谱不对称性、超对称性与等变黎曼-罗赫亏损

GAYANA JAYASINGHE、ALEX R. TAYLOR 和 XINRAN YU

摘要。我们研究具有锥形奇点的复空间的等变黎曼-罗赫亏损的两种解释之间的关系：(i) 等变 η_T 和 ξ_T 不变量；(ii) 局部上同调群上的超迹。这引出了链接上的 L^2-旋量空间的一种新颖的三重划分，以及相应的 ξ_T分裂。其中两种划分对应于锥上的 ∂-诺伊曼算子和 ∂-狄利克雷算子所产生的上同调贡献；第三种划分则不对等变指标缺陷作出贡献。我们证明，这是由锥上的超对称抵消所致，并将其称为提升的超对称性。

我们利用这一点定义复等变 ξ_T 和 η_T 不变量，它们与通常的不变量等价，但更易于计算。我们着重介绍文献中黎曼-罗赫缺陷的相关代数和解析描述之间的联系，包括数值层面及其范畴化层面的联系，并探讨其与物理学和数学中现有的超对称抵消概念之间的联系。

arXiv:2603.26057v1 [math.DG] 27 Mar 2026

目录

1 引言.1 2 楔几何与狄拉克算子.5

2.1 楔几何与狄拉克算子.5 2.2 扭曲Dolbeault复形与定义域.6 2.3 卷起扩张与广义边界条件.7

3 M要结果 . **9**
3.1 回顾 η 和 ξ 不变量.9 3.2 复等变 ξ 函数.10 3.3 谱分解定理.11 3.4 等变指标缺陷.14

4 Ex示例与特殊情况 .1
64.1 η 圆球面上自旋狄拉克算子的指标.16 4.2 轨形.195 **Co**

背景与结论 .2
05.1 超对称计数与不同的范畴化.21 5.2 猜想性推广.22 5.3 η 指标的代数描述.22**参考文献 .23**

1. 引言

设 X 是一个复空间，其奇异轨迹为 X^{sing}。假设给定一个全纯向量丛 $E \to X$，以及其上的一个截面层 $\mathcal{D}$，扭曲多尔博算子 ∂_E 在该截面层上定义了一个 Dolbeault 复形。若自映射 $f\colon X \to X$ 保持复结构及辅助数据不变，则它会诱导出 Dolbeault 复形的一个几何自同态 $T = T_f$，进而诱导出其上同调群 $\mathcal{H}^q$ 上的自同态。

等变黎曼-罗赫问题关注的是等变多尔博指数

$$\mathrm{ind}_{T_f}(\overline{\partial}_E) := \sum_{q\geq 0}(-1)^q \operatorname{Tr}(T_f|\mathcal{H}^q) = \operatorname{Str}(T_f|\mathcal{H}^q).$$

在光滑紧致的情形下，借助 Atiyah–Bott [AB67, AB68] 和 Atiyah–Segal–Singer 的全纯勒夫谢茨公式，这个不变量可表示为仅依赖于固定点贡献的局部表达式

Atiyah–Segal–Singer [AB65]。存在奇点时，同一原理仍然成立，但需要额外加上一个修正项。在这种情况下，我们有

$$\mathrm{ind}_{T_f}(\overline{\partial}_E) = \sum_{F \in \mathrm{Fix}(f) \cap X^{\mathrm{reg}}} \mathrm{RR}(F, T_f) + \mathrm{Def}(T_f, \mathcal{D}),$$

其中 RR(F, T_f) 表示与正则轨迹中的固定点 F相关联的局部黎曼-罗赫数，而黎曼-罗赫缺陷 Def$(T_f, \mathcal{D})$ 则编码了奇异轨迹以及所选 Dolbeault 复形的贡献。该缺陷有多种描述方式，本文研究其中两种：（i）以等变 ξ_T 不变量表示的解析表述；（ii）通过对奇点邻域的上同调群取超迹给出的代数描述。本文旨在阐述等变黎曼-罗赫亏损这两种描述之间的联系，以及将其范畴化的对象。

在解析表述中，奇数维光滑流形的 η 和 ξ 不变量最初由 Atiyah-Patodi-Singer [APS75] 引入，用于描述带边界的偶数维流形上狄拉克型算子的指标缺陷。这些不变量是根据边界上的诱导狄拉克型算子的谱数据定义的。简言之，来自 A 非零谱的边界贡献就是等变 η 函数

$$\eta_T(s, A) := \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \setminus \{0\}} \mathrm{sign}(\lambda) |\lambda|^{-s} \mathrm{Tr}(T|E_\lambda),$$

其中，Tr$(T|E_\lambda)$表示对特征空间 E_λ （有限维）的迹（关于物理学文献中的其他重整化方式，见注3.1）。当 Re$(s) > -2$时，该函数是全纯的，并且可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$ ，且在 $s = 0$处取正则值，参见 [Zha90]。因此，可以考虑等变 η不变量，其定义为 $\eta_T(0, A)$处的值。等变 ξ 函数于是为

$$\xi_T(s) := \frac{1}{2}(\eta_T(s, A) + h_T)$$

其中， $h_T = \mathrm{Str}(T|_{L^2 \mathrm{Ker}\, A})$是来自 A零空间的边界贡献。$\xi_T(0)$正是 [Zha90]中针对具有孤立锥形奇点的空间所给出的等变 Lefschetz 不动点公式，以及 [Don78]中的等变 APS 指数定理里的指标缺陷。它在等变多尔博指数的情形下特化为黎曼-罗赫缺陷。

另一方面，Baum-Fulton-MacPherson-Quart 研究了某些奇异空间上的（等变）黎曼-罗赫公式 [BFQ79, BFM79, BFM75] ，其中等变黎曼-罗赫亏损（奇异上同调中的）被表示为局部完全交上局部环上的正则化迹；这一表述见 Baum 撰写的综述文章 [Bau82] 。在 [Jay23, Jay 24]中，这种解释被推广为对分层伪流形上的局部上同调群取超迹；这些伪流形带有楔度量（迭代锥度量）和楔型近复结构，所涉及的算子为扭曲 Spin-c 狄拉克算子，以及当楔形近复结构可积时的扭曲 Dolbeault-Dirac 算子。这些上同调群对应于具有适当边界条件的相应 Laplace 型算子的调和形式。

这引出了一个自然的问题：**对应这两种描述的谱数据如何关联？** 本文的主要结果回答了这个问题：对于锥 $C(Z)$ 上配备复结构 J 的扭曲 Dolbeault-Dirac 算子，诱导狄拉克算子在链接 Z 上的谱具有一种特殊的三重划分。该划分的两部分对应于锥 $C(Z)$ 上 Dolbeault 复形的局部上同调群，而第三部分非平凡，却不对等变 ξ 不变量作出贡献；这是由于相消所致，而这种相消对应于将链接上的特征截面提升至锥上的特征截面时出现的超对称性（见注 3.6）。我们将这一现象称为提升超对称性。

为使论述清晰，本文聚焦于以光滑链接为底的锥，不过这些结果也可推广至配备楔度量的分层伪流形（例如参见 [AGR23, Jay23]）。令 $C(Z) = C_x(Z) = \big([0, \infty)_x \times Z\big)/\big(\{0\} \times Z\big)$ 表示以紧流形 Z为底、配备楔度量的锥

$$g = dx^2 + x^2 g_Z,$$

并配备相容的楔复结构 J以及厄米向量丛 E。其上的扭曲 Dolbeault-Dirac 算子 $C(Z)$可分解为

$$D = c\ell(dx) \circ \left(\nabla^E_{\partial_x} + A_1 + A_2\right),$$

其中 A_2 是狄拉克算子的横向部分 （这里的导数是相对于与 $R = xJ(\partial_x)$ 横向的向量场而言的；在凯勒情形下，该向量场就是 Reeb向量场）。偶/奇次数复旋量丛 $F^{\pm}$ 具有直和分解 $F^{\pm} = G^{\pm} \oplus \beta \wedge G^{\mp}$，其中 $G^{\pm}$ 是横向狄拉克算子的旋量丛，也就是说，其截面取值于向量丛 $\Lambda^*(TZ/T\mathcal{F}_R)$ 的 $(0,\ q)$ 投影上，$\otimes E$，其中 $\mathcal{F}_R$ 是由向量场 R 积分得到的叶状结构。更多详情请参阅第2节。

我们定义**限制算子**，它将 Dolbeault 复形在 $C(Z)$ 上的光滑截面取值于 $x = 1$:

$$\mathcal{R} : \Omega^{0,q}(C(Z); E) \to \Gamma(Z; E|_Z)$$
$$\mathcal{R}(\psi(x, z)) = \psi(1, z),$$

该算子也可扩展到在 $x = 1$ 附近光滑的截面。

给定作用于 Z 上的狄拉克型算子 A，我们称其满足:

(1) 若满足 **Witt 条件**，则 $\mathrm{Spec}(A) \cap \{0\} = \varnothing$；(2) 若满足 **谱 Witt 条件**，则 $\mathrm{Spec}(A) \cap (-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}) = \varnothing$。

我们的第一个主要结果——定理 A——描述了算子 A_1 限制在 Z上的谱分解。该结果还明确建立了局部上同调群与链接上 A_1 的特征截面之间的对应关系。特别地，对于位于横向调和子空间 $\mathcal{E}^{\pm} = \ker A_2 \cap \Gamma(Z;\ F|^{\pm}_Z)$ 中的 A_1 的特征截面，可以作出四部分描述。

给定如上锥 $C(Z)$ 上的 Dolbeault 算子，我们选取自伴定义域，它们对应于 $x = 0$ 处的理想边界条件，记为 W，以及 $x = 1$ 处的边界条件，记为 $B = N,\ D$ （分别为 ∂-Neumann 条件和伴随边界条件，后者称为 ∂-Dirichlet 条件）。这定义了一个复形 $\mathcal{P}_{W,\ B}$，并定义上同调群 $\mathcal{H}^q_B = \mathcal{H}^q(\mathcal{P}_{W,\ B}) := \ker D$，其中 D 配备相应的定义域。若谱 Witt 条件成立，则 W 的所有选择都等价。

在此设定下，我们定义**复等变 ξ 函数**

$$\widetilde{\xi}_{W,T}(s) := \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Str}\left(T \exp(-s\sqrt{\Delta_Z})|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_{W,N}(X))}\right) + \mathrm{Str}\left(T^* \exp(-s\sqrt{\Delta_Z})|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}^*_{W,N}(X))}\right)\Big) \quad (1.1)$$

该函数在 $s = 0$处是正则的；在谱 Witt 条件的情形下，我们从记号中省略下标 W。更多细节请参见第 3.2 小节。我们指出，将黎曼-罗赫缺陷描述为超迹是自然的，因为黎曼-罗赫数本身就是上同调上的超迹。

定理 A (谱分解与第三部分的消失)。 假设诱导狄拉克算子在 Z上满足谱 *Witt* 条件。那么:

(1) 存在一个标准正交基 $\{\psi_j\} \subset \mathcal{H}^q_N \oplus \mathcal{H}^q_D$，使得 $\mathcal{R}(\psi_j)$ 是诱导狄拉克算子 A 在 Z上的一个特征截面。相对于分裂 $F^{\pm}|_Z = G^{\pm} \oplus \beta \wedge G^{\mp}$，$\bar{\partial}$-诺伊曼边界条件给出的边界值属于 $G^{\pm}$，而 $\bar{\partial}$-狄利克雷边界条件对应于 $G^{\pm}$的 β-平移:

$$\mathcal{R}\big(\mathcal{H}^{\mathrm{even/odd}}_N\big) \subset \mathcal{E} \cap G^{\pm}, \qquad \mathcal{R}\big(\mathcal{H}^{\mathrm{even/odd}}_D\big) \subset \beta \wedge \big(\mathcal{E} \cap G^{\mp}\big).$$

（*2*） Z 上的偶数次旋量具有正交分解

$$L^2\Omega^{0,q}(Z; F^+|_Z) = \mathcal{H}^q_1 \oplus \mathcal{H}^q_2 \oplus \mathcal{H}^q_3,$$

其中 $\mathcal{H}^q_1 = \mathcal{R}(\mathcal{H}^q_N)$、 $\mathcal{H}^q_2 = \mathcal{R}(\mathcal{H}^q_D)$ 和 $\mathcal{H}^q_3 = \mathcal{E}^{\perp}$。由此进一步得到该 ξ_T 函数的三重分裂:

$$\xi_T(s) = \xi_{T,1}(s) + \xi_{T,2}(s) + \xi_{T,3}(s), \quad (1.2)$$

更多详情请参见公式 (3.15) 。

（*3*）对于在链接 $Z = \{x = 1\}$ 上没有不动点的几何自同态 $T = f_g^*$，等变不变量与复等变 ξ 不变量相同：

$$\widetilde{\xi}_T(0) = \xi_T(0).$$

特别是， $\mathcal{H}_3^q$ 不会对 ξ_T作出贡献。

定理 A 的前两部分是对定理 3.4 的重述，而第三部分是定理 3.7。

我们从超对称性，或者更确切地说，从锥这一层面上的提升的超对称性的角度来解释定理 A；（特别参见 [Jay23], 引理 3.13，以及 [Jay25] 对锥上超对称性的描述）。定理 A 表明，由于重整化超对称消去导致$\xi_{T,\ 3}(0) = 0$，分块 $\mathcal{H}_3^q$ 不会对等变指标缺陷作出贡献。然而，对于一般的 s，$\xi_{T,\ 3}(s)$ 不会消失这一事实表明，在链接上算子的特征截面的交错迹层面不存在相应的抵消。

从这个意义上说，只有提升到锥上之后，抵消才会显现出来。我们的论点是，用于经典定义 η 不变量的重整化并不适合清晰地展现其背后的超对称抵消。这促使我们定义~新的等变 ξ 函数 $\xi_{W,\ T}(s)$，以便更清晰地捕捉超对称抵消。

