arXiv:2603.25850v1 [math.MG] 26 Mar 2026

有限超度量空间的距离中心

Oleksiy Dovgoshey[1,2] 和 Olga Rovenska[3*]

[1]乌克兰国家科学院应用数学与力学研究所函数理论系，乌克兰斯洛维扬斯克，84100。[2]图尔库大学数学与统计系，芬兰图尔库，20014。[3*]顿巴斯国立工程学院数学与建模系，乌克兰克拉马托尔斯克，84313。

*通讯作者。电子邮箱：rovenskaya.olga.math@gmail.com；贡献作者：oleksiy.dovgoshey@gmail.com；

摘要

度量空间（X, d）的距离中心是集合 $C(X)$，包含所有满足以下条件的 $t \in \mathbb{R}^+$：对每个 $p \in X$，方程 $d(x, p) = t$ 都有解。我们证明了，对于恰有 n 个点的所有有限超度量空间（X, d），不等式 $|C(X)| \leq 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ 成立。我们还证明，对于每个整数 $n \geq 1$，都存在一个有限超度量空间（Y, ρ），使得 $|Y| = n$ 且 $|C(Y)| = 1 + \log_2 \lfloor n \rfloor$.

关键词： 距离中心、直径图、有限超度量空间、带标号根树。

MSC 分类： 54E35

1 引言

距离中心这一概念由 Wojciech Bielaś、Szymon Plewik 和 MartaWalczyńska 在论文 [5] 中引入，定义如下。

定义 1.1 设 (X, d) 是一个度量空间，且 $D(X)$ 是 (X, d) 的距离集，

$$D(X) := \{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

(X, d) 的距离中心是距离集()的一个子集 $C(X)$，定义为

$$C(X) := \{t \in D(X) : \forall p \in X \ \exists x \in X \ d(p, x) = t\}. \tag{1}$$

这一概念曾用于 [5] 推广约翰·冯·诺伊曼关于具有相同聚点集的两个序列的排列定理 [23]。由标记树生成的超度量空间的距离中心见 [15]。文中证明了距离中心的一些有趣性质 [1, 3, 4, 17, 19], ，但作者尚未发现任何描述任意超度量空间中这些中心性质的结果。

本文研究有限超度量空间的距离中心。本文的主要目的是为以下问题提供解答。

问题 1.2 设 n 为正整数。求最小的整数 $M(n)$，使其满足不等式

$$|C(X)| \leq M(n)$$

对于每个至多含有 n 个点的有限超度量空间(X, d) 。

本文结构安排如下。下一节给出度量空间理论和图论中的一些定义与事实。第 3.10 定理（第3节）给出了问题1.2 的解答，也是本文的主要结果。在最后的第4 节，我们提出三个与有限超度量空间的距离中心相关的猜想。

2 预备知识

我们从度量空间的基本概念开始。

在下文中，我们将使用符号 $\mathbb{R}^+$ 表示集合 $[0, +\infty)$。

定义 2.1 设 X 是一个非空集合。 X 上的一个度量是一个对称函数 d: $X \times X \to \mathbb{R}^+$，满足等式 $d(x, x) = 0$（对每个 $x \in X$），不等式 $d(x, y) > 0$（对所有不同的 $x, y \in X$），以及三角不等式

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

对所有 x、 y、 $z \in X$均成立。

度量空间(X, d) 称为超度量空间，如果满足强三角不等式

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

对所有 x、 y、 $z \in X$ 均成立。在这种情况下，度量 d 称为 X 上的超度量。

定义 2.2 设 (X, d) 和 (Y, ρ) 是度量空间。若映射 Φ: $X \to Y$ 是等距映射，且 Φ 是双射，并且满足等式

$$d(x, y) = \rho(\Phi(x), \Phi(y))$$

对所有 $x, y \in X$ 都成立。

两个度量空间等距 当且仅当存在这两个空间之间的等距映射。

设 A 是度量空间(X, d)的非空子集。该量

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} \tag{2}$$

是 A的直径。半径为、中心为的开球是集合

$$B_r(c) := \{x \in X \colon d(c, x) < r\}. \tag{3}$$

下面的命题断言：如果(X, d) 是超度量空间，则(X, d) 中任意开球的每个点都是该开球的中心。

命题 2.3 设(X, d) 是一个超度量空间。则等式

$$B_r(c) = B_r(a)$$

对于每个开球 $B_r(c) \subseteq X$ 以及每个点 $a \in B_r(c)$都成立。

证明 由书中的命题 18.4 可知 [21]。 □

我们来回顾一些定义和事实。

图是一个有序对 (V, E)，由一个非空集合 V 和一个集合 E 组成，其中 E 的元素是不同的点 u、$v \in V$ 所构成的无序对 $\{u, v\}$。对于图 $G = (V, E)$，集合 $V = V(G)$ 和 $E = E(G)$ 分别称为顶点集合和边集合。若图 G 满足 $V(G)$ 是有限集合，则称其为有限图。如果 $\{x, y\} \in E(G)$ 成立，则称顶点 x 和 y 相邻，并称 x、y 为边 $\{x, y\}$ 的端点。下文中，我们总是假设 $E(G) \cap V(G) = \emptyset$。

设 v 是图 G 的一个顶点。集合的基数

$$\{u \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}$$

是 v 的度 。 v 的度记作 $\delta_G(v)$，

$$\delta_G(v) := |\{u \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}|. \tag{4}$$

设 G 为一个图。若满足以下条件，则称图 G_1 为 G 的子图：

$$V(G_1) \subseteq V(G) \quad \text{and} \quad E(G_1) \subseteq E(G).$$

在这种情况下，我们记作 $G_1 \subseteq G$。

路径是一种有限图 P，其顶点可以不重复地编号，使得

$$V(P) = \{x_1, \ldots, x_k\} \quad \text{and} \quad E(P) = \{\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{k-1}, x_k\}\} \tag{5}$$

满足 $k \geqslant 2$。我们将记作 $P = (x_1, \ldots, x_k)$，或 $P = P_{x_1, x_k}$，如果 P 是满足（5）的路径，并称 P 是连接 x_1 和 x_k 的路径。若图 G 中任意两个不同顶点 G 之间都存在一条路径 $P \subseteq G$，则称图 G 是连通的。

有限图 C 是一个圈，如果其顶点存在一种无重复的枚举，使得 $V(C) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 并且

$$E(C) = \{\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}, \{x_n, x_1\}\} \quad \text{with } n \geq 3.$$

