arXiv:2603.26006v1 [cs.DM] 27 Mar 2026

计算图的无不动点自同构

Aida Abiad*† Gabriel Coutinho‡ EmanuelJuliano§
Vinicius F. dos Santos¶ Sjanne Zeijlemaker‖

摘要

1981年，Lubiw 证明了无不动点自同构 问题（FPFAut）是 NP完全问题：给定一个图 G，判断是否存在自同构ϕ： $V(G) \to V(G)$，使得对每个 $u \in V(G)$ 都有 $\phi(u) \neq u$。我们重新研究这一问题，并证明：当限制在分裂图、二部图、 k-细分图以及 H-自由图时，如果 H 不是 P_4 的诱导子图，FPFAut 仍然是 NP完全问题。 P_4-自由图类有一个专门名称：余图。我们为余图的三种扩展——有界模宽图、树余图和 P_4-稀疏图——提供了一个多项式时间算法。我们的方法采用了广为人知的图的模分解。由此，我们推广了 Abiad 等人关于计算 2-齐次平衡划分问题的一项结果。

1 引言

对于图 G 和 H，双射 ϕ： $V(G) \to V(H)$ 若满足$uv \in E(G) \iff \phi(u)\phi(v) \in E(H)$，则称为同构 。判定两个图是否同构的问题称为图同构问题（GraphISO）。GraphISO 是 NP中间问题的候选问题，因为目前尚无已知的多项式时间算法可以解决 GraphISO，而且人们认为它不是 NP 困难 [25]。如果一个问题与 GraphISO 多项式等价，我们就称该问题为 GI完全 [30]。

*a.abiad.monge@tue.nl，数学与计算机科学系，埃因霍温理工大学，荷兰

†数学与数据科学系，布鲁塞尔自由大学，比利时

‡gabriel@dcc.ufmg.br，计算机科学系，米纳斯吉拉斯联邦大学，巴西

§emanuelsilva@dcc.ufmg.br，计算机科学系，米纳斯吉拉斯联邦大学，巴西

¶viniciussantos@dcc.ufmg.br，计算机科学系，米纳斯吉拉斯联邦大学，巴西

‖s.zeijlemaker@tue.nl，数学与计算机科学系，埃因霍温理工大学，荷兰

对于图 G，双射 ϕ：$V(G) \to V(G)$ 若满足 $uv \in E(G) \iff \phi(u)\phi(v) \in E(G)$，则称为自同构 。判定给定图是否具有非平凡自同构的问题是 GI完全 [2, 19]。图的自同构 ϕ 若将每个顶点都映射到自身以外的顶点，则称为无不动点 （FPF）。1981年，Lubiw [17] 证明了无不动点自同构问题（FPFAut）是 NP完全。

FPFAut
实例： 一个图 G。**问题：** G是否存在一个没有不动点的自同构?

Lubiw 的结果表明，在自同构问题中加入一个简单的限制，就会使其变为 NP完全问题。这一结果被用作若干多项式时间归约的起点，凸显了无不动点自同构在不同领域中的重要性。例如，受特征值界和线性规划应用的启发，Abiad 等人 [1] 引入了 2-齐次平衡划分的概念，并利用 Lubiw 的结果证明，判断一个图是否具有这样的划分是 NP完全问题。在更偏几何的背景下，Manning [18] 表明，FPFAut 与判断一个图是否存在可绘制为反射的自同构有关。Schröder 的综述 [26] 介绍了若干用于判断一个有序集是否具有不动点性质的算法；利用 Lubiw 的结果也已证明，这个问题是 NP完全问题。

我们不认为一般情况下能找到解决 FPFAut 的高效算法。不过，我们可以期待找到一些图类，使该问题存在多项式时间解。例如，Cameron [5] 指出，将 FPFAut 限制在顶点传递图上时，可以在多项式时间内求解；他引用了 Jordan [15, 27]的一项早期结果，该结果应用 Burnside引理证明，传递群中总是存在一个无不动点元素。本文的主要目标是确定更广泛的图族，使 FPFAut 存在多项式时间解。

我们首先排除一些知名的图类。

定理 1.1. 对于分裂图、二部图、 k细分图和 H自由图，如果 H 不是 P_4的诱导子图，那么 *FPFAut* 是 *NP* 困难的。

定理 1.1 未涵盖的 P_4自由图类有一个特殊名称：余图。De Ridder 和 Bodlaender 的一项结果 [8] 给出了限制在余图上的 FPFAut 的多项式时间解法。我们将这一结果推广到余图的广义形式。

定理 1.2. 对于有界模宽图、树余图和 P_4稀疏图，判断一个图 G 是否包含无不动点自同构的问题可以在多项式时间内解决。

证明定理 1.2 的主要思路是考察图 [11] 的模分解。这与 Klavík 等人

研究限制在列表上的自同构时所采用的策略不同。 [16] 他们的结果表明，对于树、平面图、区间图、圆图、置换图和有界树宽图，FPFAut 可以在多项式时间内求解。我们通过考虑一个更简单的问题，并将其推广到更一般的图类，补充了 Klavík 等人的工作。

我们的方法有一个优点：稍作修改即可用于寻找无不动点对合，也就是二阶无不动点自同构。寻找无不动点对合（FPFInv）的问题同样是 NP 困难的 [17]。事实上，在 Lubiw 用于证明无不动点自同构问题是 NP 困难的归约中，每个无不动点自同构都是无不动点对合。

我们将定理 1.1 和 1.2 推广到 FPFInv 问题；作为推论，我们证明，判定一个图是否存在没有固定边 的对合是 NP完全的，从而为 Harary 等人 [12] 的一项结果提供了另一种证明。

我们考虑对合的主要动机，是将 Abiad 等人 [1], 的一项结果推广开来。他们证明，一个图存在无不动点对合，当且仅当它存在一个各部分大小均为 2 的均衡划分 $\frac{n}{2}$；他们还提供了一种多项式时间算法，用于判定余图是否存在这样的划分。通过推广定理 1.2，我们也推广了 Abiad 的结果（见定理 5.7）。

本文结构如下。在第 2 节中，我们分别针对分裂图、二部图、 k细分图和 H自由图证明定理 1.1。接着，在第 3 节中，我们基于模分解给出一个用于 FPFAut 的算法，并证明其复杂度。然后，在第 4 节中，我们应用该算法，分别针对模宽有界的图、树余图和 P_4稀疏图证明定理 1.2。在第 5 节中，我们将结果扩展到 FPFInv 问题。最后，在第 6 节中，我们总结全文并讨论一些尚未解决的问题。

2 困难性归约

即使施加如下限制，同构问题仍然是 GI完全：图G 和 H 属于某个图类 $\mathcal{G}$。Booth 和 Colbourn（参见综述 [4]）列出了若干图类，在这些图类上，受限同构问题是 GI完全的。本节将证明，即使将问题限制在一些著名的图类上，FPFAut 仍然是 NP 困难。

值得一提的是，尽管我们的结果受到 GraphISO 相关工作的启发，但相同的构造通常并不适用于 FPFAut，因为这两个问题之间不存在明确的一一对应关系。例如，对于具有唯一中心的图，GraphISO 是 GI完全 的，而 FPFAut 对这一图类则是平凡的 [4], 。