当 Witt 条件不成立时，Dolbeault-Dirac 算子 D 未必本质自伴，而其自伴扩张由 Gelfand-Robbin 商空间中的拉格朗日子空间刻画。我们研究由**上同调预定义域** W确定的卷起扩张 $\mathcal{D}_{\mathfrak{L}_W}$ 情形；这会为 D 的自伴扩张诱导出相容定义域。现在，我们在以下定理中表述 Dolbeault-Dirac 算子的这类卷起扩张的黎曼-罗赫缺陷，证明见第3.4小节。

定理 B。 考虑定理 *A* 的设定，但不要求满足谱 *Witt* 条件。对于任意与上同调预定义域 W的选择相对应的~卷起扩张， ξ_T 不变量满足

$$\widetilde{\xi}_{T,W} = \widetilde{\xi}_{T,\min} + \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Str}(T|_{W^q}) - \operatorname{Str}(T^*|_{(W^*)^q})\Big). \tag{1.3}$$

这与其他针对狄拉克型算子定义域的指标缺陷表述在精神上相似，例如 [Cho85，Cho89] （见注 3.10）。

带有复结构的度量锥设定展现了本文探讨的各种现象，其中等变 η 不变量和指标缺陷已得到详尽研究。不过，本文的结果可以轻易推广到带有楔度量的分层赝流形上的锥。似乎这些结果也可能视情况而定推广到这类空间上的其他奇异度量，以及具有符合奇点几何的非可积近复结构的空间。我们在第 5 节探讨这一主题及其他相关主题。

本文的结构安排如下。第2节介绍本文的主要研究对象：带有复结构的锥上的 Dolbeault 复形及其定义域。在~第3节中，我们定义新的复等变 $\widetilde{\eta}_T$ 和 ξ_T 不变量，并证明主要结果。文中穿插了许多示例，以说明各种定义和假设的必要性；第 4 节则回顾了关键示例。在第 4 节中，我们展示了 $\widetilde{\eta}_T$ 和 ξ_T 不变量相较于经典不变量在计算~方面的效能。第 5 节进一步阐述了我们研究结果的背景，并作总结性评论，特别是说明这些结果与数学中其他研究黎曼-罗赫缺陷的方法之间的联系，以及它们与物理诠释之间的关系。我们还说明了猜想性推广，希望在后续工作中加以研究。

致谢。 作者感谢 Pierre Albin 与他们进行多次讨论，并提出有益的意见和鼓励。GJ 和 XY 感谢 Hadrian Quan 与 Manousos Maridakis 就相关主题和想法进行讨论。GJ 感谢佩拉德尼亚大学在开展这项研究期间提供的各种支持。

2. 楔几何与狄拉克算子

In 本节介绍本文的几何与泛函分析框架 le.

2.1. 楔几何与狄拉克算子

我们考虑光滑 n维流形 Z上的度量锥 $\widehat{X} = C(Z) = \big([0,\infty)_x \times Z\big)/\big(\{0\} \times Z\big)$，其中 x 表示径向变量，而 $\{0\} \times Z$ 被压缩为一点。我们在 X 上赋予楔度量

$$g = dx^2 + x^2 g_Z,$$

其中 g_Z 是 Z上的一个固定黎曼度量。空间 X 在锥点处是奇异的，其解消是带边流形 $X_\infty = [0,\infty)_x \times Z$，其度量在 $x = 0$处退化。我们还将研究截断模型

$$X = [0,1)_x \times Z,$$

其度量由限制 g得到。

对于楔度量，值得研究的自然微分算子是那些属于**楔形切丛** ${}^wTX$的算子，该丛局部由以下元素张成:

$$\Big\{e_0 = \partial_x, \quad e_1 = \frac{1}{x}\partial_{z_1}, \quad \cdots \quad e_n = \frac{1}{x}\partial_{z_n}\Big\},$$

其中，(z^i)是 Z上的一个坐标图。 ${}^wTX$ 的对偶丛是**楔形余切丛** ${}^wT^*X$，其局部余标架为

$$\{\theta^0 = dx, \quad \theta^1 = x dz^1, \quad \cdots, \quad \theta^n = x dz^n\},$$

因此可写作 ${}^wT^*X = \mathrm{span}\{dx\} \oplus x\,T^*Z$。关于楔形切丛与余切丛，以及我们接下来要介绍的楔形复结构和楔形狄拉克算子，详细讨论请参阅 [AGR16，Jay25]。

我们将闭的、反对称的、非退化的双线性楔形二形式 ω 称为**楔形辛形式**。若 J是 ${}^wT^*X$ 的端omorphism丛的一个截面，并满足 $J^2 = -\mathrm{Id}$，则称其为**楔形近复结构**。此外，若 J 满足 $\nabla J = 0$，则称 J 为可积，并由此在 X上定义一个楔复结构 。

一个**楔形克利福德模** 由一个复向量丛 $E \to X$、一个厄米向量丛度量 g_E、一个与 g_E相容的联络 ∇^E，以及由向量丛同态给出的***Clifford*乘法** 构成

$$c\ell : \mathbb{C}l_w(X) = \mathbb{C} \otimes Cl({}^wT^*X; g) \to \mathrm{End}(E)$$

使得

$$c\ell(\theta)c\ell(\eta) + c\ell(\eta)c\ell(\theta) = -2g(\theta,\eta)\ \mathrm{Id}_E,$$

并且对每个 $W \in {}^wTX$和 $\theta \in {}^wT^*X$，以下相容条件均成立:

$$g_E(c\ell(\theta)\cdot,\cdot) = -g_E(\cdot, c\ell(\theta)\cdot) \quad \text{and} \quad [\nabla^E_W, c\ell(\theta)] = c\ell(\nabla^E_W\theta).$$

一个**Dirac-** 与厄米向量丛 E 相关的**型算子** D 定义为以下复合 n

$$C^\infty_c(\mathring{X}; E) \xrightarrow{\nabla^E} C^\infty_c(\mathring{X}; T^*X \otimes E) \xrightarrow{c\ell} C^\infty_c(\mathring{X}; E).$$

将 D 写成边界附近适配锥几何的标准正交标架中的形式，可得分解

$$D = \sum_{i=0}^{n} c\ell(\theta^i)\nabla^E_{e_i} = c\ell(dx)\left(\nabla^E_{\partial_x} + A\right), \tag{2.1}$$

算子 A 是链接 Z 上的切向（扭曲）狄拉克算子，它控制着 D 在锥尖附近的渐近行为。令 J 表示锥 X上的复结构，其定义为 $J(\partial_x) = \frac{1}{x}R$，$J(dx) = x\alpha$。当 $C(Z)$ 为凯勒时，链接 Z带有萨萨基结构，其 Reeb向量场为 R，接触1-形式为 α。

我们将向量场 ∂_x 分解为其 (0，1)-分量和 (1，0)-分量，如下:

$$\beta^\# = \frac{1}{2}\left(\partial_x + \sqrt{-1}J\partial_x\right), \quad \overline{\beta}^\# = \frac{1}{2}\left(\partial_x - \sqrt{-1}J\partial_x\right), \tag{2.2}$$

其中对偶1-形式由 $\beta = dx - \sqrt{-1}x\alpha$ 和 $\overline{\beta} = dx + \sqrt{-1}x\alpha$ 给出。

我们采用 [WZ98，公式(3.3)]，中的 Clifford作用约定，在该约定下， $\beta^{\#}$ 和 $\beta^{\#}$ 的 Clifford乘法为

$$c\ell(\overline{\beta}^{\#}) = \sqrt{2}\beta\wedge, \quad c\ell(\beta^{\#}) = -\sqrt{2}\iota_{\beta^{\#}}. \tag{2.3}$$

我们定义 Clifford 元素

$$\nu := \sqrt{2}\left(\beta\wedge - \iota_{\beta^{\#}}\right). \tag{2.4}$$

注意， $\nu^2 = -2$。狄拉克算子 (2.1) 可写为

$$D = \nu\circ\left(\nabla^E_{\partial_x} - \frac{\nu}{2x}\circ(D_1+D_2)\right) = \nu\circ\left(\nabla^E_{\partial_x} + A\right), \tag{2.5}$$

其中

$$D_1 = -\sqrt{2}\left(\beta\wedge + \iota_{\beta^{\#}}\right)\nabla^E_{\sqrt{-1}R},$$

算子 D_2 是链接上的横向Dirac算子，而 A 由下式给出

$$A = -\frac{\nu}{2x}\circ(D_1+D_2) = -\frac{1}{x}\left(\beta\wedge - \iota_{\beta^{\#}}\right)\circ\left(\left(\beta\wedge + \iota_{\beta^{\#}}\right)\nabla^E_{\sqrt{-1}R} + \frac{1}{\sqrt{2}}D_2\right). \tag{2.6}$$

此外，我们将定义算子

$$A_1 = -\frac{\nu}{2x}D_1 \quad \text{and} \quad A_2 = -\frac{\nu}{2x}D_2 \tag{2.7}$$

因此 $A = A_1 + A_2$。

在 Dolbeault 情形中，偶/奇次数复旋量丛 $F^{\pm}$ 可作直和分解

$$F^{\pm} = G^{\pm}\oplus\beta\wedge G^{\mp} \tag{2.8}$$

其中 $G^{\pm}$ 是与横向Dirac算子相关联的旋量丛。具体而言，它们的截面取值于向量丛 $\Lambda^*(TZ/T\mathcal{F}_R)$ 的 (0， q) 投影中，其中 $\mathcal{F}_R$ 表示由积分向量场 R所得到的叶状结构。

注 2.1 (反对易)。 *Clifford*元素 ν 与横向*Dirac*算子 D_Z 反对易，因为 ν 通过右*Clifford*乘法作用。特别地， ν 与 D_2 反对易，因为 β 与 D_2 局部*Clifford*描述中出现的方向正交，并且 ν 与 $\beta\wedge + \iota_{\beta^{\#}}$反对易。

因此， ν 将公式(2.8) 中的直和项相互交织，并交换 $F^{\pm}$ 向量丛。

2.2. 扭曲Dolbeault复形与定义域

现在我们引入锥形空间上的扭曲Dolbeault复形框架，并说明 Gelfand–Robbin 商如何刻画相关 Dirac 算子的可容许定义域扩张。

令 $X = C(Z)$ 表示一个无穷锥，其配备的楔度量 $g = dx^2 + x^2 g_Z$ 与前一小节相同。考虑锥的内部具有复结构 J 且该结构可延拓为楔复结构的情形。固定一个配备酉联络 ∇^E 的厄米线丛 $E\to X$。我们按通常方式，将扭曲多尔博算子$P = \partial_E$ 记为作用于 X 上的光滑扭曲反全纯形式。由此得到一个 预希尔伯特复形 $(H_\bullet, P_\bullet)$；该复形与算子 $P_\bullet$ 的一个定义域 $\mathcal{D}(P_\bullet)$ 一起（此定义域在图范数下为闭），确定一个希尔伯特复形

$$\mathcal{P} = (H_\bullet, \mathcal{D}(P_\bullet), P_\bullet), \qquad 0\to\mathcal{D}(P_0)\xrightarrow{P_0}\mathcal{D}(P_1)\xrightarrow{P_1}\cdots\xrightarrow{P_{n-1}}\mathcal{D}(P_n)\to 0,$$

w这里 $H_\bullet = L^2\Omega^{0,\bullet}(X;E)$。每个希尔伯特复形 $\mathcal{P}$ 都存在一个伴随希尔伯特复形 ex

$$\mathcal{P}^* = (H_{n-\bullet}, \mathcal{D}^*(P_{n-\bullet}) = \mathcal{D}(P^*_{n-\bullet}), P^*_{n-\bullet}),$$

$$0\to\mathcal{D}(P^*_{n-1})\xrightarrow{P^*_{n-1}}\mathcal{D}(P^*_{n-2})\xrightarrow{P^*_{n-2}}\cdots\xrightarrow{P^*_1}\mathcal{D}(P^*_0)\to 0,$$

其中，每个 P^*_k 表示 P_k 的希尔伯特空间伴随算子。与 Dolbeault 复形相关联的**（扭曲）狄拉克型算子**为 $D = P + P^*$。

我们首先在无穷锥上选取自伴扩张。由于度量的不完备性出现在奇点附近（而非径向无穷远处），自伴扩张的选择

对应于奇点附近局部数据的选择。我们回顾一下，微分算子的标准最大定义域和最小定义域 Q 分别为

$$\mathcal{D}_{\max}(Q) = \{u \in L^2\Omega^{0,\bullet}(X;E) \mid Qu \in L^2\Omega^{0,\bullet}(X;E) \text{ in the distributional sense}\}, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{D}_{\min}(Q) = \text{graph closure of } C_c^\infty\Omega^{0,\bullet}(\mathring{X};E). \tag{2.10}$$

容易观察到 $\mathcal{D}_{\min}(Q) \subseteq \mathcal{D}_{\max}(Q)$。**Gelfand–Robbin 商** 定义为

$$\mathcal{GR}(Q) = \mathcal{D}_{\max}(Q)/\mathcal{D}_{\min}(Q). \tag{2.11}$$

对于以光滑流形 Z 为底的无穷锥（即在楔度量 $g = dx^2 + x^2 g_Z$ 下，$(0,\infty)_x \times Z$ 的度量闭包），狄拉克型算子 D 的 $\mathcal{GR}(D)$ 是有限维的。例如，Moo99、Bei13、AGR23、Jay24], 对这些空间进行了研究，其中这些空间可以用 Z 上诱导算子 A 的小特征值特征截面来理解。我们将给出一个具体例子（见例 2.3）。域的选择对应于所谓的理想边界条件，这与带边界空间上的边界条件类似。

对于任意**对称算子** Q，空间 $\mathcal{GR}(Q)$ 带有由格林–斯托克斯恒等式诱导的自然辛形式。对于 $[u]$, $[v] \in \mathcal{GR}(Q)$，定义

$$\omega([u],[v]) = \langle Qu, v\rangle_{L^2} - \langle u, Q^*v\rangle_{L^2} = \langle i\sigma_1(Q)(-dx)u|_Z,\, v|_Z\rangle_{L^2(Z)}, \tag{2.12}$$

其中 $\sigma_1(Q)(-dx)$ 表示 Q 在外指法向量的对偶形式 $-dx$ 处取值时的主符号。由于 $Q = Q^*$，反对称性显而易见。选取一个闭拉格朗日子空间 $\mathfrak{L} \subseteq \mathcal{GR}(Q)$，即可确定 Q的一个自伴扩张，其定义域为

