K) = \operatorname{tr}(HK) = \operatorname{tr}(H^2K) = \operatorname{tr}(K^3) = \operatorname{tr}(H^3K) = \operatorname{tr}(HK^3) = 0, \tag{4.12}$$

在 t 中恒等成立。事实上，由 $A_0 = 0$ 和 $A_1 = 0$:

$$\operatorname{tr}(K) = 0, \qquad \operatorname{tr}(HK) = 0.$$

由 $A_2 = 0$:

$$\operatorname{tr}(K^3) = 3\operatorname{tr}(H^2K).$$

由 $A_4 = 0$ 和 $\operatorname{tr}((H - iK)^5) = 0$ 的虚部，可以得到两个关于

$$\operatorname{tr}(H^2K^3) + \operatorname{tr}(HKHK^2),$$

其差迫使

$$\operatorname{tr}(H^2K) = 0,$$

因此 $\operatorname{tr}(K^3) = 0$。

由 $A_3 = 0$ 得：

$$\operatorname{tr}(H^3K) = \operatorname{tr}(HK^3).$$

由 $A_5 = 0$ 以及 $\operatorname{tr}((H - iK)^6)$ 的虚部 $= 0$，可得 $\operatorname{tr}(H^3K)$ 与 $\operatorname{tr}(HK^3)$ 之间的第二个线性关系，从而迫使二者均为零。

在维数为 $n \le 4$ 时，凯莱–哈密顿定理表明，所有高次幂 H^m 都可表示为 I, H, H^2, H^3 的线性组合。由于等式 (4.12) 成立，所有矩 $\operatorname{tr}(H^mK)$ 均为零，因此 $T_1 \equiv 0$。

□

推论4.4。设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

是一个酉不可约幂零偏等距算子，其 C 的大小至多为 4。若 A 具有圆性，则 C 具有圆性。

反向命题在 4 阶时就不成立。

例4.5。考虑

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1+i}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1+i}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

它是幂零的，且 $\|C\| < 1$。直接计算可得

$$P_C(x, y) = 1 - \frac{7}{16}xy + \frac{1}{32}x^2y^2,$$

因此 $P_C \in \mathbb{C}[xy]$ 和 C 具有圆性。然而， T_2 的 *Laurent* 系数 A_6 为

$$A_6 = -\frac{1}{65536} \neq 0,$$

因此 $T_2 \not\equiv 0$，等价地说， $Q_C \notin \mathbb{C}[xy]$。所以，由 C 构造的相应部分等距变换不具有圆性。请见图 *1*，其中给出了 $\mathcal{A}(C)$ 的基彭哈恩曲线近似图。