为证明将 FPFAut 限制在给定图类时仍然是 NP 困难的，我们采用以下一般方法。设 $G = (V,\ E)$ 是属于图类 $\mathcal{F}_1$ 的任意图，并且已知对于该图类，FPFAut 是 NP 困难的。我们构造一个新图 $G' = (V',\ E')$，使其具有 $|G'| = |G|^{\mathcal{O}(1)}$，且 G' 属于另一个图类 $\mathcal{F}_2$,

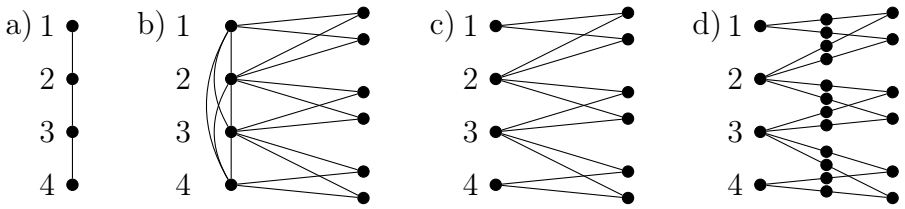

图 1：a) 基础图 $G = P_4$。b) 分裂图构造。c) 二部图构造。d) 细分构造。

并且当且仅当 G' 具有无不动点自同构时， G 也具有无不动点自同构。该归约意味着，将 FPFAut 限制在 $\mathcal{F}_2$ 中的图时，它同样是 NP 困难的。本节将介绍针对每个图类的构造。

分裂图是一种图，其顶点集可以划分为两个类，其中一类构成一个团，另一类构成一个独立集。

构造2.1。 设 $G = (V, E)$ 是一个图。我们按如下方式构造分裂图 $G' = (V', E')$。令 $V' := V \cup (E \times \{1, 2\})$，并在满足以下任一条件时连接顶点 $u, v \in V'$：要么 $u, v \in V$；要么对于某些 $w \in V$ 和 $i \in \{1, 2\}$， $u \in V$ 且 $v = \{u, w\}_i$（图 1(b) 展示了 G'）。

定理2.2。$FPFA{\scriptstyle UT}$ 是 NP-困难 于 分裂图。

证明。 设 $G = (V, E)$ 是一个图，并设 G' 按照构造2.1构造而成。

设 ϕ 是 G 的一个无不动点自同构。我们按如下方式构造映射 ϕ'，使其成为 G' 的一个自同构：对于所有 $v \in V$， $\phi'(v) := \phi(v)$；并且 $\phi'(\{u, v\}_i) := \{\phi(u)\ \phi(v)\}_j$，其中 $i \neq j$。根据构造， ϕ' 不固定 V 中的任何顶点；又因为 $i \neq j$， $E \times \{1, 2\}$ 中也没有顶点会被固定。由于 ϕ' 保持邻接关系，它是一个无不动点自同构。

现在，设 ϕ' 是 G' 的一个无不动点自同构。 V 中的顶点在 G' 中的度较高，因此 V 在 ϕ' 下保持不变，并且 $\phi := \phi'|_V$ 必须是一个无不动点双射。我们检查它是否保持 G 中的邻接关系。设 $\{u, v\} \in E$， $E \times \{1, 2\}$ 中恰有两个顶点同时与 u 和 v 邻接，因此对于某个 $j \in \{1, 2\}$，有 $\phi'(\{u, v\}_i) = (\{\phi'(u)\ \phi'(v)\}_j) = \{\phi(u)\ \phi(v)\}_j$；根据构造， $\{\phi(u)\ \phi(v)\} \in E$。 □

“弦图”是指不含长度大于三的导出圈的图。“完美图”是指具有如下性质的图：在每个诱导子图中，最大团的大小等于该子图正常着色所需的最少颜色数。弦图和完美图都有广泛的算法结果，并且这两个类通过包含关系相互关联：分裂图 $\subseteq$ 弦图 $\subseteq$ 完美图。

推论 2.3。 $FPFA{\scriptstyle UT}$ 对 弦图-完美图而言是 NP-困难的，适用于 弦图和 完美图。

二分图是指其顶点集可以划分为两个独立集的图。已知，将 GraphISO 限制在二分图上时，仍然是 GI完全的，而该归约是通过细分原图的边得到的。在无不动点自同构的背景下，同样的论证并不适用，因为如果一个

自同构固定了一条边，那么细分后诱导出的自同构将固定一个顶点。我们提出了一种替代构造。

构造 2.4。设 $G=(V,\ E)$ 是一个具有 $|V|\geq 3$ 的连通图。我们按如下方式构造二分图 $G'=(V',\ E')$。令 $V'=V\cup(E\times\{1,2\})$，并在顶点$u,\ v\in V'$之间连边，当且仅当存在某个 $w\in V$ 和 $i\in\{1,2\}$ 使得 $u\in V$ 且 $v=\{u,w\}_i$。注意，V 构成一个独立集，因此 G' 是二分图（图 1(c) 展示了 G'）。

定理 2.5。$FPFA_{UT}$ 对于 二分图是 NP-难问题。

证明。设 $G=(V,\ E)$ 是一个具有 $|V|\geq 3$ 的连通图，并令 G' 按照构造 2.4 构造。

与定理2.2的证明类似，容易看出，G 的任意无不动点自同构都会诱导出 G' 的一个无不动点自同构。反过来，由于 G 连通，可知 G' 也连通，并且G'的顶点存在唯一的二分划分。该二分划分将集合 V 确定为其中一部分。由于 $|V|\geq 3$，G' 中存在一个度不等于 2 的顶点$u\in V$，且与 u 的距离为偶数的顶点恰好构成集合 V。因此，任何无不动点自同构都必须将 V 作为一个集合固定下来，从而在 G 中诱导出一个无不动点自同构。 □

设 G 是一个图，$S(G)$ 表示 G 的细分，也就是说，我们将 G 的每条边替换为两条边，并在中间加入一个顶点。细分图 这一图类包含所有通过细分其他图得到的图。无不动点自同构对于这一图类尤其有趣，因为如果某条边被一个自同构固定，那么该自同构的扩张在 $S(G)$ 中就不是无不动点的。

幸运的是，在定理 2.5 的二部图构造中，一个图有无不动点自同构，当且仅当它有一个无固定边的自同构。我们用 $S_k(G)$ 表示 G 的 k-细分，也就是说，这是将 G 的每条边替换为一条经过 $k+2$ 个顶点的路径后得到的图。注意，按照此定义，$S(G)=S_1(G)$。*k*-细分图 这一图类包含所有由其他某个图的 k-细分得到的图。

构造 2.6. 令 $G=(V,E)$ 为一个具有 $|V|\geq 3$ 的连通图，并令 G' 为根据构造 2.4 构造的二分图。接着，我们构造k-细分图 $S_k(G')$（图 1 (d) 展示了图 $S(G')$）。

定理 2.7. $FPFA_{UT}$ 对 k-细分图 是 NP-难的。

证明. 令 $G=(V,E)$ 为一个具有 $|V|\geq 3$ 的连通图，并令 G' 为按照构造 2.4 构造的图。注意，由于 G' 是二部的，且不存在交换两个部分的自同构，G' 的每个无不动点自同构也都是无固定边自同构。我们断言，构造 2.6 中的图 $S_k(G')$ 存在无不动点自同构，当且仅当 G' 存在无不动点自同构。

