arXiv:2603.25664v1 [math.AT] 26 Mar 2026

张量三角几何中的几何点

TOBIAS BARTHEL、LOGAN HYSLOP、MAXIME RAMZI

摘要。本文研究张量三角几何中的几何点。为此，我们利用高阶扎里斯基几何中的自由构造，构造了一个反例，推翻 Balmer 的钢铁神经猜想。随后，我们在张量三角几何的背景下引入并讨论可构造谱。对于满足适度增强条件的张量三角范畴，我们利用这些谱，通过映射到“点状”张量三角范畴，构造（同调或三角）素理想的几何实现。



图 1. 关于点，瓦西里·康定斯基， 1928[1]

日期：2026年3月27日。[1]https://www.wikiart.org/en/wassily-kandinsky/on-the-points-1928（访问于2026年3月13日）

目录

1. 引言 2

第一部分。钢铁神经猜想的一个反例 82. 张量三角几何预备知识 83. 自由构造 154. 仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 235. 比较函子 26

第二部分。高阶扎里斯基几何中的可构造谱 29

6. 谱 29 7. 有理情形下的构造谱 338. $\mathbb{E}_n$-可构造谱 459. 同调谱的几何点 52附录 A. Rep(GL_t) 的半单性 59 参考文献 631. 引言

1.A. **背景与主要结果。** 希尔伯特零点定理引出了这样一个想法：交换环 R 的素理想应与仿射概形 Spec(R) 的点相对应，从而构成现代代数几何的起源。再提升一个范畴层级，张量三角几何旨在通过以张量三角范畴（下文简称 tt-范畴）取代交换环，发展一种类似的几何理论，参见 [Bal05；Aok+25]。对于张量三角范畴 $\mathcal{C}$，Balmer 谱 Spc($\mathcal{C}$) 承担了 Zariski 谱的角色；它由 $\mathcal{C}$ 中的素 tt-理想以及一种类似于 Zariski 拓扑的适当拓扑构成。这引出了一个最早由 Bal10b]提出的问题：

那么，什么是 *tt*-域？

具体来说，我们需要在张量三角几何中定义一套域理论，使我们能够通过剩余函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{F}$以几何方式实现任意张量三角范畴 $\mathcal{C}$ 的谱中的点 $\mathcal{C} \to \mathcal{F}$。因此，最低限度的要求是给出 *tt*-域 的定义，使其满足：

(†) 如果 $\mathcal{F}$ 是一个 tt-域，那么 Spc($\mathcal{F}$) $= *$ 的谱是一个单点。(‡) 对于每个素理想 $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$，都存在一个张量三角函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$，其在谱上的像恰为 $\{\mathcal{P}\}$。

这正是 Balmer 在 [Bal10b，第 4 节3], 提出的两个条件。但正如文中所指出的，我们强调这两个条件都需要进一步完善：例如，第一个条件并未排除域的幂零扩张，而第二个条件则应加强为在某种适当的等价关系下的唯一性陈述。

遗憾的是，这样一种关于 tt-域的一般理论仍未形成，人们也曾尝试寻求各种局部解决方案。受交换代数、同伦论和模表示论中的经典例子启发， [Bal10b] 和 [BKS19]提出了两种密切相关的 tt-域定义。尽管这两种定义都满足要求（†），但要验证它们是否满足（‡）却困难得多。特别是，我们构造了一个例子命题 2.31，表明 [Bal10b] 和 [BKS19] 提出的两种 tt-域定义并不一致，而且（‡）不成立，至少在采用 [BKS19]提出的定义时如此。

转换视角并将注意力限制在刚性 tt-范畴后，Balmer、Krause 和 Stevenson [BKS19] 放宽了剩余域为 tt-范畴这一条件，转而研究从 $\mathcal{C}$ 到 阿贝尔剩余域的同调函子。在一系列论文中， [Bal20b；Bal20a；BC21], 这一思路发展成了同调谱 $\mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$、同调素理想和同调支撑理论，与 [Bal05]中的三角理论相对应。特别是，Balmer 证明存在一个满射

$$\phi\colon \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{Spc}(\mathcal{C}),$$

并且，每个同调素理想 $\mathcal{B} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$ 都可由一个阿贝尔剩余域检测。此外，他还证明了一个基于 $\mathrm{Spc}^h\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{C}$ 幂零定理。由于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{C})$ 参数化了 $\mathcal{C}$ 的厚张量理想，从抽象的角度来看，映射 ϕ 表达了 $\mathcal{C}$ 的幂零定理与厚理想定理之间的一种形式关系。受多种实例的启发，下一个猜想调和了这两种观点：

猜想 (Balmer 的钢铁神经猜想)。 对于任意刚性 tt-范畴 $\mathcal{C}$，比较映射 $\phi\colon \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{Spc}(\mathcal{C})$ 都是双射。

除了在上述构造 tt-几何中剩余域这一研究计划中的重要意义外，这个猜想还有其他重要应用，见 第 2 节。在所有已计算出谱的实例中，该猜想都成立（例如，见 [Bal20b，第 5]节）并具有若干强有力的稳定性（如下降）性质 [BHS23；Bar+26]。尽管有这些证据，我们的第一个主要结果（定理 5.7）仍推翻了钢铁神经猜想：

定理 A。 钢铁神经猜想是错误的。更确切地说，对于带基点对象上的自由刚性交换 2-环，比较映射 ϕ 不是单射。$\mathbb{A}^{1,+}$

这一结果证明中的关键要素，是一维配边假设的推广版本，以及 Deligne 关于其范畴 $\mathrm{Rep}(GL_t)$ 的半单性定理。

鉴于钢铁神经猜想已被证伪，本文的第二个主要目标是采用另一种方法，在张量三角几何中构造剩余对象。基于 [BSY22],中引入的零点定理型对象概念，我们构造了一系列 可构造谱 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathbb{E}_n}(\mathcal{C})$，并为 $1 \le n \le \infty$ 构造了适当的比较映射，将其映至 $\mathcal{C}$ 的同调谱，前提是张量三角范畴 $\mathcal{C}$ 具有适当的增强，使其成为 $\mathbb{E}_m$-2-环，其中 $1 \le n < m$。

作为对这一概念的初步验证，对于有理刚性交换 2-环 $\mathcal{C}$，我们证明零点定理型范畴提供了令人满意的剩余域理论。推广 Mathew 在诺特情形下的先前工作 [Mat17] ，推论 7.11指出：

定理 B。 如果 R 是一个有理 $\mathbb{E}_\infty$-环，那么 $\mathrm{Perf}(R)$ 有足够多的 tt-域，并且同调谱中的点$\mathrm{Perf}(R)$ 都可由从 R到有理2-周期域的映射见证。

作为一项应用，我们推导出，对于任意有理 $\mathbb{E}_\infty$-环 R上的模，其朴素同调支撑与真正的同调支撑一致，从而回答了[Bar+26]在此情形下提出的问题。定理 B证明中采用的视角，也将促成对有理情形（事实上是有限高度情形）的单生成钢铁神经猜想的验证；Burklund 和 Chedalavada 正在分别开展相关研究。

回到一般情形，我们发展的 $\mathbb{E}_n$-可构造谱理论，结合对 Burklund 乘法结构定理（[Bur22]）的进一步阐述，得出了下一个结果。该结果表明，只要给定的张量三角范畴具有结构适当的增强，其同调谱中的每个点都是“几何的”，也就是说，都能由一个同调谱仅含单点的张量三角范畴检测到：

定理 C. 设 $\mathcal{C}$ 是一个允许增强的刚性张量三角范畴，并设$\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$ 是一个同调素理想。那么存在一个张量三角函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{K}$，将其映至一个刚性张量三角范畴 $\mathcal{K}$，使得

(a) $\mathrm{Spc}^h(\mathcal{K}) = *$ 只有一个点；*(b)* 映射 $\mathrm{Spc}^h(\mathcal{K}) \to \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$ 的像恰为 $\{\mathfrak{m}\}$。

因此，我们推知，定理 C 中构造的剩余 tt-函子满足要求（†）和（‡）。不过，谨提醒读者，正如我们将要解释的，证明此定理所用的构造尚不足以建立一套令人完全满意的 tt-几何中域的理论。

1.B. **方法论**。

自由构造与钢铁神经猜想的反例。 我们反驳钢铁神经猜想的出发点是正合幂零条件，该条件由 Balmer 提出 [Bal20a，定理 A。1] 以及第二作者[Hys26]。对于给定刚性张量三角范畴的所有局部化，该条件均成立，当且仅当该范畴满足钢铁神经猜想；然而，由于它并未涉及同调谱，因此在刚性语境之外也有意义。 [Hys26] 的主定理表明，这一条件对带基点对象上的自由（非刚性）交换 2-环并不成立。我们的策略是将这一方法改用于刚性语境，但这会带来额外的重大困难。

存在一个定义在带基点对象上的自由刚性交换 2-环 $\mathbf{A}^{1,+}$，以及一个定义在对象上的自由刚性交换 2-环 $\mathbf{A}^1$。范畴 $\mathbf{A}^1$ 在高阶扎里斯基几何 [Aok+25]中扮演仿射直线的角色，因为它表示整体截面函子。为简化讨论，我们将默认 $\mathbf{A}^{1,+}$（分别地，$\mathbf{A}^1$）是有理的，即在有理数的导出范畴 $\mathcal{D}^b(\mathbf{Q})$上处理定义在带基点对象上（分别地，定义在对象上）的自由刚性交换 2-环。

与非刚性情形不同，$\mathbf{A}^1$ 和 $\mathbf{A}^{1,+}$ 不是局部的，并且具有非常大的 Balmer 谱；关于 $\mathbf{A}^1$中许多点的描述，请参见推论 3.10 和推论 4.10。特别是，如果我们希望研究精确幂零条件，就必须满足于尝试研究它们的一些局部化。特别地，这也适用于 $\mathbf{A}^1$ 的某个泛点 η，$\mathbf{A}^{1,+}$的情形也同样如此。

将自由带基点对象映射到带基点对象 $\mathbb{1} \xrightarrow{0} X$ 会诱导一个张量三角函子 can：$\mathbb{A}^{1,+} \to \mathbb{A}^1$。为分析这个函子及其关联的范畴，我们将运用 Lurie 提出的一维配边假设（[Lur08], 另见 [Har12]），以及 Barkan–Steinebrunner 对其所作的（即将发表的）推广 [BS]。它给出了如下同一化

$$\mathbb{A}^1 = \mathrm{Fun}((\mathrm{Cob})^{op}, \mathcal{D}(\mathbb{Q}))^{\omega} \quad \text{and} \quad \mathbb{A}^{1,+} = \mathrm{Fun}((\mathrm{Cob}^{+})^{op}, \mathcal{D}(\mathbb{Q}))^{\omega},$$

从而得到这些范畴的“生成元与关系描述”。特第 4 节中，我们得以建立$\mathbb{A}^1$ 与 Deligne 范畴 $\mathbf{Rep}(GL_t)$（见[Del07]，并在第 A 节中回顾），并运用他的半单性定理。我们确立的关键结构特征总结于以下结果中，其中汇集了定理 4.6和命题 5.1：

定理 D。函子can 可扩张为一个张量三角函子$\mathrm{can}^{\eta}\colon \mathbb{A}^1_{\eta}{}^{+} \to , \mathbb{A}^1_{\eta}$ 作用于泛点上。此外，我们有：
(a) 函子 $\mathrm{can}^{\eta}\colon \mathbb{A}^1_{\eta}{}^{+} \to ,\mathbb{A}^1_{\eta}$ 是保守的。*(b)* 张量三角范畴$\mathbb{A}^1_{\eta}$ 是一个半单 *tt*-域。

正如第 5 节末尾所述，该定理足以得出结论：对于 $\mathbb{A}^1_{\eta}{}^{+}$. ，泛纤维序列 $Y \to \mathbb{1} \to X$（及其像）的正合幂零条件不成立，从而证明了定理 A。

$\mathbb{E}_\infty$-可构造谱与有理情形。已知的 *tt*-几何中剩余域概念存在缺陷——如上所示——这促使我们采用一种新方法，并将其置于高阶扎里斯基几何 [Aok+25]的框架中。这要求所考虑的张量三角范畴具有适当的增强，即它是某个交换 2-环[2]的同伦范畴。由于自然界中的所有张量三角范畴都属于这种形式，且关键运算均保持增强结构，我们认为这只是一个非常温和的假设。

在 [BSY22] 中，Burk- lund、Schlank 和 Yuan 受色谱同伦论应用的启发，引入了零点定理型对象的一般概念，以抽象地刻画代数闭域的基本特征。将这一概念应用于交换 2-环范畴，便得到我们对可构造谱$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C})$ 的定义 $\mathcal{C}$，详见定义 6.5。该谱是一个紧致 T_1空间，其点由零点定理型交换 2-环给出。在推论 6.9中，我们构造了一个自然比较映射

$$\psi\colon \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{C}).$$

这一映射的重要性随后在命题 6.10中得到说明：$\mathrm{Spc}(\mathcal{C})$ 中的一个点属于 ψ 的像，当且仅当它可以由交换 2-环的一个映射 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 检测得到，且 $\mathrm{Spc}(\mathcal{D}) = *$。换言之，可构造谱提供了一个抽象框架，能够刻画要求（†）和（‡）。然而，一般而言，比较映射 ψ 不是满射，因此并非 Balmer 谱中的每个素理想都能通过交换 2-环的映射在几何上实现。我们指出，在有限正高度情形（推论 6.11）以及高度 ∞ (例 6.12) 时，实现性都会失效，也就是说，在特征 p。

这与特征零中的情形形成鲜明对比。对于一个有理交换 2-环 $\mathcal{C}$在本节余下部分，我们首先注意到，零点定理型 $\mathcal{C}$-代数在去范畴化下对应于零点定理型 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$-代数：事实上，命题 6.7 建立了一个同胚

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}).$$

这提供了一个比较映射的构造 ψ^h：谱$^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$，对于有理 $\mathcal{C}$，我们在定理 7.1 中证明它是一个双射：

定理 E。 设 $\mathcal{C}$ 为一个有理刚性交换 *2*-环。则集合之间存在一个自然同构 ψ^h：谱$^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$，即 $\mathcal{C}$的可构造谱与同调谱之间的自然同构。

有了这一结果，我们便不难推导出在定理 B中的应用，即关于有理单生成交换 2-环的应用。与此同时，这

[2]即一个（本质上小的）稳定对称幺半幂等完备∞-范畴

种构造为有理刚性交换 2-环的同调谱赋予了一种新的拓扑，而该拓扑总是紧致的 T_1。要判断它何时是紧致豪斯多夫的，可以通过理解给定范畴中的零点定理型代数来检验；这与同调谱何时是 Balmer 谱关于某种“典范拓扑”的层化密切相关（见定理 7.23 ）。定理 E 所诱导的同调谱拓扑可能总是紧致豪斯多夫的；这个问题等价于零点定理型代数有理刚性交换 *2*-环的精确幂零条件是否存在统一上界，而这又归结为在我们构造的、针对钢铁神经猜想的反例的可构造谱中分离两个指定点（精确表述见命题 7.25）。

$\mathbb{E}_n$-可构造谱与几何点。正如我们所见，在有理情形之外，tt-范畴的 Balmer 谱中的点通常无法通过交换 2-环之间的映射以几何方式实现。令人惊讶的是，只需对可构造谱稍作修改，便能彻底解决这一问题。

推广前述设定，在本节余下部分，设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性 $\mathbb{E}_m$-2-环，也就是说，它是某个 $m \geq 3$ 上本质小的、刚性、稳定 $\mathbb{E}_m$-幺半、幂等完备的 ∞-范畴。 m 上的条件保证了 $\mathcal{C}$ 的同伦范畴是一个刚性 tt-范畴。于是，对任意 $1 \leq n < m$，我们定义 $\mathcal{C}$ 的 $\mathbb{E}_n$-可构造谱为 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathbb{E}_n}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})$。它带有一个比较映射

$$\psi^h_n \colon \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathbb{E}_n}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}) \to \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$$

其定义是将零点定理型$\mathbb{E}_n$-代数映至其同调支集。关于 E-可构造谱的主定理（定理 8.2）表明， ψ^h_n是双射：

定理 F。 设 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 为刚性 $\mathbb{E}_m$-*2*-环 $\mathcal{C}$ 的 ***Ind*** 范畴。那么对所有$1 \leq n < m$，存在一个自然双射

$$\psi^h_n \colon \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathbb{E}_n}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}) \simeq \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C}).$$

事实上，定理 8.17 给出了一个例子，表明上述陈述中的条件 $n < m$是最优的。证明定理 F的关键步骤是：对每个同调素理想 $\mathfrak{m}$，构造$\mathbb{E}_n$-代数版本 $E^n_{\mathfrak{m}}$ ，它们对应于 $E_{\mathfrak{m}}$ 中引入的弱环 [Bal20a，构造 2。11]。后者在同调谱的研究中起着特殊作用，同样，它们的结构化类比物对于分析 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathbb{E}_n}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})$ 也至关重要。构造 $E^n_{\mathfrak{m}}$ 主要依赖于 Burklund 关于高阶代数中商对象上的乘法结构的研究 [Bur22]。

为了从 定理 F 推出 定理 C，我们还需要一个步骤。虽然我们无法直接得出 $E^n_{\mathfrak{m}}$ 的同调谱是一个点，但我们将在第 9 节 证明，对于充分大的 $^h(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(E^k_{\mathfrak{m}})$, $\mathrm{Spc}\, k$ 具有所需性质。这就提供了充足的剩余刚性$\mathbb{E}_n$-2-环；将其传至同伦范畴后，便得到定理 C。最后我们指出，$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(E^k_{\mathfrak{m}})$ 的整体结构尚未得到充分理解，因此这些剩余 tt-范畴在多大程度上应被视为域，仍在研究之中。

1.C. 文档结构。 本文分为两部分，分别对钢铁神经猜想进行否证，并分析可构造谱。

第一部分首先介绍 tt-几何的一些预备知识，汇集于此以方便读者阅读。其中大部分内容位于第 2 节，纯粹用于阐述，但关于 tt-域 的讨论除外。 第 3 节 讨论高阶扎里斯基几何中的自由构造以及广义一维配边假设，随后在第 4 节 中将其应用于分析仿射直线及其带基点变体。本部分最终在第 5 节中达到高潮，在此我们汇集定理 A 的证明。

第二部分探讨可构造谱及其在高阶扎里斯基几何中构造几何点的应用。在简要回顾了 [BSY22], 第 6 节中关于零点定理型对象的理论后，介绍了$\mathbb{E}_\infty$-刚性交换 2-环的可构造谱，阐述了其基本性质，并讨论了它与 tt-几何的关联。本节末尾还列出了我们针对其效用最乐观猜想所提出的反例，从而引出对 第 7 节 中有理情形的深入研究以及对定理 B的证明。最后，第 8 节 和第 9 节介绍$\mathbb{E}_n$-刚性 2-环的可构造谱，并通过修改 Burklund 构造乘法结构的方法，证明定理 C。

本文最后概述了 Deligne 的证明中一个特殊情形的证明，即 GL_t) 的表示范畴 Rep([Del07] 中SectionA的半单性证明。

1.D. 约定与记号。本文正文将采用 [Aok+25] 提出的高阶扎里斯基几何框架，该框架以 ∞-范畴的语言表述（[Lur09；Lur17]），并增强了 Balmer [Bal05] 所发展的张量三角几何。除非另有说明，我们的记号和术语均遵循上述文献。具体而言，tt-范畴指张量三角范畴的经典 1-范畴概念；而我们使用 E$_m$-2-环一词，指本质小的稳定 E$_m$-幺半 ∞-范畴，并通常假设其为幂等完备。当 $m \geq 3$ 时，E$_m$-2-环 $\mathcal{C}$ 的同伦范畴 $\mathcal{K} = \mathrm{ho}(\mathcal{C})$ 是一个 tt-范畴；在这种情况下， $\mathcal{C}$ 被称为 $\mathcal{K}$ 的 E$_m$-增强。本文余下部分中，tt-范畴均默认指刚性 tt-范畴；不带任何修饰语的 2-环均默认指交换 2-环。

致谢。我们感谢 Paul Balmer、Anish Chedalavada、Akhil Mathew、Thomas Nikolaus、Phil P¨utzst¨uck、Tomer Schlank、Robin Sroka 和 Jan Steine- brunner，感谢他们进行的许多有益讨论。TB 和 LH 获得了欧洲研究理事会（ERC）地平线欧洲项目（资助编号：101042990）的支持，并感谢位于波恩的马克斯·普朗克数学研究所提供的热情接待和经费支持。MR 由德国研究联合会（DFG）资助，项目编号 427320536（SFB 1442）；同时也获得德国卓越战略 EXC 2044/2 –390685587 项目“明斯特数学：动力学—几何—结构”的资助。

第I 部分：钢铁神经猜想的一个反例

2. 张量三角几何预备知识

2.A. **张量三角几何的基本概念**。受到 Devinatz–Hopkins–Smith 的相关计算 [DHS88；HS98], Hopkins–Neeman [Hop87；Nee92], 以及 Thomason [Tho97], Balmer [Bal05]提出了以下定义，标志着如今称为张量三角几何这一领域的开端。

定义 2.1 ([Bal05])。 设 $\mathcal{C}$ 是一个本质小 tt-范畴。那么，*Balmer* 谱 $\mathcal{C}$，Spc($\mathcal{C}$) 是由 $\otimes$-理想 $\mathcal{C}$组成的集合，并通过定义以下特定闭集赋予拓扑结构

$$\operatorname{Supp}(x) \coloneqq \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{C}) \colon x \notin \mathcal{P}\},$$

对于对象 $x \in \mathcal{C}$。

这个定义与代数几何中 Zariski 谱的构造相似，因此为 tt-范畴带来了几何视角；近期综述请参见 [Aok+25]。Balmer 谱自然带有指向其他空间的映射，例如单位对象的分次自同态环中分次素理想的齐次谱。

命题 2.2 ([Bal10a，定理 5.3])。 存在一个自然的连续映射

$$\rho \colon \operatorname{Spc}(\mathcal{C}) \to \operatorname{Spec}^{\mathrm{h}}(\pi_*(\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})))$$

从张量三角范畴的 *Balmer* 谱 $\mathcal{C}$ 到分次交换环 $\pi_*(\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}))$中齐次素理想的谱。映射 ρ 是反序的，即 $P \subseteq Q$ 当且仅当 $\rho(P) \supseteq \rho(Q)$。

有了适用于 tt-范畴的良好几何概念，代数几何中熟悉的词汇和概念（至少其中一部分）便可以推广到张量三角几何的领域。本文尤其重要的一个概念是局部的含义，也就是说，谱具有唯一一个闭点。考察定义（[Bal10a]）可知，空间 Spc($\mathcal{C}$) 的闭点对应于 $\mathcal{C}$中的极小素理想；由此可知，Spc($\mathcal{C}$) 具有唯一一个闭点，当且仅当理想 (0) 是素理想。将此归纳为一个定义，并重新表述 (0) 是素理想的含义，我们回顾如下：

定义 2.3. 若张量三角范畴 $\mathcal{C}$ 对所有对象 $X, Y \in \mathcal{C}$,$X \otimes Y \simeq 0$ 都满足 $X \simeq 0$ 或 $Y \simeq 0$，则称其为局部的。

本文的另一个重要概念是 $\otimes$-幂零映射。

定义 2.4. 张量三角范畴中的映射 $f \colon x \to y$ 称为 $\otimes$-幂零，如果存在某个 $n \geq 0$ 使得 $f^{\otimes n} \simeq 0$。

引理 2.5. 设 $\mathcal{C}$ 是一个张量三角范畴。 $\mathcal{C}$ 中 $\otimes$-幂零态射的类在以下运算下封闭：

- 与任意对象作张量；
- 收缩；
- 对偶化。

此外，如果 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是张量三角函子，它会将 $\otimes$-幂零态射映为 $\otimes$- 幂零态射。

证明。 第一项由 $(f\otimes z)^{\otimes n}\simeq f^{\otimes n}\otimes z^{\otimes n}$ 这一事实得出。第二项由以下事实得出：若 f_0是 f_1的缩回，则 $f_0^{\otimes n}$是 $f_1^{\otimes n}$的缩回，而零态射的缩回仍为零。第三项由对偶化与张量积可交换，且零态射的对偶仍为零这一事实得出。最后一个事实也可由等价 $F(f)^{\otimes n}\simeq F(f^{\otimes n})$ 显然看出。□

定义 2.6. 若张量三角范畴 $\mathcal{C}$中的对象 $x\in\mathcal{C}$ 满足$x\otimes-$ 在态射上保守，则称其为 $\otimes$-忠实 ，也就是说：若 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon y\to z$ 满足$x\otimes f\simeq 0$，则 $f\simeq 0$。

我们将用到以下基本观察：

引理 2.7. 张量三角范畴 $\mathcal{C}$中的对象 x 是 $\otimes$-忠实的，当且仅当余求值态射

$$\mathrm{coev}_x\colon \mathbb{1}\to x\otimes x^\vee$$

是分裂单射。特别地，若 $\mathcal{C}$ 的每个非零对象都是 $\otimes$-忠实的，则 $\mathcal{C}$ 的 ***Balmer*** 谱只有一个点。

证明。 若单位对象 **1** 是 $x\otimes x^\vee$ 的直和因子，则 $x\otimes x^\vee\otimes-$ 在态射上保守，因此函子 $x\otimes-$ 也必然如此。反过来，若 $x\otimes-$ 是 $\otimes$- 忠实的，由于 $x\otimes\mathrm{coev}_x$ 是分裂单射，映射 $\mathrm{fib}(\mathrm{coev}_x)\to\mathbb{1}$ 与 x 作张量积后为零，因此其自身也为零，这就意味着 coev_x 是分裂单射。

最后的断言源于这样的观察：每个 $\otimes$-忠实对象都会生成单位理想，因此每个非零对象也必然如此。□

2.B. **同调谱**。 与后续许多计算一样，Balmer 谱的首次计算是先证明一个抽象的幂零定理，再据此对厚 $\otimes$理想进行分类。秉承张量三角几何与抽象幂零性定理之间应存在普遍相互作用这一理念，并以此前与 Krause 和 Stevenson 的合作成果为基础 [BKS19], Balmer 在 [Bal20b，注 3 中4] 提出了一种将拓扑空间附加到张量三角范畴上的新方法。现在我们回顾这一构造。

定义 2.8。 设 $\mathcal{C}$ 是一个张量三角范畴。范畴 $\mathrm{mod}(\mathcal{C})$ 是以 $\mathcal{C}$为底范畴、取值于阿贝尔群的加性预层范畴的满子范畴

$$\mathrm{Fun}^{\oplus}(\mathcal{C}^{op},\mathrm{Ab})$$

由映射的余核生成 $よ(x)\to よ(y)$，其中 $x,\ y\in\mathcal{C}$。

范畴 $\mathrm{mod}(\mathcal{C})$ 是一个阿贝尔范畴，它通过 Day 卷积继承了对称幺半结构，使 Yoneda 嵌入

$$よ\colon \mathcal{C}\to\mathrm{mod}(\mathcal{C})$$

成为对称幺半的。由于目前还没有针对张量三角范畴的一般性“剩余域”理论，我们转而关注性质良好的“阿贝尔剩余域”。具体而言，Balmer 将张量三角范畴 $\mathcal{C}$ 的同调剩余域定义为 $\mathrm{mod}(\mathcal{C})$ 关于极大 Serre $\otimes$-理想的商。由此我们得到：

定义 2.9 ([Bal20b，注释 3.4])。 张量三角范畴 的同调谱 定义为如下集合$\mathcal{C}$：

$$\mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})\coloneqq\{\text{maximal Serre }\otimes\text{-ideals in }\mathrm{mod}(\mathcal{C})\}.$$

通过将以下形式的集合生成的集合定义为闭子集，可将其赋予拓扑空间结构

$$\mathrm{Supp}^h(x) \coloneqq \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C}) \colon よ(x) \notin \mathfrak{m}\}.$$

在同调谱中的任意一点 $\mathfrak{m}$ 处，$\mathfrak{m}$ 处的同调剩余域 定义为复合函子 $\mathcal{C} \to \mathrm{mod}(\mathcal{C})/\mathfrak{m}$ 到模去极大 Serre $\otimes$-理想 $\mathfrak{m}$所得商的函子。