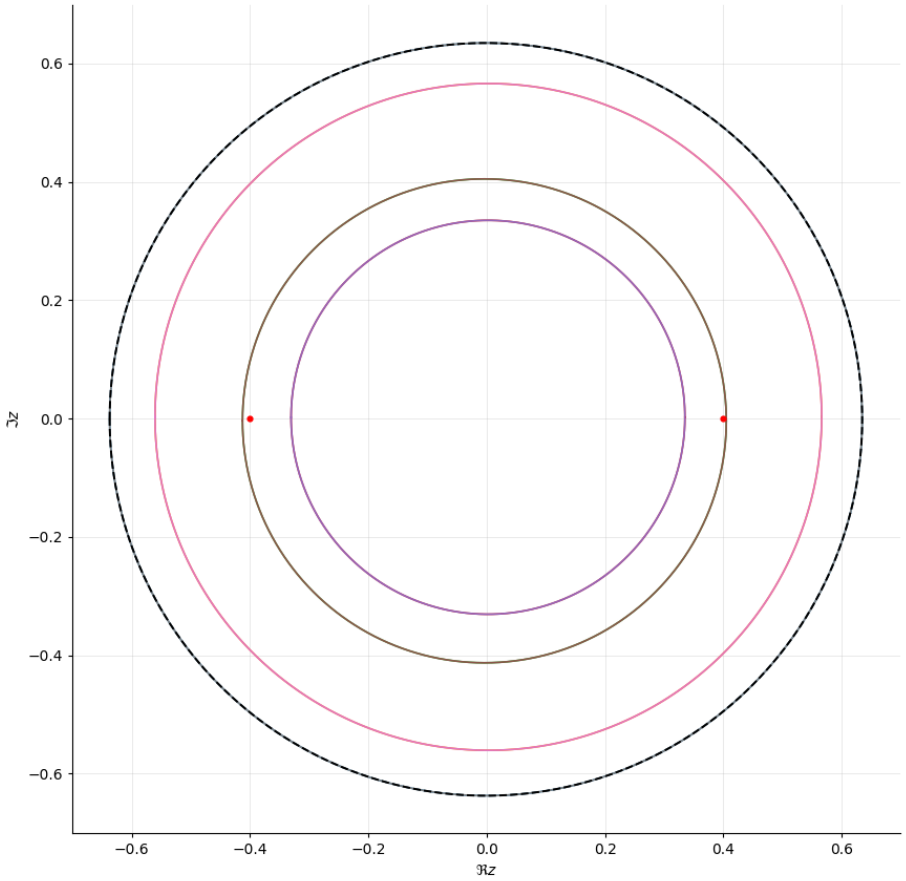

图 1：例4.5中的一个偏等距算子的基彭哈恩曲线。红点标记在 $(-0.4,\ 0)$ 和 (0。4，0) 处，以突出显示绿色分支不是圆。

注4.6。 事实上可以验证， A_6 是 $\mathcal{A}(C)$ 具有圆性的首个障碍；也就是说，若 C 具有圆性，则 $A_i = 0$ 对于 $i \leq 5$ 。

定理4.3中的界是紧的：存在一个大小为 5 的幂零压缩算子C ，使得

$$Q_C(x, y) \in \mathbb{C}[xy] \qquad \text{but} \qquad P_C(x, y) \notin \mathbb{C}[xy].$$

特别是，推论4.4在阶数为5时不成立，不过我们找到的例子构造相当复杂。

命题4.7. 设

$$C_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & s & c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & f & -\frac{5}{4}c \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \alpha s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令 Φ 为五次多项式

$$\Phi(k) = 24182784k^5 - 927166375k^4 + 274015368k^3 + 10740240k^2 - 318470912k - 47232000.$$

取任意实根 $\alpha \in (-0.55, -0.54)$ 并令

$$s^2 = \frac{36(4\alpha+5)}{1025\alpha(5\alpha-4)}, \qquad c = \frac{32(4\alpha+5)}{205(5\alpha-4)}, \qquad f = -\frac{5(4\alpha+5)}{41}s.$$

则 $\mathcal{A}(C_\alpha)$ 具有圆性，而 C_α 则不具有圆性。

证明。我们证明 $Q_{C_\alpha}(x,y) \in \mathbb{C}[xy]$，而 $P_{C_\alpha}(x,y) \notin \mathbb{C}[xy]$。通过明确计算可知，只要 C_α 具有上述形式，Q_{C_α} 中唯一剩下的、不对应于 xy 的幂的系数为

$$q_{45} = -\frac{s\,\Phi(\alpha)}{1130304400\,\alpha(25\alpha^2 - 40\alpha + 16)},$$

它对应于 x^4y^5。因此，只要 $\Phi(\alpha) = 0$，$Q_{C_\alpha}(x,y) \in \mathbb{C}[xy]$。同时，$P_{C_\alpha}$ 中唯一剩下的、不对应于 xy 的幂的系数为

$$p_{23} = -\frac{s\,\Psi(\alpha)}{282576100\,\alpha(25\alpha^2 - 40\alpha + 16)},$$

其中

$$\Psi(k) = 6045696k^5 - 285636125k^4 + 127086692k^3 + 12334000k^2 - 97261504k - 11808000.$$

此外，

$$\gcd(\Phi, \Psi) = 1,$$

因此，对于 Φ 的任意根 α，都有 $\Psi(\alpha) \neq 0$，故 $p_{23} \neq 0$，且 $P_{C_\alpha}(x,\ y) \notin \mathbb{C}[xy]$。最后，根据介值定理，$\Phi(k)$ 在指定区间内有一个根；取此根 α 后，算子 C_α 确实是一个压缩算子。 □

我们以一个例子结束本节：某个 5×5压缩算子所对应的偏等距算子具有圆形数值域，却不具有圆性。

命题4.8。 令 $s \in (0, 1/4)$ 为下式的较小根

$$g(s) := 4096(7+\sqrt{145})\,s^2 - 32(1403+125\sqrt{145})\,s + (9091+757\sqrt{145}) = 0. \tag{4.13}$$

Set

$$p := \sqrt{s}, \qquad C := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D := I_5 - C^*C, \qquad B := D^{1/2}, \qquad A := \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

则：

(i) A是酉不可约的；
(ii) $W(A)$ 是一个圆盘；
(iii) $Q_C(x,y) \notin \mathbb{C}[xy]$。

也就是说， A 具有圆形数值域，但不具有圆性性质。

证明。 由于

$$g(0) = 9091 + 757\sqrt{145} > 0$$

and

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = -341 + 13\sqrt{145} < 0,$$

(4.13) 的较小根 s 确实属于 $(0, 1/4)$。特别地

$$p = \sqrt{s} > 0.$$

首先，我们利用命题 2.4 证明 A 是酉不可约的。

直接计算可得

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{16} & -\frac{p}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{4} & \frac{15}{16} - p^2 & \frac{p}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{4} & \frac{3}{4} - p^2 \end{bmatrix}.$$

其顺序主子式为

$$1, \qquad \frac{3}{4}, \qquad \frac{45}{64}, \qquad \frac{3(225-256s)}{1024}, \qquad \frac{3(1024s^2-1728s+675)}{4096}.$$