定义 2.4 不含圈的连通图称为树。

下文中，我们只考虑至少有两个不同顶点的有限树。

命题 2.5 设 G 是一个满足 $|V(G)| \geq 2$ 的连通有限图。那么以下条件等价。

(i) G是树。

(ii) 等式

$$|V(G)| = 1 + |E(G)|$$

成立。

(iii) G 中任意两个不同的顶点都由 G中的唯一一条路径连接。

证明可参见 [7]中的定理 1.5.2 和推论 1.5.3。

定义 2.6 设 T是一棵树。若顶点 $v \in V(T)$ 是一片叶子，则称其为 T的叶子，当

$$\delta_T(v) = 1.$$

如果顶点 v不是 T的一片叶子，则称 v是 T的内部节点。

一棵树 T 可以有一个指定的顶点 r，称为根；此时，T 称为有根树，记作 $T = T(r)$。

设 $T = T(r)$ 是一棵有根树，并设 $v \in V(T)$。类似地，[8, 10–14], 我们用 $\delta_T^+(v)$ 表示 v的出度，

$$\delta_T^+(v) := \begin{cases} \delta_T(v), & \text{if } v = r, \\ \delta_T(v) - 1, & \text{if } v \neq r, \end{cases} \tag{6}$$

其中，$\delta_T(v)$ 是由（ v定义的度（4），其中 $G = T$。

注记 2.7 定义 2.6 和等式 (4)、(6) 表明，r 是有根树 $T = T(r)$ 的叶子，当且仅当 $\delta_T^+(r) = 1$。此外，当 $v \in V(T)$ 且 $v \neq r$ 时，顶点 v 是 $T(r)$ 的叶子，当且仅当 $\delta_T^+(v) = 0$。

定义 2.8 设 $T = T(r)$ 是一棵有根树，且 u, v 是 T 的不同顶点。如果 $u \in V(T) \setminus \{r\}$, $\{u, v\} \in E(T)$, 并且 $v \in V(P_{u,r})$,, 则称顶点 u 为 v 的直接后继，其中 $P_{u,r}$ 是连接顶点 u 与 T 中根 r 的路径。

注 *2.9* 设 $T = T(r)$ 是一个有根树。命题 (iii) 2.5 的条件表明，对于每个顶点 $u \in V(T) \setminus \{r\}$，都存在唯一的顶点 $v \in V(T)$ 使得 u 是 v的直接后继。

利用直接后继的概念，我们可以按照以下规则定义有根树中顶点的层级。

设 $T = T(r)$ 是一个有根树。那么，根据定义，顶点 $u \in V(T) \setminus \{r\}$ 若 u 是 r的直接后继，则具有第一层级。顶点 $u \in V(T) \setminus \{r\}$ 若 u 是第一层级某个顶点的直接后继，则具有第二层级。

一般而言，顶点 $u \in V(T) \setminus \{r\}$ 若存在顶点$v \in V(T)$，使得 v 具有第 $n-1$ 层级，且 u 是 v的直接后继，则具有第 $n \geq 2$ 层级。

定义 2.10 带标号树 $T = T(l)$ 是一棵树 T及其标记 $l\colon V(T) \to \mathbb{R}^+$。带标号根树 $T(r, l)$ 是赋予给定标记 l 的有根树 $T(r)$。

因此，我们假设树的顶点上的标号均为某些非负数。

定义 2.11 设 G 和 H 是图。双射 $f\colon V(G) \to V(H)$ 称为 G 和 H 的同构，如果逻辑等价关系

$$(\{u, v\} \in E(G)) \iff (\{f(u), f(v)\} \in E(H))$$

对所有 $u, v \in V(G)$ 都成立。若两个图之间存在同构，则称它们同构。

如果图带有任何附加结构，则需要修改上述定义。

定义 2.12 设 $T_1 = T_1(r_1, l_1)$ 和 $T_2 = T_2(r_2, l_2)$ 是带标号根树。映射 $f\colon V(T_1) \to V(T_2)$ 称为 $T_1(r_1, l_1)$ 与 $T_2(r_2, l_2)$ 的同构，如果 f 是自由树（无根、无标记） T_1 和 T_2 之间的同构，并且此外有

$$f(r_1) = r_2, \quad l_1(v) = l_2(f(v))$$

对于每个 $v \in V$（T_1）。如果这些树之间存在同构，则这些带标号根树同构。

The following concept is well-known (see, for example, [7, p. 17]).

定义 2.13 设 G 是一个有限图，$k \geq 2$ 是一个整数。若图 G 的顶点集 V（G）可划分为 k 个非空且互不相交的

部分，使得没有任何一条边的两个端点属于同一部分，并且不同部分中的任意两个顶点都相邻。

下一个定义由 [20] 引入，用于刻画满足 Gomory–Hu 不等式 [16],的有限超度量空间 $(X,\ d)$

$$|D(X)| \leq |X|,$$

转化为等式

$$|D(X)| = |X|.$$

定义 2.14 设 $(X,\ d)$ 是一个满足 $|X| \geq 2$ 的有限度量空间。若图 G_X 满足以下条件，则称其为 $(X,\ d)$ 的直径图：

$$V(G_X) = X$$

and

$$(\{u, v\} \in E(G_X)) \iff (d(u, v) = \operatorname{diam} X) \tag{7}$$

对所有 $u,\ v \in X$。

以下定理直接由 [6] 的定理 3.2 和 [2]的命题 3.3 得出。

定理 2.15 设 $(X,\ d)$ 是一个满足 $|X| \geq 2$ 的有限超度量空间。那么，直径图 G_X 是具有 $k \geq 2$ 的完全 k部图。此外，直径图 G_X 的每个部分都是 $(X,\ d)$ 中的一个半径为 $r = \operatorname{diam} X$的开球。反之，每个满足 $r = \operatorname{diam} X$ 且具有 $c \in X$ 的开球 $B_r(c) \subseteq X$ 都是 G_X 的一个部分。

对于每个有限超度量空间 $(X,\ d)$，若其满足 $|X| \geq 2$，我们可以关联一棵带标号根树 $T_X = T_X(r_X,\ l_X)$，使得 $r_X := X$且 $l_X:\ V(T_X) \to \mathbb{R}^+$按以下规则定义（见 [20]）。

根据定理 2.15，直径图 G_X 是一个完全 k部图，其中 $k \geq 2$。设 $X_1,\ \ldots\ldots,\ X_k$ 为 G_X的各个部分。于是，根据定义，T_X第一层的节点为集合 $X_1,\ \ldots\ldots,\ X_k$，并将这些节点的标号定义为

$$l_X(X_i) := \operatorname{diam} X_i, \tag{8}$$

$i = 1,\ \ldots\ldots,\ k$。第一层中标号为 0 的节点是叶子，而标号严格为正的节点是树 T_X 的内部节点。如果所有 $X_1,\ \ldots\ldots,\ X_k$都是叶子，那么树 T_X 便构造完成。否则，以内部节点 X_j、$j \in \{1, \ldots, k\}$代替 X，重复上述过程，得到第二层的节点，依此类推。由于 X 是有限的，某一层上的所有顶点最终都会成为叶子，从而完成 T_X 的构造。

上述构造的带标号根树 T_X 称为超度量空间(X, d)的表示树 。

引理 2.16 设(X,d)是一个有限超度量空间，设 $T_X = T_X(r_X, l_X)$是(X,d)的表示树，并设 x_1和 x_2是 X 中的两个不同的点。如果$(\{x_1\}, v_1, \ldots, v_n, \{x_2\})$是连接 T_X中叶子 $\{x_1\}$ 和 $\{x_2\}$ 的路径，那么等式

$$d(x_1, x_2) = \max_{1 \le i \le n} l_X(v_i) \tag{9}$$

成立。

The proof of Lemma 2.16 is completely similar to the proof of Lemma 3.2 from [20].