设 ϕ' 是 G' 的无不动点自同构。令 $(u,\ v)_{i,\ d}$ 表示从 u 到 $\{u,v\}_i$ 的新细分路径上，距 u 为 d 的顶点。我们构造一个映射

ϕ_k，它是 $S_k(G')$ 的自同构。ϕ_k 在 $V(G')$ 上的限制等于 ϕ'；对于新顶点，我们定义 $\phi_k((u,\ v)_{i,\ d}) := (u',\ v')_{j,\ d}$，其中 $\phi'(\{u,v\}_i) = \{u',v'\}_j$。此映射保持顶点之间的距离，并且由于 ϕ' 不固定任何边，ϕ_k 是一个无不动点自同构。

现在，令 ϕ_k 为 $S_k(G')$的一个无不动点自同构。令 u 为一个度不等于 2 的顶点。我们知道这样的顶点存在，且属于集合V，因为 G 是连通的，并且 $|V| \geq 3$。与 u 的距离为 $k+1$ 的倍数的顶点恰好构成集合 $V(G')$，因此 G' 中的顶点作为一个集合在 ϕ_k下保持不变。由于 G' 中的两个顶点相邻，当且仅当它们在$S_k(G')$中的距离为 $k+1$，我们得出 $\phi' := \phi_{k|V(G')}$ 是 G'的一个无不动点自同构。 □

在第 4 节中，我们讨论了适用于余图的 FPFAut 多项式时间算法；余图是没有诱导 P_4的图类。我们证明，若禁止另一种图，则寻找无不动点自同构的问题是 NP完全的。令 H 为一个图，并用 H-自由图表示没有与 H同构的诱导子图的图所构成的族。

定理 2.8. 对于 H-自由图，如果 H 不是 P_4 的诱导子图，则 ***FPFAut*** 是NP-困难的。

证明。我们改编了 [4] 中的一个论证。设 H 是一个具有 k 个顶点的图，且它不是 P_4 的诱导子图。注意到 H 或 H 必有一个含有圈，因为图的每个自同构也是其补图的自同构，所以对于 H-自由图，FPFAut 是 NP 困难的，当且仅当对于 H-自由图，FPFAut 是 NP 困难的。不妨假设 H 含有圈。由于任何 k-细分图的围长都大于 k，H-自由图类包含 k-细分图类，结论由定理 2.7 得出。

□

3 FPFAut 算法

3.1 模分解

我们沿用 Habib 和 Paul [11] 关于模分解的记号。设$M \subseteq V$是图 $G = (V,\ E)$ 的顶点集合，且 u是 $V \setminus M$的一个顶点。顶点u 是 的分裂点 当且仅当存在 $v,\ w \in M$ 使得 $\{u,v\} \in E$且 $\{u,w\} \notin E$。如果 u不是 M的分裂点，那么 M 相对于 u是均匀 的。若 M 相对于任意 $u \notin M$都是均匀的，则称 M 为一个模 。连通分量（或余连通分量）的并集就是模的例子。

两个模 M和 M'重叠 当且仅当 $M \cap M' \neq \emptyset$、$M \setminus M' \neq \emptyset$和 $M' \setminus M \neq \emptyset$。如果一个模不与任何其他模重叠，那么它就是强 模。连通分量是强模的一个例子。

设 $\mathcal{P} = \{M_1, \ldots, M_k\}$是图 G的顶点集的一个划分。如果对于所有$1 \leq i \leq k$，M_i 都是G的模，那么 $\mathcal{P}$ 就是 G的模划分 。

如果模 M 相对于一组 S 顶点是极大的 ，则 $M \subset S$，且不存在模 M'使得 $M \subset M' \subset S$。非平凡模划分 $\mathcal{P} = \{M_1, \ldots, M_k\}$

若一个划分仅包含极大强模，则它是极大模划分。如果 G （分别地，G）不是连通的，那么其连通（分别地，余连通）分支中的元素就是极大模划分的元素。极大模划分可以在线性时间内计算。

引理 3.1 ([21], 引理 5.2)。 图 G 的极大模划分可在 $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$时间内计算得出。

设 M 和 M' 是互不相交的模。若 M 中的每个顶点都与 M' 中的每个顶点相邻，则称 M 和 M' 相邻；若 M 中的每个顶点都与 M'中的每个顶点不相邻，则称其不相邻。注意，两个互不相交的模要么相邻，要么不相邻。对于图 G的模划分 $\mathcal{P} = \{M_1, \ldots, M_k\}$，我们关联一个商图 $G_{/\mathcal{P}}$，其顶点与 $\mathcal{P}$的各个部分一一对应。当且仅当对应的模 M_i 和 M_j 在 G中相邻时， $G_{/\mathcal{P}}$ 中的两个顶点 v_i 和 v_j 才相邻。如果未指定划分 $\mathcal{P}$，则假定 $\mathcal{P}$ 是极大模划分。

定义 3.2. 设 G 是一个图， $\mathcal{P} = \{M_1, \ldots, M_k\}$ 是 G 的极大模划分， $G_{/\mathcal{P}}$ 是相应的商图。设 $c\colon V(G_{/\mathcal{P}}) \to [k]$ 是 $G_{/\mathcal{P}}$ 的顶点着色，使得两个顶点 $v_i, v_j \in V(G_{/\mathcal{P}})$ 获得相同颜色 $c(v_i) = c(v_j)$ 当且仅当 $G[M_i] \cong G[M_j]$。我们将有序对 $(G_{/\mathcal{P}}, c)$ 称为与 $\mathcal{P}$ 相应的商着色图 。

3.2 PFPFAut

我们的主要策略是利用这一事实：商图 $G_{/\mathcal{P}}$ 可能比原图更简单，并借助这种更简单的结构，解决 FPFAut 的一个更难变体。

集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 简记为 $[n]$。 G 的自同构群记作 $\mathrm{Aut}(G)$。设 $c\colon V(G) \to [k]$ 是 $V(G)$ 的一种含有 k 种颜色的着色，保色自同构群记作 $\mathrm{Aut}(G, c)$。

定义 3.3。 设 G 为一个图，设 $c\colon V(G) \to [k]$ 为 G的顶点着色，并设 $b\colon V(G) \to \{0, 1\}$ 为定义在 G顶点上的布尔函数。设 $\phi \in \mathrm{Aut}(G, c)$，如果 $\phi(v) = v$ 当且仅当$b(v) = 1$，则称 ϕ 关于 b （PFPF$_b$）是部分无不动点的。

上面的布尔函数 b 用于允许存在一些不动点。与之对应的判定问题是 PFPFAut 问题。

PFPFAut
实例： 一个图 G、一种着色 c 和一个布尔函数 b。**问题：** (G, c) 是否存在一个 PFPF$_b$ 自同构?