由于 $0 < s < \frac{1}{4}$，我们有

$$225 - 256s > 225 - 64 = 161 > 0,$$

and

$$1024s^2 - 1728s + 675 > 1024 \cdot 0 - \frac{1728}{4} + 675 = 243 > 0.$$

因此，所有顺序主子式均为正。由西尔维斯特判别法，$D \succ 0$。特别地，$B = D^{1/2}$ 可逆。接下来只需证明C 是酉不可约的。事实上，$C^4 \neq 0$，而 $C^5 = 0$。如果 C 与两个较小矩阵的直和（不一定通过酉变换）相似，那么C^4 就等于零。

现在我们证明 W（A）是一个圆盘。与之前一样，对于 $\theta \in \mathbb{R}$，令

$$H_A(\theta) := \frac{1}{2}(e^{-i\theta}A + e^{i\theta}A^*).$$

Then

$$2\omega I_{10} - 2H_A(\theta) = \begin{bmatrix} 2\omega I_5 & -e^{-i\theta}B \\ -e^{i\theta}B & 2\omega I_5 - e^{-i\theta}C - e^{i\theta}C^* \end{bmatrix},$$

其中

$$\omega := \frac{1}{8}\sqrt{19 + \sqrt{145}}.$$

由于 $2\omega I_5$ 是正定的，根据舒尔补可知

$$2\omega I_{10} - 2H_A(\theta) \succeq 0 \iff M(\theta) \succeq 0,$$

其中

$$M(\theta) := (4\omega^2 - 1)I_5 + C^*C - 2\omega\big(e^{-i\theta}C + e^{i\theta}C^*\big).$$

现在我们计算 $M(\theta)$ 的顺序主子式 $\Delta_k(\theta)$。由于

$$\omega^2 = \frac{19+\sqrt{145}}{64},$$

直接计算得到

$$\Delta_1 = \frac{3+\sqrt{145}}{16}, \qquad \Delta_2 = \frac{45+3\sqrt{145}}{128}, \qquad \Delta_3 = \frac{257+23\sqrt{145}}{1024},$$

因此 $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3 > 0$。

对于第四个顺序主子式，可得

$$\Delta_4(\theta) = \frac{1859+149\sqrt{145}}{8192} - \frac{83+5\sqrt{145}}{128}\, s - \frac{(7+\sqrt{145})\sqrt{19+\sqrt{145}}}{512}\,\sqrt{s}\cos\theta.$$

由于 $0 < s < \frac{1}{4}$，我们有 $\sqrt{s} < \frac{1}{2}$，因此

$$\begin{aligned}\Delta_4(\theta) &\geq \frac{1859+149\sqrt{145}}{8192} - \frac{83+5\sqrt{145}}{128}\cdot\frac{1}{4} - \frac{(7+\sqrt{145})\sqrt{19+\sqrt{145}}}{512}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{531+69\sqrt{145}}{8192} - \frac{(7+\sqrt{145})\sqrt{19+\sqrt{145}}}{1024}.\end{aligned}$$

要证明这个下界为正，只需验证

$$531+69\sqrt{145} > 8(7+\sqrt{145})\sqrt{19+\sqrt{145}}.$$

两边平方可得

$$(531+69\sqrt{145})^2 - 64(7+\sqrt{145})^2(19+\sqrt{145}) = 606482+43838\sqrt{145} > 0.$$

因此，对所有 $\theta\in\mathbb{R}$，$\Delta_4(\theta) > 0$。

最后，完整行列式与 θ 无关，且等于

$$\Delta_5(\theta) = \frac{g(s)}{65536} = 0$$

其中，后一等式由定义方程 (4.13) 得出。

因此，对于每个 θ,

$$\Delta_1(\theta) > 0, \qquad \Delta_2(\theta) > 0, \qquad \Delta_3(\theta) > 0, \qquad \Delta_4(\theta) > 0, \qquad \Delta_5(\theta) = 0.$$

这立即意味着

$$W(A) = \overline{\mathbb{D}}_\omega.$$

最后，直接展开可得

$$\begin{aligned} Q_C(x,y) = 1 - 5xy + \left(\frac{75}{8} - 2p^2\right) x^2y^2 + \frac{p}{16}(x^3y^2 + x^2y^3) \\ + \left(\frac{91}{16}p^2 - \frac{2089}{256}\right) x^3y^3 - \frac{19p}{128}(x^4y^3 + x^3y^4) + \left(p^4 - \frac{313}{64}p^2 + \frac{1683}{512}\right) x^4y^4 \\ + \frac{27p}{512}(x^5y^4 + x^4y^5) + \left(-\frac{3}{4}p^4 + \frac{81}{64}p^2 - \frac{2025}{4096}\right) x^5y^5. \end{aligned}$$