2.C. **弱环**。

定义 2.10. 设 $\mathcal{C}$ 是一个张量三角范畴，并考虑其大范畴 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$。$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$中的一个弱环是一个带基点对象 $f\colon \mathbb{1} \to R$，它在与 R 张量后成为分裂的；也就是说，满足

$$R \otimes f \colon R \to R \otimes R$$

是分裂单射。

备注 2.11. 同调谱中的每个点 $\mathfrak{m}$ 都会对应一个唯一的弱环对象 $E_{\mathfrak{m}}$，它位于大范畴 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$中，并且满足：与 $E_{\mathfrak{m}}$ 张量的核恰好等于复合函子 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathrm{mod}(\mathcal{C})) \to \mathrm{Ind}(\mathrm{mod}(\mathcal{C})/\mathfrak{m})$ [BKS19，命题 3。9]在 [BC21], Balmer–Cameron 展示了在实践中计算大量此类弱环的技术。

以下关于与同调素理想相关联的弱环的性质，稍后会派上用场。

命题 2.12 ([Bal20b，命题 5。3])。 设 $\mathcal{C}$ 为张量三角范畴，并考虑同调素理想 $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$ 及其对应的弱环 $E_{\mathfrak{m}_1}, E_{\mathfrak{m}_2}$。那么$E_{\mathfrak{m}_1} \otimes E_{\mathfrak{m}_2} \simeq 0$ 当且仅当 $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$。

给定的张量三角范畴中，与大对象相关联的同调支集有两种自然的概念。

定义 2.13。 设 $\mathcal{C}$ 为一个张量三角范畴，它关联有大范畴“$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$”（例如，它可以是刚性 E_n-2-环的 Ind-范畴的同伦范畴，其同伦范畴为 C），并设 $t \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 为一个大对象。则定义

- 朴素同调支集，即 t，为
$$\mathrm{Supp}^n(t) \coloneqq \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C}) \colon t \otimes E_{\mathfrak{m}} \neq 0\}.$$
- 真实同调支集，即 t，为
$$\mathrm{Supp}^h(t) \coloneqq \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C}) \colon \hom(t, E_{\mathfrak{m}}) \neq 0\}.$$

我们记录这些支集的以下性质，它们将在后文中发挥作用。

命题 2.14 ([Bal20a, 定理 4。5])**.** 真实同调支撑满足所谓的张量积性质。具体而言，

$$\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(t_1 \otimes t_2) = \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(t_1) \cap \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(t_2).$$

命题 2.15 ([Bal20a, 定理 4。7])。 若 t 是弱环，则存在等式

$$\mathrm{Supp}^n(t) = \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(t).$$

在后文讨论弱环时，我们将经常默认把 $\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(t)$ 与 $\mathrm{Supp}^{n}(t)$ 等同起来。最后，我们还记录弱环的同调支撑的以下检测性质。

命题 2.16 ([Bal20a，定理 4.7])。若 $w \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 是一个弱环，且其同调支撑为支集$^{\mathrm{h}}(w) = \emptyset$，那么 $w = 0$。

2.D. **幂零性检测**。Balmer 研究了这一同调谱与幂零定理之间的联系，并证明在某种意义上，证明抽象的幂零定理等价于计算一个范畴的同调谱。

命题 *2.17*（[*Bal20b*，推论 *4.7*，定理 *5.*4]）。给定一个映射 $f\colon x \to Y$对于 $x \in \mathcal{C}$ 和 $Y \in \mathit{Ind}(\mathcal{C})$，如果 f 在 $\mathcal{C}$的每个同调剩余域中都消失，那么 f 是 $\otimes$-幂零的。此外，给定同调谱中点的一个集合 $I = \{\mathfrak{m}\} \subseteq \mathit{Spc}^{h}(\mathcal{C})$，若该集合具有如下性质：对于所有 $\mathfrak{m} \in I$，若 f 在 $\mathfrak{m}$ 处的剩余域中消失，则 f 是 $\otimes$-幂零的，那么 $I = \mathit{Spc}^{h}(\mathcal{C})$就是整个空间。

一个重要的相关概念是幂零保守性；我们回顾其定义：

定义 2.18. 设$\{f_i\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}_i\}_{i\in I}$ 是从一个固定的 tt-范畴到不同 tt-范畴的函子族 $\mathcal{C}$ $\mathcal{D}_i$。如果其在大范畴上的诱导函子（也滥用记号记作f_i）能够检测弱环，我们就称该函子族为联合幂零保守，即：若 R 是 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$中的一个弱环，且对所有 $i \in I$，$f_i(R) \simeq 0$，则 $R \simeq 0$。

联合幂零保守函子族与同调谱之间的联系由以下定理概述。

定理 2.19 ([Bar+24，定理 1.9])。设 $\{f_i\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}_i\}_{i\in I}$ 是一个张量三角函子族。当且仅当诱导映射

$$\coprod_{i\in I} \mathrm{Spc}^{h}(\mathcal{D}_i) \to \mathrm{Spc}^{h}(\mathcal{C})$$

是满射。

稍后我们将在高度结构化的情形下，对联合幂零保守族要求基变换性质；而这又需要以下引理。

引理 2.20. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是刚性 *2*-环，且 $f^*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个全忠实的 *2*-环映射（因此其在 *Ind*-范畴上的右伴随 f_* 具有 $f_*f^* \simeq id_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}$）。那么，对于任意刚性 *2*-环映射 $g^*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$，基变换 $\mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$ 也全忠实。

证明. 根据 [Ram24，命题 4。18]（该结果适用，因为 $\mathcal{C}$ 是刚性的），伴随$f^* \dashv f_*$ 是 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$-线性的，因此由 $\mathcal{E} \otimes_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})} -$的 2-函子性，张量 $\mathcal{E}$后可得到一个伴随。由于全忠实性可以用 2-范畴术语表达（即单位映射是一个等价），结论得证。

□

命题 2.21. 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性 *2*-环。假设给定一个刚性 *2*-环的函子族 $F_i\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}_i, i \in I$，且该函子族联合幂零保守。那么，对于任意映射到刚性 *2*-环 $\mathcal{E}$ 的 *2*-环映射 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$，函子族

$$\{\mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{D}_i\}_{i\in I}$$

也是联合幂零保守的。

证明。设 $S \in \mathsf{Ind}(\mathcal{E})$ 是一个弱环，并假设对于每个 i，$F_i(S) \in \mathsf{Ind}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})} \mathsf{Ind}(\mathcal{D}_i)$ 都为 0。

再次，根据 [Ram24，命题 4。18], 伴随 $G \dashv G_*$ 在 $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$ 和 $\mathsf{Ind}(\mathcal{E})$ 之间诱导出伴随 $G \otimes \mathrm{Ind}(\mathcal{D}_i) \dashv G_* \otimes \mathrm{Ind}(\mathcal{D}_i)$ 在 $\mathsf{Ind}(\mathcal{D}_i)$ 和 $\mathsf{Ind}(\mathcal{E})$ 之间 $\otimes_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})} \mathrm{Ind}(\mathcal{D}_i)$，我们仍不严谨地将其记作 G，G_*。

因此我们得到 $G_*F_i(S) = 0$。我们断言，下方方块是纵向右伴随的，也就是说，典范映射 $F_iG_* \to G_*F_i$ 是等价：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{F_i} & \mathrm{Ind}(\mathcal{D}_i) \\ {\scriptstyle G}\downarrow\uparrow & & {\scriptstyle G}\downarrow\uparrow \\ \mathrm{Ind}(\mathcal{E}) & \xrightarrow[F_i]{} & \mathrm{Ind}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})} \mathrm{Ind}(\mathcal{D}_i) \end{array}$$

一旦证明了这一点，就可以推出对所有 i，都有 $F_iG_*(S) = 0$，进而由幂零保守性得到$G_*(S) = 0$。但按构造存在一个弱环映射 $GG_*(S) \to S$，因此可得 $S = 0$。

为了证明这一伴随性，我们再次利用 $- \otimes_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})} -$ 的 2-函子性：箭范畴 $\mathsf{Ind}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{D}_i)$ 将伴随 $G \dashv G_*$ 送到箭范畴中的一个伴随，而这恰好就是可伴随的方块（这可由更一般的 [Hau21，定理 4。6] 推出）。

□

2.E. **钢铁神经猜想**。对于任意张量三角范畴 $\mathcal{C}$，都存在一个自然连续满射

$$\phi\colon \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{Spc}(\mathcal{C})$$

根据 [Bal20b，推论 3。9]，，这使我们重新回到张量三角几何的框架中。最初对 Balmer 谱的计算方式，实质上是在 [HS98] 中计算 Sp^ω 的同调谱，然后证明映射 $\mathsf{Spc}^h(\mathsf{Sp}^\omega) \to \mathrm{Spc}(\mathsf{Sp}^\omega)$ 是一个同构。用现代术语来说，Hopkins–Smith 证明了 Balmer 的钢铁神经猜想的第一个情形。现在我们可以陈述这个猜想。

定义 2.22. 我们称张量三角范畴$\mathcal{C}$ 满足钢铁神经条件 （记作 $\mathsf{NoS}(\mathcal{C})$），如果映射 $\phi\colon \mathsf{Spc}^h(\mathcal{C}) \to \mathsf{Spc}(\mathcal{C})$ 是双射。钢铁神经猜想 断言每个张量三角范畴都满足钢铁神经条件。

近年来，钢铁神经猜想一直是三角张量几何学家关注的焦点，并且人们发现了许多等价表述。例如：

注 2.23. 对于张量三角范畴 $\mathcal{C}$，比较映射 ϕ 将 $\mathsf{Spc}(\mathcal{C})$ 表示为 $\mathsf{Spc}^h(\mathcal{C})$ 的 Kolomogorov 商，即其下方的泛 T_0-空间；参见 [BHS23，引理 4。2]这意味着以下陈述等价：

(a) $\phi\colon \mathsf{Spc}^h(\mathcal{C}) \to \mathsf{Spc}(\mathcal{C})$ 是双射；(b) $\phi\colon \mathsf{Spc}^h(\mathcal{C}) \to \mathsf{Spc}(\mathcal{C})$ 是同胚；(c) $\mathsf{Spc}^h(\mathcal{C})$ 是 T_0 （因此也是谱的）。

注 2.24. 文献 [BW25] 通过由齐格勒谱构造的空间，给出了所构造的同调谱的另一种描述，将同调素理想与所谓的“可定义” $\otimes$-子范畴联系起来。

注 2.25. 文献 [Bar+26] 表明，若钢铁神经猜想成立，那么对于所有刚性紧生成 tt-范畴，三角意义和同调意义上的分层概念便一致。特别地，分层将沿几何 tt-函子的弱可下降族满足下降。

2.F. **精确幂零条件**。 钢猜想的神经 [Bal20a，定理 A。1], 并且再次在 [Hys26，定理 1。6] 中以所谓精确幂零条件的形式重新表述，我们现在回顾这一条件。

定义 2.26 ([Hys26，定义 1。5])。 设 $\mathcal{C}$是一个局部 tt-范畴。我们称精确幂零条件（或称阶数为 n的精确幂零条件）(ENC(n)) 对 $\mathcal{C}$ 成立，如果对于所有形如以下的纤维序列

$$y \xrightarrow{g} \mathbb{1} \xrightarrow{f} x,$$

存在一个非零对象 $z \in \mathcal{C}$，使得 $z \otimes g$ 或 $z \otimes f$ 是 $\otimes$-幂零的（或 $z \otimes g^{\otimes n} \simeq 0$ 或 $z \otimes f^{\otimes n} \simeq 0$）。

如第 1.B 节所述，本文的出发点是以下定理。

定理 2.27 ([Bal20a，定理 A。1]； [Hys26，定理 1。6])。当且仅当每个局部 *tt*-范畴 $\mathcal{C}$都满足精确幂零条件时，钢铁神经猜想成立。

2.G. **张量三角域**。 我们回顾 Balmer、Krause 和 Stevenson 在 [BKS19]中提出的 tt-域的定义，并讨论其一些基本性质。特别是，我们表明它与 Balmer 在[Bal10b]中给出的早期定义有所不同。

定义 2.28 ([BKS19，定义 1。1])。 一个刚性紧生成的张量三角范畴$\mathcal{T}$ 是*tt*-域，如果它满足以下两个条件：
(a) 每个非零紧对象 $x \in \mathcal{T}^c$都是 $\otimes$-忠实的，即，对于 $\mathcal{T}$中的态射 f， $x \otimes f = 0$ 蕴含 $f = 0$；(b) $\mathcal{T}$ 中的每个对象都是紧对象的余积。偶尔，我们也将本质小 tt-范畴 $\mathcal{T}^c$ 称为 tt-域。

tt-域的简单例子如下：

引理 2.29。 具有简单单位对象的半单 *tt*-范畴 $\mathcal{K}$是一个 *tt*-域，因为对任意非零对象 $z \in \mathcal{K}$，余评价映射： $\mathbb{1} \to z \otimes z^\vee$ 都是分裂单射。
证明。 在半单范畴中，任何从自同态环为简单环的对象出发的非零映射都是分裂单射。
□

注 2.30。 tt-域定义的一个重要推论 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}^c$是一个 Krull–Schmidt 范畴，例如参见 [BKS19，定理 5。7]。

在 [Bal10b，第 4 节3], 中，Balmer 提出了一种变体，仅要求满足定义 2.28 中的条件 (a)。下一个命题给出了一个例子，说明这两个定义并不等同，从而回答了 [BKS19，注 12]中提出的问题。

命题 2.31。 设 $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个由自然数集索引的域族，且 U 是自然数集 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤子。考虑在 *2*-环范畴中取的超积 $\prod_{\mathcal{U}}\mathrm{Perf}(\kappa_n)$ 。

(a) $\prod_{\mathcal{U}}\mathrm{Perf}(\kappa_n)$ 的每个非零紧对象都是 $\otimes$-忠实的，也就是说，该超积满足定义 *2.28*的条件 *(a)*。*(b)* 不存在任何张量三角函子 $\prod_{\mathcal{U}}\mathrm{Perf}(\kappa_n)\to\mathcal{T}$ 到某个 *tt*-域 $\mathcal{T}$。特别地，$\prod_{\mathcal{U}}\mathrm{Perf}(\kappa_n)$ 不满足定义 *2.28*的条件 *(b)*

证明。$\prod_{\mathcal{U}}\mathrm{Perf}(\kappa_n)$ 中每个非零紧对象都是 $\otimes$-忠实的，因为每个非零对象的余求值映射都分裂；这一点可以逐坐标验证。

为了证明 $\prod_{\mathcal{U}}\mathrm{Perf}(\kappa_n)$ 不存在任何映射指向 tt-域，考虑超积中对象 $(\bigoplus_{i=1}^{n}\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的像。由于 $\mathcal{U}$ 是非主超滤子，对于任意 $m\in$自然数集，都存在某个 $V_m\in\mathcal{U}$，使其不与区间 $[0,m-1]$相交。在 $\prod_{n\in V_m}\mathrm{Perf}(\kappa_n)$ 中，对象 $\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{1}$ 分裂出直和项 $(\bigoplus_{i=1}^{n}\kappa_n)_{n\in V_m}$，因此超积中的 X 也具有同样性质。它在任意张量三角函子下的像都不满足 Krull–Schmidt 性质，因此由 注 2.30得出结论。□

由此立即得到：

推论 2.32。 *tt*-域的集合在超积下不封闭。

注 2.33。 鉴于上述结果，人们或许会尝试仿照 $\otimes$Bal10b [的做法，将 tt-域定义为这样一种刚性紧生成张量三角范畴：其中每个非零紧对象都是]-忠实的。这一定义在超积下是封闭的；但正如我们将在下文的 注 3.29 中所展示的，具有这一性质的范畴，其行为更像是域的“幂零扩张”。

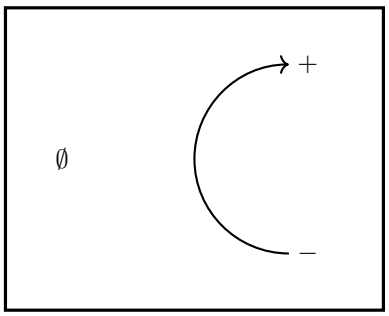
此外，Riedel 的近期工作（尤其是 [Rie25，注 4。24]）可用于证明，对于引言中提出的期望（‡），若要求该映射具有增强，使其成为一个 [Bal10b] 至少为一个 $\mathbb{E}_1$-2-环映射，则该期望对所提定义也不成立。我们指出，这并未完全排除期望（‡）在纯张量三角层面上对该定义成立的可能性，只是排除了存在某种增强版本的可能性。

至此，我们对张量三角几何所需背景知识的回顾告一段落。

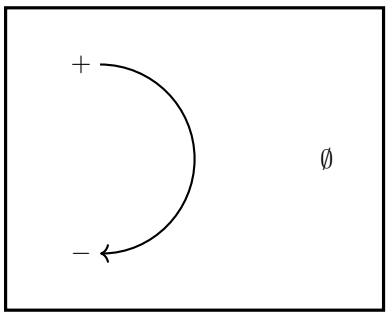
3. 自由构造

本节旨在定义并分析我们所需的自由范畴。回顾第 1.B 节，我们需要分析由可对偶对象生成的自由有理刚性 2-环，以及由带基点的可对偶对象生成的自由有理刚性 2-环。为此，首先要分析这些范畴的非有理、非稳定版本。在第一个小节中，我们讨论由可对偶对象生成的自由对称幺半范畴及其有理数域-线性化；在第二个小节中，我们将其与由带基点的可对偶对象生成的自由对称幺半范畴及其有理数域-线性化进行比较。

3.A. 由一个可对偶对象生成的自由对称幺半范畴。由一个可对偶对象生成的自由对称幺半范畴具有泛可对偶对象 X、它的张量幂 $X^{\otimes i}$，以及类似地，其对偶 $X^\vee$ 的张量幂，还有它们的张量。除了作用于 $X^{\otimes i}\otimes X^{\vee,\otimes j}$ 的对称群 $\Sigma_i\times\Sigma_j$ 之外，还有来自求值配对 $X\otimes X^\vee\to\mathbb{1}$ 和求值余配对 $\mathbb{1}\to X^\vee\otimes X$ 的额外态射。



$X=+$ 上的余求值

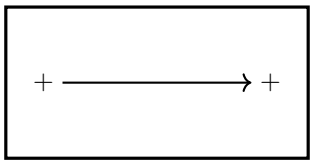


$X=+$ 的求值配对

由三角恒等式产生的图示演算很早就提示了它与流形之间的联系，这一联系由 Baez 和 Dolan 著名的协边假设 [BD95], 所形式化。该假设一般来说用协边范畴来描述由一个可对偶对象生成的自由对称幺半（∞，n）范畴。下面以非正式的方式描述维数为 1 时的答案。我们将在下文明确指出更精确的所需内容：

定义 3.1。一维定向配边范畴 $\mathsf{Cob}^{1d,\,or}$ 是一个 (∞，1)-范畴，其对象是定向闭零维流形，即每个元素都带有一个符号 $\pm$ 的有限集合；其从 M 到 N的态射是带边界 W 的定向一维紧流形，并配有一个定向识别 $\partial W\cong M\coprod\overline{N}$。

这里，$\overline{M}$ 是带有反向定向的流形 M 。



$+ = X$的恒等态射。

一般情形下（对所有 n）的证明由 Lurie 在 [Lur08], 中作了概述，但其完整性似乎尚未达成共识。另一方面，在维数为 1 时，Harpaz 给出了完整证明，因此我们可以表述如下：

定理 3.2 ([Har12],[Lur08])。 由一个对象生成的自由刚性对称幺半 ∞-范畴是$\mathrm{Cob}^{1d,or}$，其对象为定向 *0*-流形，态射为它们之间的 *1* 维定向配边。

由于本文不会涉及更高维配边或非定向配边，我们简化记号：

记号 3.3。 我们记 Cob :=$\mathrm{Cob}^{1d,or}$。

对于 $X \in$Cob 中的泛可对偶对象（即作为正定向 0 维流形的单点），我们用 $X^{i,j}$ 表示 $X^{\otimes i} \otimes X^{\vee,\otimes j}$。

关于 Cob，我们所需的确切信息可归纳如下：

命题 3.4. 设 i, j, r, s 为自然数。
(a) 在 Cob 中， X 的对称幺半维数 T 由从空流形到自身的配边圆给出，并且 $\Omega(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}}(\emptyset,\emptyset)\ T) \simeq S^1$。此外，诱导映射 $BS^1 \to$ 同态空间$_{\mathrm{Cob}}(\emptyset,\emptyset)$ 表明目标是源上的自由交换幺半群；

(b) 除非 $i - j = r - s$，映射空间 同态空间$_{\mathrm{Cob}}(X^{i,j}, X^{r,s})$ 为空；
(c) 映射空间 同态空间$_{\mathrm{Cob}}(X^{i,j}, X^{r,s})$ 作为 同态空间$_{\mathrm{Cob}}(\mathbb{1},\mathbb{1})$ 上的模，是由一个离散集自由生成的。
特别地，Cob 中的所有映射空间都是形如 $\coprod_n((BS^1)^{\times n})_{h\Sigma_n}$ 的空间的有限不交并。

证明。 (a) 由 Cob 的定义，以及拓扑群 $S^1 \to$Diff$^+(S^1)$ 的同伦等价可得。

(b) 可以给出一个拓扑证明，也可以给出一个基于 Cob 泛性质的证明。

拓扑证明： 固定一个带边界 M 的定向紧致一维流形，将其视为从 $\partial_1 M$ 到 $\partial_2 M$ 的配边，并将 M 的边界分解为 $\partial M = \partial_1 M \coprod \partial_2 M$，记作 $\partial_2 M = \coprod_1^r X \coprod \coprod_1^s X^\vee$，并且$\partial_1 M = \coprod_1^i X \coprod \coprod_1^j X^\vee$。

根据紧致一维流形分类， M 边界大小的定向计数为零。对于给定的 M，该定向计数无非是 $r - s + j - i = (r - i) - (s - j)$，这必须为零。但 $(r - i) - (s - j)$ 为零，当且仅当 $r - i = s - j$。

泛性质证明：考虑由态射 $X^{i,j} \to X^{r,s}$ 生成的 Cob 的宽子范畴 C，其中 $i - j = r - s$。显然，这些态射在复合和张量积下封闭，并且包含所有对称性/结合子

等价，因此 $C \to$Cob 是一个对称幺半函子。此外， C包含求值和余求值，$X \otimes X^\vee \to \mathbb{1}$和 $\mathbb{1} \to X^\vee \otimes X$，因此 $X \in C$是可对偶的。由此可知，Cob 的恒等态射可经由 C分解，从而证明了该结论。

(c) 每个一维配边都（唯一地）是一个单连通部分与若干个圆的不交并。接着，考虑由单连通配边张成的 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}}(X^{i,j}, X^{r,s})^{\mathrm{simple}}$ 的全子空间，它是 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}}(X^{i,j}, X^{r,s})$ 的子空间。它是一个端点固定的区间空间，因此是离散的。由上述观察可知，作为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}}(1,1)$-模，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}}(X^{i,j}, X^{r,s})$ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}}(X^{i,j}, X^{r,s})^{\mathrm{simple}}$ 上是自由的。□

接下来，我们注意到，“线性化”是一个简单的过程：

命题 3.5. 由一个对象生成的、自由刚性稳定对称幺半 ∞-范畴在 $\mathcal{D}^b(\mathbb{Q})$上的范畴由下式给出

$$\mathrm{Fun}((\mathrm{Cob})^{op}, \mathcal{D}(\mathbb{Q}))^{\omega},$$

其对称幺半结构由 ***Day*** 卷积给出。

特别地，它由 ***Yoneda*** 嵌入的像在有限余极限、降悬和收缩下生成；其映射谱是$\mathbb{Q}$-同调谱，对应于Cob中的映射空间。

更一般地，按照 [Lur17], ，下一个结果已在 $\mathcal{D}(\mathbb{Q})$ 上明确给出（针对谱的情形，但对任意稳定基底也同样适用） [Aok+25，构造 2。7]:

命题 3.6。 设 C 是一个小的对称幺半范畴。带有一个来自 C 的对称幺半函子的自由有理稳定对称幺半范畴为$\mathrm{Fun}(C^{op}, \mathcal{D}(\mathbb{Q}))^{\omega}$ ，并赋予 ***Day*** 卷积结构。

它由 ***Yoneda*** 嵌入的像经有限余极限、降悬和收缩生成，其映射谱是 C中映射空间的$\mathbb{Q}$-同调谱。

记号 3.7。 我们将（有理）仿射直线定义为

$$\mathbb{A}^1 \coloneqq \mathrm{Fun}((\mathrm{Cob})^{op}, \mathcal{D}(\mathbb{Q}))^{\omega},$$

并令 y: Cob $\to \mathbb{A}^1$ 表示 Q-线性化 Yoneda 嵌入。

备注 3.8。 严谨起见，应在此记号中添加 Q 下标；但本文第一部分不会出现非有理 2-环，而在第二部分中，我们也不会使用此记号，除非仅讨论有理范畴，因此不会造成混淆。

引理 3.9. $\mathbb{A}^1$ 中的单位对象的分次自同态环由 $\pi_*(\mathbb{1}) = \mathbb{Q}[t][t_1, t_2, t_3, \ldots]$ 给出，其中 $|t| = 0$ 且 $|t_i| = 2i$，当 $i > 0$ 时。

证明。 根据命题 3.5 以及（$\mathbb{Q}$-线性的）Yoneda 嵌入，单位对象的分次自同态环由下式给出

$$\pi_*(\mathbb{1}) = \mathbb{Q}(\mathrm{End}_{\mathrm{Cob}}(\mathbb{1})).$$

根据命题 3.4，这个映射空间可表示为

$$\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty}(BS^1).$$

该空间的 Q-同调则由以 $\mathrm{Q}[BS^1] \simeq \mathrm{Q}[x]$ 为生成元、带有 $|x| = 2$ 的自由 E_∞-Q-代数给出，因此我们得到

$$\mathrm{End}_{\mathbb{A}^1}(\mathbb{1}) \simeq \mathbb{Q}[\mathbb{Q}[x]],$$

它是一个由次数为 $2n$ 的生成元为每个 $n \geq 0$ 生成的自由代数。 □

在下一节中，我们将更一般地描述各种生成元之间的分次映射谱，参见引理 4.1。

推论 3.10。 *Balmer* 谱 $\mathrm{Spc}(\mathbb{A}^1)$满射到分次多项式环 有理数域$[t_0, t_1, t_2, \ldots]$. 中齐次素理想的谱

证明。 结合引理 3.9 以及以下事实：张量三角范畴的 Balmer 谱满射到单位对象的分次谱，至少在后者是相干的情况下，参见 [Bal10a，定理 7。3]。 □

比较映射在 $\mathrm{Spec}(\pi_*(1))$ 的泛点上的纤维表现为以下 2-环的 Balmer 谱：

记号 3.11。 令 A^1_η 为 A^1 对由所有非零齐次元素 $a \in \pi_i(1)$ 的余纤维 cofib(a: $\Sigma^i\mathbb{1} \to \mathbb{1}$) 生成的厚张量理想取商。

注 3.12。 等价地，A^1_η 可定义为沿交换环谱的映射 $\mathrm{End}_{\mathbb{A}^1}(1) \to \mathrm{End}_{\mathbb{A}^1}(1)[a^{-1}, a \in \pi_k(1)\backslash\{0\}\ k \in \mathrm{N}]$ 对 A^1 作基变换。这里，A^1_η 的下标 η 意在让人联想到一个泛点。

3.B. **带基点的可对偶对象上的自由对称幺半范畴**。 我们需要分析的第二种自由构造，是由一个带基点的可对偶对象生成的自由对称幺半范畴，即由一个配备映射 $\mathbb{1} \to X$ 的可对偶对象 X 生成。我们将此范畴记作 Cob^+。

显然，存在一个态射 i: $\mathrm{Cob} \to \mathrm{Cob}^+$，它选取对象$X$；而且不难证明，这个态射本质上是满射，因此也可以将 Cob^+ 的对象视为定向零维流形。

从直观上说，我们因此可以将 Cob^+ 视为一个配边范畴，其中允许两种新的配边：半开区间（$-\infty$，0] 以及 $[0, \infty)$，它们分别是从 $\emptyset$ 到 $+$ 和 $-$ 到 $\emptyset$ 的配边，不过要严格证明这一点则比较困难。Barkan 和 Steine- brunner 即将发表的工作 [BS] 将作为其广义一维配边假设的一个特例，给出精确证明。不过，我们并不需要这一精确刻画的全部内容，只需要 Cob^+ 的某些性质；借助他们先前的工作 [BS25]，实际上更容易建立这些性质。