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{L}}(Q) = \{u \in \mathcal{D}_{\max}(Q) \mid [u] \in \mathfrak{L}\}.$$

要求 $\mathfrak{L} \subseteq \mathcal{GR}(Q)$ 为拉格朗日子空间，恰好等价于格林–斯托克斯配对在 $\mathfrak{L}$ 上恒为零，即对所有 $[u]$, $[v] \in \mathfrak{L}$，均有 $\omega([u],[v]) = 0$。

尽管扭曲多尔博算子 $P = \partial_E$ 并非对称算子，但定义域的选取仍与 $\mathcal{GR}(P)$ 的子空间相对应。我们定义

$$\mathcal{H}(P) = (\ker P_{\max} \cap \ker P^*_{\min}) \cap \mathcal{D}_{\min}(P)^{\perp_{L^2}}.$$

注意， $\mathcal{H}(P)$ 可视为 *Gelfand–Robbin* 复形的上同调群

$$0 \to \mathcal{GR}(P_0) \xrightarrow{\widetilde{P}_0} \mathcal{GR}(P_1) \xrightarrow{\widetilde{P}_1} \cdots \xrightarrow{\widetilde{P}_{n-1}} \mathcal{GR}(P_n) \to 0,$$

其中 $\widetilde{P_k}$: $[u] \mapsto [P_k u]$。因此，我们将 $\mathcal{H}(P)$ 称为上同调商。我们选取一个子空间 $W \subseteq \mathcal{H}(P)$，并将这样的选取称为上同调预定义域。我们定义一个拓扑子空间

$$\mathcal{D}'_W(P) := W \oplus \mathcal{D}_{\min}(P) \subseteq L^2\Omega^{0,\bullet}(X;E).$$

由于域的伴随是闭的，我们看到 $\mathcal{D}_W(P) := (\mathcal{D}'_W(P))^{**}$ 是 P 的一个闭域。伴随定义域为 $\mathcal{D}_{W^*}(P^*) := (\mathcal{D}'_W(P))^* = (\mathcal{D}_W(P))^*$，并且我们注意到，通过选择子空间 $W^* \subseteq \mathcal{H}(P^*)$，可以按照 P 的情形中类似的过程构造 $\mathcal{D}_{W^*}(P^*)$。将 $\mathcal{H}(P)$ 识别为 P^* 的 Gelfand-Robbin 复形的一个上同调群后，每个 $v \in \mathcal{H}(P)$ 都确定唯一的类 $[v] \in \mathcal{GR}(P^*)$。于是我们可以将 W^* 写为

$$W^* := \{v \in \mathcal{H}(P^*) \mid [v] \in \mathcal{GR}(P^*), \omega([u],[v]) = 0 \text{ for all } u \in W\},$$

其中， ω 是方程（2.12）中定义的格林–斯托克斯配对。

2.3. 卷起扩张与广义边界条件

现在，我们定义一个与上同调预定义域 $W \subset \mathcal{H}(P)$ 相关联的扭曲 Dolbeault-Dirac 算子 $D = P + P^*$ 的自伴扩张。我们设

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{L}_W}(D) := \mathcal{D}_W(P) \cap \mathcal{D}_{W^*}(P^*).$$

根据构造， $\mathcal{D}_{\mathfrak{L}_W}(D)$为 D定义了一个自伴定义域。我们将 $\mathcal{D}_{\mathfrak{L}_W}(D)$称为与定义域 $\mathcal{D}_W(P)$相对应的 D **卷起扩张**。

D 的任意自伴扩张都对应于一个拉格朗日子空间的选取

$$\mathfrak{L} \subseteq \mathcal{GR}(D) = \mathcal{D}_{\max}(D)/\mathcal{D}_{\min}(D).$$

为 P 选定的域会正则地确定 D 的一个相容域，本文中我们采用这类卷起扩张。稍后，在定理 B 中，我们将说明定理 3.7 如何扩展到卷起扩张的情形；本质上， W 中的额外截面会产生额外的超迹。

以下示例表明，并非 D 的每个自伴扩张都是卷起扩张。

例 2.2。 考虑 $C(S^3)$，其中球面的体积远小于 $\mathbb{C}^2$ 中标准圆球面的体积。于是，Dolbeault 算子的 Gelfand-Robbin 商空间包含以下截面

$$s = z_1^{-1} z_2^{-1} + d\overline{z_1} \wedge d\overline{z_2} \tag{2.13}$$

它是一个偶数次旋量。然而， s 不属于 P 或 P^* 的 Gelfand-Robbin 商。因此，可以选取 $\mathcal{GR}(D)$ 的某个拉格朗日子空间，使其包含 s；显然，相应的 Dolbeault-Dirac 算子扩张并非 Dolbeault 算子的卷起扩张。$\diamond$

研究与 $(0,\ 1)_x \times Z$ 的度量闭包相对应的有限圆锥上的算子时，除了在 $x = 0$ 处施加理想边界条件外，我们还需要在 $x = 1$ 处选取边界条件，以便为这些算子选择自伴扩张。

对于 Dolbeault 复形，在 $x = 1$ 处有两种规范的边界条件选择：对于靠近边界的截面，分别选择 P 的极小扩张和极大扩张。这两种条件也称为 P 的**广义诺伊曼和狄利克雷边界条件**，定义如下：

$$\sigma(P^*)(dx)u|_{x=1} = 0, \quad \sigma(P)(dx)u|_{x=1} = 0 \tag{2.14}$$

分别如此。关于更多细节，请参阅 [Jay23]。对于 $P = \partial$ 的情形，广义诺伊曼条件会导出相应拉普拉斯型算子 D^2 的 ∂-诺伊曼条件。

因此，给定无穷锥上的一个闭扩张 $\mathcal{D}_W(P)$，我们研究截断圆锥上的两个定义域，记作 $\mathcal{D}_{W,\ B}(P)$，其中 $B = N,\ D$ 表示广义诺伊曼或狄利克雷条件。相应的希尔伯特复形记作 $\mathcal{P}_{W,\ B}(P)$（当算子 P 的含义可由上下文确定时，也记作 $\mathcal{P}_{W,\ B}$），上同调群记作

$$\mathcal{H}(\mathcal{P}_{W,B}) := \ker D \subseteq \mathcal{D}_{W,B}(P) \cap (\mathcal{D}_{W,B}(P))^*. \tag{2.15}$$

现在，我们用一个锥形奇点上 Dolbeault 复形的显式模型来说明前述构造，展示将某些截面纳入自伴定义域后，如何因非零边界配对而必须排除其他截面。

例 2.3（复圆锥上的 Dolbeault 复形）。 令 $X = C_x(S^1_{6\pi})$ 表示长度为 6π 的圆上的锥，并赋予圆锥度量 $g = dx^2 + x^2 d\theta^2$。我们在 X 上赋予由下式定义的复结构 J

$$J(\partial_x) = \frac{1}{x}\partial_\theta, \quad J(\partial_\theta) = -x\partial_x,$$

它使 (X, g, J) 成为一个凯勒圆锥。我们引入奇异复坐标 $z := xe^{i\theta}$，其中 $\theta \in S^1_{6\pi}$，并分析 X 上的 Dolbeault 复形。

可以验证，最大定义域中但不在最小定义域中的调和代表由以下元素张成

$$\tau_1 = c_1 z^{-1/3}, \quad \tau_2 = c_2 z^{-2/3}, \quad s_1 = c_2 \overline{z}^{-2/3} \overline{dz}, \quad s_2 = c_1 \overline{z}^{-1/3} \overline{dz}.$$

其中 c_1, c_2 是使这些截面在锥上具有单位范数的唯一常数（相对于体积形式 $-2i(dz \wedge dz) = dx \wedge x d\theta$）。截面 $\tau_1 = c_1 z^{-1/3}$ 在内部是全纯的，并且相对于体积形式 $\mathrm{dvol}_g = dx \wedge x d\theta$ 是 L^2-可积的。类似地， $s_1 = c_1 z^{-2/3} dz$ 属于 ∂^* 的零空间，并且是 L^2-可积的。

对 $P = \partial^*$ 应用格林–斯托克斯公式，得到边界配对

$$[s_m, \tau_n] := \langle \overline{\partial}^* s_m, \tau_n \rangle_E - \langle s_m, \overline{\partial} \tau_n \rangle_E = \int_0^{6\pi} g_E(i\sigma_1(\overline{\partial}^*)(dx) s_m, \tau_n)\, x d\theta, \tag{2.16}$$

其中 $E = \Lambda^a T^* X^{0,\,1}$ 是楔积反全纯形式丛，配对 g_E 表示 (0，1)-形式上的厄米结构。主符号的作用为

$$i\sigma_1(\overline{\partial}^*)(dx)(\overline{dz}) = \iota_{dx^\#|_{T^{0,1}}}(\overline{dz}) = \iota_{e^{-i\theta}\overline{\partial_z}}(\overline{dz}) = e^{-i\theta}.$$

因为 $dz = e^{i\theta}(dx + xid\theta)$。

由于

$$g_E(\overline{z}^{-2/3}e^{-i\theta}, z^{-1/3}) = \overline{z}^{-2/3}e^{-i\theta}\overline{z}^{-1/3} = x^{-2/3}e^{+2i\theta/3}e^{-i\theta}x^{-1/3}e^{+i\theta/3} = x^{-1}, \tag{2.17}$$

边界配对 $[s_1, \tau_1]$ 由下式给出

$$\frac{1}{c_1 c_2}[s_1, \tau_1] = \int_0^{6\pi} g_E(\overline{z}^{-2/3}e^{-i\theta}, z^{-1/3})\, x d\theta = \int_0^{6\pi} 1\, d\theta = 6\pi \neq 0. \tag{2.18}$$

因此，边界配对不为零，这表明 τ_1 和 s_1 不能同时属于 $\partial + \partial^*$的某个自伴定义域。类似地，可以验证

$$\frac{1}{c_1 c_2}[s_1, \tau_1] = \frac{1}{c_2 c_1}[s_2, \tau_2] = 6\pi, \quad [s_1, \tau_2] = [s_2, \tau_1] = 0. \tag{2.19}$$

◇

在上同调层面，为 Dolbeault 算子选择定义域，相当于选择 $\mathcal{H}(\partial) = \mathrm{span}\{\tau_1, \tau_2\}$的一个向量子空间；由此便为 D 确定唯一的卷起扩张，该扩张对应于 D的边界配对的一个拉格朗日子空间。

例如，考虑上同调层面的预定义域

$$W_{a,b} = \mathrm{span}\{a\tau_1 + b\tau_2\} \subseteq \mathcal{H}(P),$$

对于某个 $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ 使得 $(a^2 + b^2) = 1$。那么，如果与 D 对应的卷起扩张所对应的拉格朗日子空间为 $\mathcal{L}_{a,\,b}$，它们与狄拉克算子 D的核的交对应于 $\mathrm{span}\{a\tau_1 + b\tau_2, bs_1 - as_2\}$。$P^*$ 算子在上同调层面对应的预定义域为 $bs_1 - as_2$的张成空间。

在上面的例子中，我们为 Dolbeault–狄拉克算子选取的最后一种域并非源自由权确定的代数定义域，这类定义域曾在 [Jay24]（或作为代数定义域在 [Ver15]）中研究。稍后在例 3.9 中，我们将计算上述域的等变 ξ_T 不变量。

3. 主要结果

3.1. η 和 ξ 不变量回顾

我们回顾几何自同态 T 作用于 Z时的等变 η 不变量的定义；这些自同态对应于几何自同态 T 作用于 $C_x(Z)$。对于由李群 G 的等距作用所诱导的自映射 f_g（其中某个$g \in G$），若该作用仅固定锥点（这尤其意味着它会保持锥上的径向距离 x），且保持复结构，那么 Dolbeault 复形上的几何自同态由 f_g^*（即自映射的拉回）给出，并且与给定定义域上的算子可交换。关于 Dolbeault 复形上更一般的几何自同态，详见 [AB67、Bei13、Jay23] 。

本文将研究由李群作用生成的几何自同态 T 这些李群通过等距变换作用并保持复结构，同时仅固定锥点。设 Dolbeault 复形上有一个几何自同态 $T = f_g^*$，它对径向函数 x 的作用为恒等态射，因此也作用于链接 Z上的狄拉克算子的特征截面。于是，存在一个作用于对偶复形的伴随端同态 T^*，它由 f_g^*对截面的拉回给出。

~本文将研究与方程（2.5）中的算子 A 及几何自同态 T 相关联的两个函数 $\xi_T(s)$ 和 $\xi_T(s)$。第一个函数 $\xi_T(s)$ 是标准的等变 ξ 函数，与 [Zha90]，中奇点处的等变指标缺陷相关，其研究动机来自 [Don78] 中对等变 APS 指数定理中边界贡献的研究。函数 $\xi_T(s)$ 是两个边界贡献之和：一个来自 A 的非零谱，另一个来自零空间。

等变指标中来自 A 非零谱的边界贡献是等变 η 函数

$$\eta_T(s, A) := \sum_{\lambda \neq 0} \operatorname{sign}(\lambda) |\lambda|^{-s} \operatorname{Tr}(T|_{E_\lambda}), \tag{3.1}$$

其中求和遍及算子 A 在 Z 上的限制作用于 Dolbeault 复形偶数次截面（取值于 F^+ 的截面）时的非零特征值 λ，而 $\operatorname{Tr}(T|_{E_\lambda})$ 表示特征值为 λ 的（有限维）特征空间上的迹。等变 η 函数在 $\Re(s) > -2$ 上全纯，并可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，且在 $s = 0$ 处取正则值，参见 [Zha90]。因此，可以考虑**等变 η 不变量**，其定义为 $\eta_T(0, A)$ 处的值。