特别地， x^3y^2 的系数为

$$q_{32} = \frac{p}{16} \neq 0.$$

因此， $Q_C(x,\ y)$ 不可能是仅关于 xy 的多项式。

根据命题 **4.1**，这意味着 A 不具有圆性，尽管 $W(A)$ 是一个圆盘。 □

注 4.9。 从数值上看，

$$s \approx 0.2466, \qquad p \approx 0.4965, \qquad \omega \approx 0.6964.$$

我们用数值近似绘制 $\mathcal{A}(C)$ 的基彭哈恩曲线，见图 *2*

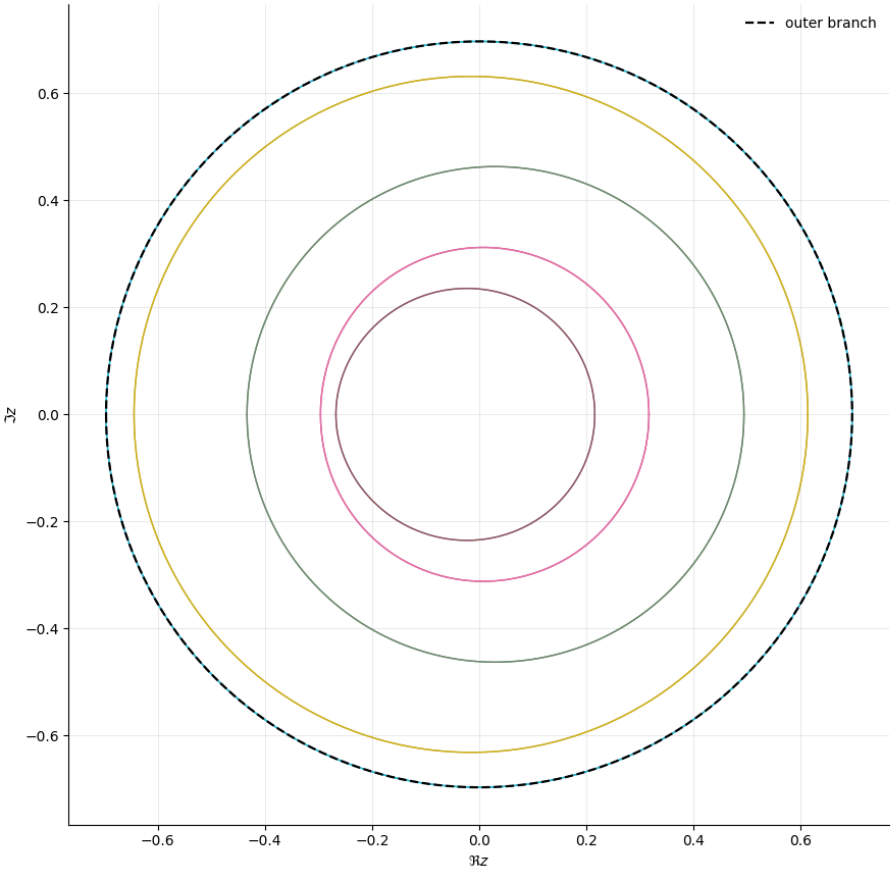

图 2：一个具有圆形数值域但不满足圆性的幂零偏等距算子的基彭哈恩曲线。外分支是一个圆，因此数值域是一个圆盘。

注 4.10. 我们没有找到大小为7、8 和9 且具有圆形数值域、因而不具有圆性的酉不可约幂零部分等距算子的明确例子。尽管如此，我们的数值实验表明，这样的例子确实存在。

5. 旋转不变性的可计算判据

我们在前几节中用来构造例子的办法，都需要计算矩阵多项式的各种迹，或计算矩阵多项式的行列式。比如，要证明例 3.15 中的算子

不是旋转不变的，需要我们找到由 C和 C^* 构成的一个迹非零的不平衡词。即使对于规模适中的算子，这种搜索也可能变得不切实际。本节讨论如何高效地检测一个圆矩阵不是 旋转不变的这一实际问题。我们回顾 Li and Tsing [5] 提出的以下结构性结果：

定理 *5.1. </style}*一个酉不可约的 n阶 n 矩阵 X 具有旋转不变性，当且仅当它酉相似于如下形式的矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & X_1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & X_{k-1} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

也就是说，存在一个正交分解

$$\mathbb{C}^n = H_1 \oplus \cdots \oplus H_k.$$

使得 $X(H_i) \subset H_{i-1}$ 对 $i \geq 2$ 成立，且 $X(H_1) = \{0\}$。下文将用到充分性的证明，这里回顾如下。

命题 5.2. 假设 X 如上所述给出。

定义

$$U_\theta := \operatorname{diag}\big(I_{H_1}, e^{i\theta} I_{H_2}, \ldots, e^{i(k-1)\theta} I_{H_k}\big).$$

Then

$$U_\theta^* X U_\theta = e^{i\theta} X, \qquad H_X(\theta) = U_\theta^* H_X(0) U_\theta.$$