关于这个范畴，我们需要的精确事实如下：

命题 3.13. 由带基点的可对偶化对象 X 生成的自由对称幺半范畴Cob^+ 以及诱导函子 i: $\mathrm{Cob} \to \mathrm{Cob}^+$ 具有以下性质：

(a) i本质满射；*(b)* i 诱导映射空间之间的等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}}(X^{i,j}, X^{r,s}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}^+}(X^{i,j}, X^{r,s})$$

每当 $r - s \leq i - j$。特别地，当 $r - s < i - j$ 时，它们都为空。特别地，i 是单位对象的自同态上的等价。

我们将证明推迟到本节末尾，先说明将如何使用 Cob^{+}。

由命题 3.6，我们还得到以下特例：

命题 3.14。 带一个带基点对象的自由刚性稳定对称幺半 ∞-范畴 *over* $\mathcal{D}^{b}$(有理数域) 由以下范畴给出

$$\mathrm{Fun}((\mathrm{Cob}^{+})^{op},\mathcal{D}(\mathbb{Q}))^{\omega},$$

其对称幺半结构由 *Day* 卷积给出。

特别地，它由 *Yoneda* 嵌入的像在有限余极限、降悬和收缩下生成，其映射谱是有理数域上Cob^{+}中映射空间的同调谱。

记号 3.15。 我们令

$$\mathbb{A}^{1,+}\coloneqq \mathrm{Fun}((\mathrm{Cob}^{+})^{op},\mathcal{D}(\mathbb{Q}))^{\omega}$$

并令 $y\colon \mathrm{Cob}^{+}\to \mathrm{A}^{1,\ +}$ 表示 Q-线性化 Yoneda 嵌入。

我们也稍微滥用一下记号，令 $i\colon \mathrm{A}^{1}\to \mathrm{A}^{1,\ +}$ 表示函子 $i\colon \mathrm{Cob}\ \to \mathrm{Cob}^{+}$ 的 Q-线性化。

构造 3.16。 由于 $\mathrm{A}^{1,\ +}$ 是由一个带基点对象自由生成的，因此存在一个 2-环映射

$$\iota\colon \mathbb{A}^{1,+}\to \mathbb{A}^{1,+}$$

它将我们的自由基点对象 $f\colon \mathbb{1}\to X$ 映至其纤维 $g^{\vee}\colon \mathbb{1}\to y^{\vee}$的对偶，其中 f 的某个纤维选择 g （此选择在可缩空间的选择意义下唯一）。

我们有：

命题 3.17。 函子 ι 是一个自等价。此外， ι是一个对合，意即 $\iota\circ\iota\simeq id_{\mathbb{A}^{1,\ +}}$。

证明。 由于 ι 是正合且对称幺半的，我们有

$$\iota(g)\simeq \mathrm{fib}(\iota(f))=\mathrm{fib}(g^{\vee})\simeq f^{\vee},$$

因此

$$\iota(\iota(f))\simeq \iota(g^{\vee})\simeq \iota(g)^{\vee}\simeq f.$$

由于 $\mathrm{A}^{1,+}$ 由带基点的可对偶对象 $f\colon \mathbb{1}\to X$自由生成，等价$\iota(\iota(f))\simeq f$可扩展为等价 $\iota\circ\iota\simeq id_{\mathbb{A}^{1,+}}$. □

后文将关键地运用这个函子，证明从 $\mathbb{A}^{1,+}$ （具体而言，$\mathbb{A}^{1}_{\eta}{}^{+,}\coloneqq \mathbb{A}^{1,+}\otimes_{\mathbb{A}^{1}}\mathbb{A}^{1}_{\eta}$）得到的局部范畴不满足 定义 2.26中的正合幂零条件。

注 3.18。 考虑到 Barkan–Steinebrunner 即将发表的工作[BS], Cob^{+} 有一个几何描述。若仅参照这一几何描述来定义函子 ι 似乎相当困难，而用泛性质来描述它则显而易见。

我们以证明命题 3.13结束本节。

回想一下，对我们而言，Cob^{+} 被定义为由一个带标记对象生成的自由对称幺半范畴，而不是一个几何对象。

首先，我们需要描述带基点对象上的自由对称幺半范畴，且不要求满足可对偶性条件：

引理 3.19 ([Hys26，引理2。1])。 对象 X 上的自由对称幺半范畴是 $\mathrm{Fin}^{\simeq}$，而配备映射 X的对象 $\mathbb{1} \to X$ 上的自由对称幺半范畴是 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{inj}}$，将 X 映至 X 的诱导映射是典范包含 $\mathrm{Fin}^{\simeq} \to \mathrm{Fin}^{\mathrm{inj}}$。

推论 3.20。 典范映射 $\mathrm{Fin}^{\simeq} \to \mathrm{Cob}$ 和 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{inj}} \to \mathrm{Cob}^{+}$ 来自 引理 *3.19* 构成了对称幺半范畴中的一个推出方形：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fin}^{\simeq} & \longrightarrow & \mathrm{Cob} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Fin}^{\mathrm{inj}} & \longrightarrow & \mathrm{Cob}^{+} \end{array}$$

证明。 通过比较泛性质即可得出这一结论。 □

因此， 命题 3.13 证明的思路是，先计算上述交换幺半群在单纯形空间中的推出，再分析结果与 Segal 空间相差多远。接下来，这一分析将用到 Barkan 和 Steinebrunner 的 Segal 化公式，参见 [BS25]。

为了分析单纯形空间中的推出，我们首先需要以下初等的组合学知识：

引理 3.21. 对于每个 $[n] \in \Delta$，映射

$$(\mathrm{Fin}^{\simeq}) \times ((\mathrm{Fin}^{\mathrm{inj}})^{[1,n]})^{\simeq} \simeq (\mathrm{Fin}^{\simeq})^{[n]} \times ((\mathrm{Fin}^{\mathrm{inj}})^{[1,n]})^{\simeq} \to ((\mathrm{Fin}^{\mathrm{inj}})^{[n]})^{\simeq}$$

由 $(X, X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_n) \to (X \to X \coprod X_1 \to X \coprod X_2 \to \ldots \to X \coprod X_n)$ 定义，是 $\mathrm{Fin}^{\simeq} \simeq (\mathrm{Fin}^{\simeq})^{[n]}$-模的一个等价。

记号 3.22. 令 N 表示将范畴嵌入到单纯形空间中的 Rezk 神经嵌入，该嵌入由 NC: $[n] \mapsto \mathrm{Hom}([n], C)$ 给出；令 L_{Seg} 表示从单纯形空间到 Segal 空间的 Segal 化函子[3]。

我们滥用记号，对交换幺半群上的诱导函子也使用同一个符号。

定义 3.23. 令

$$P^{+} := N(\mathrm{Cob}) \coprod_{N(\mathrm{Fin}^{\simeq})} N(\mathrm{Fin}^{\mathrm{inj}})$$

表示单纯形空间中交换幺半群范畴里的推出。

注记 3.24. 典范映射 $L_{\mathrm{Seg}}(P^{+}) \to \mathrm{Cob}^{+}$ 是一个完备化，因此 Cob^{+} 中的映射空间与 $L_{\mathrm{Seg}}(P^{+})$ 中的相同。

推论 3.25. 映射 $N(\mathrm{Cob}) \to P^{+}$ 逐层是空间之间的单态射。

证明。 典范映射 $\mathrm{Cob} \to P^{+}$ 逐层由下式给出

$$(\mathrm{Cob}^{[n]})^{\simeq} \to (\mathrm{Fin}^{\mathrm{inj}})^{[n]} \otimes_{(\mathrm{Fin}^{\simeq})^{[n]}} (\mathrm{Cob}^{[n]})^{\simeq}$$

因此，根据 引理 3.21，它等价于包含

$$(\mathrm{Cob}^{[n]})^{\simeq} \to (\mathrm{Fin}^{\mathrm{inj}})^{[1,n]} \times (\mathrm{Cob}^{[n]})^{\simeq}$$

在 $\emptyset \to \ldots \to \emptyset$ 的分支处。

[3]这几乎是 N 的左伴随，区别仅在于 Segal 空间与完备 Segal 空间。由于完备化不会改变映射空间 [HS25，推论 3.15]，对我们而言，这一区别无关紧要。

由于 $(\mathsf{Fin}^{\mathrm{inj}})^{[1,n]}$ 中 $\emptyset \to \ldots \to \emptyset$ 的分支是可缩的，我们得出典范映射 $N(\mathsf{Cob}) \to P^+$ 在每一级都是分支的包含，正如所声称的那样。□

现在我们需要更详细地讨论这个单态射。为此，我们需要回顾 [BS25]中项链的概念：

定义 3.26 ([BS25，定义 1.10])。一个项链是一个双点单纯形空间，等价于如下形式的楔和 $\Delta^{n_1} \vee \ldots \vee \Delta^{n_k}$，其中所有楔和$\Delta^n \vee \Delta^m$ 都取在点 $n \in \Delta^n$，$0 \in \Delta^m$，并以$0 \in \Delta^{n_1}$的像 $n_k \in \Delta^{n_k}$为双点。

这个概念的重要性在于，如果 x，$y \in X_0$ 是单纯形空间 X的 0-单形中的点，我们就可以将 $L_{\mathrm{Seg}}X$ 中从 x 到y 的映射空间计算为沿着项链的余极限，即双点单纯形空间的映射空间 $N\,N \to (X,\ x,\ y)$，参见 [BS25，定理 A]。

现在我们需要作出如下观察：

引理 3.27. 设 i,j是整数，并考虑 $X^{i,j} \in \mathrm{Cob}$作为 $N(\mathrm{Cob})_0$,中的一个点，因此也是 $(P^+)_0$ 中的一个点。设 N 是一个项链，其含义见 定义 *3.26*。

单纯形空间的映射 $f\colon N \to P^+$ 当且仅当将 N的基点映至 $X^{i,j}, X^{r,s}$（其中某些整数为 i,j,r,s，且满足 $r-s \le i-j$）时，才会通过[4] $N(\mathrm{Cob})$ 分解。

证明。 根据定义，项链 N 同构于一列自然数 $n_1,\ldots,n_k$所对应的迭代楔和 $\Delta^{n_1}\vee\ldots\vee\Delta^{n_k}$，因此映射 $N \to P^+$ 的数据就是 $(P^+)_{n_1} \times_{(P^+)_0} \cdots \times_{(P^+)_0} (P^+)_{n_k}$中的一个点。

展开等价关系 $(P^+)_n \simeq ((\mathsf{Fin}^{\mathrm{inj}})^{[1,n]})^{\simeq} \times (\mathsf{Cob}^{[n]})^{\simeq}$，可知在 $0 \in \Delta^n$ 处求值相当于先投影到 $\mathsf{Cob}^{[n]}$，再在 0 处求值；而在 $n \in \Delta^n$ 处求值，则相当于分别在 n处对两项求值，并使用显然的求和运算 $\mathsf{Fin}^{\simeq} \times \mathsf{Cob} \to \mathsf{Cob}$。

那么，设 $(a_1,\ldots,a_k)$ 是 $(P^+)_{n_1} \times_{(P^+)_0} \cdots \times_{(P^+)_0} (P^+)_{n_k}$中的一个点，其中 a_q的端点为 $(X^{i_q,j_q}, X^{r_q,s_q}) \in \mathsf{Cob}^{\simeq} \times \mathsf{Cob}^{\simeq}$。根据拉回条件，我们得知 $r_q = i_{q+1}, s_q = j_{q+1}$，且 $X^{r_q,s_q} = X^{n,m} \otimes X^{t,0}$，其中某个 $t \ge 0$ 以及某个n,m满足条件，因此存在一个映射 $X^{i_q,j_q} \to X^{n,m}$，属于 Cob。特别地，$m = s_q, n \le r_q$。由后者可知，$i_q - j_q = n - m \le r_q - s_q$。要使它们相等，$t$ 必须为 0，这意味着 $(\mathsf{Fin}^{\mathrm{inj}})^{[1,n]}$ 中的单射序列的最后一项为空，因此所有项都必须为空。由此可知，所有项都在 Cob 的像中（见推论 3.25），正如所声称的那样。□

由 [BS25定理 A], 可得以下结论，这正是命题 3.13中的 (b) 项：

推论 3.28. 映射$\mathrm{Cob} = L_{\mathrm{Seg}}(N(\mathrm{Cob})) \to L_{\mathrm{Seg}}(P^+) \to \mathrm{Cob}^+$在同态空间$(X^{i,j}, X^{r,s})$上是全忠实的，只要 $r-s \le i-j$。

证明。 根据 [BS25、定理 A],， $L_{\mathrm{Seg}}(P^+)$ 中（因此 Cob^+ 中）从 $X^{i,j}$ 到 $X^{r,s}$ 的映射空间，可以计算为对所有项链 N 上的映射$N \to P^+$取余极限，其中这些映射将基点映到 $X^{i,j}, X^{r,s}$。根据前述引理，(i,j,r,s) 上的条件保证这与如下映射 $N \to N(\mathsf{Cob})$的余极限相同：这些映射将基点映到同名对象。此余极限恰好就是 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}}(X^{i,j}, X^{r,s})$，证毕。□

[4]根据推论 3.25，必然存在唯一解。

命题 命题 *3.13*。 前一个推论恰好就是 (b) 项，因此我们只需证明 (a) 项。考虑 Cob 的全子范畴$^+$，它由 Cob 中像所张成。这是一个对称幺半子范畴，并且包含带基点对象 X。

因此，根据 Cob$^+$ 的泛性质，Cob$^+$ 的恒等态射可经由这个子范畴分解，这就证明了它们相等。□

3.C. 简短的旁述及一个例子。利用由一个带基点对象生成的自由对称幺半刚性有理加性 1-范畴（我们可以从上述构造中描述它），便可给出这个预期的例子：这是一个张量三角范畴，其中所有非零紧对象都是 $\otimes$-忠实的，但其作用更像是域的幂零扩张，而非真正的 tt-域本身。

注 3.29。考虑由一个带基点对象生成的自由幂等完备刚性对称幺半 Q-线性加性 1-范畴，记为 Q[hCob$^+$]，以便将其与命题 3.13联系起来；再将此范畴在单位对象的泛点处局部化（该点对应于变量 t上的多项式环），得到我们称为 Q[hCob$^+$]$_\eta$ 的范畴。该范畴中的不可分解对象都是形如 $X^{i,\,j}$ 的对象的直和项（并与 Rep(GL_t; Q(t)) 的简单对象构成双射）。若称此类对象的一个直和项具有分次 $i-j$，便可在该范畴的不可分解对象上定义良好的分次，使得非零态射均不降低分次。令$\mathcal{I}_2 \subseteq$Q[hCob$^+$]$_\eta$ 表示使分次至少增加 2 的态射所构成的加性 $\otimes$-理想，并考虑加性商

$$\mathcal{C} \coloneqq \mathbb{Q}[\mathrm{hCob}^+]_\eta/\mathcal{I}_2.$$

我们断言， $K^b(\mathcal{C})$ 中每个非零紧对象都是 $\otimes$-忠实的。由于我们还可以进一步商去由次数至少为 1 的态射构成的理想 $\mathcal{I}_1$ （此时我们会回到 Rep(GL_t; A)，它由定理 A.2可知是半单的），因此这个范畴的作用类似于一个“域的幂零扩张”。

我们断言， $K^b(\mathcal{C})$ 的每个非零紧对象都是 $\otimes$-忠实的。由于这个范畴满足克鲁尔－施密特性质，只需证明任意不可分解对象的维数可逆。由于 $\mathcal{C}$ 中次数为零的态射是分裂的（这可由定理 A.2推出），而次数为 ≥ 2 的态射为零，因此我们可以消去可缩链复形，从而看到每个不可分解对象 $Z_\bullet \in K^b(\mathcal{C})$ 都可由如下形式的链复形表示

$$\ldots \to Z_i \to Z_{i-1} \to \ldots,$$

其中每个 Z_i 要么为零，要么是若干不可分解对象之和，且这些对象的分次均为 $k-i$，其中 k 仅取决于 $Z_\bullet$。根据 [Del96]末尾给出的公式（另见推论 A.6），每个 Z_i 的维数都是一个多项式，记作$f_i(t)$，其首项系数为正，且 $f_i(t)$ 的次数的奇偶性与 $k-i$的奇偶性相同。特别地，我们有

$$\dim(Z_\bullet) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i f_i(t) \neq 0,$$

其中的和非零，因为我们可以考察次数最高的 $f_i(t)$s，并看到这类 $f_i(t)$s 出现的指标具有相同的奇偶性。由于该对象的维数非零，且此范畴中单位对象的自同态环是一个域，因此每个非零不可分解对象的维数都可逆，正如所要证明的那样。

4. 仿射直线 $\mathbb{A}^1$

4.A. **A 的半单性**$\mathbb{A}^1_\eta$。本小节的目标是证明 $\mathbb{A}^1_\eta$ 中定义的第 3 节 是半单的，甚至是 [BKS19定义 11]意义下的 tt-域。为此，我们首先要研究生成元的映射空间，从仿射直线的情形开始。

在张量范畴的经典语言中，$\mathbb{A}^1$ 中各个生成元之间的分次映射谱对应于 Deligne 范畴 $\mathrm{Rep}(GL_t)$ [Del07], 中各生成元的自同态环，相关内容已在附录 A中回顾:

引理 4.1。 设 i, j 为自然数。存在一个分次环同构

$$\pi_* \operatorname{End}_{\mathbb{A}^1}(X^{i,j}) \cong \pi_*(\mathbb{1}) \otimes_{\pi_0(\mathbb{1})} \operatorname{End}_{\mathrm{Rep}(GL_t)}(X^{i,j})_{\mathbb{Q}}.$$

特别地，分次自同态环仅集中于偶数次数。

更一般地，对于任意指标族 i_k, j_k,

$$\pi_* \operatorname{End}_{\mathbb{A}^1}(\bigoplus_k X^{i_k,j_k}) \cong \pi_*(\mathbb{1}) \otimes_{\pi_0(\mathbb{1})} \operatorname{End}_{\mathrm{Rep}(GL_t)}(\bigoplus_k X^{i_k,j_k})$$

且两边都集中在偶数次数上。

证明。 由命题 3.4 和命题 3.5 可知，对于任意 i_0, j_0, i_1, j_1，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}^1}(X^{i_0,j_0}, Xi_1j_1)$ 作为 $\mathrm{End}_{\mathbb{A}^1}(1)$ 上的模，是以一个离散集为基的自由模，因此这一性质在传递到 π_* 后仍然成立。具体而言，它以从 X^{i_0,j_0} 到 X^{i_1,j_1} 的（同构类）单连通配边集合为基。因此，其 π_* 确实是由其 π_0 基变换而来，我们只需识别 π_0。

结果随即由 Deligne 的 $\mathrm{Rep}(GL_t)$ 的定义得出：它是由一个可对偶对象生成的自由加性对称幺半1-范畴，参见 定义A.1；或者也可直接由 Deligne的原始定义 [Del07，定义 10。2]。 □

注记4.2。 用表示论语言来说，这些分次自同态环同构于参数为 t 、定义在环 $\pi_*(1) \cong \mathbb{Q}[t, t_1, t_2, ...]$ 上的“墙壁 Brauer 代数 $B_{i,j}(t)$”，见 [Cox+08，第 2] 节。事实上，显然，这些配边的集合与 [Cox+08] 中 $B_{i,j}(t)$ 的生成元集合之间存在双射；而两个这样的生成元相乘时产生的每个连通分支都对应于 X 的一个维数，也就是说，对应于乘以 t，因此这些生成元的乘法也对应于 $B_{i,j}(t)$ 中的乘法。

引理 4.3。 沿用第 3 节中的记号，对于任意 i, j，分次自同态环 π_* 自同态环$\mathbb{A}^1_\eta(X^{i,j})$ 同构于 *Deligne* 的 $\mathrm{Rep}(GL_t, \pi_*(\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1_\eta}))$中$X^{i,j}$ 的端同态环；对生成元的有限直和也有类似结论。

等价地，它是墙壁 *Brauer* 代数 $B_{i,j}(t)$，其参数为分次域 $\pi_*(\mathbb{1}) \simeq$有理数域$(t, t_1, t_2 \ldots)$中的 t。特别地，环 π_0(自同态环$\mathbb{A}^1_\eta(X^{i,j})$) 同构于域 $\pi_0(\mathbb{1})$中以 t 为参数的墙壁 *Brauer* 代数 $B_{i,j}(t)$。

证明。 这由引理 4.1 可得$\mathbb{A}^1_\eta$ 是通过在$\mathbb{A}^1$的单位对象中的素理想 (0) 处局部化，由 $\mathbb{A}^1$ 得到的。 □

命题 4.4. 对于所有 π_0(自同态环$\mathbb{A}^1_\eta(X^{i,j})$)，代数 $\pi_0(\mathrm{End}^{\mathbb{A}^1_\eta}(X^{i,j}))$ 均为半单。事实上，对于任意有限指标族 (i_s, j_s) $s \in S$，代数 π_0(自同态环$\mathbb{A}^1_\eta(\bigoplus_{s\in S} X^{i_s,j_s})$)均为半单。

证明. 利用 引理4.3，可由 [Del07，定理´理`10.5], 其证明见 定理 A.2。

□

引理 4.5。 设 C 是一个加性范畴。

• 设 $x \in C$ 满足 自同态环$_C(x)$ 是半单的。对于 x 的任一直和项 y，自同态环$_C(y)$也半单。

• 若 x、z 正交，且 自同态环$_C(x)$、自同态环$_C(z)$ 均为半单，则自同态环$_C(x \oplus z)$也为半单。

证明。 对于第一项，我们注意到，若 $e \in$End$_C(x)$ 是对应于 y 的幂等元，则有 End$_C($ $y)$ $\cong e$End$_C(x)e$，因此只需关注后者。现在，根据阿廷-韦德伯恩定理，我们可以假设 End$_C(x) \cong M_n(D)$，其中 D 是某个除代数，从而 e 是到某个子向量空间 $V \subset D^n$ 上的投影。于是，$eM_n(D)e \cong$ End$_D(V)$ $\cong M_k(D)$ 对某个 k 而言是半单的。

对于第二项，如果 x, z 彼此正交，那么 End$_C(x \oplus z)$ $\cong$ End$_C(x)$ $\times$End$_C(z)$，而半单环的积仍是半单的。□

定理 4.6。 范畴 $\mathbb{A}^1_\eta$ 是半单的，且具有简单单位元。特别地，该范畴是一个 *tt*-域，并且在 $\mathrm{Spec}(\pi_*(\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1}))$ 的泛点上方，$\mathrm{Spc}(\mathbb{A}^1)$ 中有唯一的点。

证明。 根据 Yoneda 引理以及第 3 节中对 $\mathbb{A}^1$ 的显式描述，$\mathbb{A}^1$,因而 $\mathbb{A}^1_\eta$，在有限余极限和收缩下由 Yoneda 嵌入的像生成，也就是说，由对象 $X^{i,j}$生成。

考虑 ho($\mathbb{A}^1_\eta$) 的子范畴 C，其对象为形如 $y \oplus \Sigma z$ 的和，其中 y, z 是某个对象的直和项，该对象形如 $\bigoplus_{s\in S} X^{i_s,j_s}$，其中指标取自某个有限族 (i_s, j_s) $s \in S$。注意，由于所有生成元都具有偶周期同伦环，对于任意这样的 y, z， y 和 Σz 在 ho($\mathbb{A}^1_\eta$) 中正交。

根据 命题 4.4 和 引理 4.5， C 中的每个对象都有一个半单自同态环。根据 2-周期性， C 在移位下也封闭，而且显然在收缩下封闭。

这直接意味着，它在$\mathbb{A}^1_\eta$ 中的原像在余纤维下封闭，因为半单范畴中对象之间的任意映射都同构于如下形式的映射：id $\oplus 0$: $x \oplus y \to x \oplus z$。因此，这个原像等于 $\mathbb{A}^1_\eta$，结合引理 2.29即可证明该断言。 □

4.B. **Spc**Spc($\mathbb{A}^1$)**的点**。 我们注意到，本节中的所有论证都可直接推广到 $\mathbb{A}^1_K :=$ $\mathbb{A}^1 \otimes_{\mathrm{End}(\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1})} K$ ，其中映射是交换环谱 End($\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1}$) $\to$ K之间的任意映射， K 是一个分次域，并且在 π_0上，$\mathbb{Q}[t] \to K$ 对任何整数 $n \in \mathbb{Z}$ 都不消灭 $(t - n)$。

我们还观察到以下内容：

构造 4.7。 由于 End($\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1}$) 是由偶数次数上的类自由生成的有理交换环谱，因此它也是形式的，即等价于由交换微分分次代数 $\mathbb{Q}[t, t_i, \in \mathbb{N}_{\geq 1}], |t_i| = 2i$ 呈示的交换环，且微分均为 0。由此可知，对于任意齐次素理想 $\mathfrak{p} \subset \pi_*$End($\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1}$)，都可以将映射$\pi_*$End($\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1}$) $\to \pi_*$End($\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1}$)/$\mathfrak{p}$ 实现为（形式的）交换环谱之间某个映射的 π_*；更进一步，映射 π_* End($\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1}$) $\to$ Frac(π_*End($\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1}$)/$\mathfrak{p}$) 也可以实现为形式交换环谱之间的映射（这里，Frac 表示分次分式域，即通过求逆所有非零齐次元素得到的分次分式域）。

我们将这一构造的结果记作 $\mathrm{End}(\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1}) \to K(\mathfrak{p})$。

注 4.8. 在特征零下，所有域都是形式光滑的，因此由变形理论可知，任何如上所述的分次域 K，作为交换环谱，都等价于某个普通域 L 的 L 或 $L[u^{\pm 1}]$，以及 $|u| = 2k,\ k \geq 1$；无论哪种情况，它都是形式的。因此，可能需要对 u 进行重新参数化，任意映射 $\mathrm{End}(\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1}) \to K$到分次域上的映射，都弱唯一地经由某个齐次素理想 $\mathfrak{p}$ 对应的 $K(\mathfrak{p})$ 分解。

Mathew 在 $K(\mathfrak{p})$ 中给出了另一种构造，见 [Mat17，定理 1。2], 但需注意（在此情形下，这只是一个小问题）：有理数域$[t, t_i, i \in \text{自然数集}_{\geq 1}]$ 不是诺特的。他还讨论了其情形下的唯一性。

注 4.9. 对于上述构造，也可以应用稍后证明的 定理 7.1。将其应用于有理 $\mathbb{E}_\infty$-环 R，可知 Perf() 的同调谱中的点与映射的等价类之间存在双射$R \to L$，其中 L 是一个偶 2-周期有理 $\mathbb{E}_\infty$-环，且 $\pi_0(L)$ 是代数闭域；等价关系为 $L_1 \sim L_2$ 当且仅当 $L_1 \otimes_R L_2 \neq 0$。由于我们处理的是偶次数类上的自由代数，可以验证，这些同调剩余域的等价类由单位对象的分次自同态环中的齐次素理想确定，并且每个这样的素理想都存在一个剩余域。

推论 4.10。 令 S 为$\mathbb{Q}[t]$ 中形如$(t - n)$的素理想。在映射 S 的逆像的补集上

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{h}}(\pi_* \mathbb{1}_{\mathbb{A}^1}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[t])$$

由$\mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t, t_i\colon\ i \in \text{自然数集}_{\geq 1}]$诱导的映射

$$\mathrm{Spc}(\mathbb{A}^1) \to \mathrm{Spec}^{\mathrm{h}}(\pi_* \mathbb{1}_{\mathbb{A}^1})$$

是一个双射。

证明。 由 命题 2.21 以及构造前的讨论可知，纤维 $\mathfrak{p} \in$谱$^{\mathrm{h}}(\pi_* \mathbb{1}^1_{\mathbb{A}}$是一个 tt-域的 Balmer 谱，因此退化为一点。 □

5. 比较函子

存在一个函子 $\mathsf{A}^{1,+} \to \mathsf{A}^1$，它将自由带基点对象映射到映射 $\mathbb{1} \xrightarrow{0} x$，也就是说，映射到指向自由对象的零映射。它在单位对象的自同态环上诱导一个等价，因此我们可以将单位对象的所有自同态求逆，从而得到一个 2-环的诱导函子 $p\colon \mathsf{A}^{1,+}_\eta \to \mathsf{A}^1_\eta$。本节的目标是利用函子 p，从关于 A^1_η的信息中获取关于 $\mathsf{A}^{1,+}_\eta$ 的信息。