例 2.17 考虑图 1 所示的四点超度量空间 (X_4, d_4)、(Y_4, ρ_4) 和带标号根树 T_{X_4}, T_{Y_4}。那么，T_{X_4}, T_{Y_4} 是 (X_4, d_4)、(Y_4, ρ_4) 的表示树；此外，集合 $\{0,3\}$ 和 $\{0,2,3\}$ 分别是空间 (X_4, d_4) 和 (Y_4, ρ_4) 的距离中心，

$$C(X_4) = \{0,3\}, \quad C(Y_4) = \{0,2,3\}.$$

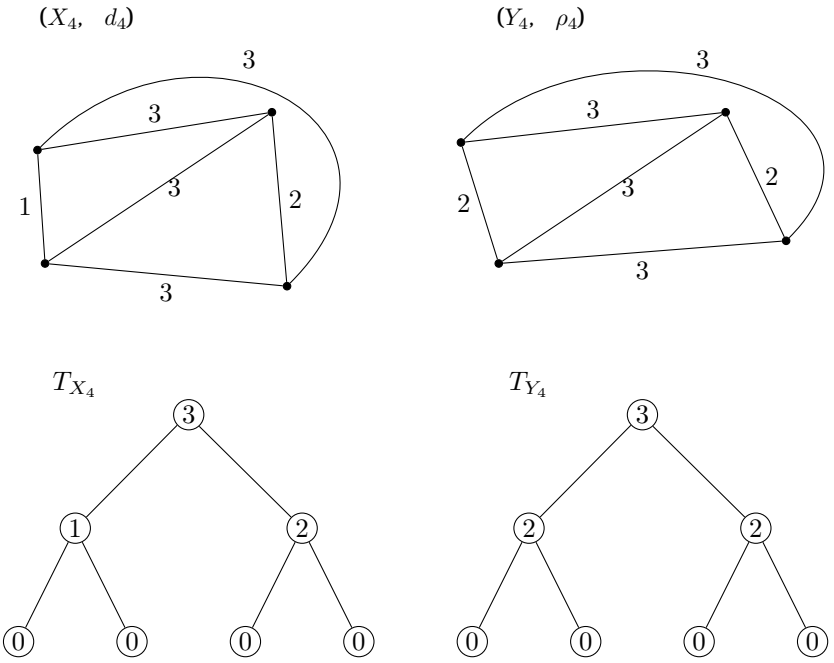

图 1 四点超度量空间 $(X_4,\ d_4)$ 和 $(Y_4,\ \rho_4)$ 及其表示树。

以下定理给出了带标号根树与有限超度量空间的表示树同构的充要条件。

定理 2.18 设 $T = T(r,l)$ 是一个有限标记根树，满足 $|V(T)| \geq 3$。那么，以下两个条件等价。

(i) 对于每个 $v \in V(T)$，我们都有 $\delta_T^+(v) \neq 1$，逻辑等价

$$(\delta_T^+(v) = 0) \iff (l(v) = 0)$$

成立；此外，当 u 是 v 的直接后继时，不等式 $l(u) < l(v)$ 成立。

(ii) 存在一个有限超度量空间 (X,d)，其中 $|X| \geq 2$，使得 $T(r,l)$ 与表示树 $T_X = T_X(r_X, l_X)$ 作为带标号根树同构。

定理 2.18 是论文 [11] 中定理 2.7 的特例。

3 $C(X)$ 的点数上界

设 (X,d) 是一个度量空间，设 $p \in X$，并设 $D_p(X)$ 是距离集 $D(X)$的一个子集，定义如下

$$D_p(X) := \{d(p,x) : x \in X\}. \tag{10}$$

下一个命题是已知结果，参见例如 [19]。

命题 3.1 设 (X,d) 是一个度量空间，且 $C(X)$ 是(X,d)的距离中心。那么等式

$$C(X) = \bigcap_{p \in X} D_p(X)$$

成立。

对于有限超度量空间(X,d)，我们也可以用表示树 T_X 来描述集合 $D_p(X)$。

推论 3.2 设 (X,d) 是一个有限超度量空间，且有 $|X| \geq 2$；设 $T_X = T_X(r_X, l_X)$ 是(X,d)的表示树。那么对每个 $p \in X$，我们都有等式

$$D_p(X) = \{l_X(u) : u \in V(P_{\{p\},r_X})\}, \tag{11}$$

其中 $P_{\{p\},r_X}$ 是 T_X 中连接叶子 $\{p\}$ 与根 r_X的路径。

证明 由（10）和引理 2.16可得。 □

以下引理可直接由定义 1.1、定义 2.13和定理 2.15得出。

引理 3.3 设(X,d) 是一个具有 $|X| \geq 2$ 的有限超度量空间。则包含关系

$$\{0, \operatorname{diam} X\} \subseteq C(X)$$

成立。

下一个命题给出了一个等式，用有限超度量空间(X,d) 的距离中心来表示直径图 $G(X)$ 各部分的距离中心。

命题 3.4 设(X,d) 是一个有限超度量空间，满足 $|X|\geq 2$，且其直径图 $G(X)$ 是以 k 个部分 $X_1,\ldots,X_k$ 构成的完全多部图。那么等式

$$C(X)=\{\operatorname{diam} X\}\cup\left(\bigcap_{i=1}^{k}C(X_i)\right) \tag{12}$$

成立，其中 $C(X)$ 是超度量空间(X,d)的距离中心，而 $C(X_1)\ldots,C(X_k)$ 是超度量空间$(X_1,d|_{X_1\times X_1})$，$\ldots$，$(X_k,d|_{X_k\times X_k})$的距离中心。

证明 等式 (12) 成立当且仅当以下包含关系成立

$$C(X)\supseteq\{\operatorname{diam} X\}\cup\left(\bigcap_{i=1}^{k}C(X_i)\right) \tag{13}$$

and

$$C(X)\subseteq\{\operatorname{diam} X\}\cup\left(\bigcap_{i=1}^{k}C(X_i)\right) \tag{14}$$

成立。

包含关系 (13) 成立的条件是满足如下隶属关系

$$t\in C(X) \tag{15}$$

每当

$$t\in\{\operatorname{diam} X\}\cup\left\{\bigcap_{i=1}^{k}C(X_i)\right\}. \tag{16}$$