注意， $H_X(\theta) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta} X)$ 解析地依赖于 θ。众所周知，相应的特征值

$$\lambda_1(\theta),\, \lambda_2(\theta),\, \ldots,\, \lambda_n(\theta)$$

和单位特征向量

$$y_1(\theta),\, y_2(\theta),\, \ldots,\, y_n(\theta)$$

可以选择使其也依赖于 θ ，且依赖方式为解析。详情请参阅 [2] 。当 X 是旋转不变的时，对于每个 θ，$H_X(\theta)$都等谱。也就是说， $\lambda_i(\theta) \equiv \lambda_i(0)$。在本节余下部分中，我们记 $\lambda_i = \lambda_i(\theta)$，并假设

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n.$$

下面的定理主要受到 Gau 和 Wu 的工作 [10],的启发；他们运用相同的思路研究加权移位。下文是对块移位的直接推广。

定理5.3。 假设 X 是旋转不变的。设 λ_j 是$\mathrm{Re}(\exp(-i\theta)X)$ 的一个特征值，并设 $y^{(j)}(\theta)$ 是对应的单位特征向量，且选取为关于 θ解析。进一步假设 λ_j 是单特征值。则存在一个多项式

$$p_j(z) = \sum_{m=1}^{k} c_m^{(j)} z^{m-1}, \qquad c_m^{(j)} \geq 0, \qquad \sum_{m=1}^{k} c_m^{(j)} = 1,$$

以及一个实解析函数 ψ ，使得

$$\langle y^{(j)}(\theta), y^{(j)}(\phi)\rangle = p_j\big(e^{i(\phi-\theta)}\big) e^{i(\psi(\phi)-\psi(\theta))} \qquad (\theta, \phi \in \mathbb{R}).$$

证明。 固定 $H_X(\theta)$的一个简单特征值分支，并在 $\theta = 0$处选取一个单位特征向量$x^{(j)}(0)$。记

$$x^{(j)}(0) = x_1^{(j)} \oplus \cdots \oplus x_k^{(j)}, \qquad x_m^{(j)} \in H_m,$$

并定义系数

$$c_m^{(j)} := \left\| x_m^{(j)} \right\|^2, \qquad m = 1, \ldots, k.$$

于是 $c_m^{(j)} \geq 0$ 和 $\sum_m c_m^{(j)} = 1$。考虑 $x^{(j)}(\theta) = U_\theta^* x^{(j)}(0)$。根据命题5.2，这是 $H_X(\theta)$的一个特征向量，对应于 λ_j ，并且关于 θ 解析地依赖。于是

$$\begin{aligned}\langle x^{(j)}(\theta), x^{(j)}(\phi)\rangle &= \langle x^{(j)}(0), U_{\phi-\theta}^* x^{(j)}(0)\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{k} e^{i(m-1)(\phi-\theta)} \left\| x_m^{(j)} \right\|^2 = \sum_{m=1}^{k} c_m^{(j)} e^{i(m-1)(\phi-\theta)},\end{aligned}$$

这就是所述公式，其中 $\psi \equiv const$。其他任何可能的$y^{(j)}$ 都可由我们刚才描述的选择逐点乘以一个解析函数得到，即 $y^{(j)}(\theta) = e^{i\psi(\theta)} x^{(j)}(\theta)$，从而得到所述公式。

□

定义 5.4. 在定理*5.3*的情形下，我们称 $y^{(j)}$ 为一个简单特征值分支。

因此，对应于同一特征值但角度不同的两个特征向量的标量积，在相差一个模为一的标量因子的意义下，由某个多项式的取值决定。

为消去该单位复数并稍作简化，可以取绝对值。具体而言，以下结论成立。

推论 5.5. 假设 X 是旋转不变的，并且 $y(\theta)$是一个简单特征向量分支。那么以下量

$$|\langle y(\theta), y(\theta+\delta)\rangle|$$

仅取决于 δ。

可以用以下方式将其作为一种计算开销较低的实用测试，用于检验算子 X 是否具有旋转不变性（当然，具体细节可能有所不同）：

1. 取一个步长 δ，以及两个不同的值 θ_1 和 θ_2。

2. 对相应的实部 $H_X(\theta_1)$ $H_X(\theta_1+\delta)$ 和 $H_X(\theta_2)$ $H_X(\theta_2+\delta)$，分别求取（不一定是最大的）特征值对。将得到的特征向量分别记为 $y_1(\theta_1)$ $y_1(\theta_1+\delta)$ 和 $y_2(\theta_2)$ $y_2(\theta_2+\delta)$。

3. 如果得到的特征值各不相同，则算子 X 不具有圆性，因此不是旋转不变的。

4. 如果得到的特征值均为单特征值，则检查

$$|\langle y_1(\theta_1), y_1(\theta_1+\delta)\rangle| = |\langle y_2(\theta_2), y_2(\theta_2+\delta)\rangle|\,.$$