核心结果如下：

命题 5.1. 函子 $p\colon \mathbb{A}^{1,+}_\eta \to \mathbb{A}^1_\eta$ 是保守的。

由此立即得到：

推论 5.2. *2*-环$\mathbb{A}^{1,+}_\eta$是局部的。

证明。 由 定理 4.6 可直接得出 $\mathbb{A}^1_\eta$ 是局部的；显然，如果一个张量三角范畴有一个到局部 tt-范畴的保守对称幺半函子，那么它本身也是局部的。 □

因此，$\mathsf{A}^{1,+}_\eta$ 是一个可能的反例，事实上也是泛例之一（用于检验正合幂零条件的泛例恰好是 $\mathsf{A}^{1,+}/\mathcal{P}$，$\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}(\mathsf{A}^{1,+})$）。

在证明之前，我们需要几个引理。

引理 5.3. 设 S 是一个非负分次环谱，M、N 是两个分次S-模。假设 M 属于分次 $\geq n+1$，且 N 属于分次 $\leq n$。那么任意分次 S-模之间的映射 $M \to N$ 都是零映射。

双模的情形也同样成立。

证明。 双模的情形要么证明相同，要么可由模的情形通过使用 $S \otimes S^{\mathrm{op}}$ 得出，因此我们只讨论模的情形。

首先，我们注意到，不考虑 S-模结构时，这显然成立：任意分次谱之间的映射 $M \to N$ 都为 0。

其次，我们注意到，由于 S 是非负分次的，所有张量 $S^{\otimes k} \otimes M$ 都处于分次 $\geq n+1$中。利用 M的巴分解，以及不带 S-模结构的分次谱情形，即可得到结论。□

推论 5.4. 设 $f\colon S \to R$ 是分次环谱之间的映射，其中 R、S 均为非负分次，并进一步假设 S 处于某个n的分次 $\leq n$ 中。若纤维 I 处于分次 ≥ 1中，则对于 $k \geq n+1$，映射 $I^{\otimes_S k} \to S$ 作为分次 S-双模之间的映射是零映射，因此忘掉分次结构后也仍为零映射。

证明。 由于 S 是非负分次的，$I^{\otimes_S k}$ 处于分次 $\geq k \geq n+1$ 中，因此可直接应用前述引理。□

对于一个环谱映射 $S \to R$（其纤维为 I），若映射 $I^{\otimes_S k} \to S$ 为零，这是一个非常强的幂零条件，并由此可得：

引理 5.5. 设 $f\colon S \to R$ 是一个环谱映射，其纤维为 I。若对于足够大的 n，映射 $I^{\otimes_S n} \to S$ 作为 S-双模之间的映射为零，那么张量 R 对 S-模是保守的。

证明。 设 M是一个 S-模。根据假设，当 n足够大时，映射 $I^{\otimes_S n} \otimes_S M \to M$ 为零。因此，只有在 $M \simeq 0$时它才可能是一个等价。但如果 $R \otimes_S M \simeq 0$，那么 $I \otimes_S M \simeq M$，所以通过典范映射，利用归纳法可得 $I^{\otimes_S n} \otimes_S M \simeq M$。□

我们将要用到的最后一个引理涉及 $\mathsf{A}^{1,+}_{\eta}$ 的具体结构，并指出了我们将如何使用前面三个引理：

引理 5.6。 谱 同态空间$_{\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}}(X^{i,j}, X^{r,s})$ 仅当 $r-s \geq i-j$ 时才非零。此外，如果 $r-s=i-j$，映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}}(X^{i,j}, X^{r,s}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}^{1}_{\eta}}(X^{i,j}, X^{r,s})$$

由 p 诱导的映射是一个等价。

证明。 对于前半部分，我们注意到，该谱是沿着某个环映射对配边范畴中映射空间的有理数域-同调进行的基变换。因此，只需证明若 $r-s<i-j$，该映射空间为空，这一点已由命题 3.13证明。

对于该断言的后半部分，注意到 p 有一个截面，其定义为唯一一个将 $X \mapsto X$ 映到相应对象的 2-环映射，因此只需证明该截面的类似断言。然而，该截面在配边范畴层面已经存在；并且由于这两个映射谱都是沿着同一个环映射，对这些配边范畴中映射空间的有理数域-同调进行的基变换，因此只需在配边范畴层面证明该断言，这一点也已由命题 3.13证明。 □

现在我们已经具备证明 命题 5.1 所需的一切。回顾一下，该命题断言 p 是保守的：

命题 *5.1* 的证明 。由 $,^{j}$ 生成的厚子范畴递增并集等于 $\mathsf{A}^{1,+}_{\eta}$，因此只需证明将其限制在其中任意一个子范畴上时具有保守性。

根据 Schwede-Shipley 定理，这等价于证明沿着 E_1-代数映射进行基变换

$$\mathrm{End}_{\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}}(\bigoplus_{i+j\leq n} X^{i,j}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{A}^{1}_{\eta}}(\bigoplus_{i+j\leq n} X^{i,j})$$

是保守的（在完美模上，尽管我们的证明表明一般情形也成立）。

注意，我们可以分别为 $\mathsf{A}^{1,+}_{\eta}$和 A^{1}_{η}中的对象 $\bigoplus_{i+j\leq n} X^{i,j}$ 赋予自然的分次：将 $X^{i,j}$ 置于次数 $i-j$，由此可将它们的自同态环规范地提升为分次环谱，并将它们之间的映射提升为分次环谱之间的映射。

根据 引理 5.6，这两个分次环都集中在非负次数上；此外，该映射在次数 0 部分是等价，因此其纤维集中在次数 ≥ 1。

我们利用推论 5.4 和引理 5.5得出结论。 □

定理 5.7。 范畴 $\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}$ 是局部的，并且对于$\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}$ ，精确幂零条件不成立，具体而言，泛纤维序列 $Y \to \mathbb{1} \to X$ 的（像）如此。

特别地，$\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}$ 的同调谱严格大于其 *Balmer* 谱。

证明。 由于 $p\colon \mathsf{A}^{1,+}_{\eta} \to \mathsf{A}^{1}_{\eta}$ 是保守的，且目标是一个 tt-域，因此我们发现 $\mathsf{A}^{1,+}_{\eta}$ 是局部的。

现在，令 $Y \xrightarrow{g} \mathbb{1} \xrightarrow{f} X$ 为与泛箭头$f\colon \mathbb{1} \to X$相关联的纤维序列，并假设存在某个 $z \in \mathbb{A}^{1,+}_{\eta}$，使得 $z \otimes f$ 或 $z \otimes g$ 是$\otimes$-幂零的。

回顾构造 3.16 和命题 3.17 中的对合 $\iota\colon \mathbb{A}^{1,+} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^{1,+}$，它将 f 映至 $g^{\vee}$。由于它是一个 2-环映射，且 $\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}$ 是通过求逆非零的单位对象的自同态来定义的，因此它也在 $\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}$上诱导出一个对合，我们仍然滥称其为 ι。

如有必要，将 z 替换为 $\iota(z)$ 后，我们可以假设 $z \otimes g$ 是 $\otimes$-幂零的。因此，$p(z) \otimes p(g) \simeq p(z \otimes g)$ 也是 $\otimes$-幂零的。

由于 z 假设为非零，命题 5.1 推出 $p(z)$也非零。然而，根据 p的定义，$p(g)$是 $\mathbb{1} \xrightarrow{0} X$ 在$\mathbb{A}^1_{\eta}$中的纤维，因此它是投影映射 $\Omega X \oplus \mathbb{1} \to \mathbb{1}$，且为分裂满射。特别地，$p(z) \otimes p(g)$也为分裂满射，其目标为 $p(z)$，而分裂满射映射若为 $\otimes$-幂零，则目标只能为零，这就产生了矛盾。□

注 5.8。与第 4 节及第 4.B 节中的讨论一样，我们注意到，这里所给论证的一个轻微变体也表明，对于任意交换环谱之间的映射 $\mathrm{End}(\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1})[\frac{1}{t-n}, n \in \mathbb{Z}] \to K$（其中 K 是分次域），基变换 $\mathbb{A}^{1,+}_{K} := \overline{\mathbb{A}^1}^{,+} \otimes_{\mathrm{End}(\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1})} K$ 也不满足精确幂零条件。

论证中唯一需要修改之处是在考虑对合 ι 时：它实际上诱导出一个等价 $\mathbb{A}^{1,+}_{K} \simeq \mathbb{A}^{1,+}_{K'}$，其中 K' 与 K是同一个分次域，但配备了不同的映射 $\mathrm{End}(\mathbb{1}^1_{\mathbb{A}}) \to K$

第II. 部分 高阶扎里斯基几何中的可构造谱

6. E_∞-可构造谱

在 [BSY22, 附录 A], 中，通过推广“代数闭域”的概念，为任何适当良好的“代数范畴”中的对象构造了可构造谱。在高阶扎里斯基几何的背景下，存在一个从可构造谱到 Balmer 谱的映射，其像恰好刻画了那些可通过映射到点状刚性 2-环而检测到的素理想。为方便读者，我们回顾零点定理型对象和可构造谱的定义与构造。

定义 6.1 ([BSY22，定义 A.1])。 设$\mathcal{A}$ 是一个可呈范畴。若$\mathcal{A}$ 紧生成、终对象是紧对象，且从终对象出发的任意映射都是等价，则称其为弱谱性。

定义 6.2 ([BSY22，定义 1.1])。 设$\mathcal{A}$ 是可呈的，并取任意对象$R \in \mathcal{A}$。若 R 是零点定理型，即 R 非零，且$\mathcal{A}_{R/}$ 中的每个紧对象要么为零，要么存在一个指向始对象的映射。

这些是要在某个一般范畴中构造可构造谱所需的关键要素。以下定理对此作了总结。

定理 6.3 ([BSY22，定理 A.3/引理 A.35])。 设 $\mathcal{A}$ 是一个弱谱范畴。那么存在唯一的函子

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{A}^{op} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{cpt},T_1,\mathrm{cl}}$$

到紧致 T_1-拓扑空间的函子，并且其间的映射为闭映射，且满足若干性质。特别地，$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathcal{A}}(R)$ 中的点对应于以下映射的等价类： $R \to S$ 对于 S 零点定理型，其中 S与 S' 当且仅当$S \coprod_R S' \neq 0$时等价。拓扑由以下规定确定：对于 A 中的所有映射 $R \to S$，$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathcal{A}}(S) \to \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathcal{A}}(R)$ 的像是闭集。

有了这些准备，我们现在可以讨论有理情形下与同调谱的关系。

命题 6.4。 刚性 *2*-环的范畴 $2-$环^{rig} 是弱谱的，因此有理刚性 *2*-环的范畴 $2-$环$^{rig}_{\text{有理数域}}$ 也是弱谱的。

证明。 紧生成性假设例如可由以下事实推出：$\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}$是紧生成的，且遗忘函子 $2-\mathsf{Ring}^{\mathrm{rig}} \to \mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}$ 是保守的、与滤过余极限相交换，并且有一个左伴随（因此该左伴随将紧对象映为紧对象，而这些对象生成 $2-\mathsf{Ring}^{\mathrm{rig}}$）。存在从终对象 $\mathbf{0}$ 到刚性 2-环 $\mathcal{C}$ 的映射，意味着 $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \simeq 0$，这又意味着 $\mathcal{C} \simeq 0$。

最后一项断言由 [BSY22，引理 A.15] 以及以下事实推出： $2-\mathsf{Ring}^{\mathrm{rig}}{}_{\mathbb{Q}} \simeq 2-\mathsf{Ring}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{Q})/}$. □

定义 6.5。 对于任意刚性 2-环 $\mathcal{C}$，将其可构造谱 定义为

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \coloneqq \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{2-\mathrm{Ring}^{\mathrm{rig}}}(\mathcal{C}).$$

在继续之前，我们先记录以下辅助引理。

引理 6.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性 *2*-环。则存在一个诱导的伴随

$$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(-)\colon \mathrm{CAlg}\left(\mathrm{Ind}\left(\mathcal{C}\right)\right) \rightleftarrows \left(2-\mathrm{Ring}^{rig}\right)_{\mathcal{C}/} : \mathrm{End}_{-}(\mathbb{1}),$$

其中左伴随是全忠实的，且右伴随与滤过余极限和有限余积可交换。

证明。 由于 $\mathcal{C}$ 是刚性的，范畴 $\mathbf{Perf}_{\mathcal{C}}(R) := \mathrm{Mod}_R(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))^{\omega}$ 中交换代数 R 在 $\mathbf{Ind}(\mathcal{C})$ 中也是刚性的，而关于诱导伴随的断言由 [Lur17，推论 4.8.5 得出。21]。由于滤过余极限与取单位对象的自同态可交换，右伴随也与滤过余极限可交换。

我们只需验证，对于在 $\mathcal{C}$下的刚性 2-环 $\mathcal{D}$和 $\mathcal{E}$ ，

$$\mathrm{End}_{\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{C}}\mathcal{E}}(\mathbb{1}) \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}) \otimes \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(\mathbb{1}),$$

将其视为 $\mathbf{Ind}(\mathcal{C})$ 中的代数。写出推出图并为相关函子命名后，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Ind}(\mathcal{D}) \\ \downarrow{\scriptstyle g^*} & & \downarrow{\scriptstyle h^*} \\ \mathrm{Ind}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{k^*} & \mathrm{Ind}(\mathcal{D}) \otimes_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})} \mathrm{Ind}(\mathcal{E}), \end{array} \tag{6.1}$$

我们注意到，可以利用右伴随在 $\mathbf{Ind}(\mathcal{C})$ 中重写代数 $\mathbf{End}^{\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{C}}\mathcal{E}}(\mathbf{1})$,

$$\mathrm{End}_{\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{C}}\mathcal{E}}(\mathbb{1}) \simeq f_*h_*(\mathbb{1}_{\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{C}}\mathcal{E}}) \simeq g_*k_*(\mathbb{1}_{\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{C}}\mathcal{E}}).$$

与 命题 2.21 中一样，我们可以利用 [Hau21，定理 4 6] 来证明方块6.1 在竖直方向上可作右伴随，从而得到一个等价 $f^*g_* \simeq h_*k^*$。将其作用于单位对象，可得

$$f_*h_*(\mathbb{1}_{\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{C}}\mathcal{E}}) \simeq f_*h_*k^*(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}) \simeq f_*f^*g_*(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}).$$

由投影公式可知

$$f_*f^*g_*(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}) \simeq (f_*f^*(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})) \otimes g_*(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}) \simeq f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}) \otimes g_*(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}).$$

最后，再次利用将 $\mathbf{End}_{\mathcal{D}}(\mathbf{1})$ 识别为单位对象在 f^* 的右伴随下的像 $f_*(\mathbb{1}_{\mathcal{D}})$，并对 $\mathcal{E}$ 作类似处理，即可得到所需结论。□

有了这一点，我们可以作如下观察，将范畴 $\mathcal{C}$ 的可构造谱与其单位对象在交换 $\mathcal{C}$-代数范畴中的可构造谱联系起来。

命题 6.7. 设 $\mathcal{C} \in 2\text{–环}^{rig}$ 是一个刚性 *2*-环。那么存在一个空间等价

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}).$$

证明. 利用由引理 6.6诱导的伴随，

$$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(-)\colon \mathrm{CAlg}\left(\mathrm{Ind}\left(\mathcal{C}\right)\right) \rightleftarrows \left(2-\mathrm{Ring}^{\mathrm{rig}}\right)_{\mathcal{C}/} : \mathrm{End}_{-}(\mathbb{1}),$$

并且右伴随与滤过余极限可交换，因此左伴随保持紧对象。

我们声称，右伴随将 Nullstellensatz 型刚性 2-$\mathcal{C}$-代数映至 CAlg (Ind ($\mathcal{C}$)) 中的 Nullstellensatz 交换代数。事实上，给定任意一个 Nullstellensatz 型刚性 2-环 $\mathcal{D}$ 及一个映射 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，考虑一个在 $\mathbf{End}_{\mathcal{D}}(\mathbf{1})$ 上紧致的非零代数 R。利用所诱导的推出方形，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\text{自同态环}_{\mathcal{D}}(\mathbb{1})) & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Perf}_{\mathcal{D}}(R), \end{array}$$

我们得到 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{D}}(R)$ 在 $\mathcal{D}$ 上是紧致的。由于上方的水平映射是全忠实的，引理 2.20 表明下方的映射也是全忠实的，特别是 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{D}}(R)$ 非零。由于 $\mathcal{D}$ 是 Nullstellensatz 型的，$\mathcal{D} \to \mathrm{Perf}_{\mathcal{D}}(R)$ 必须分裂，而对 $\mathrm{End}_{-}(\mathbb{1})$ 应用函子可得映射 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}) \to R$的一个分裂，正如所需。

给定从 $\mathcal{C}$ 到零点定理型刚性 2-环 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$的任意两个映射，当且仅当存在一个到某个零点定理型刚性 2-环 $\mathcal{F}$的映射，作为它们的共同细化时，这两个映射在谱$^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C})$中表示同一个点。将自同态环$_{-}(\mathbb{1})$作用于这样的细化，可知从这些范畴得到的零点定理型 $\mathcal{C}$-代数在谱$^{\mathrm{cons}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))}(\mathbb{1})$中确定同一个点，从而得到一个定义良好的映射

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))}(\mathbb{1}),$$

我们声称这是一个同构。

首先，考虑 Spec 中由某个映射表示的一个点$^{\mathrm{cons}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})$，其中该映射 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \to S$ 的定义域是某个零点定理型 $\mathcal{C}$-代数 S。范畴 $\mathrm{Perf}(S)$ 非零，因此根据 BSY22 命题 A31]，存在映射 $\mathrm{Perf}(S) \to \mathcal{S}'$，其中 $\mathcal{S}'$ 是某个零点定理型刚性 2-环 [$\mathcal{S}'$。这说明该映射是满射。

接下来，假设我们有零点定理型刚性 2-环 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$，且它们在 $\mathcal{C}$之下满足 $\mathcal{S} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{S}' \simeq 0$。由 引理 6.6，自同态环 $\mathrm{End}_{-}(\mathbb{1})$ 与有限余积可交换，因此

$$\mathrm{End}_{\mathcal{S}}(\mathbb{1}) \otimes \mathrm{End}_{\mathcal{S}'}(\mathbb{1}) \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{S}\otimes_{\mathcal{C}}\mathcal{S}'}(\mathbb{1}) \simeq 0$$

在 CAlg (Ind ($\mathcal{C}$)) 中，从而得到单射性。 □

为了将可构造谱与高阶扎里斯基几何联系起来，我们作如下简单观察。

引理 6.8。 *如果 $\mathcal{L}$ 是一个零点定理型刚性 2-环，那么它没有非零真 tt-理想，特别是 Balmer 谱 $\mathrm{Spc}(\mathcal{L}) \simeq *$ 是一个单点。*

证明。 如果 $\mathcal{L}$ 有一个真非零 tt-理想 $\mathcal{I}$，我们可以取一个非零的 $x \in \mathcal{I}$，并注意到 $\mathcal{L}/\langle x\rangle$ 是在 $\mathcal{L}$ 下的紧致非零代数，因此必定分裂。$\mathcal{L} \to \mathcal{L}/\langle x\rangle$ 的任何分裂都表明 $x \simeq 0$ 属于 $\mathcal{L}$，这与 x 的选取矛盾。□

推论 6.9。 *对于任意刚性 2-环 $\mathcal{C}$，存在一个典范映射*

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{C})$$

对 $\mathcal{C}$自然。

证明。 这由 引理 6.8 得出，其中该映射的显式定义是：将可构造谱中的一个点（由某个映射 $\mathcal{C} \to \mathcal{L}$ 表示，其中 $\mathcal{L}$是某个零点定理型刚性 2-环），映到映射 $\mathrm{Spc}(\mathcal{L}) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{C})$ 的像。□

我们可以精确定义比较映射的像：

命题 6.10. *设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性 2-环，并考虑任意一点 $P \in \mathrm{Spc}(\mathcal{C})$。那么，以下条件等价。*

(a) 存在一个刚性 *2*-环 $\mathcal{D}$，其满足 $\mathrm{Spc}(\mathcal{D}) \simeq *$，以及一个刚性 *2*-环之间的映射 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，使得其像

$$\mathrm{Spc}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{C})$$

恰为 *P*。
(b) 点 *P* 属于映射的像

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{C}).$$

证明。 (a) $\Longrightarrow$ (b) 考虑陈述中所述的刚性 2-环 $\mathcal{D}$ under $\mathcal{C}$。由于 $\mathcal{D}$ 的 Balmer 谱非空，$\mathcal{D}$ 尤其非零，因此存在一个映射 $\mathcal{D} \to \mathcal{L}$，将其映到某个 Nullstellensatz 型刚性 2-环 $\mathcal{L}$。由刚性 2-环映射 $\mathcal{C} \to \mathcal{L}$ 表示的 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C})$ 中的点，映射到点 $\mathcal{P}$。

(b) $\Longrightarrow$ (a) 考虑可构造谱中映到 $\mathcal{P}$ 的任意一点，并取该点的一个 Nullstellensatz 型代表 $\mathcal{C} \to \mathcal{L}$。由于 $\mathrm{Spc}(\mathcal{L}) \simeq *$，且由 $\mathcal{L}$ 表示的点映到 $\mathcal{P}$，我们可以取陈述中的 $\mathcal{D} = \mathcal{L}$。□

以下内容本质上是 [BSY22，例 A。72]:

推论 6.11. 设 R 是一个高度为 $n < \infty \mathbb{E}_\infty$ 的环谱。对于任意点 $P \in \mathrm{Spc}(\mathrm{Perf}(R))$，若 *P* 的高度为 $n > 0$，则不存在从交换2-环 $\mathrm{Perf}(R) \to \mathcal{C}$ 到2-环 $\mathcal{C}$ 的映射，使得 $\mathrm{Spc}(\mathcal{C}) \simeq *$ 中对应于点 *P*。

证明。由 [Hah16] (另见 [BSY22，定理 1.5]) 可知，若 R 是一个 L_n^f-局部零点定理型 $\mathbb{E}_\infty$-环，则 R 是有理的，因此高度为 $n = 0$。□

高度 $n > 0$ 现象并不新鲜，因为早已不存在从谱出发的 $\mathbf{E}_\infty$ 映射来选出 Spc(Perf(S)) 中对应于 Morava$K$-理论 $K(n)$ $n \in [1, \infty)$ 的点。事实证明，在正特征下，映射 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{C})$ 也可能不是满射，以下例子将说明这一点。

例 6.12。考虑由次数 0 的一个类 x 生成的自由 $\mathbf{E}_\infty$-$\mathbf{F}_2$-代数 $R = \mathbf{F}_2\{x\}_\infty$。已知（参见 [Law20，例 5.10]），$\pi_*(R)$ 是一个无限维多项式环，其生成元是作用于 x 的 Dyer–Lashof 运算序列 $Q_I(x)$。考虑局部化 $S := R_{(x)}$ 到 $\pi_*(R)$ 中的素理想 (x)。注意到弱环 R/x^2 和 $R[1/x]$ 是联合幂零保守的，因此同调谱至少由两点组成，这两点分别对应于零理想和由 R/x 生成的理想[5]，由此可验证 $\mathrm{Perf}(R)$ 的 Balmer 谱有两个点（R/x^2 是弱环这一点可由 [Bur22，引理 5.4，注 5.5] 得知）。

我们断言，不存在一个对称幺半函子 $\mathrm{Perf}(S) \to \mathcal{D}$ 到一个刚性 2-环 $\mathcal{D}$，使其 Balmer 谱为一个点，并且选出对应于 R/x 的点 P。根据命题 6.10，只需验证不存在映射 $S \to L$ 到一个零点定理型 $\mathbf{E}_\infty$-$\mathbf{F}_2$-代数 L，该代数表示 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(S)$ 中映到 P 的一个点。Riedel [Rie25 在命题 4.16], 中研究了零点定理型 $\mathbf{E}_\infty$-$\mathbf{F}_2$-代数，并证明若 L 是零点定理型的，则它是 1-周期的，且 $\pi_0(L)$ 是一个域。特别地，若存在一个 $\mathbf{E}_\infty$-环映射 $S \to L$，选出 $\pi_*(S)$ 的闭点，那么 x 的像必定在 $\pi_*(L)$ 中为零。然而，我们考虑的是 $\mathbf{E}_\infty$-环映射，它们与幂运算相容。因此，我们还必须有 $Q_1(x) \mapsto 0$ ——根据构造，$Q_1(x)$ 在S 中可逆，所以这将迫使 $L = 0$ 成立，产生矛盾。

[5]事实上，利用 定理 8.2，可以证明这正是同调谱中的仅有两点。

7. 有理情形下的可构造谱

7.A. 可构造谱与同调谱。 通常不能指望比较映射

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{C})$$

对给定的刚性 2-环而言是满射的 $\mathcal{C}$，参见推论 6.11 和例 6.12。其中的两个例子都不是有理的；事实上，有理情形足够理想，以至于比较映射实际上总是满射。事实上，我们还可以更进一步，得到本节的主定理：

定理 7.1。 设 $\mathcal{C}$ 是一个有理刚性 *2*-环。那么存在集合之间的自然同构 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Spc}^{h}(\mathcal{C})$，将 $\mathcal{C}$的可构造谱与同调谱对应起来。

注 7.2。 我们希望上述结果能激励三角张量几何学家研究满足 Nullstellensatz 条件的（有理）刚性 2-环。第三位作者即将发表的工作初步开启了对其结构的研究，尤其是其K-理论。

以下关于有理情形中带基点对象上的自由交换代数的公式，对于证明 定理 7.1 至关重要。

引理 7.3 ([KY25，推论 B]； [BD25，命题 4。6])。 设 $\mathcal{T}$ 是一个有理稳定、可呈示的对称幺半 ∞-范畴，并考虑一个 $\mathbb{E}_0$-代数（即一个带基点对象） $\mathbb{1} \to X$，它属于 $\mathcal{T}$。那么，该 $\mathbb{E}_\infty$-代数上的自由 $\mathbb{E}_0$-代数由以下滤过余极限给出

$$\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(\mathbb{1} \to X) = \varinjlim_{n} \left((X^{\otimes n})_{h\Sigma_n}\right).$$

进而，我们可以作出如下观察。

命题 7.4。 设 $\mathcal{T}$ 是一个有理、可呈示的对称幺半稳定 ∞范畴，并且单位对象 $\mathbb{1}_{\mathcal{T}}$ 是紧致的（例如，若 $\mathcal{T} = \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 是与某个有理刚性 *2*-环 $\mathcal{C}$相对应的大范畴）。映射 $f\colon \mathbb{1} \to X$ 在 $\mathcal{T}$ 中是 $\otimes$-幂零的，当且仅当其上的自由 $\mathbb{E}_\infty$-代数消失，也就是说，当且仅当

$$\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(\mathbb{1} \to X) \simeq 0 \colon \mathbb{1} \to 0.$$

特别地，对于基点映射不是 $\otimes$-幂零的任意带基点对象 $f\colon \mathbb{1} \to X$，都存在一个非平凡的$\mathbb{E}_0$-代数映射，将其映射到某个$\mathbb{E}_\infty$-代数的底层$\mathbb{E}_0$-代数。

证明。 显然，如果 f 是 $\otimes$-幂零的，

$$\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(\mathbb{1} \to X) \simeq 0 \colon \mathbb{1} \to 0,$$

因为任意 $\mathbf{E}_\infty$-代数上的乘法 R 都将映射 $\mathbb{1} \to X$ 分裂于 R之上；若该映射是 $\otimes$-幂零的，那么取足够高的 $\otimes$次幂使其为零，即可将 $\mathbb{1} \to R$ 分解为 $\mathbb{1} \to 0 \to R$，因此 $R \simeq 0$。

反过来，设

$$\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(f\colon \mathbb{1} \to X) \simeq 0 \colon \mathbb{1} \to 0.$$

根据引理 7.3，我们可以将 $\mathbf{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(f\colon \mathbb{1} \to X)$ 识别为$f^{\otimes n}_{h\Sigma_n}$ 的滤过余极限，从而将其改写为

$$\varinjlim \left(f^{\otimes n}_{h\Sigma_n} : \mathbb{1} \to X^{\otimes n}_{h\Sigma_n}\right) \simeq 0 \colon \mathbb{1} \to 0.$$