我们指出，PFPFAut 可以归约为受列表约束的自同构 [16]，这是一种特定类型的自同构：每个顶点 $v \in V(G)$ 都与一个列表 $\mathcal{L}(v) \subseteq V(G)$ 相关联，并且该自同构 ϕ 满足以下性质： $\phi(v) \in \mathcal{L}(v)$。该归约通过设定 $\mathcal{L}(v) := \{w : c(w) = c(v)\}$（当 $b(v) = 1$ 时），以及$\mathcal{L}(v) := \{w : c(w) = c(v)\ w \neq v\}$（当 $b(v) = 0$ 时）得到。不过，对于我们的应用，PFPFAut 问题将通过比 [16] 中所给算法更简单的算法来解决。在第 5 节中，我们将采用这种方法修改算法，以处理无不动点对合。

3.3 FPFAut 算法

算法 1： hasFPFAutomorphism

输入： 一个图 G。
输出： G 是否存在无不动点自同构?

hasFPFAutomorphism(G)
  如果 $|V(G)| = 1$ **则**
    返回 假
  令 $\mathcal{P} = \{M_1, \dots M_k\}$ 为 G 的极大模划分。
  令 $(G_{/\mathcal{P}}, c)$ 为与 $\mathcal{P}$ 关联的商着色图。
  当且仅当 hasFPFAutomorphism($G[M_i]$)= 为真时，令 $b \in \{0,1\}^k$ 具有 $b_i = 1$ 。
  如果 $(G_{/\mathcal{P}}, c)$ 存在 PFPF$_b$ 自同构 **那么**
    返回 真
  返回 假

定理 3.4。 设 G 为一个图。当且仅当 G 包含一个无不动点自同构时，算法 *1* 返回“真”。

我们分别证明定理 3.4 的两个方向。

引理 3.5。 如果 `hasFPFAutomorphism`(G) 返回“真”，那么 G 具有一个无不动点自同构。

证明。 我们通过利用算法 1 构造一个无不动点自同构 ϕ 来证明该结论。证明通过对 $|V(G)|$进行归纳法得出。如果 $|V(G)| = 1$，算法将返回“假”。假设 $|V(G)| \geq 2$，且 hasFPFAutomorphism(G) 返回“真”。

令 $\mathcal{P} = \{M_1, \dots M_k\}$、$(G_{/\mathcal{P}}, c)$ 和 b 按算法 1 中的定义给出。若 $b_i = 1$，根据归纳法可知， $G[M_i]$ 具有一个无不动点自同构，记为 ϕ_i。我们还知道，存在 $\psi \in$ 自同构群 $(G_{/\mathcal{P}}, c)$，使得 $G_{/\mathcal{P}}$中每个被 ψ 固定的顶点 i 都满足$b_i = 1$。考虑将 ψ 扩张为 G 的一个自同构 ϕ'，使得将 $G_{/\mathcal{P}}$ 中从 v_i到 $\psi(v_i)$ 的映射扩张为从 $G[M_i]$ 到 $G[M_{\psi(i)}]$的映射；根据着色 c，我们知道这样的映射存在。令 ϕ 为 ϕ' 与无不动点自同构 ϕ_i的复合。根据构造， ϕ 是一个自同构。令 $v \in M_i$，其中 i为某个值；若 $\phi(v) \in M_i$，这意味着 $\phi(v) = \phi_i(v) \neq v$。因此， ϕ 是一个无不动点自同构。 □

在证明另一个方向之前，我们需要以下引理。

引理 3.6. 设 G 是一个图，设 u、$v \in V(G)$，且 M_u 和 M_v 分别是包含 u 和 v 的极大强模。若 ϕ 是 G 的一个自同构，满足 $\phi(u) = v$，则 $\phi(M_u) = M_v$。

证明。 首先，注意到 $\phi(M_u)$ 必定是一个模，因为对于每个 $z \notin M_u$， ϕ 保持 z 与 M_u 之间的邻域，因此 $\phi(z)$ 相对于 $\phi(M_u)$ 是均匀的。此外，$\phi(M_u)$ 是强的，因为 M 与 $\phi(M_u)$ 重叠意味着 $\phi^{-1}(M)$ 与 M_u 重叠。最后，$\phi(M_u)$ 是极大的，因为如果存在一个顶点 z，使得 $\phi(M_u) \cup \{z\}$ 是一个模，那么 $M_u \cup \{\phi^{-1}(z)\}$ 就会是一个模。由此可知， $\phi(M_u)$ 是包含 v 的极大强模，也就是说， M_v。 □

引理 3.7. 如果 G具有无不动点自同构，那么 `hasFPFAutomorphism`(G) 将返回“*true*”。

证明。 我们通过归纳法证明该结论。如果 $|V(G)| = 1$，那么 G 没有无不动点自同构。假设 $|V(G)| \geq 2$，且 G 具有无不动点自同构 ϕ。根据引理 3.6， ϕ在 $(G_{/\mathcal{P}}, c)$ 中诱导出一个自同构 ψ。因此，每个被 ψ 固定的模 M_i都必须具有无不动点自同构 ϕ_i。根据归纳假设，这些模对应的值为 1，且 hasFPFAutomorphism(G) 返回“true”。 □

3.4 复杂度

我们对算法 1 在不同图类上的运行时间给出上界，这些图类可通过其模分解来刻画。

算法 1 的递归树对应于标准模树，其大小可界定如下。

引理 3.8. 设 G 是一个图。算法 *1* 的递归树至多有 $\mathcal{O}(|V(G)|)$个节点。

如果对于任意 $G \in \mathcal{G}$ 和 $S \subseteq V(G)$，图类 $\mathcal{G}$ 都满足 $G[S] \in \mathcal{G}$，则称其为遗传的。要构造着色图 $(G_{/\mathcal{P}}, c)$，必须判断 $|\mathcal{P}|^2$ 对诱导子图对是否同构。因此，如果 G 属于遗传图类 $\mathcal{G}$，其复杂度取决于 $\mathcal{G}$ 中图之间的同构问题的复杂度。

定义 3.9。设 $\mathcal{G}$ 为一个图类。我们用 $f^{\mathcal{G}}$ 同构表示判断 $\mathcal{G}$ 中两个图是否同构的时间复杂度。

定义 3.10。设 $\mathcal{G}$ 为一个图类。我们用 $\mathcal{G}_{/\mathcal{P}} := \{G_{/\mathcal{P}} : G \in \mathcal{G}\}$ 表示。

请注意，判断 $(G_{/\mathcal{P}}, c)$ 是否包含一个 PFPF$_b$ 自同构的复杂度，以图类 $\mathcal{G}_{/\mathcal{P}}$ 为界。

定义 3.11。 设 $\mathcal{G}$ 为一个图类。令 $f^{\mathcal{G}}{}_{\text{pfpf}}$ 表示判断图 $G \in \mathcal{G}$ 是否存在 PFPF$_b$ 自同构的时间复杂度，其中着色$c\colon V(G) \to [|V(G)|]$ 以及布尔函数 $b\colon V(G) \to \{0,1\}$均为任意选取。

引理 3.12. 设 $\mathcal{G}$ 是一个遗传图类。判定一个含 n个顶点的图 $G \in \mathcal{G}$ 是否包含无不动点自同构，其复杂度的上界为

$$n^{\mathcal{O}(1)}\left(f_{iso}^{\mathcal{G}}(n) + f_{pfpf}^{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(n)\right).$$