令 t 满足（16）。若

$$t=\operatorname{diam} X$$

成立，则根据引理 15，式（3.3）有效。考虑以下情形:

$$t\neq\operatorname{diam} X.$$

然后利用（16）可得隶属关系

$$t\in C(X_i) \tag{17}$$

对每个 $i\in\{1,\ldots,k\}$. 定义 1.1 和公式（17）推出等式

$$d(p,x)=t \tag{18}$$

对每个 $p\in X_i$ 和任意 $i\in\{1,\ldots,k\}$，方程都有解 $x\in X_i$。

最后一个陈述意味着（18）对每个 $x\in X$ 都有解 $p\in X$，因为我们有等式

$$X=\bigcup_{i=1}^{k}X_i$$

根据定义 2.13、2.14 和定理 2.15。因此，式（15）根据定义 1.1成立。

包含关系（13）成立。

要证明（14），只需证明当 t 满足（15）时（16）成立。任取 t 满足（15）。若 $t =$ 直径 X 成立，则（16）显然成立。若 $t \neq$ 直径 X成立，则利用（2）和（15）可得严格不等式

$$t < \operatorname{diam} X.$$

最后一个不等式、定义 1.1、等式（2）和公式（15）表明，对于每个开球 $B_r(p)$，若 $r = \operatorname{diam} X$ 且 $p \in X$，则存在一点 x 使得

$$d(p, x) = t \quad \text{and} \quad x \in B_r(p).$$

由于根据命题 2.3，$B_r(p)$ 中的每个点都是 $B_r(p)$ 的中心，因此，对于每个开球 $B_r(p) \subseteq X$，只要 $r = \operatorname{diam} X$，数 t 就属于距离中心 $C(B_r(p))$。因此，我们得到如下包含关系：

$$t \in \bigcap_{B \in \mathcal{F}} C(B), \tag{19}$$

其中，$\mathcal{F}$ 是所有满足 $p \in X$ 且 $r = \operatorname{diam} X$的开球 $B = B_r(p) \subseteq X$ 组成的族。

现在利用（19）和定理 2.15，可知（16）成立。

包含关系（14）得证。

证明完毕。 □

推论 3.5 设(X, d) 是一个满足 $|X| \geq 2$ 的有限超度量空间，且其直径图 G_X 是一个具有 k 个部分的完全多部图，这些部分为 X_1、.....、X_k，并设 X_{k_0} 是 G_X 的一个部分，使得

$$|X_{k_0}| = \min_{1 \leq j \leq k} |X_j|.$$

则不等式

$$|C(X)| \leq 1 + |C(X_{k_0})|$$

成立，其中 $C(X)$ 是超度量空间(X, d) 的距离中心，而 $C(X_{k_0})$ 是超度量空间$(X_{k_0}, d|_{X_{k_0} \times X_{k_0}})$ 的距离中心。

证明 等式 (12) 蕴含包含关系

$$C(X) \subseteq \{\operatorname{diam} X\} \cup C(X_{k_0}),$$

由此可得不等式

$$|C(X)| \leq \big|\{\operatorname{diam} X\} \cup C(X_{k_0})\big| \leq 1 + |C(X_{k_0})|,$$

证毕。 □

推论 3.6 设(X, d) 是一个具有 $|X| \geq 2$ 的有限超度量空间，且其直径图 G_X 是以 X_1 和 X_2 为部的完全二部图。如果$(X_1, d|_{X_1 \times X_1})$ 和$(X_2, d|_{X_2 \times X_2})$ 都与超度量空间(Y, ρ)等距，则等式

$$|C(X)| = 1 + |C(Y)| \tag{20}$$

成立，其中 $C(X)$ 和 $C(Y)$ 分别是空间 (X, d) 和 (Y, ρ)的距离中心。

证明 设 (Y,ρ) 是一个超度量空间，使得 (Y,ρ)、$(X_1,d|_{X_1\times X_1})$ 以及 $(X_2,d|_{X_2\times X_2})$ 均彼此等距。由定义 2.2 和 1.1 可直接得出，任意两个等距空间具有相同的距离中心。因此，我们得到等式

$$C(X)=C(Y)\cup\{\operatorname{diam}X\}$$

由（12）。最后一个等式以及公式

$$\operatorname{diam}X>\operatorname{diam}X_1=\operatorname{diam}X_2=\operatorname{diam}Y$$

可得所需的等式（20） . □

引理 3.7 设(Y,ρ)是一个有限超度量空间，且具有 $|Y|\geq 2$；令 $T_Y=T_Y(r_Y,l_Y)$ 为(Y,ρ)的表示树。若 p_1,p_2 是 Y中的不同点，且 v_0 是 T_Y 的一个内部节点，使得 $\{p_1\},\{p_2\}$ 是 v_0的直接后继，则等式

$$D_{p_1}(Y)=D_{p_2}(Y) \tag{21}$$

成立，其中

$$D_{p_i}(Y):=\{\rho(p_i,y):y\in Y\}$$

对于 $i=1,\ 2$。

证明 等式（11）意味着（21）成立，当且仅当等式

$$\{l_Y(u)\colon u\in V(P_{\{p_1\},r_Y})\}=\{l_Y(u)\colon u\in V(P_{\{p_2\},r_Y})\}, \tag{22}$$

其中， $i=1,2$, $P_{\{p_i\},r_Y}$是连接叶子 $\{p_i\}$ 与 T_Y中的根 r_Y的路径。

路径 $P_{\{p_1\},r_Y}$ 的顶点可以不重复地编号，使得

$$V(P_{\{p_1\},r_Y})=\{\{p_1\},v_0,v_1,\dots,v_n,r_Y\}$$

and

$$E(P_{\{p_1\},r_Y})=\{\{\{p_1\},v_0\},\{v_0,v_1\},\dots,\{v_n,r_Y\}\}$$

（参见公式（5））。由于 $\{p_1\}$ 和 $\{p_2\}$ 是 v_0的直接后继，节点 $\{p_2\}$ 和 v_0 相邻

$$\{\{p_2\},v_0\}\in E(T_Y).$$

因此，$(\{p_2\},v_0,v_1,\dots,v_n,r_Y)$也是 T_Y中的一条路径，并且显然这条路径连接 $\{p_2\}$ 和 r_Y。由于任意一棵树中的任意两个不同节点之间只能由一条路径连接，等式

$$P_{\{v_2\},r_Y}=(\{p_2\},v_0,v_1,\dots,v_n,r_Y)$$

成立。最后一个等式以及等式

$$l_Y(\{p_1\})=\operatorname{diam}\{p_1\}=0=\operatorname{diam}\{p_2\}=l_Y(\{p_2\})$$

（参见公式（8））蕴含等式（22）等式（21）由此得出 . □

下一个命题表明，每个至少包含两个点的有限超度量空间（X， d）都可以扩展，同时保持其距离中心 C（X）不变。

命题 3.8 设（X,d）是一个具有 $|X|\geq 2$ 的有限超度量空间。那么存在一个有限超度量空间（Y,ρ），使得

$$|Y|=1+|X| \tag{23}$$

并且等式

$$C(X)=C(Y) \tag{24}$$

成立，其中 $C(X)$ 和 $C(Y)$ 分别是(X,d) 和(Y,ρ)的距离中心。

证明 设 $T_X = T_X(r_X, l_X)$ 为(X,d)的表示树。由于 (X,d) 是有限的，且$|X| \geq 2$ 成立，因此我们可以找到 $x_1 \in X$ 以及属于 T_X 的一个内部节点 v_0，使得它是 v_0 (参见备注 2.9)。