由于假设单位对象是紧致的，这意味着存在某个 n，使得 $f_{h\Sigma_n}^{\otimes n} \simeq 0$，我们还断言 $f^{\otimes n} \simeq 0$。注意，存在一个自然的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1}^{h\Sigma_n} & \xrightarrow{(f^{\otimes n})^{h\Sigma_n}} & (X^{\otimes n})^{h\Sigma_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{f^{\otimes n}} & X^{\otimes n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{1}_{h\Sigma_n} & \xrightarrow{f_{h\Sigma_n}^{\otimes n}} & (X^{\otimes n})_{h\Sigma_n}. \end{array}$$

由于我们处于有理情形，从同伦不动点到有限群 Σ_n 的作用的同伦轨道的最右侧竖直复合是一个等价，其逆由范数映射 Nm 的一个倍数给出（具体而言，是 $\frac{1}{n!}$ Nm）。类似地，由于 Σ_n 在 $\mathbb{1}^{\otimes n} \simeq \mathbb{1}$上的作用是平凡的，最左侧的两个竖直映射都是等价；事实上，第一个最左侧竖直映射可以识别为恒等映射，第二个则可以识别为乘以 $n!$。特别地，我们有 $f^{\otimes n}$经由 $(f^{\otimes n})^{h\Sigma_n}$分解，而它等价于 $(f^{\otimes n})_{h\Sigma_n}$；后者又是零伦的，因此 $f^{\otimes n}$ 是零伦的。□

下一步是通过计算零点定理型对象的同调谱，最终建立同调谱与可构造谱之间的联系。

引理 7.5. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有理刚性 *2*-环，且 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ 是一个零点定理型交换代数对象。那么，范畴 $\mathcal{C}$ 中 ***perfect*** A-模的同调谱，$\mathrm{Spc}^h(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(A))$，由单个点组成。

证明。 考虑两个点

$\mathfrak{m}_1$ 和 $\mathfrak{m}_2$ 属于 $\mathrm{Spc}^h(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(A))$。根据备注 2.11 取相应的“剩余域”，我们得到相应的弱环 $E_{\mathfrak{m}_i}$ 在 A之上。

由于 A-$\mathrm{Mod}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ 中由 $A \to E_{\mathfrak{m}_i}$ 给出的带基点对象是一个弱环，因此基点映射不可能是 $\otimes$-幂零的。应用 命题 7.4，我们可以找到非零的 $\mathbb{E}_\infty$-A-代数 L_i，它们位于 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 中，并且存在带基点对象之间的映射

$$A \to E_{\mathfrak{m}_i} \to L_i,$$

由于 L_i 作为 A-代数非零，它们在 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ 中也非零，因此存在 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ 中的零点定理型对象 S_i，以及映射 $L_i \to S_i$。

由于 A被选为零点定理型代数，根据 [BSY22，命题 A31],，其可构造谱只包含一个点， $S_1 \otimes_A S_2 \neq 0$。由此可得 $L_1 \otimes_A L_2 \neq 0$，进而可得 $E_{\mathfrak{m}_1} \otimes_A E_{\mathfrak{m}_2} \neq 0$。应用命题 2.12，又可推出 $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$。由于这些点是任意选取的，这就证明了该断言。□

推论 7.6。 设 $\mathcal{C}$ 是一个有理刚性 *2*-环。对于任意零点定理型代数$A \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$，范畴 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(A)$ 中的每个非零对象都是 $\otimes$-忠实的；等价地说，它的余评价映射可分裂。

证明。 首先注意，对于任意非零的 $X \in \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(A)$，该态射

$$\mathrm{coev}_X \colon A \to X \otimes X^\vee$$

与 X张量后分裂，因此不可能是 $\otimes$-幂零的。利用 命题 7.4，由 coev 上的自由$\mathbb{E}_\infty$-A-代数$_X$ 是一个非零紧致 A-代数，因此存在一个截面返回 A，因为 A 是零点定理型的。对于所选定的一个截面，复合态射

$$A \to X \otimes X^\vee \to \mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(\mathrm{coev}_X) \to A$$

分裂了 X 的余求值，因此 X 必须是 $\otimes$-忠实的。 □

推论 7.7。 设 $\mathcal{C}$ 是一个有理刚性 *2*-环。对于任意零点定理型代数$A \in \mathrm{CAlg}\,(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$，每个刚性 *2*-环映射

$$F\colon \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(A) \to \mathcal{D}$$

带有 $\mathcal{D} \neq 0$ 时，对于紧对象之间的映射是保守的，也就是说，$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(A)$ 中的任意非零映射 $f\colon Y \to X$（其定义域和值域都是紧对象）都满足 $F(f) \neq 0$ 属于 $\mathcal{D}$。

证明。 不失一般性， $A = \mathbb{1}$ （且 **1** 是零点定理型的）。

利用刚性，至多将 f 替换为其伴映射 $Y \otimes X^\vee \to \mathbb{1}$，我们可以不失一般性地假设 f 的目标是 **1**。若 f 非零，则映射

$$r \coloneqq \mathrm{cofib}(f)\colon \mathbb{1} \to Z$$

不是分裂单射。由于 $\mathsf{Free}_{\mathbb{E}_\infty}/\mathsf{E}_0(r)$ 是紧致交换代数，且 **1** 是零点定理型的，因此可得 $\mathsf{Free}_{\mathbb{E}_\infty}/\mathsf{E}_0(r) \simeq 0$。应用引理 7.3，这意味着 r 是 $\otimes$-幂零的，因此 $F(r)$ 也如此。由于 $\mathcal{D}$ 非零，且 $F(r)$ 的源为 $\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$，可知 $F(r)$ 不是分裂单射，因此 $F(f)$ 非零，证毕。□

注 7.8。 尽管人们似乎有理由预期，第三位作者即将发表的研究将表明，零点定理型刚性 2-环并非意义下的 tt-域： [BKS19]! 事实上，它们甚至不是 [BKS19中的定理 5 所说的纯半单对象，7] 而且严重违反了同上文献中的条件 (iii)。

无需赘言，我们可以证明本节的主定理。

定理 定理 *7.1*的证明。根据命题 6.7，我们无需处理 $\mathcal{C}$ 的可构造谱，即 $\mathsf{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C})$，而可以同样有效地处理在大范畴 $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$ 中交换代数内部定义的 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 的可构造谱，

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}).$$

$\mathsf{CAlg}\,(\mathsf{Ind}\,(\mathcal{C}))$ 中的任意零点定理型代数 S 都确定一个函子

$$\mathcal{C} \xrightarrow{-\otimes S} \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S).$$

根据 引理 7.5，我们有 $\mathsf{Spc}^h(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S))$ 是单点集，因此可以定义一个映射

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}) \to \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C}),$$

将可构造谱中的一个点对应的零点定理型交换代数 S 映射到诱导映射的像

$$* \simeq \mathrm{Spc}^h(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S)) \to \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C}).$$

若 S_1 和 S_2 是两个在可构造谱中表示同一点的 Nullstellensatz 型交换代数，那么再次由 [BSY22，引理 A。35], 可知，存在另一个 Nullstellensatz 型交换代数 S_3 带有映射 $S_1 \to S_3 \leftarrow S_2$。Spc 的函子性^h(–表明，与$S_1$ 相关联的同调谱中的点，与和 S_2相关联的点一致，因此我们的整体比较映射确实是良定义的。

为了证明该映射是满射，任取一个同调素理想 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$，并再次考虑 $\mathfrak{m}$ 处的剩余域 $E_{\mathfrak{m}}$。应用命题 7.4，可知存在一个非零的 $\mathbb{E}_\infty$-代数 L，带有一个带基点对象的映射 $E_{\mathfrak{m}} \to L$。在 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ 中选取某个 Nullstellensatz 型 $\mathbb{E}_\infty$-代数 S，并取一个映射 $L \to S$。那么，对于所有同调素理想 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}^h(\mathcal{C})$，由于根据 Bal20b，命题 5.3], , 我们有 $E_{\mathfrak{p}} \otimes E_{\mathfrak{m}} \simeq 0$ [，可得对所有素理想 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$，都有 $S \otimes E_{\mathfrak{p}} \simeq 0$。由于 $S \otimes -$ 的核对所有 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ 都包含 $E_{\mathfrak{p}}$，映射 $\mathrm{Spc}^h(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S)) \to \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$ 唯一可能命中的素理想只能是 $\mathfrak{m}$ 本身。由于 $\mathfrak{m}$ 是任意选取的，该映射是满射。

最后，我们必须证明比较映射的单射性。任取一个集合论截面

$$\mathrm{Spc}^h(\mathcal{C}) \to \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}),$$

并任意将其提升为一族 $S_{\mathfrak{m}}$ $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ 中的零点定理型交换代数，且 $S_{\mathfrak{m}}$ 表示所选截面中位于 $\mathfrak{m}$ 上方的点。若该映射不是单射，则存在一个不在此截面像中的点，它对应于一个零点定理型交换代数 S 使得$S \otimes S_{\mathfrak{m}} \simeq 0$ 对所有 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$ 均成立。现在， [Bar+24的定理 19] 告诉我们，这个族 $\{\mathcal{C} \to \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S_{\mathfrak{m}})\}_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})}$ 是联合幂零保守的。由命题 2.21可知，基变换

$$\{\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S) \to \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S) \otimes_{\mathcal{C}} \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S_{\mathfrak{m}})\}_{\mathfrak{m}}$$

也同样是联合幂零保守的。然而，我们有

$$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S) \otimes_{\mathcal{C}} \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S_{\mathfrak{m}}) \simeq \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S \otimes S_{\mathfrak{m}}) \simeq 0,$$

对所有 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$ 均成立。由于从 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S) \to 0$ 出发的映射是幂零保守的，我们可知 S 本身必为零，这与 S 是零点定理型的事实相矛盾。□

7.B. **剩余域的推论**。 利用 定理 7.1，我们可以给出某些有理刚性 2-环拥有足够多 tt-域的判据。

推论 7.9. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有理刚性 *2*-环，并且对于所有零点定理型交换 $\mathcal{C}$-代数 $L \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$，$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L)$ 按照*[BKS19]*的定义都是 *tt*-域。则对于任意交换代数 $R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$，范畴$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R)$都有足够多的 *tt*-域。

证明。 对于 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R$的同调谱中的任意一点，选取一个映射 $R \to L$到一个零点定理型交换 $\mathcal{C}$-代数 L 来表示该点；根据定理 7.1，这样的映射存在。诱导函子

$$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R) \to \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L)$$

在给定点处表现为一个 tt-域。 □

推论 7.10. 假设 $\mathcal{C}$是一个有理刚性 *2*-环，使得 *Ind(*$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 中的所有零点定理型交换代数的模范畴都是 *tt*-域。那么对于所有交换代数 $R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$，以及任意对象$X \in \mathrm{Ind}((\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R))$， X 的真实同调支撑与朴素同调支撑一致，

$$\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(X) = \mathrm{Supp}^{n}(X).$$

证明。 这由 推论 7.9 和 [Bar+26，命题 1。16]。 □

推论 7.11。 若 R 是一个有理 $\mathbb{E}_\infty$-环，则 $\mathrm{Perf}(R)$ 有足够多的 *tt*-域，而且 $\mathrm{Perf}(R)$ 的同调谱中的点都可由从 R 到有理 *2*- 周期域的映射见证。特别地，对于有理 $\mathbb{E}_\infty$-环 R上的任意模，其朴素同调支撑与其真实同调支撑一致。

证明。 这由 推论 7.9 得出，利用 [BSY22，定理 A] 对零点定理型有理 $\mathbb{E}_\infty$-环的描述：它们是代数闭的偶 2-周期域。 π_0 最后一个断言由 推论 7.10 得出。 □

7.C. **c-拓扑**。 在可构造谱一般理论的背景下， [BSY22]，引入了一种典范拓扑，我们现在回顾一下。

定义 7.12 ([BSY22，定义 A。44])。 如果一个 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 有理刚性 2-环的映射能在可构造谱上诱导出满射，则称之为 *c*-覆盖；由 c-覆盖生成的拓扑称为 *c*-拓扑。

注 7.13。 c-拓扑还有一个更为经典的名称，见于[MM94，第 115 页，(e)] ，称为稠密拓扑 (后来也称为双重否定拓扑)。

注记 7.14. 结合 定理 7.1和定理 2.19 我们发现，有理刚性 2-环的 c-覆盖恰好就是幂零保守函子。

在我们的具体情形中，我们可以利用定理 7.1 至少在局部推出 c-拓扑覆盖的一些非常好的性质。

命题 7.15. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有理刚性 *2*-环， I 是一个集合，且 L_i 是一个以 I为指标的零点定理型代数族 $L_i \in \mathrm{CAlg}\left(\mathrm{Ind}\left(\mathcal{C}\right)\right)$。任意由零点定理对象的积构成的 *c*-覆盖 $\prod_I L_i \to \prod_J L'_j$ 都可细化为一个 *c*-覆盖

$$\prod_I L_i \to \prod_J L'_j \to \prod_I L''_i,$$

其复合映射由零点定理型代数的映射 $L_i \to L''_i$ 诱导，并由原集合 I索引。

证明. 首先注意，由于 $\prod_I L_i \to \prod_J L'_j$ 是一个 c-覆盖，它是幂零保守的，因此

$$L_i \otimes_{\prod_I L_i} \prod_J L'_j \neq 0.$$

定义 L''_i 为 $\mathcal{C}$中的某个 Nullstellensatz 型交换代数，取其张量积 $L_i \otimes_{\prod_I L_i} \prod_J L'_j$。

我们发现，这些映射 $L_i \to L''_i$ 组合起来给出一个分解

$$\prod_I L_i \to \prod_J L'_j \to \prod_I L''_i,$$

接下来只需证明该复合映射是一个 c-覆盖。

为此，请回顾推论 7.7： 从 Nullstellensatz 型有理刚性 2-环出发的任意函子，在紧对象之间的态射上都是保守的；特别地，这对沿 $L_i \to L''_i$的基变换也成立。由于这一性质在取刚性 2-环的乘积时保持不变（乘积上代数的完美模范畴全忠实地嵌入其中），沿

$$\prod_I L_i \to \prod_I L''_i$$

在紧对象之间的态射上是保守的。最后，利用在紧对象之间的态射上保守的 2-环映射必然是幂零保守的这一点（例如，将任意弱环写成紧 E_0-代数的滤过余极限，并利用 $\mathbb{1} \to 0$ 是紧致的），我们得到 $\prod_I L_i \to \prod_I L_i''$ 是一个 c-覆盖，如所求。□

在推导定理 7.1的更多推论之前，我们先稍作讨论，计算零点定理型对象之积的 Balmer 谱。

引理 7.16。 设 $\mathcal{C}$ 是一个有理刚性 *2*-环， I 是一个集合， L_i 是一个以 I 为指标的零点定理代数族 $L_i \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$。那么 ***Balmer*** 谱$\mathrm{Spc}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_I L_i))$ 同胚于集合 I 的 ***Stone–ˇCech*** 紧化 βI 。

证明。 注意到存在一个全忠实包含

$$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_I L_i) \hookrightarrow \prod_I \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i),$$

因此它是幂零保守的，故根据 [Bar+24，定理 1。4]，它在 Balmer 谱上诱导一个满射。由命题 2.2中的比较映射的自然性，以及两个范畴中单位对象的自同态环相同这一事实，只需证明

$$\beta I \cong \mathrm{Spc}(\prod_I \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i)) \cong \mathrm{Spec}^{\mathrm{h}}(\pi_*(\mathrm{End}_{\prod_I \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i)}(\mathbb{1}))).$$

由于每个 L_i 都是 $\mathcal{C}$中的零点定理型交换代数，其自同态环也满足零点定理型性质；特别地，由 [BSY22定理 6，3] 是偶 2-周期代数闭域。由于单位对象的自同态环与积可交换，因此我们有

$$\mathrm{End}_{\prod_I \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i)}(\mathbb{1}) \simeq \prod_I \mathrm{End}_{\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i)}(\mathbb{1})$$

是由 I索引的偶 2-周期代数闭域的积，特别地，其分次齐次谱恰好是集合 I的 Stone–Čech 紧化βI 。

$\prod_I \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i)$的 Balmer 谱显然满射到 βI，因为对任意定义在$\mathcal{U}$ 上的超滤子 I，超积$\prod_{\mathcal{U}} \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i)$是非零的，位于点$\mathcal{U} \in \beta I$之上。注意，根据引理 2.7 和推论 7.6 ，由于每个非零对象都是 $\otimes$-忠实的，这个局部化的 Balmer 谱也只包含一个点，并且该局部化对应于素理想

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}} = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_I \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i) \colon \{i \colon x_i \simeq 0\} \in \mathcal{U}\}.$$

我们断言这些就是仅有的素理想。事实上，首先注意，对于任意 $(x_i)_{i\in I} \in \prod_I \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i)$，由 x_i 生成的理想，等于由对象 $(\delta_{x_i\neq 0})_{i\in I}$ 生成的理想，其中每个非零 $\mathbb{1}$ 所在的位置上都是 x_i ，其余位置上都是零。为此，注意这个第二个对象（事实上它是幂等元）与 $(x_i)_{i\in I}$ 张量积后仍为自身，并且根据 推论 7.6，它也是 $(x_i)_{i\in I} \otimes (x_i^\vee)_{i\in I}$的直和因子。因此，任意理想 $\mathcal{I} \subseteq \prod_I \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i)$ 都由集合

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) \coloneqq \{S \subseteq I \colon (\delta_{i\in S})_{i\in I} \notin \mathcal{I}\}.$$

一般来说，可以验证，对于任意真理想 $\mathcal{I}$，集合 $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ 是集合 I 上的一个滤子，而这给出了 I 上的滤子与 $\prod_I \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i)$ 中真理想之间的双射对应。

在这一对应下，理想$\mathcal{I}$ 是素理想，当且仅当对于任意两个集合$S_1, S_2 \subseteq I$，若 $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$，则 $S_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$或 $S_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$；这恰好就是$\mathcal{F}(\mathcal{I})$是超滤子的条件。此时，素理想$\mathcal{I}$ 无非就是$\mathcal{P}^{\mathcal{F}(\mathcal{I})}$，因此正如所声称的，它必定是唯一的素理想。□

推论 7.17. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有理刚性 *2*-环。当限制到由 $\mathcal{C}$中的 ***Nullstellensatz*** 型交换代数之积构成的全子范畴$\mathrm{NS}^{\Pi}(\mathrm{CAlg}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C})))$ 时，***Balmer*** 谱函子 $R \mapsto \mathrm{Spc}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R))$，视为取值于集合^{op}的预层，是关于 *c*-拓扑的层。

证明。 首先注意，若我们有一个形如 $\prod_I L_i \to \prod_I L_i'$ 的覆盖，其中 L_i、L_i' 是 Nullstellensatz 型交换代数，映射为 $L_i \to L_i'$，那么对于 I上的两个不同超滤子 $\mathcal{U}_1$ 和$\mathcal{U}_2$ ，我们有

$$\prod_{\mathcal{U}_1} L_i' \otimes_{\prod_I L_i} \prod_{\mathcal{U}_2} L_i' \simeq 0.$$

这意味着在……下 Balmer 谱上的两个诱导映射

$$\prod_I L_i' \longrightarrow \prod_I L_i' \otimes_{\prod_I L_i} \prod_I L_i'$$

下的两个 Balmer 谱诱导映射实际上相同，这迫使 Spc(Perf$_{\mathcal{C}}$(–)) 在这些覆盖上满足层条件。

我们仍须检验，给定一个形如

$$\prod_I L_i \to \prod_J L_j',$$

Spc(Perf$_{\mathcal{C}}(\prod_I L_i)$) 是 Spc(Perf$_{\mathcal{C}}(\prod_J L_j')$) 在来自 Spc(Perf$_{\mathcal{C}}(\prod_J L_j' \otimes_{\prod_I L_i} \prod_J L_j')$ 的两个映射下的商。利用 命题 7.15，固定该覆盖的某个如下形式的细化 $\prod_I L_i \to \prod_J L_j' \to \prod_I L_i''$。

取 I 上的一个超滤子 U，并记 U′ 为 J 上的超滤子，使得$\prod_J L_j' \to \prod_{\mathrm{U}} L_i''$可经由$\prod_{\mathrm{U}'} L_j'$分解，也就是说，它是 U 在 Spc(Perf$_{\mathcal{C}}(\prod_J L_j')$) 中的像。任取另一个映射到 Spc(Perf$_{\mathcal{C}}(\prod_I L_i)$) 中 U 的 J 上的超滤子 V，我们声称，存在一个点，在我们希望使之相等的两个映射下，分别映到 V 和 U′ 。再次利用命题 7.15（的证明），我们得到映射

$$\prod_{\mathcal{U}} L_i \to \prod_{\mathcal{U}} L_i''$$

是幂零保守的，并且根据构造，它可以通过该映射分解。

$$\prod_{\mathcal{U}} L_i \to \prod_{\mathcal{U}'} L_j', \tag{7.1}$$

因此它也必须是幂零保守的。最后，我们注意到，说ν映射到$\mathcal{U}$，就是说该映射

$$\prod_I L_i \to \prod_{\mathcal{V}} L_j'$$

经过 $\prod_{\mathcal{U}} L_i$，并且由7.1的幂零保守性可知，

$$\prod_{\mathcal{V}} L'_j \otimes_{\prod_{\mathcal{U}} L_i} \prod_{\mathcal{U}'} L'_j \neq 0,$$

由此得到 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_J L'_j \otimes_{\prod_I L_i} \prod_J L'_j))$ 的一个点，它使$\mathcal{U}'$与$\mathcal{V}$相等，如所需。
□

这使我们能够在 c-拓扑中构造 Balmer 谱函子的层化。该函子的取值落在一个并非 presentable、但我们仍然能够使用的范畴中。为此，我们先回顾一下关于取值于不一定是 presentable 的 1-范畴的层的一些基本事实。

命题 7.18。 设 C 是一个 *Grothendieck* 位点，且 $i\colon\ B \subset C$ 是该拓扑的一个子基：也就是说，它是一个全子范畴，使得每个 $c \in C$ 都存在一个由 B中的对象给出的覆盖。

在这种情况下，沿包含 i 的限制会在取值于任意完备1-范畴的层范畴之间诱导一个等价，其逆由右 *Kan* 延拓给出。

证明。 当目标范畴为集合时，这是 [AGV63，Expos´e III, Th´eor`eme4.1]。对于一般的完备目标范畴，使用 Yoneda 引理将问题归约到集合的情形。

关于逆的断言可由 [AGV63，Expos´e III,Proposition 2.3, 3)],同样归约到集合的情形得出。
□

备注 7.19。 对于 ∞-系数范畴，必须限制为超层。

推论 7.20。 设 C 为一个 *Grothendieck* 位点， B 为 C上的一个子基。设 D 为一个完备的 1- 范畴，且 $F\colon\ C^{\mathrm{op}} \to D$ 为一个预层。

若F在到CB上的限制是$F_{|B}$个层，则该层（通过前文命题给出的等价）的层，是 F的层化；特别地， F 存在层化。

证明。 设 G 是一个层。根据 命题 7.18应用于 G，限制到 B 诱导出一个同构

$$\hom(F, G) \cong \hom(F_{|B}, G_{|B})$$

现在，由于二者都是层，命题 7.18 推出这与（再次~经由限制到 B）同构于同态空间(F, G)，正如所要证明的。 □

特别地，具体而言，对于任意对象 $x \in C$，预层F 的层化在 x 处的值可通过寻找一个超覆盖 $y_1 \rightrightarrows y_0 \to x$（其中 y_0， $y_1 \in B$）并取 $\mathrm{eq}(F(y_0) \rightrightarrows F(y_1))$ 得到。这尤其意味着，这些结果对于大站点仍然成立。

推论 7.21。 设 C 是一个 *Grothendieck* 位点， B 是 C上的一个子基。设 D 是一个完备的 1-范畴，且 $F\colon C^{\mathrm{op}} \to D$ 是一个预层。

如果 F 到 B 的限制是一个层，并且 $F \to G$ 是一个映射到某个层、且在 B上局部为同构的映射，那么它就是一个层化。

可以有理地考察从 Balmer 谱到单位对象的分次自同态环中分次齐次素理想之谱的比较映射，

尽管这些函子通常并不相同，但作为迄今所得结论的推论，我们发现，相对于 c-拓扑将它们层化时，层化特别是存在的，而且二者将变得相等。

推论 7.22. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有理刚性 *2*-环。*Balmer* 谱函子的层化

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(-))\colon \mathrm{CAlg}\,(\mathrm{Ind}\,(\mathcal{C})) \to \mathrm{Set}^{op}$$

相对于 *c*-拓扑存在，并且在零点定理型对象的积上的取值与之相同。此外，这个层化等于将 R 映射到 R底层$\mathbb{E}_\infty$-环中的分次齐次素理想之谱的函子的 *c*-层化：

$$R \mapsto \mathrm{Spec}^{hom}(\pi_*(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, R))).$$

证明。 限制到零点定理型对象的积构成的子范畴时，这两个函子由引理 7.16 可知相同。现在，由于这个限制是一个 c-层（见推论 7.17），且这个全子范畴构成 c-拓扑的一个子基，因此这两个函子的层化均存在且相同（见推论 7.20）。□

在良好的情形下，我们可以对这个可构造拓扑作进一步说明。

定理 7.23。 设 $\mathcal{C}$ 为一个有理刚性 *2*-环，并考虑以下命题。

(a) 存在某个 n，使得对于所有 *Nullstellensatz* 型交换代数$L \in \mathrm{CAlg}\,(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$，范畴 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L)$ 都满足阶为 n的精确幂零条件。

(b) $\mathrm{CAlg}\,(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ 中的零点定理型对象的超积具有仅含一个点的可构造谱，也就是说，超积是点状的。特别地，在这种情况下，范畴 $\mathrm{CAlg}\,(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ 按照*[BSY22*，定义 *A63]*。的意义是谱的

(c) 对于所有 $R \in \mathrm{CAlg}\,(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$，取值于 (集合)^{op} 的 *Balmer* 谱函子$R \mapsto \mathrm{Spc}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R))$ 相对于 *c*-拓扑的层化与$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R))$一致。

(d) 对所有 $R \in \mathrm{CAlg}\,(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$，$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R))$ 上的可构造拓扑都是豪斯多夫的。

Then, (a) $\Longrightarrow$ *(b)* $\Longleftrightarrow$ *(c)* $\Longrightarrow$ *(d).*

证明。 (a) $\Longrightarrow$ (b) 设集合 I 上有一个超滤子$\mathcal{U}$，并设有一个以 I 为指标的 Nullstellensatz代数族，取值于 $\mathcal{C}$。我们要证明，超积 $\prod_{\mathcal{U}} L_i$ 的可构造谱是一个单点。根据定理 7.1，只需证明 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_{\mathcal{U}} L_i)$ 的同调谱是一个单点。利用包含的全忠实性（从而具有幂零保守性）

$$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_{\mathcal{U}} L_i) \to \prod_{\mathcal{U}} \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i),$$

只需证明 $\prod_{\mathcal{U}} \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i)$ 的同调谱是单点。根据假设，范畴 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L_i)$ 满足 ENC(n)，其超积也满足该条件，因此其同调谱与 Balmer 谱一致。引理 7.16进一步表明，超积的 Balmer 谱是单点。

(b) $\Longrightarrow$ (c) 根据 [BSY22，推论 A。46], 自然比较映射的目标

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R)) \to \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R))$$

取值于（集合）^{op} 使得目标实际上是一个层。根据推论7.21，为了检验目标是源的层化，只需检验该映射在 c-拓扑下局部为同构。

取一个 c-覆盖

$$R \to \prod_{q \in \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(R)} (L_q)$$

该覆盖由 R 的可构造谱中每个点对应的零点定理代表元的积给出，因此不妨设 $R = \prod_I L_i$ 是 Nullstellensatzian $\mathcal{C}$-代数的积。利用超积具有点状性质，以及根据 [BSY22，引理 A.58], [BSY22，引理 A.61]，CAlg (Ind ($\mathcal{C}$)) 是反分离的，可知积 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\prod_I L_q)$ 的可构造谱由集合 I 的 Stone–ˇCech 紧化 βI 给出。类似地，引理 7.16 表明，$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_I L_i)$ 的 Balmer 谱也是 I 的 Stone–ˇCech 紧化，其中素理想 $\mathcal{U} \in \beta I$ 处的局部范畴由超积 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_{\mathcal{U}} L_i)$ 给出，这说明比较映射