我们用 $\pi : X \to Z$ 表示在 $x = 1$ 处到给定链接的投影。给定 $F|_Z (F = \Lambda^{p,\bullet}(X; E))$ 的一个截面 s，我们用 $\pi^*(s)$ 表示 F 的截面，它相对于 ∂_x 向量协变常数，并满足 $\pi(\pi^*(s)) = s$。给定 $F|_Z$ 的一个截面 u，若 $\pi^*(u)$ 在点 $x = 0$ 的某个开邻域内是 L^2-有界的，我们就称它可延拓为截断圆锥上的一个 L^2-有界截面。我们用 $L^2 \operatorname{Ker} A$ 表示 A 零空间中那些可延拓为截断圆锥上 L^2-有界截面 $\pi^* u$ 的元素 u（作用于 $F|_Z$ 的偶数次和奇数次截面）。定义

$$h_T := \operatorname{Str}(T|_{L^2 \operatorname{Ker} A}) = \operatorname{Tr}(T|_{L^2 \operatorname{Ker} A^+}) - \operatorname{Tr}(T|_{L^2 \operatorname{Ker} A^-}) \tag{3.2}$$

这就是来自 A零空间的边界贡献。等变 ξ 函数的标准定义为

$$\xi_T(s) := \frac{1}{2}\Big(\eta_T(s, A) + h_T\Big). \tag{3.3}$$

$\xi_T(0)$ 正是 [Zha90], 中等变 Lefschetz 不动点公式以及 [Don78] 中等变 APS 指数定理里的等变指标缺陷。

3.2. 复等变 ξ 函数

对于锥 $X = C(Z)$ 上的希尔伯特复形 $\mathcal{P} = (H^\bullet, \mathcal{D}(P^\bullet) P^\bullet)$，狄拉克算子 $D = P + P^*$ 可分解为

$$D = \mathrm{c}\ell(dx)(\nabla^E_{\partial_x} + \frac{1}{x} A_Z)$$

其中 $A_Z = xA$ 是链接 Z 上的切向算子。相应的链接上的切向 Laplace 型算子定义为 $\Delta_Z = A_Z^2$。特别地， Δ_Z 是 Z 上的非负自伴椭圆算子；由于 Z 是紧的， Δ_Z 的谱是离散的:

$$\operatorname{Spec}(\Delta_Z) = \{\alpha_i\}_{i \geq 0}, \quad 0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots,$$

其特征空间均为有限维。由谱定理，我们因此可以定义

$$|A_Z| = (A_Z^2)^{1/2} = \sqrt{\Delta_Z},$$

以及算子

$$e^{-s|A_z|}, \quad |A_Z|^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}$$

通过泛函演算。拉普拉斯算子 Δ_Z 作用于链接 Z上的截面，而变量分离将锥上的调和截面与由 Δ_Z的切向特征截面所标记的模联系起来。因此，在选择局部上同调空间 $\mathcal{H}^q(\mathcal{P}_{W,B}(X))$ 的标准正交基 $\{h_{q,i}\}_{i \geq 0}$，使其适应切向谱分解之后，我们可以定义 $e^{-s|A_z|}$ 在局部上同调上的诱导作用为

$$e^{-s|A_Z|} h_{q,i} = e^{-s\sqrt{\alpha_i}} h_{q,i}.$$

在此基础上，对于给定的上同调预定义域 $W \subset \mathcal{H}(P)$，我们将**复等变 ξ 函数**定义为

$$\widetilde{\xi}_{T,W}(s) := \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Str}\Big(T \exp(-s\sqrt{\Delta_Z})|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_{W,N}(X))}\Big) + \operatorname{Str}\Big(T^* \exp(-s\sqrt{\Delta_Z})|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}^*_{W,N}(X))}\Big)\Big) \tag{3.4}$$

~其中 $\mathcal{P}^*_{W,N}$是 $\mathcal{P}_{W,N}$的伴随复形。函数 $\xi_{T,W}(s)$ 在 $\Re(s) > 0$上全纯，此处对切向模的求和收敛；此外，由定理 3.7~可知，$\xi_{T,W}(s)$ 在 $s = 0$ 的邻域内有亚纯展开，且取正则值

~在 $s=0$处。于是，**复等变 ξ 不变量** 定义为 $s=0$处的值 $\xi_{T,\ W}$(0)。在谱 Witt 条件的情形下，我们将在记号中省略下标 W。

对于几何自同态 T，它们对应于在 X 上的群作用，且仅固定点 $x=0$，[Jay23]，中的 Lefschetz-黎曼-罗赫结果（参见 [Jay24]）表明，在 $x=0$ 处的等变指标缺陷由以下任一者在 $s=0$ 处的取值给出

$$\mathrm{Str}\left(T\exp(-s\sqrt{\Delta_Z})|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_N(X))}\right),\quad \mathrm{Str}\left(T^*\exp(-s\sqrt{\Delta_Z})|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_D(X))}\right) \tag{3.5}$$

根据复形 $\mathcal{P}_N$（X）和 $\mathcal{P}_D$（X）之间的对偶性，它们在 $s=0$ 处相等。容易看出，这可推广为以下各式在 $s=0$ 处相等：

$$\mathrm{Str}\left(T|\Delta_Z|^{-s/2}|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_N(X))}\right),\quad \mathrm{Str}\left(T^*|\Delta_Z|^{-s/2}|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_D(X))}\right) \tag{3.6}$$

将超迹中的权从 $\exp(-s\sqrt{\Delta_Z})$ 改为 $|\Delta_Z|^{-s/2}$，并采用与 [Jay23, §5.2.5] 中相同的技术，即可得到这一结果。我们对 $\xi_{T,\ W}$（s）定义中所用的正则化，类似于 [CDHH25, (3.3)]，中的正则化，其中经典 η 不变量定义为以下极限

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_k \exp(-\epsilon|\lambda_k|)\,\mathrm{sign}(\lambda_k)$$

w其中 λ_k 是边界上诱导狄拉克算子的非零特征值。

备注 3.1. 在带边界流形上，甚至在具有锥形奇点的空间上，h_T 的定义会因不同文章对定义域和约定的选择而略有不同。η 和 ξ 不变量的定义也反映了这些差异，但在具体例子中，这些不同定义所得到的指标缺陷是一致的。

还需指出，有时会对 η 和 ξ 不变量采用不同的正则化。例如，参见 [Wit85]，的方程（*22*），以及 [CDHH25] 较新研究中的方程（*3.3*）。

3.3. 谱分解定理

等变 η 和 ξ 不变量是算子 A 在偶次旋量丛上的特征截面（限制到链接 Z）的带符号正则化迹。另一方面，本文定义的复等变版本，是 Dolbeault 复形的调和截面上的带符号正则化迹。因此，取迹所依据的谱数据为等变 η 和 ξ 不变量及其复版本提供了一种范畴化。要理解这些范畴化之间的关系，就必须详细确定相关谱数据之间有意义的联系。这正是我们的主要结果——定理 3.4（某种谱分解定理）——的动机。定理 3.4 的证明，关键在于理解局部上同调群上的超迹与 A 的特征截面上的迹之间的对应关系。

在锥 $X=C(Z)$ 上，Dolbeault-Dirac 算子可分解为

$$D=\nu\circ(\nabla^E_{\partial_x}+A),$$

其中 $\nu=\sqrt{2}(\beta\wedge-\iota_{\beta\#})$，而 A 是一个沿链接切向的一阶算子。我们记 $A=A_1+A_2$，其中

$$A_1=-\frac{\nu}{2x}D_1,\quad\text{and}\quad A_2=-\frac{\nu}{2x}D_2,$$

参见方程（2.5）。我们将使用 Dolbeault-Dirac 算子的（偶/奇）复旋量丛的分解，

$$F^{\pm}\big|_Z\ =\ G^{\pm}\oplus\beta\wedge G^{\mp}, \tag{3.7}$$

其中 $G^{\pm}$ 是 D_2 的横截旋量丛。我们还定义在 $x=1$ 处对链接的限制，

$$\mathcal{R}:\Omega^{0,q}(C(Z);F)\to\Omega^{0,q}(Z;F|_Z),\quad \mathcal{R}(\psi)=\psi\big|_{x=1}.$$

此外，我们考虑链接上的横向调和子空间

$$\mathcal{E}:=\ker(A_2)\cap\Omega^{0,q}(Z;F|_Z), \tag{3.8}$$

并注意到在 $\mathcal{E}$ 上有 $A=A_1|_{x=1}=-\frac{\nu}{2}D_1$。 –

注意，映射 $\beta\wedge$ 和 $\iota_{\beta\#}$ 限制后构成互逆的丛同构 s

$$\beta\wedge:\ G^{\pm}\xrightarrow{\cong}\beta\wedge G^{\pm},\quad \iota_{\beta\#}:\ \beta\wedge G^{\pm}\xrightarrow{\cong}G^{\pm},$$

它们交换 F^+ 和 F^-。

展开定义域 $\mathcal{D}_{W,\ B}$ 的定义，并注意到我们将边界置于 $x=1$，可得以下结果。

引理 3.2（边界条件与 β-分裂）。设 $P=\partial_E$，令 $B=N,D$ 表示 $x=1$ 处的广义诺伊曼/狄利克雷边界条件，如方程 (2.14) 所示。取任意光滑截面 $\psi\in\mathcal{D}_{W,\ B}(P)\cap\Omega^{0,\ q}(C(Z);F)$，使得限制 $\mathcal{R}(\psi)$ 有意义。于是，相对于正交分裂 (3.7)，边界条件可以等价地表述如下。

(i) $\psi\in\mathcal{D}_{W,N}(P)$ 成立，当且仅当 $\sigma(P^*)(dx)\mathcal{R}(\psi)=0$，也当且仅当 $\iota_{\beta\#}\mathcal{R}(\psi)=0$。因此在这种情况下，$\mathcal{R}(\psi)\perp\beta\wedge G$ 且 $\mathcal{R}(\psi)\in G^+\oplus G^-$。*(ii)* $\psi\in\mathcal{D}_{W,D}(P)$ 成立，当且仅当 $\sigma(P)(dx)\mathcal{R}(\psi)=0$，也当且仅当 $\beta\wedge\mathcal{R}(\psi)=0$。因此在这种情况下

$$\mathcal{R}(\psi)\in\beta\wedge G^-\ \text{if}\ \psi\in F^+,\quad \mathcal{R}(\psi)\in\beta\wedge G^+\ \text{if}\ \psi\in F^-.$$

引理 3.2 尤其适用于定理 3.4 证明中使用的调和截面 $\psi\in\mathcal{H}(\mathcal{P}_B(C(Z)))$。我们还将使用下面这个引理，它可以通过直接计算得到。

引理 3.3。在 $\mathcal{E}$ 上，切向算子 A_1 与 $\beta\wedge$ 及 $\iota_{\beta\#}$反对易：

$$A_1\circ(\beta\wedge)=-(\beta\wedge)\circ A_1,\quad A_1\circ\iota_{\beta\#}=-\iota_{\beta\#}\circ A_1,$$

因此，作用 $\beta\wedge$或 $\iota_{\beta\#}$ 会使 A_1–特征值的符号反转。

下面的结果通过明确边界条件与谱数据之间的对应关系，细化了定理 A 的第 (1) 和第 (2) 部分。定理 A 的其余部分可由定理

定理 3.4。考虑扭曲多洛贝复形

$$\mathcal{P}_{W,B}=\big(L^2\Omega^{0,\bullet}(C(Z);E),\,\mathcal{D}_{W,B},\,P=\bar\partial_E\big),\qquad B\in\{N,D\},$$

并令 $\mathcal{H}^q_B$ 表示其次数为 q 的调和截面空间。此外，假设谱 *Witt* 条件成立：

$$\mathrm{Spec}(A_1|_{x=1})\cap\big(-\tfrac12,\tfrac12\big)=\varnothing.$$

那么，$\mathcal{H}^q_N\oplus\mathcal{H}^q_D$ 具有标准正交基 $\{\psi_j\}$，使得每个 $\phi_j=\mathcal{R}(\psi_j)\in\mathcal{E}$ 都是一个具有 $A\phi_j=\mu_j\phi_j$ 的 A-特征截面，其中某个 $\mu_j>0$，并且有以下刻画：

(1) $\psi_j\in\mathcal{H}^{\mathrm{even}}_N$当且仅当 $\phi_j\in\mathcal{E}\cap G^+$ 且 $A\phi_j=\mu_j\phi_j$，其中 $\mu_j>0$。*(2)* $\psi_j\in\mathcal{H}^{\mathrm{odd}}_N$当且仅当 $\phi_j\in\mathcal{E}\cap G^-$ 且 $A(\beta\wedge\phi_j)=-\mu_j\beta\wedge\phi_j$，其中 $\mu_j>0$。*(3)* $\psi_j\in\mathcal{H}^{\mathrm{even}}_D$当且仅当 $\phi_j\in\mathcal{E}\cap(\beta\wedge G^-)$，等价地，$\phi_j=\beta\wedge\Phi_j$ 且 $\Phi_j\in\mathcal{E}\cap G^-$，并且$A\phi_j=\mu_j\phi_j$ 且 $\mu_j>0$。*(4)* $\psi_j\in\mathcal{H}^{\mathrm{odd}}_D$当且仅当 $\phi_j\in\mathcal{E}\cap(\beta\wedge G^+)$，等价地，$\phi_j=\beta\wedge\Phi_j$ 且 $\Phi_j\in\mathcal{E}\cap G^+$，并且$A\Phi_j=-\mu_j\Phi_j$ 且 $\mu_j>0$。

在继续证明之前，先以链接是复平面中的单位圆盘为例，说明定理 3.4 的思想。

例 3.5. 考虑 $\mathbb{C}$ 上的 Dolbeault 复形。偶次旋量丛就是 G^+，我们考虑其正特征值对应的特征截面

$$A_1=-\nu\circ D_1|_Z=\sqrt{2}\iota_\beta\circ(\beta\wedge\frac{\partial_x+ix\partial_\theta}{\sqrt{2}})|_{x=1}=i\partial_\theta \tag{3.9}$$

对于正整数 k，这些截面为 $e^{ik\theta}$。它们有唯一的调和延拓 $z^k=x^ke^{ik\theta}$，并满足

$$\Big(\partial_x+i\frac{1}{x}\partial_\theta\Big)(x^ke^{ik\theta})=0=(\partial_x-\frac{k}{x})x^k. \tag{3.10}$$