我们通过等式定义图 T^*

$$V(T^*) := V(T_X) \cup \{v^*\}, \tag{25}$$

$$E(T^*) := E(T_X) \cup \{v^*, v_0\}, \tag{26}$$

其中 v^* 是满足 $v^* \notin V(T_X)$ 的任意点。

显然， T^* 是满足这些等式的连通图

$$|V(T^*)| = 1 + |V(T_X)|,$$

$$|E(T^*)| = 1 + |E(T_X)|.$$

因此 T^* 根据命题 2.5 是一棵树。

现在我们在树 T^* 中确定一个根 r^*，使得

$$r^* := r_X, \tag{27}$$

其中 r_X 是 T_X 的根，并根据公式定义标记 $l^*\colon V(T^*) \to \mathbb{R}^+$

$$l^*(u) := \begin{cases} l_X(u), & \text{if } u \in V(T_X), \\ 0, & \text{if } u = v^*. \end{cases} \tag{28}$$

等式（25）、（26）推出以下等式

$$\delta_{T^*}(v^*) = 1, \quad \delta_{T^*}(v_0) = 1 + \delta_{T_X}(v_0) \tag{29}$$

以及等式

$$\delta_{T_X}(v) = \delta_{T^*}(v) \tag{30}$$

对每个 $v \in V(T_X) \setminus \{v_0\}$。因此，利用（6），我们可以将（29）、（30）改写为

$$\delta^+_{T^*}(v^*) = 0, \quad \delta^+_{T^*}(v_0) = 1 + \delta^+_{T_X}(v_0), \tag{31}$$

and

$$\delta^+_{T_X}(v) = \delta^+_{T^*}(v) \tag{32}$$

对每个 $v \in V \setminus \{v_0\}$。

我们来证明，定理 (i) 的条件 2.18 对 $T(r,l) = T^*(r^*, l^*)$成立。

由于 $T_X(r_X, l_X)$ 是(X,d)的表示树，定理 (i) 的条件 2.18 以及公式（28）、（31）、（32）表明关系

$$\delta^+_{T^*}(v) \neq 1 \tag{33}$$

以及逻辑等价

$$(\delta^+_{T^*}(v) = 0) \iff (l^*(v) = 0) \tag{34}$$

成立。因此，只需证明不等式

$$l^*(u) < l^*(v) \tag{35}$$

成立，只要 u， $v \in V(T^*)$ 且 u 是有根树 T^* 中 v 的直接后继。

设 u 是 T^* 中 v 的直接后继。先假设 u， $v \in T_X$。由于 T_X 是 T^* 的子树，并且

$$r^* = r_X$$

由（27），定义 2.8 可知， u是 v在 T_X（r_X）中的直接后继。树 $T_X = T_X$（r_X，l_X）是（X，d）的表示树。因此有不等式

$$l_X(u) < l_X(v)$$

由定理2.18可知，由（35）可得（28）。

考虑集合 $\{u,v\}$ 不是 $V(T_X)$ 的子集的情况，

$$\{u,v\} \not\subseteq V(T_X). \tag{36}$$

于是利用式（25）、（26）和定义2.8 可得等式

$$\{u,v\} = \{v^*, v_0\}. \tag{37}$$

由于 v_0 是 T_X的顶点，公式（36）、（37表明

$$u = v^* \quad \text{and} \quad v = v_0. \tag{38}$$

因此我们得到等式

$$l^*(u) = 0 \qquad \text{and} \qquad l^*(v) = l_X(v_0) \tag{39}$$

由公式（28）可得。此外，由于 $\{x_1\} \in T_X$ 是表示树 T_X中 v_0 的直接后继，我们有

$$0 = l_X(\{x_1\}) < l_X(v_0) \tag{40}$$

根据 T_X 的定义。

不等式（35）由（28）、（39）和（40）得出。

因此，定理 2.18 的条件（i）对带标号根树 $T^*(r^*, l^*)$ 也成立。由此，根据该定理的条件（ii），我们可以找到一个超度量空间 (Y,ρ)，使得 $T^*(r^*, l^*)$ 与该空间 (Y,ρ) 的表示树 $T_Y = T_Y(r_Y, l_Y)$ 同构。

我们来证明这个 等式（23）对 $Y,\rho)$成立。

根据表示树的定义 T_X 可直接得出 $\{\{x\}: \ x \in X\}$ 是这棵树的叶子。同理，集合 $\{\{y\}: y \in Y\}$ 是空间 T_Y 的表示树 (Y,ρ) 的叶子。此外，等式（25）、（26）表明集合

$$\{v^*\} \cup \{\{x\} : x \in X\}$$

是树 T^* 的叶子集合。上文已证明 $T^*(r^*, \ l^*)$ 与 T_Y 同构。因此，树 T_Y 和 $T^*(r^*, \ l^*)$ 的叶子集合具有相同的基数。现在利用等式

$$\{v^*\} \cap \{\{x\} : x \in X\} = \varnothing,$$

我们得到

$$|Y| = |\{\{y\} : y \in Y\}| = \left|\{v^*\} \cup \{\{x\} : x \in X\}\right| = \left|\{v^*\}\right| + |\{\{x\} : x \in X\}| = 1 + |X|.$$

等式（23）得证。

我们来证明等式（24）。

根据命题 3.1，等式

$$C(X) = \bigcap_{p \in X} D_p(X) \tag{41}$$

and

$$C(Y) = \bigcap_{p \in Y} D_p(Y) \tag{42}$$

在.....时成立

$$D_p(X) = \{d(x,p) \colon x \in X\} \tag{43}$$

对于 $p \in X$，且

$$D_p(Y) = \{\rho(y,p) \colon y \in Y\} \tag{44}$$

对于 $p \in Y$。

利用推论3.2，我们可以将等式（43）和（44）改写为

$$D_p(X) = \{l_X(u) : u \in V(P_{\{p\},X})\}$$

and

$$D_p(Y) = \{l_Y(u) : u \in V(P_{\{p\},Y})\},$$

其中 $P_{\{p\},\ X}$ 是 T_X 中连接叶子 $\{p\}$ 与根 X 的路径，而 $P_{\{p\},\ Y}$ 是 T_Y 中连接 $\{p\}$ 与 Y的路径。