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\prod_I L_i) \to \mathrm{Spc}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_I L_i))$$

是一个等价，由此得证。

(c) $\Longrightarrow$ (b) 利用 推论 7.22，相对于 c-拓扑的 Balmer 谱函子的层化，与 Balmer 谱函子在 Nullstellensatz 型交换代数之积上的取值一致。称此层化为可构造谱，意味着对于这样的积 $\prod_I L_i$，比较映射诱导出一个等价

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_I L_i)) \simeq \mathrm{Spc}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_I L_i)).$$

也就是说，范畴 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_I L_i)$ 满足钢铁神经条件。将其转化为 Balmer 谱中某点上的局部环，我们发现，对于集合 I 上的任意超滤子$\mathcal{U}$ 以及一个由 I 索引的零点定理对象族，有

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_{\mathcal{U}} L_i)) \simeq \mathrm{Spc}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_{\mathcal{U}} L_i)) \simeq *,$$

也就是说，CAlg (Ind ($\mathcal{C}$)) 中的超积是点状的。

(b) $\Longrightarrow$ (d) 这由 [BSY22，命题 A62]。 □

推论 7.24. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有理刚性 *2*-环。则以下条件等价:

(a) 弱谱范畴 $\mathrm{CAlg}\,(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ 是谱的。

(b) 给定集合 I 上的一个超滤子 *U*，以及一个由 I 索引的、由零点定理型对象 $L_i \in \mathrm{CAlg}\,(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$组成的族，范畴$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_{\mathcal{U}} L_i)$满足钢铁神经条件。

(c) 给定一个集合 I，以及一个由 I 索引的、由零点定理型对象 $L_i \in \mathrm{CAlg}\,(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ 组成的族，范畴 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_I L_i)$满足钢铁神经条件。

证明。 (a) $\Longleftrightarrow$ (b) 注意，CAlg (Ind ($\mathcal{C}$)) 是谱的，当且仅当超积是点状的；也就是说，给定集合 I上的一个超滤子 $\mathcal{U}$ 以及一个以 I 为指标的

零点定理型对象 L_i 族，其谱 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathcal{C}}(\prod_{\mathcal{U}} L_i)$ 是一个单点。再次由 推论 7.6，$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_{\mathcal{U}} L_i)$ 中的每个非零对象都是 $\otimes$-忠实的，特别是 Balmer 谱只有一个点。特别地，对于这个范畴，钢铁神经条件成立，当且仅当 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathcal{C}}(\prod_{\mathcal{U}} L_i)$ 是一个单点，也当且仅当 CAlg (Ind ($\mathcal{C}$)) 是谱的。

(b)$\Longleftrightarrow$(c) 同样，由推论 7.6 可知，$\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_I L_i)$ 的 Balmer 谱由 I 的 Stone–ˇCech 紧化 βI 给出。特别地，根据钢铁神经条件的纤维判据，该范畴满足 NoS，当且仅当它在所有闭点处的局部化都满足 NoS。由于 βI 的点由 I 上的超滤子$\mathcal{U}$ 给出，而在由$\mathcal{U}$表示的素理想处，对应的局部刚性 2-环为 $\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(\prod_{\mathcal{U}} L_i)$，故结论成立。□

如果允许我们考虑所有有理刚性 2-环，那么定理 7.23 中的条件将强化为彼此等价，事实上还可以再补充几个条件:

命题 7.25。 以下条件等价

(a) 对所有有理刚性 *2*-环 $\mathcal{C}$，空间 $\mathit{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathcal{C})$ 都是豪斯多夫的。*(b)* 空间 $\mathit{Spec}^{\mathrm{cons}}(A^{1}_{\eta}{}^{+},)$ 是豪斯多夫的。*(c)* 存在某个 $n \gg 0$，使得 $A^{1}_{\eta}{}^{+}$, 中的代数 $\mathit{Free}_{\mathbb{E}_\infty/E_0}(\mathit{cofib}(f^{\vee,\otimes n}))$ 和 $\mathit{Free}_{\mathbb{E}_\infty/E_0}(\mathit{cofib}(g^{\otimes n}))$ 联合幂零保守，其中 f 是从单位对象到自由基点对象的自由映射，g 是它的纤维。*(d)* 存在 $n \gg 0$，使得对于所有包含某个对象 Z 的 *Nullstellensatz* 型有理刚性 *2*-环 $\mathcal{L}$，$A^1 \xrightarrow{Z} \mathcal{L}$ 经由 A^1_η 分解，$\mathcal{L}$ 满足 *ENC(n)*。*(e)* 存在某个 $n \gg 0$，使得所有 *Nullstellensatz* 型有理刚性 *2*-环都满足 *ENC(n)*。

(f) 范畴 $\mathit{gory}^{\,2}\text{–Rin}\ \mathrm{g}^{\mathit{rig}}_{\mathbb{Q}}\ \mathit{is}\ \mathit{sp}$谱。

证明。 (a) $\Longrightarrow$ (b)显然。

(b) $\Longrightarrow$(c) $\mathrm{A}^{1}_{\eta}{}^{+}$中的点由 $p\colon \mathrm{A}^{1}_{\eta}{}^{+} \to$、$\mathrm{A}^{1}_{\eta}$和 $p \circ \iota$确定，其剩余域分别由 E_∞-代数 $\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathrm{E}_0}(f)$ 和 $\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathrm{E}_0}(g^\vee)$ 刻画。若 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}(\mathrm{A}^{1}_{\eta}{}^{+},)$ 是豪斯多夫的，则这两个点存在互不相交的开邻域。这些开子集由函子 $\mathrm{A}^{1}_{\eta}{}^{+} \to \mathcal{C}$ 和 $\mathrm{A}^{1}_{\eta}{}^{+} \to$,$\mathcal{D}$ 表示，且满足 $\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathrm{E}_0}(f) = 0$属于 $\mathcal{C}$、$\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathrm{E}_0}(g^\vee) = 0$属于 $\mathcal{D}$，并且 $\mathrm{A}^{1}_{\eta}{}^{+} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 是幂零保守的。由于 $\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathrm{E}_0}(f) \simeq 0$属于 $\mathcal{C}$，命题 7.4 蕴含，对某个 $m \gg 0$，有 $f^{\otimes m} \simeq 0$属于 $\mathcal{C}$。这尤其意味着，$\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathrm{E}_0}(\mathrm{cofib}(f^{\vee,\otimes m}))$ 在将其基变换到 $\mathcal{C}$后，存在一个分裂映射回单位对象；进而这意味着 $\mathrm{A}^{1}_{\eta}{}^{+} \to \mathcal{C}$ 可分解经过

$$\mathbb{A}^{1,+}_{\eta} \to \mathrm{Perf}_{\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}}(\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(\mathrm{cofib}(f^{\vee,\otimes m}))) \to \mathcal{C}.$$

同样，存在某个 k，使得 $\mathrm{A}^{1}_{\eta}{}^{+} \to \mathcal{D}$,可分解为

$$\mathbb{A}^{1,+}_{\eta} \to \mathrm{Perf}_{\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}}(\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(\mathrm{cofib}(g^{\otimes k}))) \to \mathcal{D}.$$

必要时增大 k 或 m，不失一般性地，我们可以假设$k = m = n$，其中 $n \gg 0$。现在，由于 $\mathrm{A}^{1}_{\eta}{}^{+} \to \mathcal{C}$, 和 $\mathrm{A}^{1}_{\eta}{}^{+} \to \mathcal{D}$, 是联合幂零保守的，因此函子

$$\mathbb{A}^{1,+}_{\eta} \to \mathrm{Perf}_{\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}}(\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(\mathrm{cofib}(g^{\otimes n})))$$

and

$$\mathbb{A}^{1,+}_{\eta} \to \mathrm{Perf}_{\mathbb{A}^{1,+}_{\eta}}(\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(\mathrm{cofib}(f^{\vee,\otimes n}))),$$

正如所要证明的。

(c) $\Longrightarrow$ (d) 令 $\mathcal{L}$ 为一个有理 Nullstellensatz 刚性 2-环，其中包含这样一个对象 Z，并考虑任意一个纤维序列

$$Y \xrightarrow{g} \mathbb{1} \xrightarrow{f} X$$

在 $\mathcal{L}$中。若有需要，将 $f\colon \mathbb{1} \to X$ 替换为 $f \oplus 0 \oplus 0\colon \mathbb{1} \to X \oplus \Sigma X \oplus Z$ 后，我们不妨假设函子 $\mathrm{A}^{1,+} \xrightarrow{f} \mathcal{L}$ 经由 $\mathrm{A}^{1,+}_{\eta}$ 分解。

根据 (c)，存在某个 n，使得代数 $\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(\mathrm{cofib}(f^{\vee,\otimes n}))$ 和 $\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(\mathrm{cofib}(g^{\otimes n}))$ 在 $\mathrm{A}^{1,+}_{\eta}$ 上联合幂零保守，因此它们对 $\mathcal{L}$的基变换也将如此。由于这些是 $\mathcal{L}$中基于紧致 E_0-代数的自由 E_∞-代数，且 $\mathcal{L}$ 是零点定理型的，因此只要其中一个非零，从单位对象出发的映射便分裂；而它们中必有一个非零，因为它们是联合幂零保守的。

由对称性，不妨设在 $\mathcal{L}$ 中，$\mathrm{Free}_{\mathbb{E}_\infty/\mathbb{E}_0}(\mathrm{cofib}(g^{\otimes n})) \neq 0$，使得该代数分裂回 $\mathbb{1}_{\mathcal{L}}$。那么映射 $\mathrm{cofib}(g^{\otimes n})\colon \mathbb{1} \to W$ 分裂，这意味着 $g^{\otimes n} \simeq 0$，且 $\mathcal{L}$ 满足 ENC(n)。

(d) $\Longrightarrow$ (e) 利用 推论 7.7 （例如应用于 $\mathcal{C} = \mathcal{L}$ 和 $A = \mathbb{1}$），我们发现，从 Nullstellensatz 型有理刚性 2-环 $\mathcal{L}$ 出发的任意函子对紧对象之间的态射都是保守的。结合推论 7.6，其告诉我们，在检验 Nullstellensatz 型有理刚性 2-环中的正合-幂零性条件时，我们总可以自由地取 $Z = \mathbb{1}$，由此可知，此类范畴 $\mathcal{L}$ 中 ENC(n) 的任何失效 $\mathcal{L}$，都会导致每个存在来自 $\mathcal{L}$的映射的 Nullstellensatz 型有理刚性 2- 环 $\mathcal{L}'$ 都出现类似的失效。

剩下要证明的是，任意零点定理型 $\mathcal{L}$ 都存在一个映射，指向另一个满足 (d) 中假设的零点定理型刚性 2-环 $\mathcal{L}'$。为此，利用$\mathcal{D}^b(\mathrm{Q}) \to \mathrm{A}^1_{\eta}$ 是幂零保守的，因此 $\mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes \mathrm{A}^1_{\eta}$也如此，特别是目标非零。任取一个映射 $\mathcal{L} \otimes \mathrm{A}^1_{\eta} \to \mathcal{L}'$ 到某个零点定理型刚性 2-环 $\mathcal{L}'$，即可得到一个映射 $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$，其中 $\mathcal{L}'$ 满足 (d) 中的假设。

(e) $\Longrightarrow$ (f) 由于可以证明 $2\text{–}\mathrm{Ring}^{\mathrm{rig}}_{\mathbb{Q}}$ 是反分离的，剩下要证明超积是点状的。根据 定理 7.1，这等价于证明：对任意集合 I上的超滤子 $\mathcal{U}$，以及一个以 I 为指标的零点定理型刚性 2-环集合 $\mathcal{L}_i$，其超积 $\prod_{\mathcal{U}}\mathcal{L}_i$ 的同调谱由单点构成。由于其 Balmer 谱是单点（再次因为每个对象都是 $\otimes$-忠实的），这等价于该积满足钢铁神经条件；而由局部性，这又等价于该范畴中的精确幂零条件。由于满足 ENC(n) 的局部范畴的超积仍然是局部的，并且仍满足 ENC(n)，结论得证。

(f) $\Longrightarrow$(a) 这由 [BSY22，定理 A 得出。65]。 □

注 7.26. 既然 Nullstellensatz 型有理刚性 2-环很可能 应称为 tt-域，那么如果有理刚性 2-环中的超积并非点状，这就意味着我们不认为某种良好定义的“tt-域”的超积仍会是 tt-域。这将是与经典代数几何的一个分歧点；当然，在经典代数几何中，域的超积仍是域。

8. $\mathbb{E}_n$-可构造谱

8.A. **$\mathbb{E}_n$-可构造谱**。 我们已经看到，刚性 2-环中单位对象的 $\mathbb{E}_\infty$-可构造谱甚至未必能满射到 Balmer 谱。与此相反，事实证明，固定任意有限 $n \geq 1$ 并使用 $\mathbb{E}_n$-可构造谱后，借助 Burklund 的工作，这个问题基本上可以解决 [Bur22]。就本节而言，最自然的研究范围是刚性 $\mathbb{E}_n$-2-环， $n \geq 3$。我们给出以下定义。

定义 8.1. 设 $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$ 为一个刚性 $\mathbb{E}_m$-2-环的 Ind 范畴。对于任意$1 \leq n \leq m$，以及任意 $A \in \mathsf{Alg}_{\mathbb{E}_n}(\mathsf{Ind}(\mathcal{C}))$，令

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathbb{E}_n}(A) \coloneqq \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_n}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))}(A)$$

为 A 在 $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$ 中 $\mathbb{E}_n$-代数对象的弱谱性[6] 范畴中的可构造谱。

本小节的主要目标是证明以下定理。

定理 8.2. 设 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 为一个刚性$\mathbb{E}_m$-2-环的 *Ind* 范畴。则对于所有$1 \leq n < m$，存在集合之间的自然等价

$$\mathrm{Spc}^h(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathbb{E}_n}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}).$$

作为该定理的推论，我们可以为同调谱赋予一种新的拓扑：可构造拓扑。在通常的拓扑下，同调谱甚至不一定是 T_0，但在可构造拓扑下，它就变成了T_1!

注 8.3。 通过可构造拓扑定义的拓扑，可能与通过 [BW25] 定义的拓扑一致；这是借助同调谱与其"闭 Zeigler 谱"$\mathsf{KZg}^{\otimes}{}_{\mathrm{CI}}(-)$之间的识别得到的，而后者自然带有 T_1- 空间的拓扑。

在给出证明之前，我们先介绍一些关于同调谱的一般性结果。

命题 8.4。 设 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 是一个刚性$\mathbb{E}_m$-2-环的 *Ind* 范畴，并取任意一个 $1 \leq n \leq m$。设 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$为一个同调素理想， $E_{\mathfrak{m}}$ 为对应的同调剩余域。记 $E_{\mathfrak{m}} = \mathrm{cofib}(v\colon I_{\mathfrak{m}} \to \mathbb{1})$。

那么，对象

$$E^n_{\mathfrak{m}} \coloneqq \mathrm{cofib}(v^{n+1}\colon I_{\mathfrak{m}}^{\otimes n+1} \to \mathbb{1})$$

是一个 $\mathbb{E}_n$-代数，其同调支集为 $\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(E^n_{\mathfrak{m}}) =\{\mathfrak{m}\}$。

证明。 由于 $E_{\mathfrak{m}}$ 是一个弱环，因此它存在右单位乘法。固定一种右单位乘法后，我们发现 $E^n_{\mathfrak{m}}$ 通过 $\mathbb{E}_n$-代数结构继承自 [Bur22，定理 1。5]。由于 $E_{\mathfrak{m}} \otimes v$ 是零伦的，因此$E_{\mathfrak{m}} \otimes E^n_{\mathfrak{m}} \neq 0$，所以 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(E^n_{\mathfrak{m}})$。

另一方面，若存在任意一个不同于 $\mathfrak{m}$ 的 $\mathfrak{m}' \in \mathsf{Spc}^h(\mathcal{C})$，则 $E_{\mathfrak{m}'} \otimes E_{\mathfrak{m}} \simeq 0$意味着 $E_{\mathfrak{m}'} \otimes v$ 是一个等价，因此 $E_{\mathfrak{m}'} \otimes v^{n+1}$也如此，从而$E_{\mathfrak{m}'} \otimes E^n_{\mathfrak{m}} \simeq 0$ 亦然。□

我们将用到以下简单的观察。

[6]参见 [BSY22，注 A。10]。

引理 8.5。 如果 A、B 是$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$中的弱环，并且存在一个映射

$$A \to B$$

带基点对象的，那么

$$\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(B) \subseteq \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A).$$

特别地，若 $B \neq 0$ ***and*** $\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A)$ 是一个单点，那么 $\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(B) = \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A)$。

证明。 假设给定了 $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A)$，因此 $E_{\mathfrak{m}} \otimes A \simeq 0$。注意，$E_{\mathfrak{m}} \otimes B$ 是弱环的张量积，因此其自身也是一个弱环。利用映射

$$\mathbb{1} \to E_{\mathfrak{m}} \otimes B$$

可分解为

$$\mathbb{1} \to E_{\mathfrak{m}} \otimes A \simeq 0 \to E_{\mathfrak{m}} \otimes B$$

零映射，我们还可以看到必有 $E_{\mathfrak{m}} \otimes B \simeq 0$ 。 □

命题 8.6. 设 A, B 是刚性 $\mathbb{E}_m$-2-环$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 的 ***Ind*** 范畴中的 $\mathbb{E}_n$-代数，其中 $1 \leq n < m$。那么，我们有

$$\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A \coprod B) = \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A) \cap \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(B) = \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A \otimes B),$$

并且特别地， $A \coprod B \neq 0$ 当且仅当 $A \otimes B \neq 0$。

证明。 由于 $n < m$, $A \otimes B$ 可以具有规范的 E_n-代数结构，并且映射 $A \to A \otimes B$, $B \to A \otimes B$ 可以规范地赋予 E_n。

因此，存在一个 E_n-代数映射

$$A \coprod B \to A \otimes B$$

根据泛性质， 引理 8.5 保证

$$\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A \otimes B) \subseteq \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A \coprod B).$$

类似地，E_n-代数映射

$$A \to A \coprod B \quad \text{and} \quad B \to A \coprod B$$

证明

$$\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A \coprod B) \subseteq \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A) \cap \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(B).$$

由于 $\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A \otimes B) = \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(A) \cap \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(B)$，根据 命题 2.14，我们得到所需的等式。

最后的结论由 命题 2.16 得出。 □

现在，我们终于可以开始引入可构造谱，并借此描述零点定理型 E_n-代数的同调支撑:

命题 8.7。 设 L 是 $\mathbb{E}_n$-代数，它是零点定理型的，且属于 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$，其中 $n < m$。那么， L 的同调支撑 $\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(L)$ 在同调谱中只包含一个点。

证明。 确实，假设 $\mathfrak{m}$和 $\mathfrak{m}'$ 是 $\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}$ 中两个不同的点(L)。根据命题 8.6，以下两个 $\mathbb{E}_n$-代数在 L

$$E^n_{\mathfrak{m}} \coprod L, E^n_{\mathfrak{m}'} \coprod L$$

非零，但

$$(E^n_{\mathfrak{m}} \coprod L) \coprod (E^n_{\mathfrak{m}'} \coprod L) \simeq 0.$$

这又意味着

$$(E^n_{\mathfrak{m}} \coprod L) \coprod_L (E^n_{\mathfrak{m}'} \coprod L) \simeq 0$$

也一样。

这告诉我们，由这些代数诱导的两个映射在可构造谱上的像互不相交。然而，我们假设 L 是零点定理型的，因此根据 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathbb{E}_n}(L)$，谱是一个单点 [BSY22，命题 A.31(2)]。因此，这些代数中必有一个的可构造谱实际上为空，而该代数于是必为零，这就产生了矛盾。□

最后，我们可以证明这个定理。

定理 定理 *8.2* 的证明。 我们断言，该映射

$$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathbb{E}_n}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}) \to \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$$

将源中的任意一点（由零点定理型 $\mathbf{E}_n$-代数 L 表示）映到点 $\mathsf{Supp}^{\mathrm{h}}(L)$，是一个双射。

对于单射性，注意，若 L_1 和 L_2 是两个零点定理型 $\mathbb{E}_n$-代数，且 $\mathsf{Supp}^{\mathrm{h}}(L_1) = \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(L_2)$，则 命题 8.6 意味着

$$\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(L_1 \coprod L_2) = \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(L_1) \cap \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(L_2) \neq \emptyset,$$

并且尤其是 $L_1 \coprod L_2 \neq 0$，因此 L_1，L_2 在可构造谱中表示同一个点。

对于满射性，任取一个 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$，取自$\mathbb{E}_n$-环 $E^n_{\mathfrak{m}}$，该环来自 命题 8.4，并在其下选取某个零点定理型$\mathbb{E}_n$-代数 L。由于 L 非零，并且

$$\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(E^n_{\mathfrak{m}}) = \{\mathfrak{m}\}$$

是单元素集，引理 8.5 表明

$$\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(L) = \{\mathfrak{m}\}$$

也成立。由于这个素理想 $\mathfrak{m}$ 是任意的，满射性得证。□

注 8.8。 给定一个 $\mathbf{E}_n$-代数 R，也可以对任意 $1 \leq k \leq n$ 将 R 视为 $\mathbf{E}_k$-代数，并以此定义一个可构造谱。一般而言，作为集合，它与同调谱不同。例如，考虑一个域K，并取一个变量为 $K[t]$ 的多项式环，其上的多项式为 K。映射

$$K[t] \to \mathrm{End}_K\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} K\right)$$

将 t 送到端同态 $e_i \mapsto e_{2i}$，会在 $\mathbf{E}_1$-可构造谱上诱导一个反向映射。我们声称，此映射的像不包含 $K[t]$ 的通常（交换）谱。

首先请注意，由于 t 映射到一个具有左逆的元素，我们无法找到到这个代数的映射与满足 $t = 0$ 的剩余域之间的公共分解。

同理，我们可以选取两个左逆，例如 f: $e_{2i} \mapsto e_i$, $e_{2i+1} \mapsto 0$ 和 g: $e_{2i} \mapsto e_i$, $e_{2i+1} \mapsto e_i$，使得 $g - f$ 有右逆，因此不存在映射到满足 $f = g$ 的目标的代数映射。这说明不存在映射到某个非零代数，使得 t 有右逆。特别是，我们无法

为这个结合环映射与 $K[t]$ 的一个剩余域找一个共同细化，其中 $t \neq 0$，因此，将 $K[t]$ 视为结合代数时的可构造谱严格大于其在交换环中的可构造谱（后者与其同调谱一致）。

8.B. **定理 8.2 是尖锐的**。现在我们将给出一个具体例子，说明 $n < m$ 在 命题 8.6 中的要求是尖锐的，并借此证明 定理 8.2中也有同样的结论。本节中，固定一个 $n \geq 4$，并考虑由两个次数为 0 的生成元 $\mathbb{E}_n$-$\mathbb{F}_2$-代数 $R :=\mathbb{F}_2\{x,\ y\}_n$。范畴 $\mathrm{Perf}(R)$ 自然是一个刚性$\mathbb{E}_{n-1}$-2-环，下面我们将对其进行分析。

记号 8.9。固定由两个生成元 x, y生成的自由 $\mathbf{F}_2$-李代数的一组基 E，使得

(a) 生成元 x, y 属于 E。(b) 生成元之间的括号 $[x, y]$属于 E。(c) E 中的每个基向量都可以写成仅包含括号、xs 和 ys 的表达式。

基的具体选择本身并不那么重要，只要它满足上述性质即可。

命题 8.10. R 的同伦环同构于一个分次多项式环：

$$\pi_*(R) \simeq \mathbb{F}_2[Q_I(e) \colon e \in E]$$

对于非负整数的容许序列 $I = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ 以及基向量 $e \in E$。基向量 e 的分次由以下规则确定：$|x| = |y| = 0$，以及 $|[-,-]| = n-1$。

证明. 这由 [Law20，定理 5。5]. □

构造 8.11. 考虑 $\mathbb{E}_{n-1}$-余纤维 x：$\mathbb{F}_2 \to R$，记作 $R/\!\!/^{n-1}x$。根据 [Rie25，引理 2。2]，可得

$$R/\!\!/^{n-1}x \simeq R \otimes_{\mathbb{F}_2\{x\}_n} \mathbb{F}_2,$$

特别地，这个代数的同伦群由 R 除以正则序列 $\{Q_I(x)\}$（遍历所有容许序列 I）得到的商给出。

命题 8.12。存在 $\mathbb{E}_{n-1}$-R-代数 A，B 使得 $A \otimes_R B \neq 0$，但$A \coprod_R B \simeq 0$ 在 $\mathbb{E}_{n-1}$-R-代数范畴中。特别是，$n < m$ 命题 命题 *8.6* 陈述中的条件是必要的。

证明。取 $A := R/\!\!/^{n-1}x[([x, y]^{-1})]$ 作为 构造 8.11中的代数的局部化，并令 $B := R/\!\!/^{n-1}y$。那么，根据 命题 8.10的明确描述，我们得到

$$A \otimes_R B \simeq A/(Q_I(y))_{I \text{ admissible}} \neq 0.$$

另一方面，在$\mathbb{E}_{n-1}$-R-代数中取推出，并再次使用[Rie25，引理 2。2],我们得知

$$\begin{aligned} A \coprod_R B \simeq R/\!\!/^{n-1}(x, y)[([x, y])^{-1}] &\simeq R[([x, y])^{-1}] \otimes_{\mathbb{F}_2\{x,y\}_n} \mathbb{F}_2 \\ &\simeq \mathbb{F}_2[0^{-1}] \simeq 0, \end{aligned}$$

正如所希望的那样。 □

我们现在的目标是进一步证明：定理 8.2 对 Perf(R不成立，若我们考察该刚性$\mathbb{E}_{n-1}$ 可构造谱$\mathbb{E}_{n-1}$-2-环。为此，我们需要稍微分析一下 R的某些剩余域。

为使这个例子的细节更简单，我们暂且假设 $n \geq 6$ ；不过，只要更加仔细一些，应该也能将其推广到 $n = 4$，5。

命题 8.13. 由以下内容定义的$\mathbb{E}_{n-2}$-R-代数

$$k := \mathrm{Frac}(R/\!\!/^{n-1}x \otimes_R R/\!\!/^{n-1}y)$$

将$\mathbb{E}_{n-2}$-R-代数中所有非零齐次多项式取逆；该代数由$\mathbb{E}_{n-1}$-商分别对 x 和 y 取张量积而得。它是$\mathrm{Perf}(R)$的同调谱中某个点的剩余域。

证明。 由于 $n \geq 6$，该代数 k 至少是 $\mathbb{E}_4$, ，因此 Perf(k) 是一个刚性 $\mathbb{E}_{n-3}$-2-环（其中 $n-3 \geq 3$），由单位对象生成；它具有 $\pi_*(k)$ 是一个分次域，事实上是一个 tt- 域。由于 $\pi_*(k)$ 作为一个 $\pi_*(R)$-模是不可分解的，结论由 [BC21, 定理 3.1]得证。 □

我们现在的目标是构造一个 $\mathbb{E}_{n-1}$-代数，其位于 $R/\!\!/^{n-1}x[([x,y])^{-1}]$ 之下，且其同调支撑恰好是由这个剩余域 k所确定的点。由对称性，这也将构造出一个 $\mathbb{E}_{n-1}$-代数，其位于 $R/\!\!/^{n-1}y[([x,y])^{-1}]$之下，且它与前一个代数的余积必为零。这将表明，$\mathbb{E}_{n-1}$ 的可构造谱中至少有两个不同的点，其同调支撑都是点 R，从而得到所需的定理 8.2不成立的情形。

为此，我们需要找到一种方法，判断某个代数的同调支撑是否恰好为 k；我们将通过找出 R 的显式联合幂零保守覆盖来实现这一点。首先，我们注意到以下事实。

命题 8.14。 设 S 是任意一个 $\mathbb{E}_n$-$\mathbb{F}_2$-代数，并考虑一个类 $x \in \pi_0(S)$。那么，以下映射族

$$\{S \to S[Q_I(x)^{-1}] \colon I \text{ admissible}\} \cup \{S \to S/\!\!/^{n-1}x\}$$