这表明，向量丛 $\mathcal{E}\cap G^+$ 中 A 的正特征值特征截面与 $\mathcal{H}^{even}_N$ 中的截面相对应。对于 G^+ 中具有负整数特征值的 A_1，我们看到，对于 k 的负值，$\beta e^{ik\theta}=(dx-ixd\theta)e^{ik\theta}$ 具有正特征值 $-k$，

$$A_1=-\nu\circ D_1|_Z=-\sqrt{2}\beta\wedge\circ(-\iota_\beta\frac{\partial_x-ix\partial_\theta}{\sqrt{2}})|_{x=1}=-i\partial_\theta \tag{3.11}$$

并且它们存在唯一的调和延拓（$dx - ixd\theta$）$x^{(k-1)}e^{-ik\theta} = z^{k-1}dz$，满足 − −

$$\Big(\partial_x - i\frac{1}{x}\partial_\theta\Big)(x^k e^{-ik\theta}) = 0 = (\partial_x - \frac{k}{x})x^k. \tag{3.12}$$

当向量丛由截面 dz 平凡化时。若由截面 $\beta = d\bar{z}e^{-i\theta}$ 平凡化，则得到方程 −

$$\Big(\partial_x + \frac{1}{x} - i\frac{1}{x}\partial_\theta\Big)(x^k e^{-i(k+1)\theta}) = 0. \tag{3.13}$$

这表明 $\mathcal{E} \cap G^+$ 中的负特征值特征截面与 $\mathcal{H}_D^{odd}$ 中的截面相对应。由此可见，链路上的特征截面可延拓为上同调群中的唯一元素，这体现了定理 3.4 $\diamond$ 中的对应关系。

定理 *3.4* 的证明。我们已在方程 (3.8) 中看到

$$\mathcal{R} : \mathcal{H}_N^q \oplus \mathcal{H}_D^q \to \mathcal{E} = \ker(A_2) \cap \Omega^{0,q}(Z; F|_Z),$$

对于每个 q。因此，对于 $\phi = \mathcal{R}(\psi)$，我们有 $A\phi = A_1\phi$。考虑 $L^2(Z;\, F|_Z)$ 中 A 的一组标准正交特征基 $\{\phi_{\lambda,k}\}$，使得 $A\phi_{\lambda,\,k} = \lambda\phi_{\lambda,\,k}$。根据 [Jay23，命题 5.33]（见注 3.6）中关于锥上狄拉克算子的分离分析，我们可以写成 $\psi(x,\ \cdot) = \sum_{\lambda,\,k} u_{\lambda,\,k}(x)\phi_{\lambda,\,k}(\cdot)$，于是方程 $D\psi = 0$ 按模态解耦为标量常微分方程

$$\partial_x u_{\lambda,k}(x) + \frac{\lambda}{x}u_{\lambda,k}(x) = 0. \tag{3.14}$$

因此 $u_{\lambda,\,k}(x) = c_{\lambda,\,k}x^{-\lambda}$。等价地，写作 $\lambda = -\mu$，我们得到如下形式

$$u(x) = cx^\mu \ \text{ when } \ A\phi = -\mu\phi.$$

在 $x = 0$ 附近，ψ 的 L^2-条件就是 $\int_0^1 x^{2\mu}\,dx < \infty$，即 $\mu > -1/2$。

现在我们使用多洛博结构和分裂 (3.7)。在 $\ker D$ 上，上述模态分解表明，ψ 是分离解 $x^\mu\phi$ 的（可能无穷但收敛的）线性组合，且满足 $\mu > -1/2$。要使 ψ 属于希尔伯特复形的调和空间，我们必须同时要求 $P\psi = 0$ 和 $P^*\psi = 0$。

为构造定理陈述中的 $\mathcal{H}_N^q \oplus \mathcal{H}_D^q$ 的标准正交基 $\{\psi_j\}$，我们逐模态进行。首先，我们只考虑切向调和子空间$\mathcal{E} = \ker(A_2) \subset \Gamma(Z;\, F|_Z)$，并将其正交分解为

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} \mathcal{E}_\lambda, \quad \mathcal{E}_\lambda := \{\phi \in \mathcal{E} : A\phi = \lambda\phi\}.$$

对于每个特征空间 $\mathcal{E}_\lambda$，在 $L^2(Z;\, F|_Z)$ 中选取一个标准正交基 $\{\phi_{\lambda,k}\}_k$，使其适应由引理 3.2 导出的边界／奇偶分解，即令 $\phi_{\lambda,k}$ 属于适当的直和项 $G^\pm$ 或 $\beta \wedge G^\mp$，具体取决于我们是在构造 $\mathcal{H}_N^q$ 或 $\mathcal{H}_D^q$ 中的基元素，以及所处的是偶数阶还是奇数阶。对于每个这样的 $\phi_{\lambda,k}$，满足 $\lambda = -\mu$（因此 L^2 条件选定了 $\mu > -1/2$），定义 $(0,1) \times Z$ 上的变量分离解为

$$\psi_{\lambda,k}(x,z) := c_{\lambda,k}\, x^\mu\, \phi_{\lambda,k}(z),$$

其中，归一化常数 $c_{\lambda,k} > 0$ 保证了 $\|\psi_{\lambda,k}\|_{L^2} = 1$。上述逐模常微分方程分析表明，$D\psi_{\lambda,k} = 0$以及 $\mathcal{R}(\psi_{\lambda,k}) = \phi_{\lambda,k}$；而 $x = 1$ 处的边界条件则由构造自动满足，因为 $\mathcal{R}(\psi_{\lambda,k})$ 属于引理 3.2 所指定的正确直和项。此外，不同对 (λ,k) 与 (λ',k') 的正交性源于变量分离以及链路特征模的正交性：

$$\langle\psi_{\lambda,k},\psi_{\lambda',k'}\rangle_{L^2(X)} = \left(\int_0^1 x^{\mu+\mu'}\,dx\right)\langle\phi_{\lambda,k},\phi_{\lambda',k'}\rangle_{L^2(Z)} = 0 \text{ if } (\lambda,k) \neq (\lambda',k').$$

最后，任意 $\psi \in \mathcal{H}_N^q \oplus \mathcal{H}_D^q$ 都可以展开为链路上的 A-特征模，而核方程 (3.14) 强制每个系数都满足同一个常微分方程，因此 ψ 是上述 $\psi_{\lambda,\,k}$ 的一个 L^2-收敛线性组合。由此，我们将张成 $\mathcal{H}_N^q \oplus \mathcal{H}_D^q$ 的有限子集 $\{\psi_j\} \subseteq \{\psi_{\lambda,k}\}$ 限制后，得到一个标准正交基。

根据构造，基 $\{\psi_j\}$ 属于四类情况 (1)–(4) 之一。引理 3.2 将 $x = 1$ 处的诺伊曼和狄利克雷边界条件分别对应到方程 (3.7) 中“无 β-分量”和“纯 β-分量”子空间。这就得到了定理陈述中的四种情况：

parity	$B = N$	$B = D$
even (F^+)	$\mathcal{R}(\psi) \in G^+$	$\mathcal{R}(\psi) \in \beta \wedge G^-$
odd (F^-)	$\mathcal{R}(\psi) \in G^-$	$\mathcal{R}(\psi) \in \beta \wedge G^+$.

在谱 Witt 假设 Spec$(A_Z) \cap (-\frac{1}{2}, 12) = \varnothing$下， L^2-条件 $\mu > -1/2$在 $A_Z\phi = -\mu\phi$时强制 $\mu > 0$，因此对 $\mathcal{H}_N^q \oplus \mathcal{H}_D^q$ 有贡献的每个调和模态都具有 $\mu > 0$。最后，在情形 (3)-(4) 中，我们可以取 $\Phi_j = \iota_{\beta\#}\phi_j$；根据带有 $\mu_j > 0$ 的引理 3.3，它满足 $A\phi_j = +\mu_j\phi_j$ 。定理得证。□

注 3.6。 正是 $C（Z）$ 上圆锥度量的乘积性质，使得能够在 [Jay23, 命题 5。33], 中进行变量分离；该结果表明，链路上 *Laplace* 型算子的特征截面可以提升为锥上 *Laplace* 型算子的特征截面。锥上特征截面的超对称性导致锥上非零特征值特征截面对等变指标的贡献相互抵消。

3.4. 等变指标缺陷

定理 3.4 给出了调和旋量的五部分分解：利用分别对应情形 (1)–(4) 的子空间，以及方程 (3.8) 中横向调和子空间 $\mathcal{E}$ 的补空间。我们定义一个三重正交分解

$$L^2\Omega^{0,q}(Z; F^+|_Z) = \mathcal{H}_1^q \oplus \mathcal{H}_2^q \oplus \mathcal{H}_3^q$$

其中， $\mathcal{H}_1^q = \mathcal{R}(\mathcal{H}_N^q)$ 由 Z 上情形 (1) 和 (2) 中对应于 $B = N$ 的旋量组成，而 $\mathcal{H}_2^q = \mathcal{R}(\mathcal{H}_D^q)$ 由情形 (3) 和 (4) 中对应于 $B = D$ 的旋量组成。剩余子空间 $\mathcal{H}_3^q$ 是 $\mathcal{E}$ 中横向调和子空间的补空间，参见方程 (3.8)；该补空间位于 $L^2\Omega^{0,\,q}(Z;\, F^+|_Z)$ 内。

由此又得到函数 (3.3) 的三重分裂。令 $E_\lambda = \ker(A_Z - \lambda)$ 表示 $\Omega^{0,\,q}(Z;\, F^+|_Z)$ 上 A_Z 的 λ-特征空间。由于每个子空间 $\mathcal{H}_j^q$ 都是闭且 T 不变的，我们对每个特征空间都得到一个正交分解

$$E_\lambda = \bigoplus_{j=1}^{3} (E_\lambda \cap \mathcal{H}_j^q).$$

η_T 函数 (3.1) 随后分解为

$$\begin{aligned} &\eta_T(s) = \eta_{T,1}(s) + \eta_{T,2}(s) + \eta_{T,3}(s) \\ &\text{with} \quad \eta_{T,j}(s) = \sum_{j\neq 0} \operatorname{sign}(\lambda)|\lambda|^{-s} \operatorname{Tr}(T|_{E_\lambda \cap \mathcal{H}_j^q}). \end{aligned}$$

类似地，零空间上的 T-迹分解为

$$\operatorname{Tr}(T|_{\ker A_Z}) = h_{T,1} + h_{T,2} + h_{T,3}, \quad h_{T,j} = \operatorname{Tr}(T|_{\ker(A_Z)\cap\mathcal{H}_j^q}).$$

因此，对于 ξ_T 函数，我们有如下分解

$$\xi_T(s) = \xi_{T,1}(s) + \xi_{T,2}(s) + \xi_{T,3}(s), \quad \xi_{T,j}(s) = \frac{1}{2}(\eta_{T,j}(s) + h_{T,j}). \tag{3.15}$$

这引出了下一个主要结果，该结果与定理 3.4 一起给出定理 A。

定理 3.7。 在定理 *3.4* 的情形下，对于几何自同态 $T = f_g^*$，其中 f_g^* 在 $C(Z)$ 的锥点处具有一个孤立不动点，等变 ξ 与复等变 ξ 不变量相等：

$$\widetilde{\xi}_T(0) = \xi_T(0). \tag{3.16}$$

特别地， $\mathcal{H}_3^q$ 不对 ξ_T 不变量作出贡献。

定理 *3.7* 的证明。恒等式（3.16）两边的表达式都是局部 Lefschetz 数。左边的表达式是链路上的锥的局部 Lefschetz 公式的对称化形式；当锥具有复结构时， [Jay23]证明了 Dolbeault 复形的这一公式。右边的表达式也是局部 Lefschetz 数，

由 [Zha90] 证明：在假设 $h_T = 0$ 成立的条件下，当 Z 为光滑点时该结论成立；但很容易将其推广到 $h_T \neq 0$的情形。这就证明了恒等式。

回顾函数公式（3.4）中。 [Jay23，第 5.2 节5],中的结果，结合与 [Zha90] 中所用方法类似的标准技巧，可以加以改编，从而证明 $\xi_{T,\ 1}(s)$ 和 $\xi_{T,\ 2}(s)$ 在 $s = 0$ 附近存在亚纯延拓。根据 $\xi_T(s)$ 的定义进行简短计算，便可推出 $\widetilde{}$，即

$$\widetilde{\xi}_T(0) = \xi_{T,1}(0) + \xi_{T,2}(0),$$

$\widetilde{}$也就是说， $\mathcal{H}_3^q$ 不会对 ξ_T 不变量作出贡献。因此，恒等式（3.16）意味着 $\xi_{T,\ 3}(0) = 0$。$\widetilde{}$由于 $\mathcal{H}_3^q$ 不会对 ξ_T 不变量作出贡献，因此它也不会对 ξ_T作出贡献。□

$\widetilde{}$我们将定理 3.7 中的等式 $\xi_T(0) = \xi_T(0)$，以及 $\mathcal{H}_3^q$ 不会对 ξ_T 不变量作出贡献这一事实，理解为锥这一层次上的超对称抵消。

这项结果的一个有趣之处在于，它表明 ξ_T 不变量可以通过局部上同调上的超迹来计算，这往往能简化计算，根本原因是我们无需了解链路上狄拉克算子的完整谱。我们将在第 4 节通过几个例子说明这一点。

给定 $C(Z)$ 上的一个复结构 J_1，以及关于 $s = 1$ 的度量 $g = dx^2 + x^2 S^2 g_Z$，我们可以轻松地将其扩展，从而得到一般情形下的复结构 J_S，其中

$$J_S(\partial_x) = Sx\alpha, \quad J_S(\frac{1}{xS}R) = -dx \quad \text{and} \quad J_S(V) = J_1(V)$$

对于任意一个楔向量场 V，只要它与 $\partial_x, \frac{1}{xS}R$ 张成的空间线性无关即可。通过比较坐标下针对一般取值的 $\nabla^S J_S$（其中 S）与针对 $S = 1$ 的计算，可以得出该复结构的可积性；后者的可积性由假设保证。