因此 (41)、(42) 推出等式

$$C(X) = \bigcap_{x \in X} \{l_X(u) : u \in V(P_{\{x\},X})\} \tag{45}$$

and

$$C(Y) = \bigcap_{y \in Y} \{l_Y(u) : u \in V(P_{\{y\},y})\}. \tag{46}$$

集合 $\{\{y\}, y \in Y\}$ 是空间 T_Y的表示树的叶子集合 $(Y,\ \rho)$。由于树 $T^*(r^*,\ l^*)$ 和 $T_Y($ $r_Y,\ l_Y)$ 作为带标号根树同构，等式 (46) 给出了等式

$$C(Y) = \bigcap_{v \in L(T^*)} \{l^*(u) : u \in V(P_{u,r^*})\}, \tag{47}$$

其中 $L(T^*)$ 是 T^* 和 $P_{u\text{的所有叶子的集合},\ r^*}$ 是 T^* 中连接叶子 $v \in L(T^*)$ 与根 r^* 的路径，其中 T^*。由 (25)、(26) 可得等式

$$L(T^*) = \{v^*\} \cup \{\{x\} : x \in X\} \tag{48}$$

成立，这是因为 $\{\{x\} :\ x \in X\}$ 是 T_X的所有叶子的集合。

现在，(45)、(47) 和 (48) 推出

$$C(Y) = C(X) \cap \{l^*(u) : u \in V(P_{v^*,r^*})\}. \tag{49}$$

由于 $T^*(r^*,\ l^*)$ 和 $T_Y(r_Y,\ l_Y)$ 同构，且叶子 $\{x_1\}$、$v^* \in L(T^*)$ 是 $v_0 \in V(T^*)$ 的直接后继，因此等式

$$\{\, l^*(u) : u \in V(P_{v^*,r^*}) \,\} = \{\, l^*(u) : u \in V(P_{\{x_1\},r^*}) \,\} \tag{50}$$

由引理 3.7 得出。根据 $T^*(r^*,\ l^*)$ 的定义，可得等式

$$\{\, l^*(u) : u \in V(P_{\{x_1\},r^*}) \,\} = \{\, l_X(u) : u \in V(P_{\{x_1\},X}) \,\}, \tag{51}$$

其中，$P_{\{x_1\},\ X}$ 是 T_X 中连接叶子 $\{x_1\}$ 与根 X 的路径。等式 (45)、(50) 和 (51) 给出包含关系

$$\{\, l^*(u) : u \in V(P_{v^*,r^*}) \,\} \supseteq C(X). \tag{52}$$

最后一个包含关系结合等式 (49) 得出所需的等式 (24)。

证明完毕。 □

对于任意正整数 n，我们将 $M(n)$ 记为满足下述条件的最小正整数:

$$|C(X)| \le M(n)$$

对于每个满足 $|X| = n$ 的超度量空间 (X, d)，下式成立。

推论 3.9 不等式

$$M(n_1) \le M(n_2) \tag{53}$$

对满足不等式 $n_1 \le n_2$ 的所有正整数 n_1、n_2 均成立。

证明 若双重不等式 $2 \leq n_1 \leq n_2$ 成立，则由命题 533.8可得（53）。当.....时证明（

$$1 \leq n_1 \leq n_2.$$

只需注意到

$$C(X) = \{0\}$$

当(X, d) 是单点超度量空间时成立，并应用引理3.3。 □

下面的定理为问题1.2 提供了解答，也是本文的主要结果。

定理 3.10 设 $n \geq 1$ 为一个整数，设$\log_2(n)$ 为 n的二进对数，并设 $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ 为$\log_2(n)$的整数部分。则不等式

$$|C(X)| \leq 1 + \lfloor \log_2(n) \rfloor \tag{54}$$

对每个超度量空间(X, d) 且满足 $|X| = n$均成立。此外，存在一个超度量空间(Y, ρ)，使得 $|Y| = n$ 且

$$|C(Y)| = 1 + \lfloor \log_2(n) \rfloor. \tag{55}$$

证明 设 $\mathbb{N}$ 为所有正整数构成的集合，并设 $M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为由以下规则定义的函数：等式

$$M(n) = m \tag{56}$$

当且仅当我们有

$$|C(X)| \leq m \tag{57}$$

对于所有满足 $|X| = n$ 的超度量空间 (X, d)，并且存在一个超度量空间 (Y, ρ)，使得

$$|Y| = n, \tag{58}$$

and

$$|C(Y)| = m. \tag{59}$$

我们断言，等式

$$M(2^l) = l + 1, \tag{60}$$

and

$$M(2^l - 1) = l \tag{61}$$

对每个 $l \in \mathbb{N}$ 都成立。

我们将对 l 使用归纳法来证明这一断言。

基础情形。 首先注意到，等式

$$M(2^0) = 1, \qquad M(2^1) = 2$$

由定义 1.1得出。

归纳假设。假设等式

$$M(2^{l_0}) = l_0 + 1, \tag{62}$$

and

$$M(2^{l_0} - 1) = l_0 \tag{63}$$

对某个 $l_0 \in \mathbb{N}$ 成立。

归纳步骤。让我们证明以下等式

$$M(2^{l_0+1}) = l_0 + 2 \tag{64}$$

and

$$M(2^{l_0+1}-1)=l_0+1. \tag{65}$$

设 $(X,\ d)$ 是一个任意的超度量空间，满足

$$|X|=2^{l_0+1} \tag{66}$$

并令 $G(X)$ 为 (X,d) 的直径图。根据定理 2.15，图 $G(X)$ 是完全 k-部图，其中 $k\geq 2$。令 $X_1,\ldots,X_k$ 为 $G(X)$ 的各部分，并令 X_{k_0} 为满足等式的一个部分

$$|X_{k_0}|=\min_{1\leq j\leq k}|X_j|. \tag{67}$$

那么，根据推论 3.5，我们有不等式

$$|C(X)|\leq 1+|C(X_{k_0})|, \tag{68}$$

其中 $C(X_{k_0})$ 是超度量空间 $(X_{k_0},d|_{X_{k_0}\times X_{k_0}})$ 的距离中心。

定义 2.13 蕴含等式

$$|X|=\sum_{j=1}^{k}|X_j|.$$

最后一个等式、等式（67）和不等式 $k\geq 2$ 蕴含不等式

$$2|X_{k_0}|\leq |X|$$

成立。因此我们有

$$|X_{k_0}|\leq 2^{l_0} \tag{69}$$

由（66）。

记 $n_0:=|X_{n_0}|$。那么，根据函数 $M:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 的定义，我们得到不等式

$$|C(X_{k_0})|\leq M(n_0). \tag{70}$$

由推论 3.9 可知，$M:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 递增。因此，不等式（68）、（69）和（70）推出

$$|C(X)|\leq 1+|C(X_{k_0})|\leq 1+M(n_0)\leq 1+M(2^{l_0}). \tag{71}$$

由于 $(X,\ d)$ 是满足条件（66）的任意超度量空间，函数 $M:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 的定义和（71）给出