是联合幂零保守的。

证明。 利用 定理 8.2，只需检验相对于 $\mathbb{E}_{n-2}$-S-代数 A，这有助于我们处理这样一种情形：我们实际上可以讨论 A-模范畴作为刚性 $\mathbb{E}_{n-2}$-2-环（回想一下，我们暂且假设 $n \geq 6$ ）。

假设对于所有容许序列 I， $A[Q_I(x)^{-1}] \simeq 0$ 。那么，对于所有此类 I， $Q_I(x)$ 必须在 A 上幂零作用。特别地，纤维

$$A \to A/Q_I(x)$$

对于所有 I 都是 $\otimes$-幂零的。

再次利用

$$S/\!\!/^{n-1}x \simeq S \otimes_{\mathbb{F}_2\{x\}_n} \mathbb{F}_2 \simeq \bigotimes_I S/Q_I(x),$$

我们发现，可以将这个 $\mathbf{E}_{n-2}$-代数映射

$$A \to A \otimes_S S/\!\!/^{n-1}x \simeq \bigotimes_I A/Q_I(x)$$

写成一族具有 $\otimes$-幂零纤维的 $\mathbb{E}_0$-A-代数映射的滤过余极限。特别地，$A \to A \otimes_S S/\!\!/^{n-1}x$ 是幂零保守的，因此如果 A 非零，那么目标也非零。□

将此应用于我们的情形两次，分别取 x 和 y，并对所得幂零保守覆盖取共同细化，我们得到，

推论 8.15。映射族

$$\{R \to R[Q_I(x)^{-1}]\} \cup \{R \to R[Q_I(y)^{-1}]\} \cup \{R \to R/\!\!/^{n-1}x \otimes_R R/\!\!/^{n-1}y\}$$

是联合幂零保守的。

最后，我们还需要一个小小的断言。

命题 8.16。由 R 给出的弱环族为

$$\{R \to R[Q_I(x)^{-1}]\} \cup \{R \to R[Q_I(y)^{-1}]\} \cup \{R \to (R/\!\!/^{n-1}x \otimes_R R/\!\!/^{n-1}y)/p(\mathbf{e})^4\} \cup \{R \to k\},$$

其中 $p(\mathbf{e})$ 遍历变量 $Q_I(e)$ 中的齐次多项式，且 $e \in E\{x, y\}$ 是联合幂零保守的。

证明。取一个非零的 $\mathbb{E}_{n-2}$-代数 A 在 R之下。根据 推论 8.15，不失一般性，我们可以假设

$$A \otimes_R (R/\!\!/^{n-1}x \otimes_R R/\!\!/^{n-1}y) \neq 0.$$

由于剩余域 k 是我们正在张量化的代数在其非零齐次元素处的局部化，因此我们得到

$$A \otimes_R k \simeq 0$$

当且仅当存在某个齐次多项式

$$p(\mathbf{e}) \in \pi_*(R/\!\!/^{n-1}x \otimes_R R/\!\!/^{n-1}y)$$

它在 $A \otimes_R (R/\!\!/^{n-1}x \otimes_R R/\!\!/^{n-1}y)$ 上幂零作用。在这种情况下，我们必有

$$A \otimes_R (R/\!\!/^{n-1}x \otimes_R R/\!\!/^{n-1}y) \to A \otimes_R (R/\!\!/^{n-1}x \otimes_R R/\!\!/^{n-1}y)/p(\mathbf{e})^4$$

是 $\otimes$-幂零的。

特别是，由于 $A \otimes_R (R/\!\!/^{n-1}x \otimes_R R/\!\!/^{n-1}y)$ 是一个非零 $\mathbb{E}_{n-2}$-代数，而根据 [Bur22，引理 5，目标是一个弱环。4]，目标也必定非零，由此得证。□

现在我们可以给出反例了。

定理 8.17。令 $R := \mathbb{F}_2\{x, y\}_n$ 为由两个零次生成元 x 和 y自由生成的$\mathbb{E}_n$-$\mathbb{F}_2$-代数，其中 $n \geq 6$ 任取。考虑如下定义的$\mathbb{E}_{n-1}$-R-代数：

$$C := R/\!\!/^{n-1}(x, Q_I(y)^2)[p(\mathbf{e})^{-1}] \qquad and \qquad D := R/\!\!/^{n-1}(y, Q_I(x)^2)[p(\mathbf{e})^{-1}]$$

当 I 遍历容许序列且 $p(\mathbf{e})$ 遍历变量 $Q_I(e) \in E\{x, y\}$ 中的齐次多项式时。这两个代数均非零，同调支撑恰为 $\{k\}$，然而 $C \coprod_R D \simeq 0$。

特别是，对于任意选取的零点定理型$\mathbb{E}_{n-1}$-R-代数 L_1 在 C和 L_2 在 D之下，L_i 具有同调支撑$\{k\}$，但 L_1 和 L_2 在谱$\mathrm{Spec}^{\mathrm{cons}}_{\mathbb{E}_{n-1}}(R)$中确定了不同的点。这说明条件 $n < m$ 在 定理 *8.2*中是必要的。

证明。 由于括号 $[x,z]=0$ 在 $z=w^2$ 是类的平方时为零，$z=Q_i(w)$ 是作用于一个满足 $i<n-1$的类上的 Dyer–Lashof 运算，并且满足 $[x,Q_{n-1}w]=[w,[w,x]]$（见 [Law20，定理 5。2]），因此可知其像

$$\mathbb{F}_2\{x,Q_I(y)^2\}_n\to R$$

不与由齐次多项式 $p(\mathbf{e})$ 在 $Q_I(e)$ 中生成的乘法集合相交，其中 $e\in E\backslash\{x,y\}$，尤其是 $C\neq 0$。

由于 C 存在一个来自 $R/\!\!/^{n-1}x[([x,y])^{-1}]$ 的代数映射，而它与$R/\!\!/^{n-1}y$ （存在一个到 D 的代数映射）的推出等于零，因此只需证明 $\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(C)=\{k\}$。注意，根据构造，

$$C[Q_I(x)^{-1}]=0,\quad C[Q_I(y)^{-1}]=0,\quad \text{and}\quad C/p(\mathbf{e})\simeq 0.$$

根据命题 8.16，我们必然有 $C\otimes k\neq 0$，并且由于 $C\otimes L=$对于幂零保守覆盖中 L 的所有其他弱环均为 0，而该覆盖来自命题 8.16，$\mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(C)\subseteq \mathrm{Supp}^{\mathrm{h}}(k)=\{k\}$，正如所需。□

9. 同调谱的几何点

一般来说，我们已经看到，不能指望存在从刚性 2-环 $\mathcal{C}$ 到刚性 2-环 $\mathcal{D}$ 的刚性 2-环映射，使其 Balmer 谱为一个点，并且选出 Spc(𝒞) 中任意给定的点。

定理 8.2 几乎在可构造谱这一层面给出了这一结论，至少在只要求刚性 $\mathbb{E}_n$-2-环映射时是如此，但它存在以下缺陷：若 $\mathcal{C}$ 是一个刚性 $\mathbb{E}_n$-2-环，那么它的同调谱中的点对应于 Ind(𝒞) 中的零点定理型 $\mathbb{E}_n$-代数。然而，若 L是这样一个零点定理型 $\mathbb{E}_n$-代数，就没有理由认为它在 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_{n-1}}(\mathrm{Ind}(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(L)))$ 中也是零点定理型，因此我们无法通过 定理 8.2 保证它的同调谱是一个点。

事实证明，借助证明 定理8.2时所用的方法，我们可以通过证明至少当 k 足够大时， $E^k_{\mathfrak{m}}$ 的可构造谱是点，来修补这一“缺陷”，从而获得足够多的“高度结构化几何点”。

9.A. **刚性$\mathbb{E}_n$-2-环的同调谱的几何点**。本节的主定理如下：

定理 9.1. 设 $\mathcal{C}$ 是某个 $m \geq 4$ （可能为 $m = \infty$）的刚性$\mathbb{E}_m$-2-环，并且

$$\mathfrak{m} \in \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$$

是一个同调素理想。那么，对于任意 $3 \leq n < m$，存在一个刚性$\mathbb{E}_n$-2-环$\mathcal{K}$，并配备一个$\mathbb{E}_n$-2-环映射 $\mathcal{C} \to \mathcal{K}$，使得

$$\mathrm{Spc}^h(\mathcal{K}) = *$$

是一个单点，并且映射

$$\mathrm{Spc}^h(\mathcal{K}) \to \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$$

的像恰好是 $\{\mathfrak{m}\}$。

为了证明这个定理，我们需要以下结果；该结果依赖于一些内容，我们将推迟到证明本节主定理之后再介绍。术语“v- compatible”源自 [Bur22] ，稍后将对此作回顾。

定理 9.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathbb{E}_m$-幺半稳定 ∞-范畴，其中 $m \geq 3$ 为某个对象，并假设给定一个映射 $v\colon I \to \mathbb{1}$ ，它属于 $\mathcal{C}$ ，且余纤维 $\mathbb{1}/v$ 具有右单位乘法。

那么，对于任意的 $3 \leq n \leq m$、 $1 \leq k \leq n-1$、 $q \geq n+1$，以及任意 $w \geq q+k$， $\mathbb{1}/v^q$ 和 $\mathbb{1}/v^w$ 上唯一的 v-相容 $\mathbb{E}_n$-代数结构满足：由左因子上的包含给出的$\mathbb{E}_k$-代数映射

$$\mathbb{1}/v^q \to \mathbb{1}/v^q \otimes \mathbb{1}/v^w$$

是一个分裂的平方零 $\mathbb{E}_k$-代数扩张的分裂。

我们将推迟上述结果的证明，先假设该结果成立，并证明本节的主定理。不过，在此之前，我们先给出下面这个简短的引理。

引理 9.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性$\mathbb{E}_m$-环，并设 $f\colon R \to S$ 是$\mathbb{E}_n$-代数在$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$中的一个映射，$3 \leq n \leq m$。若 f是一个平方零扩张，则谱$^h(f)$: 谱$^h(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(S)) \to$谱$^h(\mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(R))$ 是满射。若 f 是一个分裂平方零扩张，则它是双射。

证明. 在分裂平方零扩张的情形下，$\mathrm{Spec}^h(f)$ 存在一个回缩，因而是单射。因此，第二个断言由第一个断言推出。

对于第一个断言，我们应用定理 2.19：只需证明 $S \otimes_R -$ 是幂零保守的。为此，我们注意到它是保守的：若 $S \otimes_R M = 0$，那么由于 $\mathrm{fib}(f)$ 是 S-模，属于 R-模范畴，因此 $\mathrm{fib}(f) \otimes_R M = 0$，所以 $M = R \otimes_R M = 0$是两个零对象的一个扩张。□

注 9.4。眼尖的读者会注意到，在 $n = 3$ 情形下的引理 9.3中，我们实际只用到了刚性$\mathbb{E}_2$-环，并将定理 2.19 应用于它们；这意味着我们的同伦范畴只是一个“编织 tt-范畴”，而非对称幺半范畴。尽管如此，仍可用与对称幺半情形基本相同的论证，证明定理 2.19的类似结论。另一种做法是始终不离开对称幺半的范畴，只是这样做需要在下述定理中要求 $m \geq 5$ ，而证明只需稍作修改。

有了这些预备知识，我们就可以证明本节的主定理：

证明定理 *9.1*。固定点 $E_{\mathfrak{m}}$ 处的剩余域 $\mathfrak{m}$。我们想要考虑的范畴 $\mathcal{K}$ 的一个自然候选是 $E^q_{\mathfrak{m}}$上的模范畴，其中 $q \geq n+1$作为一个$\mathbb{E}_{n+1}$-代数对象上的模范畴，继承了一个$\mathbb{E}_n$-幺半结构。

为此，设

$$\mathcal{K}_q \coloneqq \mathrm{Perf}_{\mathcal{C}}(E^q_{\mathfrak{m}})$$

对于 $q \geq n+1$。显然，像的

$$\mathrm{Spc}^h(\mathcal{K}_q) \to \mathrm{Spc}^h(\mathcal{C})$$

根据构造，恰好为 $\mathfrak{m}$。我们现在的目标是证明，对于某个 $q \gg 0$，$\mathrm{Spc}^h(\mathcal{K}_q)$ 是一个单点。事实上，我们声称，取 $q \geq \max\{n+1, 7\}$ 就足够了。

首先，我们注意到，利用 定理 9.2，$\mathbb{E}_3$-代数映射

$$E^{q-3}_{\mathfrak{m}} \to E^{q-3}_{\mathfrak{m}} \otimes E^q_{\mathfrak{m}}$$

是源的一个分裂平方零扩张，因此由引理 9.3诱导出同调谱上的一个等价。特别地，乘法映射（它是此映射的一个回缩）由复合映射给出

$$E^{q-3}_{\mathfrak{m}} \otimes E^q_{\mathfrak{m}} \to E^{q-3}_{\mathfrak{m}} \otimes E^{q-3}_{\mathfrak{m}} \to E^{q-3}_{\mathfrak{m}}$$

也诱导出同调谱上的一个等价，因此是幂零保守的。

利用这一点，我们还注意到 $E^q_{\mathfrak{m}} \to E^{q-3}_{\mathfrak{m}}$是幂零保守的——因为在 $E^q_{\mathfrak{m}}$ 下的任何非零弱环 A 在 $\mathcal{C}$中的同调支集都是$\{\mathfrak{m}\}$ ，这意味着$A \otimes E^{q-3}_{\mathfrak{m}}$是 $E^q_{\mathfrak{m}} \otimes E^{q-3}_{\mathfrak{m}}$-模中的一个非零弱环，并且

$$A \otimes_{E^q_{\mathfrak{m}}} E^{q-3}_{\mathfrak{m}} \simeq (A \otimes E^{q-3}_{\mathfrak{m}}) \otimes_{E^q_{\mathfrak{m}} \otimes E^{q-3}_{\mathfrak{m}}} E^{q-3}_{\mathfrak{m}} \neq 0.$$

现在，固定给定的 $q \geq \max\{n+1,\ 7\}$，并假设有两个非零弱环 $A,\ B$属于 $\mathcal{K}_q$，使得 $A \otimes_{E^q_{\mathfrak{m}}} B \simeq 0$。不失一般性，我们可以用 $B \otimes_{E^q_{\mathfrak{m}}} E^{q-3}_{\mathfrak{m}}$ 替换 B，从而假设 B 上的弱环结构是由某个对象上的弱 $E^{q-3}_{\mathfrak{m}}$-环结构诱导而来；为方便起见，我们也将该对象记作B。现在，同样由于 A 和 B作为 $\mathcal{C}$中的对象，其同调支撑

$\{\mathfrak{m}\}$， $A \otimes B \neq 0$ 属于 $\mathcal{C}$。特别地， $A \otimes B$ 是 $E^q_{\mathfrak{m}} \otimes E^{q-3}_{\mathfrak{m}}$-模范畴中的一个非零弱环。我们有

$$\begin{aligned}(A \otimes B) \otimes_{E^q_{\mathfrak{m}} \otimes E^{q-3}_{\mathfrak{m}}} E^{q-3}_{\mathfrak{m}} &\simeq ((A \otimes_{E^q_{\mathfrak{m}}} E^{q-3}_{\mathfrak{m}}) \otimes B) \otimes_{E^{q-3}_{\mathfrak{m}} \otimes E^{q-3}_{\mathfrak{m}}} E^{q-3}_{\mathfrak{m}} \\ &\simeq (A \otimes_{E^q_{\mathfrak{m}}} E^{q-3}_{\mathfrak{m}}) \otimes_{E^{q-3}_{\mathfrak{m}}} B \\ &\simeq A \otimes_{E^q_{\mathfrak{m}}} B \simeq 0,\end{aligned}$$

由于 $A \otimes B$ 非零，这与乘法映射的幂零保守性相矛盾。□

9.B. **关于变形的回顾**。在证明上一小节中用到的技术性引理之前，我们先回顾一些背景知识，来自 [PP25], [BP25] 和[Bur22]。

命题 9.5 ([PP25，第 5.34、5.37、5.47、5.60])。 设 $\mathcal{E}$ 是本质小的稳定范畴中的一个满态射类 ∞-范畴 $\mathcal{C}$。那么存在一个稳定 ∞-范畴$\mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$，一个（非正合）函子

$$\nu \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

以及一个自然变换

$$\tau \colon \Sigma\nu(\Omega -) \to \nu(-)$$

使得

(a) 函子 ν 是全忠实的。***(b)*** ν 的像生成 $\mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$。***(c)*** 函子 ν 保留纤维序列 $x \to y \to z$，使得映射 $y \to z$ 属于满态射类 $\mathcal{E}$。***(d)*** $\mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ 上存在一个正合同构 $(-)[1]$，由性质 $\nu(X)[1] \simeq \nu(\Sigma X)$ 确定。

(e) 将自然变换 τ 求逆后，得到一个（正合）函子

$$(-)[\tau^{-1}] \colon \mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathcal{C}$$

使得 $(\nu(-))[\tau^{-1}] \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$。

(f) 若 I 是 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathcal{E}$-内射对象，则对所有对象 $X \in \mathcal{C}$,

$$[\Sigma^{-s}\nu(X), \nu(\mathcal{I})] \simeq 0$$

对所有 $s > 0$。

注 9.6。 与 [PP25], 不同，他们主要处理他们称为 $\mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ 的预稳定变形，而我们绝不会有理由离开稳定世界。特别是，我们隐式地使用由 Patchkoria-Pstr ∞-范畴（即 Spanier-Whitehead 稳定包络，参见 [Lur18 、构造 C.1.1.1 、命题 C.1.1.7 、命题 C.1.2。2]）构造的预稳定范畴 agowski 的稳定包络。

命题 9.7 ([BP25, PropositionA.11])。 给定两个稳定 ∞-范畴 $\mathcal{C}$， $\mathcal{D}$，它们分别在 $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ 中具有满态射类 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，以及一个正合函子

$$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

它将 $\mathcal{E}$ 映射到 $\mathcal{F}$，由此得到一个正合函子

$$\mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathcal{D}(\mathcal{D}, \mathcal{F})$$

与 ν 和$(-)[\tau^{-1}]$相容。

定义 9.8 ([Bur22，定义4。2])。 一个满态射类 $\mathcal{E}$ 在稳定$\mathbb{E}_n$-幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 上称为 $\otimes$-相容的，如果 $\mathcal{E}$ 在与 $\mathcal{C}$的任意对象作张量运算时保持不变。

命题 9.9 ([Bur22，命题 4。3])。 若 $\mathcal{C}$ 是一个稳定的 $\mathbb{E}_n$-幺半 ∞-范畴，且带有 $\otimes$-相容的满态射类 $\mathcal{E}$，则变形 $\mathcal{D}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 继承了稳定 $\mathbb{E}_n$-幺半范畴的结构，使得 ν 和$(-)[\tau^{-1}]$ 是 $\mathbb{E}_n$-幺半函子。

命题 9.10。 若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$是两个稳定$\mathbb{E}_n$-幺半 ∞-范畴，分别配备了 $\otimes$-相容的满态射类 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$，并且给定一个$\mathbb{E}_n$-幺半函子

$$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

将 $\mathcal{E}$ 映射到 $\mathcal{F}$，则诱导函子

$$\mathcal{D}(\mathcal{C},\mathcal{E}) \to \mathcal{D}(\mathcal{D},\mathcal{F})$$

可以自然地提升为一个$\mathbb{E}_n$-幺半函子。

证明。 该 $\mathbf{E}_n$-幺半函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 给出一个预稳定∞-范畴之间的 $\mathbf{E}_n$-幺半函子

$$\mathrm{PSh}_\Sigma(\mathcal{C},\mathcal{S}) \to \mathrm{PSh}_\Sigma(\mathcal{D},\mathcal{S})$$

通过左 Kan 延拓在球面预层范畴之间建立映射。预稳定变形范畴 $\mathcal{D}^{\geq 0}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 关于 $\mathcal{C}$ 相对于 $\mathcal{E}$ 由 $\mathcal{C}$ 上相对于 $\mathcal{E}$-满态射拓扑的完美层范畴给出（见 [PP25，定义 5。32]）。特别地，它是 $\mathrm{PSh}_\Sigma(\mathcal{C},\mathcal{S})$ 的一个局部化，其中利用了 $\otimes$- 相容性来赋予该局部化 $\mathcal{E}$ -局部化的结构$\mathbb{E}_n$。

该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PSh}_\Sigma(\mathcal{C},\mathcal{S}) & \longrightarrow & \mathrm{PSh}_\Sigma(\mathcal{D},\mathcal{S}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{C},\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{D},\mathcal{F}) \end{array}$$

由一个 $\mathbf{E}_n$-幺半群映射的 $\mathbf{E}_n$-幺半群范畴之间的幺半群局部化诱导而来，因此底部映射本身就是 $\mathbf{E}_n$-幺半群的。现在通过取稳定化即可得到结果。□

现在我们转向所关注的主要情形。设 $\mathcal{C}$ 是一个稳定 $\mathbf{E}_n$-幺半群∞-范畴，设 v: $\mathcal{I} \to \mathbb{1}$ 是从某个对象到单位对象的映射，使得其余纤维 $\mathbb{1}/v$ 具有弱环结构。在此情形下， $\mathcal{C}$上存在一个 $\otimes$-相容的满态射类，记作 $\mathcal{E}(v)$，由这样一些态射组成：它们在与 $\mathbb{1}/v$张量后是分裂满射。在此情形下，纤维序列

$$\mathbb{1} \to \mathbb{1}/v \to \Sigma\mathcal{I}$$

第二个映射属于满态射类。特别地，这会导出一个纤维序列

$$\nu(\mathbb{1}) \to \nu(\mathbb{1}/v) \to \nu(\mathcal{I})[1].$$

按照 [Bur22]，中确立的约定，我们将此处第一个映射的纤维命名为

$$\tilde{v}\colon \Sigma^{-1}\nu(\mathcal{I})[1] \to \nu(\mathbb{1}).$$

在重述 [Bur22],的主要结果之前，我们先回顾最后一个定义。

定义 9.11（[Bur22，定义 5.1]）。若给定一个弱环 $\mathbb{1}/v$，它属于一个稳定的 $\mathbf{E}_n$-幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，那么对于 $1 \leq k \leq n$，如果 $\mathbb{1}/v^q$ 上的 $\mathbf{E}_k$-代数结构是由 $\mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{E}(v))$ 中 $\nu(\mathbf{1})/\tilde{v}^q$ 上的 $\mathbf{E}_k$-代数结构经 τ-求逆得到的，则称该结构为 v-相容。

定理 9.12 ([Bur22，定理 5。2])。设给定一个弱环 $\mathbb{1}/v$，它位于一个稳定的 $\mathbb{E}_n$-幺 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中。那么对于任意 $1 \leq k \leq n$ 以及任意 $q \geq k+1$，都存在唯一的 v- 相容的 $\mathbb{E}_k$- 代数结构，定义在 $\mathbb{1}/v^q$上。

该定理通过为余纤维上的 $\mathbf{E}_n$-代数结构定义障碍理论得以证明。我们需要利用这一显式障碍理论，其内容由以下命题概述。

定理 9.13 ([Bur22，命题 2.4，注 2.5，推论 2。7])。设 $\mathcal{C}$ 是一个稳定的 $\mathbb{E}_m$-幺 ∞-范畴，并考虑一个余纤维序列

$$\mathcal{I} \xrightarrow{v} \mathbb{1} \to \mathbb{1}/v$$

其中包含单位对象。对于任意固定的 $1 \leq k \leq m$，存在一列归纳定义的类

$$\theta_{r,\alpha} \in \pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma^{-2-k-c_\alpha}(\Sigma^{k+1}\mathcal{I})^{\otimes r}, \mathbb{1}/v)$$

对于 $r \geq 2$ 和 $0 \leq c_\alpha \leq (r-1)(k-1)$，它们构成了$\mathbb{E}_k$-代数结构存在于 $\mathbb{1}/v$上的障碍。

此外，若能在 $\mathbb{1}/v$上定义$\mathbb{E}_k$-代数结构，则存在一列归纳定义的类

$$\gamma_{r,\alpha} \in \pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma^{-1-k-c_\alpha}(\Sigma^{k+1}\mathcal{I})^{\otimes r}, \mathbb{1}/v)$$

对于 $r \geq 1$ 和 $0 \leq c_\alpha \leq (r-1)(k-1)$，它们构成了$\mathbb{E}_k$-代数结构在 $\mathbb{1}/v$上的唯一性的障碍。

9.C. **技术引理**。现在我们来讨论证明定理 9.2所需的材料。本节余下部分固定以下数据

(a) 一个小的、幂等完备的 $\mathbf{E}_m$-幺半稳定 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，其中 $m \geq 3$。(b) 一个映射 v: $\mathcal{I} \to \mathbb{1}$，属于 $\mathcal{C}$，且 $\mathbb{1}/v$ 具有右单位乘法。(c) 整数 n，k，q，w，满足 $3 \leq n \leq m$、$1 \leq k \leq n-1$、$q \geq n+1$ 和 $w \geq q+k$。

使用 $\mathcal{C}$ 中 $\mathbb{1}/v$-分裂满态射构成的满态射类 $\mathcal{E}$，我们将在相对于此满态射类的变形范畴 $\mathcal{D}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 中进行研究。

记号 9.14。在本节余下部分中，固定以下记号。

(a) 我们将记作

$$\widetilde{\mathcal{I}} \coloneqq \Sigma^{-1}\nu(\Sigma\mathcal{I})$$

f或记作右侧的对象$\mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

(b) 类似地，我们用.....表示

$$\tilde{v}\colon \widetilde{\mathcal{I}} \to \mathbb{1}$$

映射 $\mathbb{1} \simeq \nu(\mathbf{1}) \to \nu(\mathbb{1}/v)$ 的纤维（其源如所述，因为它所对应的映射是一个 $\mathbb{1}/v$-分裂单态射）。

首先，让我们证明下面这个简单的辅助引理。

引理 9.15. 对象 $\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w$ 具有

$$\pi_0 \operatorname{Hom}(\Sigma^{-s}\nu(X), \mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w) \simeq 0$$

对所有 $s \geq q + w - 1$ 和 $X \in \mathcal{C}$。

证明。 由于 $\mathbb{1}/\tilde{v}^q$ 具有弱环结构且 $w \geq q$，我们有

$$\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w \simeq \mathbb{1}/\tilde{v}^q \oplus \Sigma\widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes w} \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^q,$$

于是我们将命题归结为对各个直和项分别证明。对于第一个直和项，由 $s \geq q$ 和 [Bur22引理 48]，该命题实际上成立。

接下来处理第二个直和项，我们完全按照 [Bur22引理 48], 中的证明，关于 q作归纳法。当 $q = 1$时，

$$\Sigma\widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes w} \otimes \nu(\mathbb{1}/v) \simeq \Sigma^{1-w}\nu(\Sigma^w\mathcal{I}^{\otimes w} \otimes \mathbb{1}/v)$$

是一个 $1-w$-移位的 $\mathcal{E}$-内射对象，由命题 9.5(f) 可得该命题成立。一般情形下，利用纤维序列

$$\Sigma\widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes w} \otimes \widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes q-1} \otimes \mathbb{1}/\tilde{v} \to \Sigma\widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes w} \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^q \to \Sigma\widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes w} \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^{q-1},$$

结合归纳法以及最左侧对象是一个 $\mathcal{E}$-内射对象的 $2-w-q$ 平移这一事实，结论成立。□

现在，我们可以进行证明。

命题 9.16。 对象$\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w$ 在 $D(\mathcal{C}, E)$中存在唯一的 $\mathbb{E}_k$-$\mathbb{1}/\tilde{v}^q$-代数结构。特别地，由左因子上的包含给出的 $\mathbb{E}_k$-代数映射

$$\mathbb{1}/\tilde{v}^q \to \mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w$$

在目标上选定分裂的平方为零 $\mathbb{E}_k$-$\mathbb{1}/\tilde{v}^q$-代数结构后，具有分裂的结构。

证明。 我们注意到，纤维序列

$$\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes w} \to \mathbb{1}/\tilde{v}^q \to \mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w,$$

允许我们将 $\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w$ 表示为单位对象（在 $\mathbb{1}/\tilde{v}^q$-模中）关于理想“$\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathcal{I}^{\otimes w}$”的商。