4 正面结果

本节证明，对于有界模宽图、树余图和 P_4-稀疏图，FPFAut 可在多项式时间内求解。

4.1 模宽

我们考虑可由使用以下运算的代数表达式构造的图：

(i) 创建一个孤立顶点；(ii) 两个图的不交并，即两个图 G_1 和 G_2 的不交并是一个图，其顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$，边集为 $E(G_1) \cup E(G_2)$；(iii) 两个图的完全联接，即两个图 G_1 和 G_2 的完全联接是一个图，其顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$，边集为 $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{\{v,w\}\colon v \in V(G_1) \text{ and } w \in V(G_2)\}$；(iv) 关于某个具有顶点 $v_1,\ldots,v_n$的图 G进行替换运算，即对于图 $G_1,\ldots,G_n$，用图$G_1,\ldots,G_n$替换 G的各顶点，记作 $G(G_1,\ldots,G_n)$，所得图的顶点集为 $\bigcup_{1\le i\le n} V(G_i)$，边集为 $\bigcup_{1\le i\le n} E(G_i) \cup \{\{u,v\}\colon u \in V(G_i) \text{ and } v \in V(G_j) \text{ and } \{v_i,v_j\} \in E(G)\}$。

设 A 是一个仅使用操作 (i)–(iv) 的代数表达式。我们将 A 的宽度 定义为该表达式中操作 (iv) 任意一次出现所使用的操作数的最大数量。图 G的模宽 记作 mw(G)，是满足以下条件的最小整数 k： G 可以由宽度至多为 k [9]的此类代数表达式得到。若存在一个固定常数 k使得 mw(G) $\le k$，则称图 G 具有有界模宽。余图是模宽为 0 [6]的图类。

设 $\mathcal{K}$, $\overline{\mathcal{K}}$ 和 $\mathcal{G}_{\le k}$ 分别表示完全图、空图以及顶点数至多为 k 的图所构成的类。

观察 4.1。 令 $\mathcal{G}$ 为模宽至多为 k 的图类，令$\mathcal{G}_{/\mathcal{P}}$为其关联的商图类。那么，$\mathcal{G}_{/\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{K} \cup \overline{\mathcal{K}} \cup \mathcal{G}_{\le k}$。

为了应用引理 3.12，我们需要给函数 $f^{\mathcal{G}/\mathcal{P}}{}_{\text{pfpf}}$和 $f^{\mathcal{G}}{}_{\text{iso}}$确定上界。

引理 4.2. 如果 $G \in \mathcal{K} \cup \overline{\mathcal{K}}$, 则可以在多项式时间内求解 *PFPFAut*。

证明。设 $G \cong K_n$，令 $c: V(G) \to [k]$ 为 G 顶点的一个着色，并令$b: V(G) \to \{0,1\}^k$ 为 G顶点的一个布尔函数。令 $S_i = \{v \in V(G) : c(v) = i\}$ 为颜色 i的颜色类。注意，如果 G 具有一个 PFPF$_b$ 自同构，那么$b_i = 1$ 每次的大小都是 1。我们声称，只需检查这一条件。令 ϕ_i 为一个置换，它固定 S_i 之外的每个顶点，且如果 $|S_i| \geq 2$，则 ϕ_i 在 S_i中是无不动点的。令 $\phi = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k$。如果 $b_i = 1$ 每次的大小都是 1，那么 ϕ 就是 G的一个 PFPF$_b$自同构。

该结论在 $G \cong K_n$ 的情况下成立，因为图的每个自同构也是其补图的自同构。

□

引理 4.3。设 G 和 H 是模宽有界的图。判断 G 与 H 是否同构的问题可以在多项式时间内解决。

证明。设 rw(G) 为 G 的秩宽度。图的秩宽度是其模宽的下界，也就是说，存在一个可计算函数 g，使得 rw(G) $\leq g$(mw(G)) [9]。由于对于秩宽度有界的图，GraphISO 可以在多项式时间内求解 [10]，结论得证。

□

现在，我们已经具备应用引理 3.12 所需的一切条件。

定理 4.4。设 G是模宽有界的图。判断 G 是否包含无不动点自同构的问题可以在多项式时间内解决。

证明。根据观察 4.1 和引理 4.2，函数 $f^{\mathcal{G}/\mathcal{P}}{}_{\text{pfpf}}(|V(G)|)$ 有上界 $|V(G)|^{\mathcal{O}(1)}$。根据引理 4.3，函数 $f^{\mathcal{G}}{}_{\text{iso}}(|V(G)|)$ 的上界为 $|V(G)|^{\mathcal{O}(1)}$。因此，根据引理 3.12，算法 1 的运行时间为 $|V(G)|^{\mathcal{O}(1)}$。 □

一个自然的问题是，定理 4.4 所蕴含的算法的多项式次数是否与模宽无关。值得指出的是，只有同构检验这一步不满足这一点。

4.2 树余图

余图可以通过递归定义：从一组孤立顶点开始，反复进行不交并和取补操作。若将孤立顶点替换为树，就得到余图的以下扩张。

定义 4.5。树余图类由以下递归规则定义 [28]。

(i) 每棵树都是树余图。

(ii) 如果 G_1，……，G_k 是树余图，那么 $G_1 \cup \cdots \cup G_k$ 也是树余图。

(iii) 如果 G 是树余图，那么它的补图 $\overline{G}$ 也是树余图。

树余图同时推广了余图类和树类。令 $\mathcal{T}$ 和 $\overline{\mathcal{T}}$ 分别表示树类及其补图类。

观察 4.6. 令 $\mathcal{G}$ 为树余图类， $\mathcal{G}_{/\mathcal{P}}$ 为其对应的商图类。那么， $\mathcal{G}_{/\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{K} \cup \overline{\mathcal{K}} \cup \mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}}$。

引理 4.7. 如果 $G \in \mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}}$， 那么可以在多项式时间内求解 *PFPFAut*。

证明。我们先针对有根树求解该问题。设 T_r 是一棵根为 r 的树，令 $c\colon V(T_r) \to [n]$ 为一种着色， $b\colon V(T_r) \to \{0,1\}$ 为一个布尔函数。由于该树是有根树，我们假设 $b(r) = 1$。我们构造一个空图 G' ，其顶点集为 $\{c_1, \ldots, c_k\}$ ，对应于 r 的子节点。我们定义一个新的布尔函数 $b'\colon V(G') \to \{0,1\}$ ，使得 $b(c_i) = 1$ 当且仅当 (T_{c_i}, c) 存在一个 PFPF_b 自同构。最后，我们构造一种新的着色 $c'\colon V(G') \to [k]$ ，使得 $c'(c_i) = c'(c_j)$ 当且仅当 $(T_{c_i}, c) \cong (T_{c_j}, c)$。根据构造可知，$(T_r, c)$ 存在一个 PFPF_b 自同构，当且仅当 (G', c') 存在一个 $\mathrm{PFPF}_{b'}$ 自同构。因此，我们将问题归约为求解空图类上的 PFPFAut；根据第 4.2 节，这可以在多项式时间内完成。

现在我们回到无根树。设 T 是一棵树， c 是一种着色， b 是一个布尔函数。若 T 有唯一中心 r_1 ，则(T, c)存在一个 PFPF_b 自同构，当且仅当(T_{r_1}, c)存在一个 PFPF_b 自同构。若 T 有两个中心 r_1 和 r_2，但 $b(r_1) \wedge b(r_2) = 1$，则(T, c)存在一个 PFPF_b 自同构，当且仅当(T_{r_1}, c)和(T_{r_1}, c)都存在 PFPF_b 自同构。否则， T有两个中心，且$b(r_1) \wedge b(r_2) = 0$；但在这种情况下，(T, c)存在一个 PFPF_b 自同构，当且仅当(T_{r_1}, c)与(T_{r_2}, c)之间存在保色同构，该同构可在多项式时间内计算。