$$M(2^{l_0+1})\leq 1+M(2^{l_0}).$$

最后一个不等式和（62）推出不等式

$$M(2^{l_0+1})\leq l_0+2. \tag{72}$$

因此，要证明（64），只需证明存在一个超度量空间 $(Y,\ \rho)$ 使得

$$|Y|=2^{l_0+1} \tag{73}$$

and

$$|C(Y)|=l_0+2. \tag{74}$$

来证明这一点。根据归纳假设，我们可以找到一个超度量空间 (Y_1,ρ_1)，使得

$$|Y_1|=2^{l_0} \tag{75}$$

and

$$|C(Y_1)|=l_0+1. \tag{76}$$

设超度量空间 (Y_2, ρ_2) 与 (Y_1, ρ_1) 等距，并设 Y_1 和 Y_2 是不相交集合，

$$Y_1 \cap Y_2 = \varnothing.$$

由于 (Y_1, ρ_1) 和 (Y_2, ρ_2) 等距，等式

$$\operatorname{diam} Y_1 = \operatorname{diam} Y_2 \tag{77}$$

成立。任取满足条件的正数 t^* s

$$t^* > \operatorname{diam} Y_1 = \operatorname{diam} Y_2,$$

并定义空间 (Y, ρ) 如下：

$$Y := Y_1 \cup Y_2 \tag{78}$$

并且，对于所有 $x, y \in Y$

$$\rho(x,y) := \begin{cases} \rho_1(x,y), & x,y \in Y_1, \\ \rho_2(x,y), & x,y \in Y_2, \\ t^*, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{79}$$

容易证明，ρ 是 Y 上的超度量，而 t^* 是 (Y, ρ) 的直径，

$$t^* = \operatorname{diam} Y. \tag{80}$$

令 G为以 Y_1 和 Y_2为两部分的完全二部图。等式（80）、公式（79）和定义 2.14 给出等式

$$G = G_Y,$$

其中，G_Y 是(Y, ρ)的直径图。

由于 (Y_1, ρ_1) 和 (Y_2, ρ_2) 互不相交且等距，等式（77）和（78）推出

$$|Y| = |Y_1 \cup Y_2| = |Y_1| + |Y_2| = 2|Y_1| = 2 \cdot 2^{l_0} = 2^{l_0+1}. \tag{81}$$

因此，我们有

$$|C(Y)| = 1 + |C(Y_1)| \tag{82}$$

由推论 3.6可知。现在，由（76）和（82）可得等式（64）成立。

我们来证明等式（65）。由于 $M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个递增函数，且 $l_0 \in \mathbb{N}$，双重不等式

$$2^{l_0} < 2^{l_0+1} - 1 \leq 2^{l_0+1} \tag{83}$$

推出

$$M(2^{l_0}) \leq M(2^{l_0+1} - 1) \leq M(2^{l_0+1}). \tag{84}$$

利用（62）和（64），我们可以将（84）改写为

$$l_0 + 1 \leq M(2^{l_0+1} - 1) \leq l_0 + 2.$$

因此，如果（65）不成立，那么等式

$$M(2^{l_0+1} - 1) = l_0 + 2 \tag{85}$$

成立。因此，根据函数 $M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的定义，存在一个超度量空间 (Z, δ)，使得

$$|Z| = 2^{l_0+1} - 1 \tag{86}$$

and

$$|C(Z)| = l_0 + 2, \tag{87}$$

其中 $C(Z)$ 是超度量空间 (Z, δ) 的距离中心。

令 $G(Z)$ 为 $(Z,\ \delta)$ 的直径图。根据定理 2.15，图 $G(Z)$ 是完全 k-部图，其中 $k \geq 2$。令 $Z_1,\ \ldots\ldots,\ Z_k$ 为 $G(Z)$ 的各部，并令 Z_{k_0} 为满足等式的一个部

$$|Z_{k_0}| = \min_{1\leq j\leq k} |Z_j|. \tag{88}$$

因此，根据推论 3.5，我们得到不等式

$$|C(Z)| \leq 1 + |C(Z_{k_0})|, \tag{89}$$

其中 $C(Z_{k_0})$ 是超度量空间 $(Z_{k_0},\ d|_{Z_{k_0}\times Z_{k_0}})$ 的距离中心。

定义 2.13 推出等式

$$|Z| = \sum_{j=1}^{k} |Z_j|.$$

最后一个等式、等式（88）以及不等式 $k \geq 2$ 给出不等式

$$2|Z_{k_0}| \leq |Z|,$$

它可以写成以下形式

$$2|Z_{k_0}| \leq 2^{l_0+1} - 1 \tag{90}$$

由（86）。由于 $|Z_{k_0}|$ 是一个整数，不等式（90）推出

$$|Z_{k_0}| \leq 2^{l_0} - 1. \tag{91}$$

根据函数 M 的定义：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 我们有不等式

$$|C(Z_{k_0})| \leq M(|Z_{k_0}|). \tag{92}$$

因此，不等式

$$|C(Z_{k_0})| \leq M(2^{l_0} - 1) \tag{93}$$

由（91）和（92）可得，因为 $M:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是递增的。现在，由（93）和（63）可得不等式

$$|C(Z_{k_0})| = l_0. \tag{94}$$

因此，

$$|C(Z)| \leq l_0 + 1 \tag{95}$$

由（89）和（94）成立。最后一个不等式与等式（87）矛盾。因此，等式（65）成立。

归纳步骤已完成 .

现在我们可以证明不等式（54）。

考虑任意一个超度量空间（$X,\ d$），其给定的 $|X| = n$。如果数 n 可以写成

$$n = 2^l,$$

其中 l 是整数，那么等式

$$\lfloor \log_2(n) \rfloor = l \tag{96}$$

成立，因此（54）转化为不等式

$$|C(X)| \leq 1 + l. \tag{97}$$

最后一个不等式由（60）以及函数 $M:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的定义得出。此外，该定义还意味着存在一个超度量空间 $(Y,\ \rho)$，它满足（55）和等式 $|Y| = n$。

我们来考虑这样的情况：数 n 不能写成 2^l 的形式，其中 l为整数。在这种情况下，我们可以找到 $l \in \mathbb{N}$，使得

$$2^l < n \leq 2^{l+1} - 1. \tag{98}$$

最后一个双重不等式意味着等式（96），如上所述，它给出了形式为（54）的（97）。

为完成证明，只需注意等式（60）、（61）蕴含等式

$$M(n) = l + 1$$

对于每个满足（）的 n 98 M $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ M $\mathbb{N} \to$，因为：
是递增的。因此，根据 $\mathbb{N}$: 的定义，我们可以找到一个超度量空间 Y（，ρ），使得当满足（）时，（）^{n} 成立。 55 98