如果不是，则算子 X 不是旋转不变的。

我们通过给出每个偶数维中的一列矩阵来说明这种方法。这些矩阵具有圆性，但并非旋转不变。

对于 $n \geq 4$，定义

$$r_n := \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, \qquad s_n := n-1-r_n,$$

并考虑这一族

$$C_n(1,1) = J_n + E_{r_n, r_n+2} - E_{s_n, s_n+2}. \tag{5.1}$$

前几个成员为

$$C_4(1,1)=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad C_5(1,1)=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$C_6(1,1)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

定理 5.6。 对于每个 $m\geq 2$，矩阵 $C_{2m}(1,\ 1)$ 具有圆性。更确切地说，

$$\det\big(uI-H_{C_{2m}}(\theta)\big)=2^{-2m}\big(U_m(u)-U_{m-1}(u)-U_{m-2}(u)\big)\big(U_m(u)+U_{m-1}(u)-U_{m-2}(u)\big),$$

其中， U_k 表示第二类切比雪夫多项式。

证明。 令 $M_\theta(u):=2uI-H_{C_{2m}}(\theta)$ 且 $D_\theta:=\mathrm{diag}(1,\ e^{-i\theta},\ e^{-2i\theta},\ \ldots\ldots,\ e^{-(2m-1)i\theta})$，则

$$\det M_\theta(u)=\det D_\theta^* M_\theta(u) D_\theta,$$

直接计算表明

$$D_\theta^* M_\theta(u) D_\theta = T_{2m}(u)-e^{-i\theta}E_{m-1,m+1}+e^{-i\theta}E_{m,m+2}-e^{i\theta}E_{m+1,m-1}+e^{i\theta}E_{m+2,m},$$

其中 $T_{2m}(u)$ 是托普利茨三对角矩阵

$$T_{2m}(u)=\begin{bmatrix}2u&-1&&&\\-1&2u&-1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&-1&2u&-1\\&&&-1&2u\end{bmatrix}.$$

对于 $r\geq 0$，有

$$\det T_r(u)=U_r(u).$$

现在将指标集 $\{1,\dots,2m\}$ 划分为

$$L=\{1,\dots,m-2\},\qquad C=\{m-1,m,m+1,m+2\},\qquad R=\{m+3,\dots,2m\}.$$

相对于此分解， $N_\theta(u)$具有分块形式

$$N_\theta(u)=\begin{bmatrix} T_{m-2}(u) & B_L & 0\\ B_L^* & K_\theta(u) & B_R^*\\ 0 & B_R & T_{m-2}(u)\end{bmatrix},$$

其中

$$B_L=-E_{m-2,\,1}\in M_{m-2,\,4},\qquad B_R=-E_{1,\,4}\in M_{m-2,\,4},$$

$$K_\theta(u)=\begin{bmatrix} 2u & -1 & -e^{-i\theta} & 0\\ -1 & 2u & -1 & e^{-i\theta}\\ -e^{i\theta} & -1 & 2u & -1\\ 0 & e^{i\theta} & -1 & 2u\end{bmatrix}.$$

首先假设 $U_{m-2}(u)\neq 0$。对两个尾部块 $T_{m-2}(u)$取舒尔补，得到

$$\det N_\theta(u)=U_{m-2}(u)^2\det\widetilde{K}_\theta(u),$$

其中

$$\widetilde{K}_\theta(u)=\begin{bmatrix} a & -1 & -e^{-i\theta} & 0\\ -1 & 2u & -1 & e^{-i\theta}\\ -e^{i\theta} & -1 & 2u & -1\\ 0 & e^{i\theta} & -1 & a\end{bmatrix},\qquad a=\frac{U_{m-1}(u)}{U_{m-2}(u)}.$$

直接进行 4×4 行列式计算可得

$$\det\widetilde{K}_\theta(u)=4a^2u^2-a^2-8au+4.$$

Thus

$$\det N_\theta(u)=U_{m-2}(u)^2\big(4a^2u^2-a^2-8au+4\big).$$

代入 $a=U_{m-1}/U_{m-2}$，得到

$$\det N_\theta(u)=4u^2U_{m-1}(u)^2-U_{m-1}(u)^2-8uU_{m-1}(u)U_{m-2}(u)+4U_{m-2}(u)^2.$$

最后，利用

$$U_m(u)=2uU_{m-1}(u)-U_{m-2}(u),$$

我们将其因式分解为

$$\det N_\theta(u)=\big(U_m(u)-U_{m-1}(u)-U_{m-2}(u)\big)\big(U_m(u)+U_{m-1}(u)-U_{m-2}(u)\big).$$