□

树余图可由一棵标记树唯一确定，该标记树类似于算法 1 的递归树。对于这一图类，同构问题可在多项式时间内解决。

引理 4.8 ([28])。 设 G 和 H 为树余图。判断G 是否与 H 同构的问题可在多项式时间内解决。

定理 4.9。 设 G 为树余图。判断 G 是否包含无不动点自同构的问题可在多项式时间内解决。

4.3 P_4-稀疏图

P_4-稀疏图是余图的一种推广，其中任意五个顶点组成的集合至多诱导出一个 P_4。 P_4-稀疏图可以用模分解来表示，为此我们需要以下来自 [14]的定义。

蜘蛛图是一种图 $G = (V, E)$，其顶点集可划分为 $V = S \cup K \cup R$，使得

- $|S| = |K| \geq 2$，其中 $G[S]$ 为空图，而 $G[K]$ 为完全图；
- 与 K 中的所有顶点相邻，而与 S 中的顶点均不相邻；
- 存在一个双射 $f\colon S \to K$，使得对于所有 $s \in S$，$G(s) \cap K = \{f(s)\}$ 或 $G(s) \cap K = K \setminus \{f(s)\}$。

对于给定的蜘蛛图，这种顶点分解是唯一的。

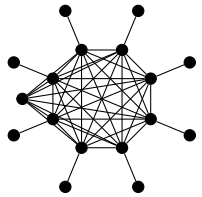

图 2：带有 $|K| = |S| = 8$ 的独眼巨人蜘蛛图。

命题 4.10 ([14])。 P_4-稀疏图可以通过以下四条规则递归地刻画：

(i) 只有一个顶点的图是 P_4-稀疏的。(ii) 如果 $G_1, \ldots, G_k$ 是 P_4-稀疏的，那么 $G_1 \cup \cdots \cup G_k$ 也是。(iii) 如果 G 是 P_4-稀疏的，那么它的补图 G 也是。(iv) 如果 H 是 P_4-稀疏的，且 G 是一个带有 $G[R] = H$ 的蜘蛛图，那么 G 是 P_4-稀疏的。

当 $|R| = 1$ 时，我们称 G 为独眼巨人蜘蛛图。我们用 $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ 表示独眼巨人蜘蛛图类。

观察 4.11. 设 $\mathcal{G}$ 为 P_4-稀疏图类，$\mathcal{G}_{/\mathcal{P}}$ 为相应的商图类。那么，$\mathcal{G}_{/\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{K} \cup \mathcal{K} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$。

引理 4.12. 若 $G \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$，则 *PFPFAut* 可在多项式时间内求解。

证明。设 $G = (S \cup K \cup R, E)$ 是一个带有双射 $f\colon S \to K$ 的独眼巨人蜘蛛图。令 $c\colon V(G) \to [n]$ 为一种着色，$b\colon V(G) \to \{0,1\}$ 为一个布尔函数。我们将问题归约为求解完全图类上的 PFPFAut；根据 4.2 节的结果，该问题可以在多项式时间内求解。首先，令 $R = \{h\}$ 为蜘蛛图的头部。注意，要使 PFPF_b 自同构存在，必须有 $b(h) = 1$，因此我们假设此条件成立。我们构造一个新图 $G' \cong G[K]$、一个新着色 $c'\colon K \to [n] \times [n]$，使得 $c'(v) := (c(v)\ c(f^{-1}(v)))$，并构造一个新布尔函数 $b'\colon K \to \{0,1\}$，使得 $b'(v) := b(v) \wedge b(f^{-1}(v))$。注意，每个自同构 $\phi \in \text{Aut}(G, c)$ 都保持双射 f，也就是说，若 $v \in K$，则 $\phi(v) = w \iff \phi(f^{-1}(v)) = f^{-1}(w)$。因此，$(G, c)$ 含有一个 PFPF_b 自同构，当且仅当 (G', c') 含有一个 $\text{PFPF}_{b'}$ 自同构。 □

引理 4.13。 设 G 和 H 是 P_4-稀疏图。判断 G 是否与 H 同构的问题可以在多项式时间内求解。

定理 4.14。 设 G 是一个 P_4-稀疏图。判定 G 是否包含无不动点自同构的问题可以在多项式时间内解决。

5 无不动点对合

图的自同构 ϕ 如果是二阶的，则称为对合 。寻找无不动点对合的问题（FPFInv）也是 NP 困难的 [17]。实际上，在 Lubiw 构造的、用于证明 FPFAut 是 NP 困难的图中，每个无不动点自同构都是无不动点对合，这意味着下面的问题是 NP 困难的。

FPFInv
实例： 一个图 G。**问题：** G是否具有无不动点对合?

在本节中，我们将无不动点自同构的结果推广到无不动点对合。

5.1 NP-困难类与无固定边对合

定理 5.1。 若 H 不是 P_4的诱导子图，则 *FPFInv* 对分裂图、二部的图、 k-细分图以及 H-自由图而言是NP-困难的 。

证明。 设 $G = (V, E)$ 是一个图，并设 $S_k(G')$ 是按照定理 2.7 中所述方法从 G 构造出的 k-细分图。我们证明， $S_k(G')$ 有无不动点对合，当且仅当 G 也有无不动点对合。其他构造的论证类似。

设 $\phi_k \in \mathrm{Aut}(S_k(G'))$，回想一下， $V \subseteq V(S_k(G'))$，且 $\phi_{k|V}$ 诱导出一个自同构 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$，因此，如果 ϕ_k 是无不动点对合，那么 G 包含一个无不动点对合。

现在，设 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ 是一个无不动点对合，并设 ϕ_k 按照定理 2.7 中所述方法由 ϕ 构造而成。由于 ϕ 与 $\phi_{k|V}$同构，我们考察 ϕ_k 在顶点 $(u, v)_{i,d}$ 上的作用，其中 $u, v \in V$, $i \in \{1, 2\}$ 且 $d \in [k]$。根据构造，$\phi_k((u, v)_{i,d}) = (u', v')_{j,d}$，其中 $\phi(u) = u'$, $\phi(v) = v'$ 且 $j \neq i$。由于 ϕ 是一个对合，ϕ_k 也是一个对合。 □

我们介绍第 2 节中所用构造的一种应用。在图规避博弈中，两名玩家轮流将图 G 的边分别染成红色和蓝色。首先构造出与禁图 F 同构的单色子图的玩家输。如果 G 存在无固定边对合 ϕ，那么第二名玩家总是在第一名玩家将边 $\{u, v\}$ 染成红色后，把边 $\{\phi(u)\ \phi(v)\}$ 染成蓝色，即可获胜；这称为基于自同构的策略。
Harary 等人

证明了，判定一个图是否存在这种对合的问题是 NP完全的，这意味着在图规避博弈中实现基于自同构的策略是 NP完全的。构造 2.4 中的图存在无不动点对合，当且仅当它存在无固定边对合。这为 Harary 的结果提供了另一种证明。

推论 5.2 ([12], 定理 5.1)。 判定一个图是否存在无固定边对合是NP-完全的。

5.2 FPFInv 算法

算法 1 可以很容易地调整为计算无不动点对合。主要变化是将 PFPFAut 问题替换为 PFPFInv 问题。

PFPFInv
实例： 一个图 G、一种着色 c 和一个布尔函数 b。**问题：** (G, c) 是否存在 PFPF$_b$ 对合?