由于存在$\mathbb{E}_k$-$\mathbb{1}/\tilde{v}^q$-代数结构于 $\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w$，定理 9.13 适用，并给出一系列归纳定义的障碍，用以判定此$\mathbb{E}_k$-代数结构是否唯一。这些障碍取值于

$$\pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathbb{1}/\tilde{v}^q-\mathrm{Mod}(\mathcal{D}(\mathcal{C},\mathcal{E}))}(\Sigma^{-1-k-c_\alpha}(\Sigma^{k+1}\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes w})^{\otimes_{\mathbb{1}/\tilde{v}^q} r}, \mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w), \tag{9.1}$$

对于 $r \geq 1$ 和 $0 \leq c_\alpha \leq (k-1)(r-1)$。

当 $r = 1$时，正如 [Bur22，定理 5.2], 中的证明一样，该障碍是以下复合映射

$$\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes w} \to \mathbb{1}/\tilde{v}^q \to \mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w,$$

我们为其选取一个零伦，以便将其构成一个纤维序列。

利用张量-内部Hom，我们可以将式 (9.1) 中的群改写为

$$\pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{C},\mathcal{E})}(\Sigma^{-1-k-c_\alpha}(\Sigma^{k+1}\widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes w})^{\otimes r}, \mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w).$$

展开源的定义后，我们可以将其写为

$$\Sigma^{-1-k-c_\alpha}(\Sigma^{k+1}\widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes w})^{\otimes r} \simeq \Sigma^{-1-k-c_\alpha+r(k+1)-rw}\nu(\Sigma^{rw}\mathcal{I}^{\otimes rw}),$$

其中，根据 $c_\alpha \geq 0$ 和 $k+1 \leq q+k \leq w$，我们可以写出

$$-1-k+r(k+1)-c_\alpha - rw \leq (r-1)(k+1)-rw \leq k+1-2w \leq 1-w-q.$$

特别地，我们看到群 式（9.1）由 引理 9.15消失。由于所有障碍均已消失，这意味着 $\mathbb{E}_k$-$\mathbb{1}/\tilde{v}^q$-代数结构在 $\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w$上是唯一的，正如所需。

最后一个断言成立，因为我们可以写成

$$\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w \simeq \mathbb{1}/\tilde{v}^q \oplus \Sigma \mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \widetilde{\mathcal{I}}^{\otimes w},$$

并为其赋予分裂 E_k-$\mathbb{1}/\tilde{v}^q$-代数的结构；由唯一性可知，这必然与任何其他的 E_k-$\mathbb{1}/\tilde{v}^q$-代数结构选择一致。□

定理 *9.2* 的证明。利用 命题 9.16，我们发现 $\mathbb{1}/\tilde{v}^q \otimes \mathbb{1}/\tilde{v}^w$ 是 $\mathbb{1}/\tilde{v}^q$ 在 $\mathcal{D}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 中的一个分裂平方零扩张；由此结论可知，对 τ 求逆即可回到 $\mathcal{C}$。□

附录 A. Rep(GL_t) 的半单性

本附录旨在简要概述 Deligne 关于 Rep(GL_t) 半单性的证明，该证明出自 [Del07], ，以供读者参考。为简化讨论，我们实际上只证明 Deligne 的结果的一个特殊情形（这已足以支持我们的主要结果），即当 t 专化为一个不是代数 整数的元素时。将结论推广到 t 非整数的情形需要更精细的分析，这会使我们偏离主题太远。

就我们的目的而言，依据 [Del07，命题 10。3]，我们可以如下定义 Rep(GL_t)（尽管这不是 Deligne的原始定义）：

定义A.1. Deligne 范畴 Rep(GL_t) 是由一个可对偶对象 x 生成的自由幂等完备加性对称幺半范畴。

单位对象的自同态环是 $\mathbb{Z}[t]$，对于每个配备了一个元素 $\delta \in A$（对应于一个映射 $\mathbb{Z}[t] \to A$）的交换环 A，我们将 Rep(GL_t; A) 定义为 Rep(GL_t) 沿 $\mathbb{Z}[t] \to A$ 的基变换。

根据定理 3.2，可知 Rep(GL_t) 是以下对象的幂等完备化：$\mathbb{Z}[\mathrm{ho}(\mathrm{Cob})]$,这也解释了 Deligne的原始定义 [Del07，定义10。2]。

用我们的语言来说，Deligne 的结果（在上述受限的一般性下）如下：

定理 A.2 (Deligne， [Del07，定理10。5])。 设 K 是一个特征为0 的域， $t \in K$ 是一个不是代数整数的元素。范畴 $C_K := \mathrm{Rep}(GL_t; K)$ 是阿贝尔半单范畴。

回顾一下，ho(Cob)由对象 $X^{i,\,j} := X^{\otimes i} \otimes X^{\vee,\,\otimes j}$ 组成，其中 X 是泛可对偶对象，因此 C_K 由这些生成元的 Yoneda 像在有限直和和收缩下生成。

我们在下面的引理中整理关于这些生成元所需的内容：

引理 A.3. 设 $i,\ j,\ r,\ s \in$ 自然数集。

- 如果 $i - j \neq r - s$，那么 同态空间$\mathrm{Cob}(X^{i,\,j}, X^{r,\,s}) = \emptyset$，因此 同态空间$C_K(X^{i,\,j}, X^{r,\,s}) = 0$;
- 若 $i - j = r - s$ 且 $i \leq r$，则存在映射 $X^{i,\,j} \to X^{r,\,s}$、 $X^{r,\,s} \to X^{i,\,j}$，其复合等于 $X^{i,\,j}$ 的恒等态射乘以若干个圆在 Cob 中对应的数，因此也就是恒等态射乘以 C_K 中 t 的某个幂。特别地，在 C_K 中， $X^{i,\,j}$ 是 $X^{r,\,s}$的缩回。

证明。 第一点在配边范畴中显而易见：从 $X^{i,\,j}$出发的配边由一些圆（它们不改变 $i - j$）、从 $+$ 到 $+$ 或从 $-$ 到 $-$ 的映射（它们也不改变 $i - j$），以及最后的求值或余求值（它们同样不改变 $i - j$）组成。

对于第二点，只需证明这些映射对 1 和 $X^{k,\,k}$存在；但此时只需选取求值和余求值，其复合为 k 个圆。

由于 t 在 K 中可逆，回缩结论便得证。 □

现在我们来梳理半单性与正交性和缩回之间的关系，见以下初等引理：

引理 A.4。 设 C 是一个加性1-范畴。

(a) 假设 $x \in C$ 满足 自同态环$_C(x)$ 是半单的。那么对于任意 $n \geq 0$, $\oplus_n x$ 也满足这一性质；

(b) 假设 $x, y \in C$ 满足 自同态环$_C(x)$ 是半单的，且 y 是 x 的缩回。那么 自同态环$_C(y)$ 是半单的。

(c) 假设 x、$y \in C$ 满足 自同态环$_C(x)$、自同态环$_C(y)$ 是半单的，并且同态空间$_C(x, y) =$ 同态空间 $_C(y, x) = 0$。那么 自同态环 $_C(x \oplus y)$ 是半单的。

证明。 1. $\mathrm{End}_C(\oplus_n x) \cong M_n(\mathrm{End}_C(x))$，且半单环对矩阵环运算封闭。

2. 不失一般性， C 是幂等完备的，并且由 x 在有限直和和收缩下生成。因此，它等价于 $\mathrm{Proj}^{\text{f.g.}}$ 自同态环$_C(x)$ ，而根据阿廷-韦德伯恩定理，$\mathrm{End}_C(x)$ 是除代数上的矩阵环之积。在这样的范畴中，任意对象的端同态环都是矩阵环之积，因此是半单的，由此得证。

3. 这些条件保证 $\mathrm{End}_C(x \oplus y) \cong \mathrm{End}_C(x) \times \mathrm{End}_C(y)$，且半单环对有限积运算封闭。□

由归纳法可知，上述两个引理将问题归结为：对于单个 (i, j)，何时 $\mathrm{End}(X^{i,j})$ 是半单的。我们需要一个归纳法的基础情形，来证明某些对象是半单的。下面是关键引理：

引理 A.5. 设 $x, y \in C$ 属于一个刚性、加性且幂等完备的范畴，其单位对象的端同态构成一个域 L ，并且 自同态环$_C(x)$ 是半单的。假设 C 中所有同态空间在 L 上都是有限维的。

最后，假设配对 同态空间$_C(x, y) \otimes$ 同态空间$_C(y, x) \to$ 自同态环$_C(x)$ 是完美配对，并且证明 同态空间$_C(x, y)$ 与 同态空间$_C(y, x)$ 互为 自同态环$_C(x)$ 对偶。

于是 y 分解为 同态空间$_C(x, y) \otimes_{\mathrm{End}_C(x)} x \oplus z$，其中 同态空间$_C(x, z) = 0$，同态空间$_C(z, x) = 0$。

证明。 结合 $\mathrm{End}_C(x)$ 的有限维性和半单性，以及 C 的幂等完备性，张量积 $\mathrm{hom}_C(x, y) \otimes_{\mathrm{End}_C(x)} x$ 在C中存在，并且带有一个典范映射 $\mathrm{hom}_C(x, y) \otimes_{\mathrm{End}_C(x)} x \to y$。

类似地，我们有一个映射 $y \to \mathrm{hom}_{\mathrm{End}_C(x)}(\mathrm{hom}_C(y, x), x)$。如果我们能够证明复合映射

$$\mathrm{hom}_C(x, y) \otimes_{\mathrm{End}_C(x)} x \to y \to \mathrm{hom}_{\mathrm{End}_C(x)}(\mathrm{hom}_C(y, x), x)$$

是一个同构，那么我们就完成了，因为这将是所需的回缩，而 z 的性质随即自动成立。

源和靶都属于由 x 生成的厚加性范畴，因此可以通过应用 $\mathrm{hom}_C(x, -)$ 来检验此映射是否为同构；此时该映射变为 $\mathrm{hom}_C(x, y) \to \mathrm{hom}_{\mathrm{End}_C(x)}(\mathrm{hom}_C(y, x), \mathrm{End}_C(x))$，根据假设这是一个同构。□

我们现在已准备好证明 定理 A.2：

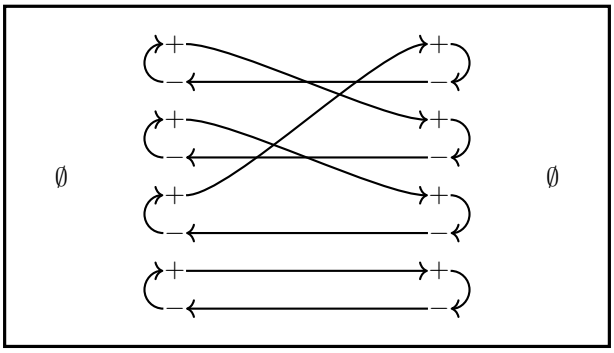
证明定理 *A.2*。根据引理 A.3 和引理 A.4，通过归纳法，我们只需证明 $\mathrm{End}_{C_K}(X^{i,j})$ 是半单的。我们也通过归纳法证明这一结论，

归纳假设包括：对于较小的r, s，$\mathrm{End}_{C_K}(X^{r,s})$是半单的；此外，迹配对 $\mathrm{End}_{C_K}(X^{r,s}) \otimes_K \mathrm{End}_{C_K}(X^{r,s}) \to K$ 由乘法后接迹映射[7] $\mathrm{End}_{C_k}(X^{r,s}) \to K$ 给出，且是完美的。

[7]由 C_K中的可对偶性所导出的迹映射，而不是有限维K-代数的通常迹映射。

如果 $i=0$ 或 $j=0$，$\mathrm{End}_{C_K}(X^{i,\,j})$是群代数 $K[\Sigma_j]$ 或 $K[\Sigma_i]$，因此是半单的，因为 K 是特征零。

此外，在这种情况下，迹配对是完美的：事实上，直接计算可得，对于任意 $\sigma\in\Sigma_i$，$\mathrm{tr}(\sigma)=t^{n(\sigma)}$ 其中 $n(\sigma)$ 是 σ 中循环的个数，参见[Ram25，引理 4。7]，下方的图示给出了例子。



$K[\Sigma_4]$ 中由 3-循环 $\sigma=(123)$ 给出的端同态的迹。

将配对 $(\sigma,\ \tau)\ \mapsto\mathrm{tr}(\sigma\tau)$ 替换为 $(\sigma,\ \tau)\ \mapsto\mathrm{tr}(\sigma^{-1}\tau)$（其中一个配对退化，当且仅当另一个也退化）后，相应矩阵的对角线上是 t^i，其余位置则是 $t^k,\ k<i$。因此，展开该矩阵的行列式，可得关于变量 t 的一个次数为 $ii!$、系数为整数的首一多项式。该多项式非零，因为 t不是代数整数。

现在我们要检验 $x=X^{i-1}$引理 A.5 对于$^{j-1,\ y=X^{i,\ j,\ x}}$的假设是否成立。由于归纳法假设 $\mathrm{End}_{C_K}(x)$ 上的迹配对是完美的，当且仅当其与迹配对复合后仍是完美配对时，配对 $\mathrm{Hom}(,\ C_K)\ y\mathrm{Hom}(,\ C_K)\ x\mathrm{End}()$ 才是完美的。

但现在，迹配对 $\mathrm{Hom}_{C_K}(X^{i-1,\ j-1},\ X^{i,\ j})\otimes_K\mathrm{Hom}_{C_K}(X^{i,\ j},\ X^{i-1,\ j-1})\ \to K$ 在显然的同一化下，等于 $\mathrm{End}_{C_K}(X^{i-1,\ j})$ 上的迹配对，而根据归纳法，该配对是完美的。

因此，我们可以应用该引理，得到

$$X^{i,j}=\mathrm{Hom}_{C_K}(X^{i-1,j-1},X^{i,j})\otimes_{\mathrm{End}_{C_K}(X^{i-1,j-1})}X^{i-1,j-1}\oplus Z$$

对于某个与 $X^{i-1,\ j-1}$正交的 Z。

特别地，$\mathrm{End}_{C_K}(Z)$ 是 $\mathrm{End}_{C_K}(X^{i,\ j})$ 关于那些可经由 $X^{i-1,\ j-1}$ 分解的态射所成理想的商；显然它同构于 $K[\Sigma_i\times\Sigma_j]$，因而是半单的。

在这一项上，迹配对为 $(\sigma,\tau)\ \mapsto\ t^{n(\sigma)n(\tau)}$，其完全性与上文同理：经过基变换后，对应的矩阵在对角线上为 t^{ij}，而在非对角线上为 $t^k,k<ij$，因此再次由 t 不是代数整数保证其完全性。□

推论 A.6. 假设 $K=$有理数域(t) 是一个单变量函数域 t。对于任意简单对象 Z，它是 C_K 中某个形如 $X^{i,j}$ 的对象的直和项，其中 i取满足此性质的最小值。那么，Z 的维数是一个次数为 $i+j$ 且正首项系数的多项式。特别地，Z 的维数的次数的奇偶性等于 $i-j$的奇偶性。

证明。对象 X^i，^{j} 的维数为 t^{i+j}，而其所有形如X^r，^{s} 且满足 $r < i$ 的直和项，其维数都是次数严格小于 $i + j$ 的多项式。特别地，去掉 X^i，^{j} 中那些作为满足 $r < s$的 X^r，^{s} 的直和项的所有直和项后，所得对象的维数是一个次数为 $i + j$ 的首一多项式。定理 A.2 的证明表明，X^i，^{j} 的自同态代数模去所有这些直和项后，与群代数 $K[\Sigma_i \times \Sigma_j]$ 一致。特别地，简单直和项对应于该群代数中的极小幂等元，进而对应于 $\Sigma_i \times \Sigma_j$ 的不可约表示。取这样的一个幂等元 $\sum_{\sigma\in\Sigma_i\times\Sigma_j} a_\sigma\sigma$（其中 $\sigma \in$为有理数域），可以看出，这个端同态的迹，也就是它所选出的简单直和项的维数，是一个次数为 $i + j$ 的多项式，且 t^{i+j} 的系数等于该幂等元展开式中单位元的系数。如果该幂等元对应于一个维数为 d 的不可约表示，那么这个首项系数恰为 $d/|\Sigma_i \times \Sigma_j| = d/(i!j!)$，因此为正，如所声称。□

参考文献

[AGV63] Michael Artin、AlexandreGrothendieck 和 Jean-Louis Verdier。《拓扑斯理论与概形的 étale 上同调》。第 1–3 卷。载于：数学讲义 269（1963），第 270 页。[Aok+25] Ko Aoki、Tobias Barthel、Anish Chedalavada、Tomer Schlank 和 Greg Stevenson。高阶扎里斯基几何。2025年。arXiv：2508.11621 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/2508.11621。[Bal05] Paul Balmer。《张量三角范畴中素理想的谱》。载于：《J. Reine Angew. Math.》588（2005），第 149–168 页。ISSN：0075-4102。DOI：10.1515/crll.2005.2005.588.149。网址：https://doi.org/10.1515/crll.2005.2005.588.149。[Bal10a] Paul Balmer。《谱、谱、谱——张量三角谱与自同态环的扎里斯基谱》。载于：《Algebr. Geom. Topol.》10.3（2010），第 1521–1563 页。ISSN：1472-2747。DOI：10.2140/agt.2010.10.1521。网址：https://doi.org/10.2140/agt.2010.10.1521。[Bal10b] Paul Balmer。《张量三角几何》。载于：国际数学家大会论文集。第二卷。新德里：Hindustan Book Agency，2010，第 85–112 页。ISBN：978-81-85931-08-3；978-981-4324-32-8；981-4324-32-9。[Bal20a] Paul Balmer。《张量三角范畴中大对象的同调支撑》。载于：《J. Ec. polytech. Math.》7（2020），第 1069–1088 页。ISSN：2429-7100。DOI：10.5802/jep.135。网址：https://doi.org/10.5802/jep.135。[Bal20b] Paul Balmer。《通过同调剩余域得到的幂零性定理》。载于：《Tunis. J. Math.》2.2（2020），第 359–378 页。ISSN：2576-7658。DOI：10.2140/tunis.2020.2.359。网址：https://doi.org/10.2140/tunis.2020.2.359。[Bar+24] Tobias Barthel、Natalia Castellana、Drew Heard 和 Beren Sanders。《张量三角几何中的满射性》。载于：《Math. Z.》308.4（2024），第 65 号论文，共 7 页。ISSN：0025-5874。DOI：10.1007/s00209-024-03618-1。网址：https://doi.org/10.1007/s00209-024-03618-1。[Bar+26] Tobias Barthel、Drew Heard、Beren Sanders 和 Changhan Zou。《同调分层与下降》。载于：《J. Inst. Math. Jussieu》25.2（2026），第 1081–1125 页。ISSN：1474-7480,1475-3030。DOI：10.1017/S1474748025101

515.

网址：https://doi.org/10.1017/S1474748025101515.[BC21] Paul Balmer 和 James C. Cameron。“计算代数与拓扑中的同调剩余域”。载于：美国数学会会刊 149.8（2021），第 3177–3185 页。ISSN：0002-9939。DOI：10.1090/proc/15412。网址：https://doi.org/10.1090/proc/15412.[BD25] L. Alexander Betts 和 Ishai Dan-Cohen。曲线的动机 *Weil* 高度机器。2025年。arXiv：2512.05284 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/2512.05284.[BD95] John C. Baez 和 James Dolan。“高维代数与拓扑量子场论”。载于：数学物理杂志36.11（1995），第 6073–6105 页。ISSN：0022-2488,1089-7658。DOI：10.1063/1.531236。网址：https://doi.org/10.1063/1.531236.[BHS23] Tobias Barthel、Drew Heard 和 Beren Sanders。“分层以及同调支撑与张量三角支撑之间的比较”。载于：有理数域

《J. Math.》74.2（2023），第 747–766 页。ISSN：0033-5606。DOI：10.1093/qmath/haac040。网址：https://doi.org/10.1093/qmath/haac040.[BKS19] Paul Balmer、Henning Krause 和 Greg Stevenson。“张量三角域：思考札记”。载于：《Selecta Math.》（新系列）25.1（2019），第 13 号论文，36 页。ISSN：1022-1824。DOI：10.1007/s00029-019-0454-2。网址：https://doi.org/10.1007/s00029-019-0454-2.[BP25] Robert Burklund 和 Piotr Pstrągowski。“箭图与 Adams 谱序列”。载于：《Adv. Math.》471（2025），第 110270 号论文，76 页。ISSN：0001-8708,1090-2082。DOI：10.1016/j.aim.2025.110270。网址：https://doi.org/10.1016/j.aim.2025.110270.[BS] Shaul Barkan 和 Jan Steinebrunner。“图形结构、相干对偶与模 ∞-运算子”。载于：()。准备中。[BS25] Shaul Barkan 和 JanSteinebrunner。“Segal 化与 Boardman-Vogt 张量积”。载于：《Algebr. Geom. Topol.》25.9（2025），第 5439–5462 页。ISSN：1472-2747,1472-2739。DOI：10.2140/agt.2025.25.5439。网址：https://doi.org/10.2140/agt.2025.25.5439.[BSY22] Robert Burklund、Tomer M. Schlank 和 Allen Yuan。“色 Nullstellensatz”。载于：arXiv 电子预印本，arXiv:2207.09929（2022年7月），arXiv:2207.09929。DOI：10.48550/arXiv.2207.09929。arXiv：2207.09929 [math.AT].[Bur22] Robert Burklund。Moore 谱上的乘法结构。2022年。arXiv：2203.14787 [math.AT]。网址：https://arxiv.org/abs/2203.14787.[BW25] Isaac Bird 和 Jordan Williamson。“通过可定义子范畴研究同调谱”。载于：《Bull. Lond. Math. Soc.》57.4（2025），第 1040–1064 页。ISSN：0024-6093。DOI：10.1112/blms.70014。网址：https://doi.org/10.1112/blms.70014.[Cox+08] Anton Cox、Maud De Visscher、Stephen Doty 和 Paul Martin。“关于墙壁 Brauer 代数的块”。载于：《J. Algebra》320.1（2008），第 169–212 页。ISSN：0021-8693。DOI：10.1016/j.jalgebra.2008.01.026。网址：https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.01.026.[Del07] P. Deligne。“当 t 不是自然数时，对称群表示范畴”。载于《代数群与齐性空间》。第 19 卷。Tata 基础研究所数学研究丛书。孟买：Tata 基础研究所，2007年，第 209–273 页。ISBN：978-81-7319-802-1。[Del96] Pierre Deligne。“李群的例外级数”。载于：《C. R. Acad. Sci. Paris》系列 I 数学 322.4（1996），第 321–326 页。ISSN：0764-4442。[DHS88] Ethan S. Devinatz、Michael J. Hopkins 和 Jeffrey H. Smith。“幂零性与稳定同伦论 I”。载于：《Ann. of Math.》（第二辑）128.2（1988），第 207–241 页。ISSN：0003-486X。DOI：10.2307/1971440。网址：https://doi.org/10.2307/1971440.[Hah16] Jeremy Hahn。“关于 H_∞-环谱的 Bousfield 类”。载于：arXiv 预印本 arXiv:1612.04386（2016）。[Har12] Yonatan Harpaz。“一维协边假设”。载于：arXiv 电子预印本，arXiv:1210.0229（2012年9月），arXiv:1210.0229。DOI：10.48550/arXiv.1210.0229。arXiv：1210.0229 [math.AT]。

[Hau21] Rune Haugseng. “关于(∞, 2)-范畴中的弱变换、伴随与单子”。载于：High. Struct. 5.1 (2021)，第244–281页。ISSN：2209- 0606。[Hop87] Michael J. Hopkins. “同伦论中的全局方法”。载于：同伦论（达勒姆，1985年）。第117卷。London Math. Soc. Lecture Note Ser. 剑桥大学出版社，剑桥，1987年，第73–96页。ISBN：0-521-33946-4。[HS25] Fabian Hebestreit 和 Jan Steinebrunner. “Rezk 神经全忠实性的一个简短证明”。载于：Int. Math. Res. Not. IMRN 4 (2025)，论文编号 rnaf021，共13页。ISSN：1073-7928,1687-0247。DOI： 10.1093/imrn/rnaf021。URL： https://doi.org/10.1093/imrn/rnaf021。[HS98] Michael J. Hopkins 和 Jeffrey H. Smith. “幂零性与稳定同伦论 II”。载于：《Ann. of Math.》 (2) 148.1 (1998)，第1–49页。ISSN：0003-486X。DOI： 10.2307/120991。URL： https://doi.org/10.2307/120991。[Hys26] Logan Hyslop. “迈向钢铁神经猜想”。载于：《J. Algebra》686 (2026)，第544–565页。ISSN：0021-8693。DOI： 10.1016/j.jalgebra.2025.08.028。URL： https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2025.08.028。[KY25] Shai Keidar 和 Lior Yanovski. “通过加权余极限得到余终性”。载于：arXiv 电子预印本，arXiv:2511.13536（2025年11月），arXiv:2511.13536。DOI： 10.48550/arXiv.2511.13536。arXiv： 2511.13536 [math.CT]。[Law20] Tyler Lawson. “E_n-谱与 Dyer-Lashof 运算”。载于：《同伦论手册》。CRC Press/Chapman Hall Handb. Math. Ser. CRC Press，佛罗里达州博卡拉顿， [2020] ©2020，第793–849页。ISBN：978-0-815- 36970-7。[Lur08] Jacob Lurie. “拓扑场论的分类”。载于：Current Developments in Mathematics 2008.1 (2008)，第129–280页。[Lur09] Jacob Lurie.《高阶拓扑斯理论》。第170卷。Annals of Mathematics Studies。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009年，第xviii +925页。ISBN：978-0-691-14049-0；0-691-14049-9。DOI： 10.1515/9781400830558。URL： https://doi.org/10.1515/9781400830558。[Lur17] Jacob Lurie. “高阶代数”。(2017)。在线可查。URL： https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf。[Lur18] Jacob Lurie. “谱代数几何”。(2018)。在线可查。URL： https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf。[Mat17] Akhil Mathew. “一类有理 E∞-环的剩余域及其应用”。载于：J. Pure Appl. Algebra 221.3 (2017)，第707–748页。ISSN：0022-4049,1873-1376。DOI： 10.1016/j.jpaa.2016.07.015。URL： https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2016.07.015。[MM94] Saunders Mac Lane 和 Ieke Moerdijk.《几何与逻辑中的层》。1992年版。Universitext。拓扑斯理论初步导论。Springer-Verlag，纽约，1994年，第xii+629页。ISBN：0-387-97710-4。[Nee92] Amnon Neeman. “ $D(R)$的色塔”。载于：Topology 31.3 (1992)。附有 Marcel B¨okstedt 撰写的附录，第519–532页。ISSN：0040- 9383。DOI： 10.1016/0040-9383(92)90047-L。URL： https://doi.org/10.1016/0040-9383(92)90047-L。

[PP25] Irakli Patchkoria 和 Piotr Pstragwoski.《阿达姆斯谱序列与Franke代数性猜想》。英文。美国数学会回忆录。美国：美国数学会，2025年5月。[Ram24] Maxime Ramzi. “局部刚性 ∞-范畴”。载于：arXiv 电子预印本, arXiv:2410.21524（2024年10月），arXiv:2410.21524。DOI： 10.48550/arXiv.2410.21524。arXiv： 2410.21524 [math.CT]。[Ram25] Maxime Ramzi. “拓扑 Hochschild 同调的端同态”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2503.04438 (2025)。[Rie25] Florian Riedel. 正特征下 E_∞-环的约化点。2025年。arXiv: 2508.12462 [math.AT]。URL： https://arxiv.org/abs/2508.12462。[Tho97] R. W. Thomason. “三角子范畴的分类”。载于：Compositio Math. 105.1 (1997)，第1–27页。ISSN: 0010-437X,1570-5846。DOI： 10.1023/A:1017932514274。URL： https://doi.org/10.1023/A:1017932514274。Tobias Barthel，马克斯·普朗克数学研究所，Vivatsgasse 7，53111 波恩，德国。电子邮箱: tbarthel@mpim-bonn.mpg.de网址： https://sites.google.com/view/tobiasbarthel/Logan Hyslop，哈佛大学数学系，1 Oxford St，马萨诸塞州剑桥，邮编02138，美国。电子邮箱： loganrhyslop@gmail.com网址: https://loganhyslop.github.io/Maxime Ramzi，数学与计算机科学系，Universit¨at M¨unster, Einsteinstrasse 62。电子邮箱： maxime.ramzi@uni-muenster.de网址: https://sites.google.com/view/maxime-ramzi-en/home