由于度量为 $g = dx^2 + x^2 S g_Z$、定义域为 $\mathcal{D}_{\min}$ 的锥上的 Dolbeault 复形的上同调，对于所有正实数 S （相应地改变复结构）都同构，因此，等变指标公式可推广到 Dolbeault 复形不满足谱 Witt 条件的空间，适用于最小定义域的情形（见 [Jay24] 的注 6.7）。接下来我们考虑一般卷起扩张的情形；实质上， W 中额外的截面会带来额外的超迹。为方便起见，我们重述定理 B。

定理 3.8 (重复定理 B)。 考虑定理 *3.7* 中的情形，但不满足谱 *Witt* 条件。对于任意对应于某个上同调$\widetilde{}$预定义域 W的卷起扩张， ξ_T 不变量满足

$$\widetilde{\xi}_{T,W} = \widetilde{\xi}_{T,W} + \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Str}(T|_{W^q}) - \operatorname{Str}(T^*|_{(W^*)^q})\Big). \tag{3.17}$$

证明。 我们首先注意到，上同调群满足

$$W^q \oplus \mathcal{H}^q(\mathcal{P}_{\min,N}) = \mathcal{H}^q(\mathcal{P}_{W,N}) \tag{3.18}$$

and

$$(W^*)^q \oplus \mathcal{H}^q(\mathcal{P}_{\max,D}) = \mathcal{H}^q(\mathcal{P}_{W^*,D}) \tag{3.19}$$

由于空间 W， W^* 是有限维的，因此无需对其上的超迹$\widetilde{}$进行重新归一化。然后，根据上同调预定义域 W的$\xi_{T,\ W}$ 不变量的定义即可得到该公式。□

例 3.9。 我们考虑例 2.3 末尾所述域的上同调。在旋转 $\theta \mapsto \theta + \alpha$作用下，我们得到变换 $z \mapsto ze^{i\alpha}$，因此 $e^{i\theta/3} \mapsto \lambda e^{i\theta/3}$且 $\lambda = e^{i\alpha/3}$。注意到

$$\operatorname{Tr} T|_{\{a\tau_1 + b\tau_2\}} = \frac{\langle a\lambda^{-1}\tau_1 + b\lambda^{-2}\tau_2, a\tau_1 + b\tau_2\rangle_{L^2\Omega(X)}}{\langle a\tau_1 + b\tau_2, a\tau_1 + b\tau_2\rangle_{L^2\Omega(X)}} = a^2\lambda^{-1} + b^2\lambda^{-2} \tag{3.20}$$

这里我们利用了 τ_1, τ_2 在锥上具有单位范数这一事实，以及 $a^2 + b^2 = 1$。对于定义域为 $\mathcal{D}_{W_{a,b}}(\partial)$、其上同调由

$a\tau_1 + b\tau_2$ 及其他全纯模生成的 Dolbeault 复形，其 Lefschetz 超迹为

$$a^2\lambda^{-1} + b^2\lambda^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = a^2\lambda^{-1} + b^2\lambda^{-2} + \frac{1}{1-\lambda}, \tag{3.21}$$

忽略由重整化处理的收敛性问题。这与定义在 $\mathcal{D}_{W_{a,b}(\partial)^*}$ 上的对偶复形的超迹相符，其局部上同调由 $bs_1 - as_2$ 和 $z^{k/3}dz$ 张成，其中 $k \geq 0$。这里我们利用了这样一个事实：$dz \mapsto \lambda^{-3}dz$，且 $z \mapsto \lambda^{-3}z$。注意到

$$\operatorname{Tr} T|_{\{bs_1 - as_2\}} = \frac{\langle b\lambda^{-1}s_1 - a\lambda^{-2}s_2, bs_1 - as_2\rangle_{L^2\Omega(X)}}{\langle bs_1 - as_2, bs_1 - as_2\rangle_{L^2\Omega(X)}} = b^2\lambda^{-1} + a^2\lambda^{-2} \tag{3.22}$$

这里我们利用了这样一个事实：τ_1, τ_2 在锥上具有单位范数，且 $a^2 + b^2 = 1$。由于反全纯一形式在 Dolbeault 复形中处于次数 1，这一项对超迹的贡献带有负号。结合上同调群其余截面的超迹贡献，我们得到超迹为

$$\begin{aligned} -b^2\lambda^{-1} - a^2\lambda^{-2} - \sum_{k=-3}^{-\infty} \lambda^k &= a^2\lambda^{-1} + b^2\lambda^{-2} - \sum_{k=-1}^{-\infty} \lambda^k \\ &= a^2\lambda^{-1} + b^2\lambda^{-2} - \frac{\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-1}} = a^2\lambda^{-1} + b^2\lambda^{-2} + \frac{1}{1-\lambda} \end{aligned} \tag{3.23}$$

其中，在第一个等式中，我们用到了这样一个事实：$a^2 + b^2 = 1$。

因此不难看出，等变 ξ_T 不变量为

$$\xi_T = a^2\lambda^{-1} + b^2\lambda^{-2} + \frac{1}{1-\lambda},$$

它与最小定义域对应的不变量相差 $a^2\lambda^{-1} + b^2\lambda^{-2}$。 ◇

注3.10。在 [Cho85] 的定理（*5.23*）中（参见 [Cho89]的定理 *3.1*），当不满足谱 *Witt* 条件时，指标缺陷中还包含狄拉克算子的小特征值特征空间维数所给出的附加项。这些小特征值对应于变量分离时奇异斯图姆－刘维尔方程的极限圆情形（见 [Cho85]第 *3* 页），并导致狄拉克算子的零空间在每个次数上都出现更多局部截面。

不难验证，[Cho85], 的定理（*5.23*）的证明，结合 [Zha90], 中的等变版本，可以推广用于理解此类情形下的等变指标缺陷。我们注意到，η 不变量定义中略有不同的约定，会导致 [Zha90,Cho85]中结果的符号差异。

4. 示例和特殊情形

我们先简要回顾球面上 [Deg01] 的等变 η 不变量计算（在这种情况下，它也等于两倍的 ξ_T 不变量，因为球面上没有调和旋量，且 $h_T = 0$）；狄拉克算子的特征值和特征截面曾借助表示论进行研究。

4.1. η 圆球面上自旋狄拉克算子的不变量

我们证明，由 ξ_T 不变量给出的等变指标缺陷新公式，计算起来比球面上自旋狄拉克算子的 ξ_T 和 η_T 不变量更简单 S^{2n-1}。我们将此与 η 不变量的计算进行比较；在 [Deg01], 中，她利用狄拉克算子的谱进行计算，并将其与等变情形下的 Molien 级数相比较，详情参见同上。

我们回顾 [Deg01, 定理 4.1.1] 的证明，该定理为 S^{2n-1} 上的等变 η 不变量建立了一个公式。利用表示论方法计算了 $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$ 上自旋狄拉克算子的谱。计算过程颇为繁复，我们在此简要说明。*loc. cit.* 第 3.4 章证明，自旋狄拉克算子的谱可分解为三部分；据此，等变 η 不变量 $\eta_{T_g}(s) := \eta(g, s)$ 可分解为

$$\eta(g, s) = \eta_1(g, s) + \eta_2(g, s) + \eta_3(g, s)$$

这与我们的三重分裂 (1.2) 完全对应，其中 $g \in \mathbb{T}^n$。该处最初关注的是满足 $g \in \mathbb{T}^n$ 、因而 1 不是特征值的情形。第一项贡献为

$$\eta_1(g,s) = (-1)^n \sum_{a\geq 0} \Big(\frac{2n-1+2a}{2\sqrt{2}}\Big)^{-s} \det(g)^{1/2} H_a^n(g) \tag{4.1}$$

其中， H_a^n 是 n 个变量中的第 a个对称多项式（即所有次数为 a的不同单项式之和）。然后代入 $s=0$ ，得到

$$\eta_1(g,0) = (-1)^n \det(g)^{1/2} \sum_{a\geq 0} H_a^n(g) = (-1)^n \det(g)^{1/2} \frac{1}{\det(I_n - g)} \tag{4.2}$$

其中，最后一个等号用到了恒等式

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i t} = \sum_{a\geq 0} H_a^n t^a. \tag{4.3}$$

情形 2 的计算与情形 1 类似，并且可以证明，对 η 不变量的贡献为

$$\eta_2(g,0) = \det(g)^{-1/2} \frac{1}{\det(I_n - g^{-1})}.$$

在第三种情形中，可以证明 t at th

$$\eta_3(g,s) = \sum_{a,b\geq 0} \sum_{r=0}^{n-1} \Big(\frac{(-1)^{n+r} + 2n + 2(a+b)}{2\sqrt{2}}\Big)^{-s} \operatorname{Tr}\big(g|_{V_{\mu(a,r,b)}}\big)$$

$$- \sum_{a,b\geq 0} \sum_{r=0}^{n-1} \Big(\frac{(-1)^{n+r-1} + 2(n-2r-2) + 2(a+b)}{2\sqrt{2}}\Big)^{-s} \operatorname{Tr}\big(g|_{V_{\mu(a,r,b)}}\big),$$

其中， $V_{\mu(a,r,b)}$ 是 $U(n-1)$的不可约表示，对应于最高权

$$\mu(a,r,b) = \big(a+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \ldots, -\tfrac{1}{2}, -b-\tfrac{1}{2}\big)$$

其中序列（$-1/2$、.....、 $-1/2$）的长度为 r。虽然它并非恒等于 0，但在 $s\to 0$ 的极限下，各项贡献相互抵消，得到

$$\eta_3(g,0) = \lim_{s\to 0} \eta_3(g,s) = 0. \tag{4.4}$$

因此，奇维球面 S^{2n-1} 的等变 η 不变量为

$$\begin{aligned} \eta(g,0) &= \eta_1(g,0) + \eta_2(g,0) \\ &= (-1)^n \det(g)^{1/2} \frac{1}{\det(I_n - g)} + \det(g)^{-1/2} \frac{1}{\det(I_n - g^{-1})} \\ &= (-1)^n \det(g)^{1/2} \frac{2}{\det(I_n - g)} \end{aligned} \tag{4.5}$$

对于不以 1 为特征值的 $g \in \mathbb{T}^n$ 。由于 Lichnerowicz恒等式表明球面上不存在调和旋量，因此它等于等变 ξ_T 不变量，至多相差一个因子 $1/2$。

我们强调，推导公式（4.5）的计算需要对 S^{2n-1} 上狄拉克算子的谱进行完整分析。事实上，仔细考察公式（3.4）中局部上同调上的超迹可知，计算等变 ξ 不变量并不需要了解狄拉克算子的完整谱。实际上，从抵消（4.4）中已经可以看出，某些特征值并不产生贡献。从这个意义上说，公式（3.3）定义的等变 ξ 不变量包含了多余信息。相比之下，~不变量 ξ （3.4）以局部上同调上的超迹表示，实际上更容易计算，因为它不包含任何多余信息，也不需要完整了解谱。

关于方程 (4.4)，我们注意到，在奇数维球面上的锥这一情形下，定理 A 与这种抵消现象相符；事实上，定理 A 表明，这种抵消现象更普遍地存在。据我们所知，这种抵消现象背后的机制尚未在文献中得到解释。

~为展示等变 ξ 不变量在计算上的有效性，我们将说明如何利用等变 ξ_{T_g} 不变量推导出公式 (4.5)。计算要简单得多，可以通过旋量丛 $L=\sqrt{\mathcal{K}}$ 的全纯截面来描述；其中，$\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的典范丛，并将 $\mathbb{C}^n$ 视为球面 S^{2n-1}上的锥。这一过程与 Jay23, §7.2.6] 和 Jay24, §7.3] 的做法非常接近。有关自旋狄拉克算子与作用于 L截面上的 Dolbeault-Dirac 算子之间的同构详情，请参阅上述文献。

例 4.1（η 不变量与奇数维球面）。我们考察作用在 $\mathbb{C}^n = C(S^{2n-1})$ 上的标准环面作用，并配备扭曲 Dolbeault-Dirac 复形 $\mathcal{P}_B(C(Z))$，其中 $B=N/D$。固定 $\mathbb{C}^n$ 上的标准复坐标。对于多重指标 $\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n$，记

$$z^{\mathbf{m}} := z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n},\quad \bar{z}^{\mathbf{m}} := \bar{z}_1^{m_1}\cdots\bar{z}_n^{m_n},\quad |\mathbf{m}| := \sum_{j=1}^n m_j.$$

∂-Neumann 局部上同调由扭曲单项式张成

$$\mathcal{H}^0\left(\mathcal{P}_N(C(Z))\right) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{z^{\mathbf{m}}\otimes\ell^{1/2} : \mathbf{m}\in\mathbb{N}^n\}$$

其中，$\ell^{1/2}=\sqrt{dz_1\wedge dz_2\cdots\wedge dz_n}$ 是使典范线丛的平方根 $K^{1/2}$ 平凡化的局部截面。∂^*-Neumann 局部上同调由扭曲反全纯 n-形式张成

$$\mathcal{H}\left(P_N(C(Z))\right) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\,\bar{z}^{\mathbf{m}}\,d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n\otimes\ell^{1/2} : \mathbf{m}\in\mathbb{N}^n\,\}.$$

通过将其共轭到极大环面中的一个元素，我们不妨假设 g 为对角的，并记为

$$g\cdot z_k = \lambda_k z_k,\quad \lambda_k\in S^1.$$

因此，g 在反全纯 1-形式上的作用由下式确定

$$g\cdot(\bar{z}^{\mathbf{m}}) = \prod_{j=1}^n \lambda_j^{-m_j}\,\bar{z}^{\mathbf{m}},\quad g^*(d\bar{z}_j)=\lambda_j^{-1}d\bar{z}_j.$$

因此，给定一个元素

$$\Phi_{\mathbf{m}} := \bar{z}_1^{m_1}\cdots\bar{z}_n^{m_n}d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n\otimes L^{1/2}\in\mathcal{H}(\mathcal{P}_D(C(Z)))$$

我们看到，g 的作用由下式给出

$$g\cdot\Phi_{\mathbf{m}} = \left(\prod_{j=1}^n\lambda_j^{-m_j}\right)\left(\prod_{j=1}^n\lambda_j^{-1}\right)\left(\prod_{j=1}^n\lambda_j^{1/2}\right)\Phi_{\mathbf{m}} = \prod_{j=1}^n\lambda_j^{-(m_j+1/2)}\Phi_{\mathbf{m}}.$$