证明完成。 □

注 *3.11* 在论文 [15], 中，作者猜想定理 3.10 对所有有限超度量空间都成立（参见 [15]中的猜想 3）。

下一个结果可视为定理3.10的对偶形式。

推论 3.12 设 $m \geq 1$ 为一个整数，并设 (X, d) 为一个有限超度量空间，使得

$$|C(X)| = m,$$

其中 $C(X)$ 是空间 (X, d)的距离中心。那么集合 X 至少包含 2^{m-1} 个点，

$$|X| \geq 2^{m-1}.$$

例 *3.13* 设 $n \geq 1$ 是一个整数， X 是所有有限二进制字的集合（x_1、……、 x_n），其中对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$都有 $x_i \in \{0, 1\}$。那么 X 的基数是 2^n,

$$|X| = 2^n.$$

定义字 $x = (x_1$、……、 $x_n)$ 与 $y = (y_1$、……、 $y_n)$ 之间的距离为

$$d(x, y) := 2^{-m}$$

如果 m 是字 x 与 y 不同的第一个位置，并记

$$d(x, y) := 0$$

如果 $x = y$。那么 (X, d) 是一个超度量空间，其距离中心为

$$C(X) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2^n}\right\}.$$

因此，等式

$$|C(X)| = 1 + n = 1 + \log_2 |X| = 1 + \lfloor \log_2 |X| \rfloor$$

成立。

注 *3.14* 上述例子及论文 [22] 中的结果表明，有限超度量空间的距离中心也与有限词集合上的拓扑有关。

4 总结与预期结果

下面我们将使用弱相似超度量空间这一概念。

定义 4.1 设 (X,d) 和 (Y,ρ) 是超度量空间。映射 $\Phi\colon X\to Y$ 是 (X,d) 和 (Y,ρ) 的弱相似，如果 Φ 是双射，且存在严格递增函数 $f\colon D(Y)\to D(X)$，使得等式

$$d(x,y)=f\big(\rho(\Phi(x),\Phi(y))\big)$$

对所有 $x,y\in X$ 均成立。

如果 $\Phi\colon X\to Y$ 是弱相似，那么称 (X,d) 与 (Y,ρ) 弱相似。

注 *1* 弱相似这一概念最初是在 [9] 中针对一般半度量空间提出的。

猜想 4.2 设 $n\in\mathbb{N}$，并设 (X,d) 和 (Y,ρ) 是超度量空间，满足

$$|X|=|Y|=2^n \tag{99}$$

and

$$|C(X)|=n+1. \tag{100}$$

那么，等式

$$|C(Y)|=|C(X)|$$

成立，当且仅当 (X,d) 和 (Y,ρ) 弱相似。

容易看出，等距超度量空间具有同一个距离中心。以下猜想特别指出，在对空间及其距离中心施加某些限制的条件下，逆命题也成立。

猜想 4.3 设 $n\in\mathbb{N}$，并设 (X,d) 和 (Y,ρ) 为满足等式 (99) 和 (100) 的超度量空间。那么，等式

$$C(X)=C(Y)$$

成立，当且仅当 (X,d) 和 (Y,ρ) 等距。

下一个猜想部分受到 Mateusz Kula 关于 $\mathbb{R}$ [18] 的伯恩斯坦子集的距离中心的结果启发。

猜想 4.4 设 A 是 $\mathbb{R}^+$ 的一个有限子集，使得 $0\in A.$。那么存在一个有限超度量空间 (X,d) 满足以下等式

$$D(X)=C(X)=A,$$

其中，$D(X)$ 和 $C(X)$ 分别是 (X,d) 的距离集和 (X,d) 的距离中心。

声明

资金支持
本研究由芬兰研究理事会资助，资助编号为 367319。

利益冲突/竞争性利益
作者声明不存在利益冲突。

伦理审批和参与同意不适用

发表同意不适用

数据可用性不适用

材料可用性
不适用

代码可用性
不适用

作者贡献
构思，O.D.；撰写——初稿，O.D.；方法，O.D.；形式化分析，O.R.；撰写——审阅与编辑，O.R.；调查，O.D.；资源，O.R.。所有作者均已阅读并同意发表的稿件版本。

参考文献

[1]Banakiewicz, M.: 中心 Cantor 集的距离中心。《数学研究成果》**78**, 234(2023)[2] Bilet, V., Dovgoshey, O., Kononov, Y.: 超度量与完全多部图。《图论与图的应用》**9**(1),8(2022)[3] Bartoszewicz, A., Głąb, S., Filipczak, M., Prus-Wiśniowski, F., Swaczyna, J.: 关于与几何 Cantor 集相关的正则 cantorvals 的生成。Chaos, Solitons& Fractals **114**, 468–473(2018)

[4] Bartoszewicz, A., Głąb, S., Marchwicki, J.: 从值域恢复纯原子有限测度。《数学分析与应用杂志》**467**(2), 825–841 (2018)[5] Bielas, W., Plewik, S., Walczyńska, M.: 关于距离中心。《欧洲数学杂志》**4**, 687–698 (2018)[6] Dordovskyi, D., Dovgoshey, O., Petrov, E.: 超度量空间中的直径与直径点对。 p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications**3**(4), 253–262 (2011)[7] Diestel, R.: 图论，第五版。《数学研究生教材》第**173**卷。施普林格，柏林 (2017)[8] Dovgoshey, O.: 有限超度量球。《p进数、超度量分析与应用》**11**(3), 177–191 (2019)[9] Dovgoshey, O., Petrov, E.: 度量空间与半度量空间的弱相似。《匈牙利数学学报》**141**(4), 301–319 (2013)[10] Dovgoshey, O., Petrov, E.: 从同构根树到等距超度量空间。《p进数、超度量分析与应用》**10**(4), 287–298 (2018)[11] Dovgoshey, O., Petrov, E.: 有限超度量空间及其表示树的性质与态射。《p进数、超度量分析与应用》**11**(1), 1–20 (2019)[12] Dovgoshey, O., Petrov, E.: 有限超度量空间的一些极值性质。《p进数、超度量分析与应用》**12**(1), 1–11 (2020)[13] Dovgoshey, O., Petrov, E., Teichert, H.-M.: 关于 Gomory-Hu 不等式的极值空间。《p进数、超度量分析与应用》**7**(2), 133–142 (2015)[14] Dovgoshey,O.,Petrov, E.,Teichert,H.-M.:有限超度量空间能有多刚性? 《不动点理论及其应用》**19**(2), 1083–1102 (2017)[15] Dovgoshey, O., Rovenska, O.: 标记树生成的超度量空间的距离中心。《数学》**14**(5) (2026)[16]Gomory, R.E., Hu, T.C.: 多终端网络流。工业与应用数学学会**9**(4), 551–570 (1961)[17] Kula, M., Nowakowski, P.: 实数集上级数的成就集。《数学研究成果》**79**, 221 (2024)[18] Kula, M.: 距离中心与伯恩斯坦集。《实分析交流》**50**(1), 193–198 (2025)

[19] Nowakowski, P., Prus-Wiśniowski, F., Turoboś,F.：超空间紧集中的谱算子、成就集和 P-和集合。arXiv:2512.11803（2025）[20] Petrov, E., Dovgoshey, A.：关于 Gomory-Hu 不等式。《数学科学杂志》**198(4)**，392–411（2014）[21] Schikhof, W.H.：《超度量微积分：p进分析导论》。剑桥大学出版社，剑桥（1985）[22] Staiger, L.：有限词的拓扑：与康托尔拓扑的相容性。RAIRO—理论信息学与应用 **58(2)**（2024）[23]Neumann, J.：积分算子谱的刻画。Hermann，巴黎（1935）