□

我们计算 $H_{C_{2m}}(\theta)$ 在 θ 的三个不同取值下的最大特征值对，然后计算它们的标量积，并应用推论 5.5。

命题 5.7。设

$$C = C_{2m}(1,1) = J_{2m} + E_{m-1,m+1} - E_{m,m+2}, \qquad m \geq 2.$$

定义

$$P_m(x) := U_m(x) - U_{m-1}(x) - U_{m-2}(x).$$

设 λ_m 是 P_m 的最大根。那么 λ_m 是

$$H_C(0) = \Re C, \qquad H_C(-\pi/4) = \Re(e^{i\pi/4}C), \qquad H_C(-\pi/2) = \Re(iC) = -\Im C.$$

此外，相应的特征向量可以如下选取。

(i) 对于 $H_C(0)$，特征向量为 $v_0 = (v_0(1)\ v_0(2) \ldots, v_0(2m))$，其中

$$v_0(k) = \begin{cases} U_{k-1}(\lambda_m), & 1 \leq k \leq m-1, \\ \dfrac{1}{2}\, U_{m-1}(\lambda_m), & k = m, m+1, \\ 0, & m+2 \leq k \leq 2m. \end{cases}$$

(ii) 对于 $H_C(-\pi/4)$：设

$$\eta := e^{-i\pi/4}, \qquad \alpha := \frac{1}{1+\eta}, \qquad q := \frac{1-\bar{\eta}}{1+\eta} = (\sqrt{2}-1)e^{-i\pi/4}.$$

特征向量为 $v_{\pi/4} = (v_{\pi/4}(1)\, v_{\pi/4}(2) \ldots, v_{\pi/4}(2m))$，其中

$$v_{\pi/4}(k) = \begin{cases} \eta^{\,k-1} U_{k-1}(\lambda_m), & 1 \leq k \leq m-1, \\ \eta^{\,k-1} \alpha\, U_{m-1}(\lambda_m), & k = m, m+1, \\ \eta^{\,k-1} q\, U_{2m-k}(\lambda_m), & m+2 \leq k \leq 2m. \end{cases}$$

(iii) 对于 $H_C(-\pi/2)$：令

$$\beta := \frac{1+i}{2}.$$

T特征向量为 $v_{\pi/2} = (v_{\pi/2}(1)\, v_{\pi/2}(2) \ldots, v_{\pi/2}(2m))$，其中

$$v_{\pi/2}(k) = \begin{cases} (-i)^{\,k-1} U_{k-1}(\lambda_m), & 1 \leq k \leq m-1, \\ (-i)^{\,k-1} \beta\, U_{m-1}(\lambda_m), & k = m, m+1, \\ (-i)^{\,k-1} U_{2m-k}(\lambda_m), & m+2 \leq k \leq 2m. \end{cases}$$

证明略。对于这三个矩阵中的每一个，特征值方程都可化为一个厄米矩阵，其第一条上、次对角线上的元素均等于 $1/2$，只有两个中心元素经过了修改。因此，在远离中心的位置，特征值方程为

$$2\lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1},$$

因此，尾部由 $U_k(\lambda)$ 的递推关系支配。

所示向量是通过求解中心行 $m-1, m, m+1, m+2$ 处的有限匹配问题得到的。在这三种情形下，中心兼容条件均化简为

$$(2\lambda - 1)U_{m-1}(\lambda) = 2U_{m-2}(\lambda),$$

等价地

$$P_m(\lambda) = U_m(\lambda) - U_{m-1}(\lambda) - U_{m-2}(\lambda) = 0.$$

对于 $H_C(0)$，有

$$\det(xI - H_C(0)) = 2^{-2m} P_m(x) Q_m(x), \qquad Q_m(x) := U_m(x) + U_{m-1}(x) - U_{m-2}(x),$$

并且当 $x \geq 1$ 时，$Q_m(x) > 0$；而当 $x \to +\infty$ 时，$P_m(1) = 2 - m \leq 0$ 且 $P_m(x) \to +\infty$。因此，$H_C(0)$ 的最大特征值是 P_m 的最大根 λ_m。由于 C 具有圆性，矩阵 $H_C(\theta)$ 等谱，因此同一个 λ_m 也是 $H_C(-\pi/4)$ 和 $H_C(-\pi/2)$ 的最大特征值。 □

定理 5.8。设 $C = C_{2m}(1,1)$，并设 v_0、$v_{\pi/4}$、$v_{\pi/2}$ 为命题 *5.7* 中的向量。令 $\widehat{v}_\theta := \frac{v_\theta}{\|v_\theta\|}$、$\theta \in \{0, \pi/4, \pi/2\}$。则

$$\left|\langle \widehat{v}_0, \widehat{v}_{\pi/4} \rangle\right| > \left|\langle \widehat{v}_{\pi/4}, \widehat{v}_{\pi/2} \rangle\right|.$$

特别地，$C_{2m}(1,1)$ 不是旋转不变的。

证明。定义

$$M_m := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{U_{m-1-k}(\lambda_m)^2}{U_{m-1}(\lambda_m)^2},$$

$$S_m := \sum_{k=1}^{m-1} e^{ik\pi/4} \frac{U_{m-1-k}(\lambda_m)^2}{U_{m-1}(\lambda_m)^2}.$$