对于 ∂-狄利克雷边界条件，局部上同调上的超迹贡献为

$$\begin{aligned}\operatorname{Str}\left(e^{-sD_Z}T_g\big|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_D(C(Z)))}\right) &= (-1)^n\operatorname{Tr}\left(e^{-sD_Z}T_g\big|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_D(C(Z)))}\right)\\ &= (-1)^n\prod_{k=1}^n\left(\sum_{m_k\geq 0}\lambda_k^{-(m_k+1/2)}e^{-sm_k}\right)\\ &= (-1)^n\prod_{k=1}^n\left(\lambda_k^{-1/2}\sum_{m_k\geq 0}(\lambda_k^{-1}e^{-s})^{m_k}\right).\end{aligned}$$

对几何级数求和并令 $s\to 0$，得到

$$\lim_{s\to 0}\operatorname{Str}\left(e^{-sD_Z}T_g\big|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_N(C(Z)))}\right) = (-1)^n\prod_{k=1}^n\frac{\lambda_k^{-1/2}}{1-\lambda_k^{-1}}.$$

F或 $\bar{\partial}$-诺伊曼边界条件下，局部上同调上的超迹贡献 es

$$\operatorname{Str}\left(e^{-sD_Z}T_g\big|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_N(C(Z)))}\right) = \prod_{k=1}^n\left(\sum_{m_k\geq 0}\lambda_k^{m_k+1/2}e^{-sm_k}\right) = \prod_{k=1}^n\left(\lambda_k^{1/2}\sum_{m_k\geq 0}(\lambda_k e^{-s})^{m_k}\right)$$

因此

$$\lim_{s\to 0}\operatorname{Str}\left(e^{-sD_Z}T_g\big|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_D(C(Z)))}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^{1/2}}{1-\lambda_k}.$$

现在我们注意到，这两项贡献相同：

$$(-1)^n\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^{-1/2}}{1-\lambda_k^{-1}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^{1/2}}{1-\lambda_k}=(-1)^n\det(g)^{1/2}\frac{1}{\det(I_n-g)}.$$

因此，我们得到复等变 ξ 不变量为

$$\begin{aligned}2\widetilde{\xi}(g,0)&=\operatorname{Str}\left(e^{-sD_Z}T_g\big|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_N(C(Z)))}\right)+\operatorname{Str}\left(e^{-sD_Z}T_g\big|_{\mathcal{H}(\mathcal{P}_D(C(Z)))}\right)\\&=(-1)^n\det(g)^{1/2}\frac{2}{\det(I_n-g)}\\&=\eta(g,0)\end{aligned}$$

由此恢复了 Degeratu 的公式 [Deg01，定理 4.1.1]。再次注意，由于球面上的 $h=0$，$\eta(g,0)=2\xi(g,0)$。$\diamond$

注 4.2。在 [Deg01] 中，作者说明了如何从前述情形推导出 g 以1 为特征值的情形（包括 $g=\mathrm{Id}$ 的情形）；特别要注意的是，情形 *3* 中来自谱的贡献仍因相消而为零。

注 4.3。在 [Deg01] 第 *4.4* 章中，*Degeratu* 给出了扭曲狄拉克算子的等变 η 公式，该算子对应于齐性向量丛 E，她证明该向量丛可提升至 $U(n)$ 的双重覆盖。若它可扩张为锥上的厄米丛，则只需将未扭曲自旋狄拉克算子的公式乘以额外因子 $\chi_E(g)$，即可轻松恢复她的等变指标公式。

4.2. 轨形

轨形的等变 η 不变量情形颇受关注，且 [Deg01] 也研究了商奇点的情形（参见 [Deg03]）。我们的结果似乎可以直接推广到轨形（即使没有锥度量），下面简要列举文献中的若干例子来支持这一观点。

二次曲面 $Z^2-XY=0$ 在 $\mathbb{C}^3$ 中的零点集可嵌入 $\mathbb{CP}^3$，且带有一个孤立圆锥奇点；它具有环面作用，一般情况下有 2 个光滑的孤立不动点，并固定该奇点。自旋狄拉克算子在这个固定的奇点处的等变指标缺陷已在（ [Jay23] 的例 7.30）中计算，且不难看出如何将其推广到相应的 ξ_T 不变量。 [Jay23]，的注 7.32 强调了该代数簇的等变指标公式与 Edidin-Graham [EG98b] 对同一例子给出的公式之间的对应关系，读者可参阅$\widetilde{\ }$相关文献。鉴于定理 A，我们不区分 ξ_T 与 ξ_T 不变量；下文也将略去重整化的细节（其方式类似于上文例 4.1 中的重整化）。

例 4.4 (二次锥**)**。与 [Jay23]，中的例 7.28 一样，我们考虑带有 $\mathbb{T}^2$作用的二次锥$\widehat{M}=\{[W:X:Y:Z]\in\mathbb{CP}^3\mid Z^2=XY\}$

$$(\lambda,\mu)\cdot[W:X:Y:Z]=[W:\lambda^2X:\mu^2Y:\lambda\mu Z],\qquad(\lambda,\mu)\in\mathbb{T}^2.$$

不动点为 $a_1=[0:1:0:0]$, $a_2=[0:0:1:0]$ （光滑点）和 $v=[1:0:0:0]$ （圆锥奇点）。在 a_1 处，切权为 $\chi_1=\mu/\lambda$ 和 $\chi_2=1/\lambda^2$，因此

$$\xi_T^{a_1}=\frac{1}{(1-\mu/\lambda)(1-1/\lambda^2)}$$

对于对应于 λ,μ 一般值的几何自同态 T，其不动点均为孤立点，其中 a_1 处的等变 ξ 不变量是对应于切空间 a_1 处单位球的球面上的光滑锥的指标缺陷。同理，$\xi_T^{a_2}=\frac{1}{(1-\lambda/\mu)(1-1/\mu^2)}$。

在 v 附近，使用坐标 $(x,y,z) = (X/W, Y/W, Z/W)$，作用为 $(x,y,z) \mapsto (\lambda^2 x, \mu^2 y, \lambda\mu z)$，而局部全纯函数由 $x^a y^b$ 和 $z\,x^a y^b$ 生成。因此

$$\begin{aligned}\xi_T^v &= \sum_{a,b\geq 0} \lambda^{2a}\mu^{2b} + \sum_{a,b\geq 0} \lambda^{2a+1}\mu^{2b+1} \\ &= \frac{1}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)} + \frac{\lambda\mu}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)} = \frac{1+\lambda\mu}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)}.\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$直接计算表明，$\xi_T(M) = \xi_T^{a_1} + \xi_T^{a_2} + \xi_T^v = 1$，从而得到 M 的全局等变指标$\widehat{\ }$，即其局部 ξ_T 不变量之和。$\diamond$

例 4.5（二次锥，自旋 ξ 不变量）。在自旋 Dirac 框架中，[Jay23，例 7.30], 同一个环面作用在旋量丛上诱导出特征。在光滑不动点 a_1 和 a_2处，自旋贡献与 Atiyah-Bott 公式一致，此处将其解释为针对自旋狄拉克算子的公式。在奇异顶点 v处，必须使用切锥；在本例中，它是一个以 S^3的 $\mathbb{Z}_2$-商为底的锥。局部旋量场由如下形式的单项式生成

$$\{\, x^a y^b, zx^a y^b : a,b \geq 0 \,\},$$

与 Dolbeault 情形完全相同，但相差一个因子，即由 $(dx\wedge dy/(2z))^{1/2}$ 给出的典范丛平方根的局部平凡化截面，以及庞加莱留数的平方根（见 [Hit74], 的定理 2.2 和 [Jay24] 的第 7.3 节）。对局部上同调取 $\mathbb{T}^2$-作用的超迹，得到

$$\xi_T^v = \frac{(1+\lambda\mu)\sqrt{\lambda\mu}}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)},$$

这与 Dolbeault 计算一致。因此，奇异顶点处的局部 ξ_T 不变量自然地表现为锥的自旋 Lefschetz 贡献。再次对所有三个不动点求和，得到

$$\xi_T^{a_1} + \xi_T^{a_2} + \xi_T^v = \frac{\sqrt{(\mu/\lambda)(1/\lambda^2)}}{(1-\mu/\lambda)(1-1/\lambda^2)} + \frac{\sqrt{(\lambda/\mu)(1/\mu^2)}}{(1-\lambda/\mu)(1-1/\mu^2)} + \frac{(1+\lambda\mu)\sqrt{\lambda\mu}}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)} = 0.$$

$\diamond$

水滴形轨形的等变指标缺陷情形由 [Mei98, §3] 研究，采用的是 Vergne [Ver94] 的上同调等变指标公式。在坐标为 w^k 、带有作用 $z \mapsto e^{i\phi} z$ （其中 $z = w^{-k}$）的 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_k$ 奇异点处，局部等变指标被证明为

$$\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{1-c^l e^{-\frac{i}{k}\phi}}, \quad c = e^{-2\pi/k} \tag{4.6}$$

只有将给定表达式化简为 $\frac{1}{1-e^{i\phi}}$后，幂级数展开才会与局部上同调群上的超迹相匹配，正如 [Jay23, §7.3.2] 所示。这表明，[Ver94] 中的等变指标公式难以通过谱数据实现范畴化。

5. 背景与结论

从历史上看，对 η 不变量和指标缺陷的研究，源于 Hirzebruch 提出的问题：模曲面的尖点端会产生符号缺陷，也就是说，这些尖点端的存在会导致 Hirzebruch 符号定理失效。相关研究包括推导其明确的数论公式；参见 [Hir73] 第3节。特别地，对于商奇点的情形（ $\mathbb{C}^n/G$其中 G 是 p 次单位根组成的群），人们通过奇点消解证明了相应结果。 [Don78] 引入了这些不变量的等变版本，用以描述带边界流形上的等变指标缺陷，这些缺陷对应于此类空间上的群作用。

对于奇异空间，Cheeger 证明，锥形奇点处狄拉克算子的指标缺陷可由链接上的一个 η 不变量描述 Z [Che83] （参见 [Cho85, Cho89]），其中涵盖了许多轨形和代数簇的情形。相应的等变版本由 Zhang 进行了研究 [Zha90]。Baum-Fulton-MacPherson-Quart 的工作 [BFQ79, Bau82,

BFM79, BFM75] （如引言中所述）已借助代数几何工具扩展到其他表述形式，例如 [EG98a, EG98b, MS15]。本文的工作旨在朝着衔接这些描述迈进一步。

5.1. 超对称计数与不同的范畴化

超对称（SUSY）量子场论（QFT）被广泛用于理解量子场论的定性特征。其主要原因在于，人们可以对路径积分及其他与物理相关的可观测量进行显式计算。粗略地说，当存在超对称性时，这类积分的渐近展开中，除首项外的所有高阶项都会相互抵消；这类似于 Duistermaat-Heckman 定理所述的情形：辛空间上动量映射的半经典傅里叶变换中，所有高阶项都消失。众所周知，这两种结果都对应于 Atiyah-Bott 局部化的某些版本，并且是相应等变指标定理的推论。因此，与各种扭曲狄拉克算子的等变指标定理相对应的不动点、边界和奇点处的特征标公式，对应于超对称态计数。有关更全面的概述，请参阅 [Wit81、Wit83]and [PZBea17] 。

此外，物理问题中出现的特征标公式里的这些整数系数，有时会被解释为相关等变瞬子模空间的虚维数（例如参见 [FQWZ20b, Pes12]）。从这个角度看，RR 数的不同范畴化会导向不同类别的对象，它们共享模空间的虚维数，即链接上狄拉克算子的特征空间与局部上同调群。

事实上，在 [FQWZ20a, FQWZ20b], 的研究中，作者以全纯形式和反全纯形式为基础，对光滑不动点处的等变指标进行展开，而不是采用等变 η 不变展开；后者会在抵消发生之前引入额外项。在光滑情形下，这种做法很自然，无须将不动点处的切平面 $\mathbb{C}^n$ 视为球面上的锥；而在奇异情形下，我们的阐述展示了如何调和等变 η 不变方法与基于局部上同调的方法之间的差异。

等变与非等变的 η 不变量和 ξ 不变量，在研究行列式线丛及理解引力反常时也会出现 [Wit85], ，有时还会采用不同的重整化方案（见注 3.1）。在这类情形下，我们的工作解释了当存在复结构时，对这些不变量进行范畴化的对象所具有的对称性。

奇点处（以及边界处）的等变 RR 缺陷具有若干有趣的范畴化方式。具有复结构的空间及其厄米丛的 RR 数，是对该厄米丛整体截面的（超对称）计数，并以与该向量丛相关的特征类的杯积表示。通过 Hirzebruch-RR 定理和 Grothendieck-RR 定理，这一计数被范畴化到上同调层次，并进一步提升到 K 理论层次。

等变 RR 数还可以通过一种不同的方式范畴化为 Dolbeault 复形的子复形，称为全纯 Witten 瞬子复形，该复形最初由 Witten 提出（见[Wit84, MW97], ）。虽然对于某些非 Kähler 空间，$\mathbb{Z}$-分次复形并不成立（见[Wu99]），但局部等变 RR 数仍是局部上同调群上的超迹，因此在不动点附近提供了一个（$\mathbb{Z}_2$-分次）K 理论中指标丛的无限维类比。近期关于微分 K 理论中 eta 形式的研究 [Liu21] 似乎也能以这种方式得到简化。算子 A 的 ξ_T 不变量可自然地由狄拉克算子的特征空间范畴化，而我们的结果表明，只有某些特征空间具有实质贡献。这为在不动点处构造等变指标丛提供了依据。

本文不研究 [Mei98、Ver94] 中的轨形等变指标定理（我们仅在第 4.2 节末尾讨论这一问题）；这类定理的研究方法侧重于将奇异空间上的不动点与其奇异不动点附近光滑局部覆盖上的线性代数公式联系起来。我们强调，即便在光滑情形下，等变指标的局部贡献的范畴化也源于对局部 Lefschetz 数的其他诠释。

5.2. 猜想性推广

这里有一个显而易见的问题：

问题 5.1. 在几乎复情形下，对于具有非孤立不动点的几何自同态 η_T（包括 $T = \mathrm{Id}$，此时它就是 η 不变量），η_T 不变量能否表示为局部上同调群上的重整化超迹？换言之，定理 3.7 能否推广到更一般的 T，包括 $T = \mathrm{Id}$?