算法 2： hasFPFInvolution

输入： 一个图 G。**输出：** G 是否存在无不动点对合? hasFPFInvolution(G)
如果 $|V(G)| = 1$ **则返回** false 令 $\mathcal{P} = \{M_1, \dots M_k\}$ 为 G的极大模划分。令 ($G_{/\mathcal{P}}, c$) 为与 $\mathcal{P}$相关联的商着色图。令 $b \in \{0,1\}^k$ 满足： $b_i = 1$ 当且仅当 hasFPFInvolution($G[M_i]$)=true。**如果** ($G_{/\mathcal{P}}$, c) 存在 PFPF$_b$ 对合 **则返回** true**返回** false

我们采用第 3 节中描述的相同分析。

定理 5.3. 设 G 是一个图。当且仅当 G 含有无不动点对合时，算法 *2* 返回*"true"*。

证明。 证明与定理 3.4 的证明类似。设 $\mathcal{P} = \{M_1, \dots M_k\}$, ($G_{/\mathcal{P}}, c$) 和$b$ 如算法 2 中所定义。

假设算法 2 返回"真"。令 $\phi_i \in$ Aut($G[M_i]$)，并令 $\psi \in$ Aut($G_{/\mathcal{P}}, c$)。引理 3.5 中由 ϕ_i 和 ψ 构造的自同构 ϕ'，等于这些复合自同构的阶的最小公倍数，因为它们的非平凡轨道两两不相交。由于每个自同构的阶至多为 2， ϕ' 是一个对合。

设 ϕ 是 G 的一个无不动点对合。那么，诱导自同构 $\psi \in \mathrm{Aut}(G_{\mathcal{P}}, c)$ 和 $\phi_i \in \mathrm{Aut}(G[M_i])$ 也必定是对合，这意味着算法 2 返回“真”。

□

定义 5.4。 设 $\mathcal{G}$ 为一个图类。令 $f^{\mathcal{G}}{}_{\text{pfpfi}}$ 表示判定图 $G \in \mathcal{G}$ 是否存在一个 PFPF_b 对合的复杂度，其中 c 为任意着色：$V(G) \to [|V(G)|]$，且 b 为任意布尔函数：$V(G) \to \{0,1\}$。

推论 5.5。 设 $\mathcal{G}$ 为一个遗传图类。判定一个含 n 个顶点的图 $G \in \mathcal{G}$ 是否包含无不动点对合的复杂度上界为

$$n^{\mathcal{O}(1)} \cdot \left(f_{iso}^{\mathcal{G}}(n) + f_{pfpfi}^{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(n) \right).$$

5.3 等划分

设 $G = (V,\ E)$ 是一个图，并设 $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ 是 V 的一个划分。我们将子集 V_i 称为单元。如果对于所有 $i,\ j,\ V_i$ 中的每个顶点在 V_j 中都有相同数量的邻点，则称划分为等划分的（或正则的）。如果每个单元的大小均为 k，则称划分 k-齐次。均衡划分是一种多用途工具，已应用于组合学的许多不同领域，例如推导独立数 [13]，的尖锐特征值界、构造自正交码 [7]，以及在各种类型的网络 [20, 24] 中进行聚类。下面由 Abiad 等人给出的引理建立了 2-齐次平衡划分与无不动点对合之间的一一对应关系。

引理 5.6 ([1], 引理 17)。 设 G 是一个具有 n 个顶点的图。当且仅当 G 存在一个均衡划分，且该划分包含 $\frac{n}{2}$ 个单元、每个单元的大小均为 *2* 时，G 具有一个无不动点对合的自同构。

引理 5.6 意味着，判定任意图是否存在 2-齐次均衡划分 [1] 是 NP 困难的。尽管存在 NP 难性结果，Abiad 等人证明，对于余图，可以在多项式时间内确定其是否存在 2-齐次均衡划分 [1]。这是通过利用孪生类对余图进行刻画实现的。通过将我们的结果推广到无不动点对合，我们实现了对 Abiad 的结果的推广。

定理 5.7。 当限制在有界模宽图、树余图和 P_4-稀疏图类时，判定一个图是否存在一个由 $\frac{n}{2}$ 个大小为 2 的部分组成的均衡划分，可以在多项式时间内解决。

证明。 只需验证完全图、树和独眼巨人蜘蛛图都存在解决 PFPFInv 问题的高效算法。对于完全图和独眼巨人蜘蛛图，这一点可直接得出，因为引理 4.2 和 4.12 中描述的自同构的复合，在初始自同构均为对合时会产生一个对合。

设 T_r 是一棵有根树，令 C_v 为顶点 v 的子节点集合。令 $\phi \in \mathrm{Aut}(T_r)$，注意，要么 $\phi(C_v) = C_v$，要么 $\phi(v) \neq v$。在引理 4.7 中，我们通过

为每个 C_v 构造一个完全图，并在这一图类中求解 PFPFAut，从而求解有根树上的 PFPFAut。由于每当 C_v 固定时， ϕ 是对合当且仅当 $\phi_{|C_v}$ 是对合，因此我们得出，同样的归约也适用于求解有根树上的 PFPFInv。对于一般的树，请注意，若一棵树有两个中心，且存在一个交换这两个中心的无不动点自同构，那么也存在一个以相同方式交换它们的无不动点对合。

□

5.4 紧图

本节最后，我们指出无不动点自同构与无不动点对合之间的一个区别。若与某图的邻接矩阵可交换的双随机矩阵的凸包的所有极点都是 01 矩阵，则称该图为紧图。1991年，Tinhofer [29] 证明，对于紧图，通过求解线性规划的基本解，可以在多项式时间内解决同构问题。线性规划方法稍作修改即可用于判定是否存在无不动点自同构，从而得到以下结果。

定理 5.8。 设 G 是一个紧图。判定 G 是否包含无不动点自同构的问题可以在多项式时间内解决。

证明。 设 $A := A(G)$ 是 G 的邻接矩阵，并考虑以下线性规划。

$$\begin{array}{lll} \texttt{maximize} & \sum_{i,j} x_{i,j} & \\ \texttt{subject to} & AX = XA & \\ & \sum_j x_{i,j} = 1, & \forall i \\ & \sum_i x_{i,j} = 1, & \forall j \\ & \sum_i x_{i,i} = 0, & \\ & 0 \le x_{i,j} \le 1, & \forall i,j \end{array} \tag{1}$$

这些约束确保任何可行解都是与邻接矩阵可交换且对角线元素为 0 的双随机矩阵。设 X 是任意这样的矩阵。由于 G 是紧图， X 可写成 $X = \sum_i a_i P_i$，其中 $a_i > 0$、 $\sum a_i = 1$ 和P_i 对应于 G的某个自同构。由于 X 的对角线元素为 0，每个 P_i 也必定具有对角线元素为 0，因此线性规划 (1) 所描述的多面体的极点对应于无不动点自同构。

由于针对 0/1 多面体上的线性规划的单纯形法能在多项式时间内找到极点 [3], ，我们便有了一个用于紧图上 FPFAut 的多项式时间算法。

□

对于无不动点对合，情况有所不同，目前还没有已知的多项式时间算法可以解决这个问题。我们注意到，在公式 (1) 中要求矩阵 X 对称这一限制，并不意味着多面体的极点是对称置换（例如，考虑一个奇圈）。强树余图类（树余图的一个子类）是紧的 [28], 因此，定理 5.7 对以下问题给出了肯定答案。

问题 n 5.9. 紧图上的 FPFInv 问题能否在多项式时间内求解?