将命题 5.7 中的显式坐标直接代入，即可得到范数恒等式

$$\|v_0\|^2 = U_{m-1}(\lambda_m)^2 M_m, \qquad \|v_{\pi/4}\|^2 = 2(2-\sqrt{2})\, U_{m-1}(\lambda_m)^2 M_m,$$
$$\|v_{\pi/2}\|^2 = 2\, U_{m-1}(\lambda_m)^2 M_m,$$

以及标量积公式

$$\langle v_0, v_{\pi/4}\rangle = e^{-i(m-1)\pi/4} U_{m-1}(\lambda_m)^2 \left(\frac{1}{2} + S_m\right),$$

and

$$\langle v_{\pi/4}, v_{\pi/2}\rangle = e^{-i(m-1)\pi/4} U_{m-1}(\lambda_m)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + S_m + (\sqrt{2}-1)\overline{S_m}\right).$$

由此得到

$$\left|\langle \widehat{v}_0, \widehat{v}_{\pi/4}\rangle\right| = \frac{\left|\frac{1}{2} + S_m\right|}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})\, M_m}},$$

and

$$\left|\langle \widehat{v}_{\pi/4}, \widehat{v}_{\pi/2}\rangle\right| = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + S_m + (\sqrt{2}-1)\overline{S_m}\right|}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}\, M_m}.$$

设 $S_m = x_m + i y_m$。直接进行代数化简可得

$$2\left|\frac{1}{2} + S_m\right|^2 - \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + S_m + (\sqrt{2}-1)\overline{S_m}\right|^2 = 4(\sqrt{2}-1)\, y_m^2.$$

因此，只需证明 $\Im S_m = y_m > 0$。

But

$$\Im S_m = \sum_{k=1}^{m-1} \sin\frac{k\pi}{4}\, \frac{U_{m-1-k}(\lambda_m)^2}{U_{m-1}(\lambda_m)^2}.$$

由于 $\lambda_m > 1$，序列 $U_r(\lambda_m)$ 关于 r 严格递增，因此系数

$$a_k := \frac{U_{m-1-k}(\lambda_m)^2}{U_{m-1}(\lambda_m)^2}$$

在 k 中均为正且严格递减。将上述正弦和按每块 8 项分组，并利用

$$\sin\frac{(k+4)\pi}{4} = -\sin\frac{k\pi}{4},$$

可见，每个完整块都贡献严格正的量，而任何末端不完整块贡献的量均非负。因此$\Im S_m > 0$，所需的严格不等式得证。

如果 $C_{2m}(1,1)$ 是旋转不变的，推论 5.5 就会迫使这两个同一步长大小相等。这个矛盾表明 $C_{2m}(1,1)$ 不是旋转不变的。

□

参考文献

[1] Charles F. Dunkl、Piotr Gawron、John A. Holbrook、Zbigniew Puchała 和 Karol Życzkowski，数值影子：数值域上的测度与密度，Linear Algebra and its Applications **434**（2011），第 9 期，2042–2080。[2] T. Gallay 和 D. Serre，复矩阵的数值测度，Communications on Pure and Applied Mathematics **65** （2012），第 3 期，287–336。[3] H.-L. Gau、K.-Z. Wang 和 P. Y. Wu，部分等距算子的圆形数值域，Linear Multilinear Algebra **64** （2016），第 1 期，14–35。[4] Q. He、I. M. Spitkovsky 和 I. Suleiman，关于低维部分等距算子，Electron. J. Linear Algebra **39**（2023），124–135。[5] Tsing N.-K. Li C.-K，酉轨道上具有圆对称性的矩阵及其 *c*-数值域，Proc. Amer. Math. Soc.**111** （1991），19–28。[6] E. Poon 和 H. J. Woerdeman，等谱性与具有同心圆形高阶数值域的矩阵，Linear Algebra Appl. **631**（2021），174–180。[7] N. Popov、E. Shen 和 I. Spitkovsky，关于低秩部分等距算子的 *Kippenhahn* 曲线，arXiv:2601.12923。[8] J. J. Schäffer，关于压缩算子的酉扩张，Proc. Amer. Math. Soc.（1955），第 6 期，322。[9] I. Suleiman、I. M. Spitkovsky 和 E. Wegert，关于部分等距算子的 *Gau-Wang-Wu* 猜想在 *5×5* 情形成立，Electron. J. Linear Algebra**38** （2022），107–113。

[10] K.-Z. Wang 和 P. Y. Wu，加权移位的数值域，J. Math. Anal. Appl.381（2011），第 2 期，897–909。

[11] E. Wegertand I. Spitkovsky，关于数值域为圆形的部分等距算子，Concr. Oper.8（2021），第1期，176–186。