我们提出一种启发式论证，表明第一个问题的答案是肯定的，并说明证明中存在的困难。这里的问题在于，η 不变量是通过与狄拉克算子 A在链接上的重整化来研究的，这会以等变 eta 函数 $\eta_T(s)$ 作为中间对象；而第 4 节中的例子以及 [Deg01] 的研究表明，$\eta_T(s)$ 只有在 $s = 0$ 处才会发生抵消。我们看到两种可能的方式来应对这个问题。

(1) 对 η 不变量采用另一种重整化方式，将锥上链接的超对称性信息，或其他适当相关几何对象上的信息纳入其中，因为在这些对象上超对称抵消更为明显。(2) 直接研究算子的特征空间，并直接理解狄拉克算子的正、负特征空间之间的对称性 A 。

定理 A 中的 $\xi_{T,3}(s)$ 对一般的 s 并不消失，这一事实表明，在算子 A的特征截面上取交错迹这一层面，并未发生超对称抵消（按通常意义而言）；尽管 Jay23 第 5.2 节|中的重整化超对称抵消，正是我们看到分块 $\mathcal{H}_3^q$ 不对等变指标缺陷作出贡献的原因。我们认为，定义 η 不变量时所采用、利用链接上的谱信息进行的重整化并不适用于此情形。关于超对称的描述，参见 Jay23] （见引理 3.13）。这表明，对于给定的狄拉克型算子 D，若存在一个特征值为 μ的特征截面 ϕ，那么截面 $D\phi$ 也是 D 的特征值为 μ的特征截面。这种抵消使得$\xi_{T,3}(0)$ 消失，但它只体现在锥上的算子 D 的特征值层面，而非链接上的诱导算子 A；这正是$\xi_{T,3}(s)$ 并非恒等于零的原因。

在 [CV25a, CV25b, CCD25] 中，作者通过伪微分算子研究 η 不变量的非局部化版本，其中，链路上狄拉克算子的负、正特征空间投影算子发挥着关键作用。这与我们的方法一致：我们直观地将谱不对称性理解为正、负特征值数量之差，并在我们的情形中纳入抵消效应。关于非局部化等变 η 不变量的其他研究，请参阅 [Goe12, Goe09] 。

谱流与 η 不变量之间的联系在物理学中也颇受关注（参见 [Nak18]第12至14节）。研究相对指标定理时会出现这些联系，而相对指标定理也被用于发展RR结果（例如，参见 [Mel93, §6.3] ，其中讨论了曲面上的一般除子情形）。

这些结果似乎很容易推广到更一般的奇异度量，例如 [Jay25], 中研究的度量，以及锥上的楔形度量 $C(Z)$；其中 Z 是一个分层伪流形，且需适当选择定义域。事实上， [Jay23] 中关于几乎复情形下自旋-c狄拉克算子的研究，也暗示这些结果可以推广到该情形。

此外，这些对称性应能简化 eta 形式、Bismut-Cheeger $\mathcal{J}$形式以及其他在奇点处表述指标缺陷时出现的对象 [AGR23、Wan11] ，前提是存在复结构；而所有这些都需要借助为纳入此类对称性而发展出的解析技巧。明确的计算表明，这些对象与等变 RR 数的谱论描述有关，类似于 [WZ98] 中针对非孤立不动点集附近给出的描述。我们将在后续工作中进一步研究这一问题。

5.3. η 不变量的代数描述

研究 [Deg01, §5] 关于自旋 Dirac 算子的等变 η 不变量之间对应关系的 c 算子 以及 Molien 级数，使人们能够利用代数数据更轻松地计算 ξ_T 不变量 a.

在 [BFQ79 中，Bau82], 等作者证明，完全交的 Lefschetz-黎曼-罗赫（LRR）数（在奇异上同调中）可以表示为局部环上的正则化超迹；局部环是 P 的局部上同调群的类似物。在正规

代数簇的情形下，如果高阶局部 L^2 上同调消失，那么局部环的希尔伯特空间完备化可以与局部上同调群等同。前引文献中的公式似乎可以推广到如上所述奇异情形下的非等变情形。这将是一个**代数 η 不变量**；将其推广到非正规代数簇，或许有助于更好地理解 BFM79、BFM75] 中黎曼-罗赫定理的指标缺陷。建立在前引文献基础上的复几何中的等变指标理论（例如参见 [EG98a、EG98b、CMSS23]）也可以用这种方式来理解。

在复情形下，由于等变符号由 χ_{+1} 不变量给出（将 Hirzebruch 公式推广到奇异 L^2 情形，参见例如 [Jay23]），其中利用霍奇分解中不同局部上同调群上的超迹（对应于取值 p ）来表示等变符号。这些超迹对应于等变 η 不变量；并且可以推测，在（几乎）复情形下，它们也对应于（非等变） η 不变量。

参考文献

[AB65] M F. Atiyah 和 R. Bott. 带边界流形的指标定理。载于《Atiyah-Singer 指数定理研讨会》附录 I，《数学年刊研究丛书》，第 57 卷，第 337–351 页，1965 年。[AB67] M. F. Atiyah 和 R. Bott. 椭圆复形的 Lefschetz 不动点公式。I.《数学年刊》（第 2 辑），86：374–407，1967 年。[AB68] M. F. Atiyah 和 R. Bott. 椭圆复形的 Lefschetz 不动点公式。II. 应用。《数学年刊》（第 2 辑），88：451–491，1968 年。[AGR16] Pierre Albin 和 Jesse Gell-Redman. 不完备边空间上狄拉克算子的指标。SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 12：论文编号 089，45 页，2016 年。[AGR23] Pierre Albin 和 Jesse Gell-Redman. 伪流形上狄拉克型算子族的指标公式。J. Differ. Geom., 125(2)：207–343，2023 年。[APS75] M. F. Atiyah、V. K. Patodi 和 I. M. Singer. 谱不对称性与黎曼几何。I. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 77：43–69，1975 年。[Bau82] Paul Baum. 奇异簇的不动点公式。载于《代数拓扑当前趋势》第 2 部分（伦敦，安大略，1981），CMS Conf. Proc. 第 2 卷，第 3–22 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1982 年。[Bei13] Francesco Bei. 带锥形奇点流形上的 L^2-Atiyah-Bott-Lefschetz 定理：一种热核方法。Ann. Global Anal. Geom., 44(4)：565–605，2013 年。[BFM75] Paul Baum、William Fulton 和 Robert MacPherson. 奇异簇的黎曼-罗赫定理。Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (45)：101–145，1975 年。[BFM79] Paul Baum、William Fulton 和 Robert MacPherson. 奇异簇的黎曼-罗赫定理与拓扑 K-理论。Acta Math., 143(3-4)：155–192，1979 年。[BFQ79] Paul Baum、William Fulton 和 George Quart. 奇异簇的 Lefschetz-黎曼-罗赫定理。Acta Math., 143(3-4)：193–211，1979 年。[CCD25] Matteo Capoferri、Beatrice Costeri 和 Claudio Dappiaggi. 通过伪微分投影研究谱不对称性：无质量狄拉克算子。arXiv:2504.02336，2025 年。[CDHH25] Mirjam Cvetič、Ron Donagi、Jonathan J. Heckman 和 Max Hübner. 额外维度的 η 不变量与反常理论。arXiv:2512.17906，2025 年。[Che83] Jeff Cheeger. 奇异黎曼空间的谱几何。J. Differential Geom., 18(4)：575–657 (1984)，1983 年。[Cho85] Arthur Weichung Chou. 带锥形奇点且具有正标量曲率的空间上的狄拉克算子。Transactions of the American Mathematical Society, 289(1)：1–40, 1985 年。[Cho89] Arthur W Chou. 伪流形上狄拉克算子自伴性的判据。Proceedings of the American Mathematical Society, 106(4)：1107–1116，1989 年。[CMSS23] Sylvain E Cappell、Laurenţiu Maxim、Jörg Schürmann 和 Julius L Shaneson. 等变托里克几何与欧拉-麦克劳林公式。arXiv 预印本 arXiv:2303.16785, 2023 年。[CV25a] Matteo Capoferri 和 Dmitri Vassiliev. 超越霍奇定理：旋度与非对称伪微分投影。arXiv:2309.02015，2025 年。[CV25b] Matteo Capoferri 和 Dmitri Vassiliev. 通往谱不对称性的微局部途径：旋度与 η 不变量。arXiv:2502.18307，2025 年。[Deg01] Anda Degeratu. 幺模群的 η 不变量与 Molien 级数。ProQuest LLC，密歇根州安阿伯，2001 年。博士论文——麻省理工学院。[Deg03] Anda Degeratu. 孤立奇点的几何 McKay 对应。arXiv 预印本 math/0302068，2003 年。[Don78] Harold Donnelly. G-空间的 η 不变量。Indiana Univ. Math. J., 27(6)：889–918，1978 年。[EG98a] Dan Edidin 和 William Graham. 等变交叉理论。Invent. Math., 131 634, 1998 3 595( ): – .[EG98b] Dan Edidin 和 William Graham. 等变交叉理论中的局部化与 Bott 留数公式。Amer. J. Math., 120(3)：619–636，1998 年。

[FQWZ20a] Guido Festuccia、Jian Qiu、Jacob Winding 和 Maxim Zabzine. 横向椭圆复形与上同调场论。J. Geom. Phys., 156：103786，47 页，2020 年。[FQWZ20b] Guido Festuccia、Jian Qiu、Jacob Winding 和 Maxim Zabzine. 带翻转的扭曲（Pestun 化的艺术）。Comm. Math. Phys., 377(1)：341–385，2020 年。[Goe 09] Sebastian Goette. 齐性空间的 η 不变量。Pure and Applied Mathematics Quarterly, 5：915–946，2009 年。[Goe12] Sebastian Goette. η 不变量的计算与应用。载于《整体微分几何》，Springer Proc. Math. 第 17 卷，第 401–433 页。Springer，海德堡，2012 年。[Hir73] Friedrich Hirzebruch. 希尔伯特模曲面。L'enseignement mathematique, 19：183–282，1973 年。[Hit74] Nigel Hitchin. 调和旋量。Advances in Math., 14：1–55，1974 年。[Jay23] Gayana Jayasinghe. 分层伪流形上的 Lefschetz 理论与 Morse 理论：一种解析方法。arXiv:2309.15845，2023 年。[Jay24] Gayana Jayasinghe. 带凯勒楔形度量的分层伪流形上的全纯 Witten 瞬子复形。arXiv:2404.13481，2024 年。[Jay25] Gayana Jayasinghe. 奇异几何上的超对称谐振子。arXiv:2504 14559，2025 . .[Liu21] Bo Liu. 等变 η 形式与等变微分 K-理论。Science China Mathematics, 64(10)：2159–2206，2021 年。[Mei98] Eckhard Meinrenken. 辛手术与 Spin

^{c} 134 2 240 277, -狄拉克算子。1998

Adv. Math., ( ): – .[Mel93] Richard B. Melrose. Atiyah-Patodi-Singer 指数定理，数学研究札记第 4 卷。A K Peters, Ltd.，韦尔斯利，马萨诸塞州，1993 年。[Moo99] Edith A Mooers. 带锥形奇点流形上的热核渐近展开。Journal d'Analyse Mathematique, 78(1)：1–36，1999 年。[MS15] Laurenţiu G. Maxim 和 Jörg Schürmann. 奇异托里克簇的特征类。Comm. Pure Appl. Math., 68(12)：2177–2236，2015 年。[MW97] Varghese Mathai 和 Siye Wu. 等变全纯 Morse 不等式。I. 热核证明。J. Differential Geom., 46(1)：78–98，1997 年。[Nak18] Mikio Nakahara. 几何、拓扑与物理学。CRC 出版社，2018 年。[Pes12] Vasily Pestun. 四维球面上的规范理论局部化与超对称 Wilson 环。Comm. Math. Phys., 313(1)：71–129，2012 年。[PZBea17] Vasily Pestun、Maxim Zabzine、Francesco Benini 等. 量子场论中的局域化技术。J. Phys. A, 50(44)：440301，7 页，2017 年。[Ver94] Michèle Vergne. 几何量子化与重数。C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 319(4)：327–332，1994 年。[Ver15] Boris Vertman. 带代数边界条件的边缘拉普拉斯算子的热迹渐近展开。J. Anal. Math., 125：285–318，2015 年。[Wan11] Yong Wang. 关于等变 η 形式的注记。arXiv:1108.5013，2011 年。[Wit81] Edward Witten. 超对称性的动力学破缺。Nuclear Physics B, 188(3)：513–554，1981 年。[Wit83] Edward Witten. Kaluza-Klein 理论中的费米子量子数。载于《现代 Kaluza-Klein 理论》等，第 438–511 页，1983 年。[Wit84] Edward Witten. 全纯 Morse 不等式。载于《代数拓扑与微分拓扑——整体微分几何》，Teubner-Texte Math. 第 70 卷，第 318–333 页。Teubner，莱比锡，1984 年。[Wit85] Edward Witten. 整体引力反常。Communications in Mathematical Physics, 100(2)：197–229，1985 年。[Wu99] Siye Wu. 等变全纯 Morse 不等式。II. 环面与非阿贝尔群作用。J. Differential Geom., 51(3)：401–429，1999 年。[WZ98] Siye Wu 和 Weiping Zhang. 等变全纯 Morse 不等式。III. 非孤立不动点。Geom. Funct. Anal., 8(1)：149–178，1998 年。[Zha90] Weiping Zhang. 关于等变 η 不变量的注记。Proc. Amer. Math. Soc., 108 1129, 1990 4 1121( ): – . 电子邮箱：mgsjayasinghe@gmail.com

电子邮件地址：alext3@illinois.edu

电子邮件地址：xinran4@illinois.edu