6 结论

Lubiw [17] 提出了 FPFAut 问题，即询问给定的图是否存在无不动点自同构，并证明该问题是 NP完全的。本文研究了限制在图类上的 FPFAut 问题，表明它在许多图类上仍然是 NP完全的。我们还提出了一种基于模分解的算法，并展示了该算法在三个图类上的效率。最后，我们将结果扩展到 FPFInv 问题。

参数化复杂性中的一个核心开放问题是确定以秩宽度为参数的 GraphISO 的复杂度 [23]。目前已知，该问题关于此参数属于 XP [10]。在第4.1节中，我们利用这一结果证明，对于模宽有界的图，FPFAut 可以在多项式时间内求解。将这一方法推广到秩宽度有界的图将会很有意思。

问题6.1。 对于秩宽度有界的图，能否在多项式时间内求解 FPFAut?

为了进一步说明研究无不动点自同构的动机，我们回顾 Nagoya 提出的一道问题 [22]。2009年，Nagoya 证明，对于一个具有非平凡自同构的图，寻找一对顶点 $(u,\ v)$，使得非平凡自同构将 u 映射到 v，与计算该图的一个非平凡自同构是计算等价的。Nagoya 的证明依赖于从原图 G 和顶点对 $(u,\ v)$ 构造一个新图 G'，使得 G' 存在非平凡自同构，当且仅当 G 存在非平凡自同构，且满足条件 $G' < G$ 属于某个偏序。作者提出，对于无不动点自同构，是否也有相同的结论。据我们所知，这个问题仍未解决，主要困难在于 Nagoya 的构造会产生原图中不存在的无不动点自同构。若能找到一种构造，在无不动点自同构之间保留一一对应关系，将会很有意义。

致谢

Aida Abiad 部分受到荷兰研究委员会（NWO）通过资助项目 VI.Vidi.213.085 提供的支持。Gabriel Coutinho、Emanuel Juliano 和 Vinicius Santos 获得了 FAPEMIG 和 CNPq 的支持。

参考文献

[1] A. Abiad、C. Hojny 和 S. Zeijlemaker。图的权均衡划分的刻画与计算。《线性代数及其应用》，645：30–51，2022年。

[2] L. Babai。自同构群、同构与重构。载于《组合学手册（第*2*卷）》，第1447–1540页。爱思唯尔，1996年。[3] A. E. Black、J. A. De Loera、S. Kafer 和 L. Sanità。关于0/1多面体的单纯形法。《运筹学数学》，50(2)：1398–1420，2025年。[4] K. S. Booth 和 C. J. Colbourn。与图同构多项式等价的问题。加州大学伯克利分校计算机科学系，1979年。[5] P. J. Cameron 和 T. Wu。置换群和矩阵群的权问题复杂度。《离散数学》，310(3)：408–416，2010年。[6] D. G. Corneil、H. Lerchs 和 L. S. Burlingham。补可约图。《离散应用数学》，3(3)：163–174，1981年。[7] D. Crnković、S. Rukavina 和 A. Švob。由关联方案的均衡划分得到的自正交码。《代数组合学杂志》，55：157–171，2022年。[8] H. N. De Ridder 和 H. L. Bodlaender。具有最大投影距离的图自同构。载于《计算理论基础：第*12*届国际研讨会，*FCT'99*，雅西，罗马尼亚，*1999*年*8*月*30*日至*9*月*3*日，会议论文集》，第204–214页。施普林格，1999年。[9] J. Gajarsk`y、M. Lampis 和 S. Ordyniak。模宽的参数化算法。载于《参数化与精确计算：第*8*届国际研讨会，*IPEC 2013*，法国索菲亚·安蒂波利斯，*2013*年*9*月*4*日至*6*日，修订精选论文》，第163–176页。施普林格，2013年。[10] M. Grohe 和 P. Schweitzer。有界秩宽图的同构检验。载于《*2015*年*IEEE*第*56*届计算机科学基础年会（*FOCS*）》，第1010–1029页。IEEE，2015年。[11] M. Habib 和 C. Paul。模分解的算法方面综述。《计算机科学评论》，4(1)：41–59，2010年。[12] F. Harary、W. Slany 和 O. Verbitsky。图规避博弈中的对称策略。载于 R. J. Nowakowski 编《更多无胜算博弈》，第42卷，第369–381页。剑桥大学出版社，2002年。[13] A. J. Hoffman。关于图的特征值和着色。《*Alan J. Hoffman*文选：附评论》，第407–419页，2003年。[14] B. Jamison 和 S. Olariu。 P_4-稀疏图的树表示。《离散应用数学》，35(2)：115–129，1992年。

[15] C. Jordan。《置换研究》。纯粹与应用数学杂志，17:351–367，1872年。[16] P. Klavík、D. Knop和P. Zeman。受列表限制的图同构。理论计算机科学，860:51–71，2021年。[17] A. Lubiw。若干类似于图同构的NP完全问题。*SIAM*计算杂志，10(1):11–21，1981年。[18] J. B. Manning。图中的几何对称性。博士论文，普渡大学，1990年。[19] R. Mathon。关于图同构计数问题的注记。信息处理快报，8(3):131–136，1979年。[20] M. Mattioni和S. Monaco。异构多智能体系统的聚类划分。*Automatica*，138:110136，2022年。[21] R. M. McConnell和J. P. Spinrad。线性时间模分解与可比图的高效传递定向。在*ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA*）会议论文集中，第536–545页。SIAM，1994年。[22] T. Nagoya。从部分解计算图自同构。计算系统理论，44:356–368，2009年。[23] D. Neuen。图同构检验的参数化复杂度。计算机科学评论，60:100918，2026年。[24] B. Prasse、K. Devriendt和P. Van Mieghem。网络流行病的聚类：一种几何方法。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，31(6):063115，2021年。[25] U. Schöning。图同构属于低层级。计算机与系统科学杂志，37(3):312–323，1988年。[26] B. S. W. Schröder。不动点性质的算法。理论计算机科学，217(2):301–358，1999年。[27] J.-P. Serre。关于Jordan定理。美国数学会通报，40(4):429–440，2003年。[28] G. Tinhofer。强树余图是Birkhoff图。离散应用数学，22(3):275–288，1988年。[29] G. Tinhofer。关于紧图的注记。离散应用数学，30(2-3):253–264，1991年。[30] V. N. Zemlyachenko、N. M. Korneenko和R. I. Tyshkevich。图同构问题。苏联数学杂志，29:1426–1481，1985年。