arXiv:2603.26172v1 [math.SP] 27 Mar 2026

界　　量子图拉普拉斯算子的特征值比

EVANS M. HARRELL II、JAMES B. KENNEDY 和 GABRIEL J. RAMOS

Abstract. 我们研究紧度量图上拉普拉斯算子的特征值比。我们的目标有三：首先，我们证明，对于所有叶节点均满足狄利克雷条件的紧树，前两个特征值的比值满足一个尖锐的 Ashbaugh–Benguria 型界；具体而言，当图为区间或等边星形图时，该比值达到最大值。这改进了 Nicaise 提出的一个 Payne–P´olya–Weinberger 型结果 [《Bull. Sci. Math.》，II. S´er.111 (1987), 401–413]。其次，我们将该界推广为一组不等式，用于约束这类紧狄利克雷树中任意一对特征值的比值，并且这些不等式在绝对常数范围内符合韦尔渐近。第三，我们证明，对于非树图（其叶节点处也允许采用任意混合的诺伊曼条件和狄利克雷条件），可以得到特征值比的界；这些界除特征值指标外，仅取决于独立环的数量和诺伊曼叶节点的数量。这补充了此前关于一般量子图上 Ashbaugh–Benguria 界类比的已知反例：我们表明，该界失效的唯一原因是环和诺伊曼叶节点，并明确量化了其失效程度。

1. Introduction

我们的目标是对紧致度量图上拉普拉斯算子的特征值比估计给出一份（几乎）完整的处理。

30多年前，Ashbaugh 和 Benguria [5, 6] 证明了，有界欧几里得区域 $\Omega \subset \mathrm{R}^d$ 上的狄利克雷拉普拉斯算子的前两个特征值 $0 < \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega)$满足如下尖锐的尺度不变界：

$$\frac{\lambda_2(\Omega)}{\lambda_1(\Omega)} \le \frac{\lambda_2(B)}{\lambda_1(B)} = \frac{j^2_{\frac{d}{2},1}}{j^2_{\frac{d}{2}-1,1}},$$

其中，B 是 R^d 中的任意球，从而证明了 Payne、P´olya 和 Weinberger（PPW）[23], 的一个古老猜想；他们此前建立了较弱的不等式

$$\frac{\lambda_2(\Omega)}{\lambda_1(\Omega)} \le 1 + \frac{4}{d}.$$

这也是研究特征值的普适不等式 的起点之一，也就是说，这类不等式的界仅取决于一个维数常数。关于这一主题的优秀综述至今仍相当新近，见 [2] 。

Date：2026年3月30日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 34B45（主要）；35J05、35P15、81Q35（次要）。*Key words and phrases.* 特征值比、普适不等式、量子图。本工作得到葡萄牙科学技术基金会（FCT, https://ror.org/00snfqn58）的支持，资助项目为“谱最优划分：几何与数值分析”，项目编号2023.13921.PEX, https://doi.org/10.54499/2023.13921.PEX（JBK）；同时通过研究中心 CIDMA（项目编号 UID/04106/2025, https://doi.org/10.54499/UID/04106/2025，以及 UID/PRR/04106/2025, https://doi.org/10.54499/UID/PRR/04106/2025（JBK））和 GFM（项目编号 UID/00208/2025, https://doi.org/10.54499/UID/00208/2025（全体作者），以及 UID/PRR/00208/2025, https://doi.org/10.54499/UID/PRR/00208/2025（JBK））获得资助，资助来源为 FCT研发单位多年期资助计划。

对于量子图，情况则更加复杂。设 Γ 为一张紧度量图，$0 < \lambda_1(\Gamma) \leq \lambda_2(\Gamma)$为拉普拉斯算子的前两个特征值；该算子在顶点处满足狄利克雷条件与标准条件（或称 Neumann–Kirchhoff 条件）的某种组合（详情见第 2 节；为简便起见，我们将统一称之为“基尔霍夫条件”）。暂且假设至少有一个狄利克雷顶点，以确保 $\lambda_1(\Gamma) \neq 0$)。

Nicaise 在其开创性论文 [22], 中，已将 PPW 论证推广到狄利克雷树的情形；也就是说，图 Γ 没有环，且所有一度顶点都满足狄利克雷条件（“狄利克雷叶节点”），而所有内部顶点都满足基尔霍夫条件的情形。在[22, 定˙理¨ 4.3], 中，Nicaise 实际上证明了 PPW 对任意一对相邻特征值都成立，并对前两个特征值给出了一个略强的不等式：

定理 1.1 (Nicaise)。设 Γ 为一棵紧狄利克雷树，且 $k \geq 1$，那么

$$\frac{\lambda_{k+1}(\Gamma)}{\lambda_k(\Gamma)} \leq 5.$$

若 $k = 1$，则常数可改进为 $2 + \sqrt{5} \approx 4.236$。

然而，事情并非到此为止。文献 [15], （另见 [14, 第 6], 节）证明，如果允许 Γ 含有环（和/或一度顶点满足诺伊曼条件，即“诺伊曼叶节点”），那么定理 1.1 中的上界不仅不再成立，而且不存在 任何普适上界。图1.1展示了一列典型的反例星形图 Γ 。

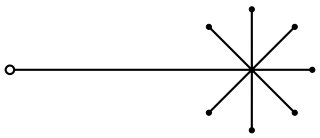

FIGURE 1.1. 一棵星形图 Γ，其长边末端只有一个狄利克雷条件。（白色圆圈表示狄利克雷条件，黑色圆圈表示基尔霍夫条件。）

一个简单的试验函数论证表明，通过向星形图 Γ添加更多短边，我们可以使 $\lambda_1(\Gamma)$ 降至零，同时 $\lambda_2(\Gamma)$ 仍远离零（其特征函数的零点必须留在长边上，这意味着 λ_2 不能低于与长边等长的区间的第一狄利克雷特征值）。注意，如果将短边换成小环，同样的论证也适用，由此得到一张含有大量独立环（第一贝蒂数） β的图（“一束气球图”）；这是 [15]中最初发现的例子。

这仍未展现全貌，因为它引出了几个自然的问题：Nicaise 的 PPW 型界（定理 1.1）何时确实成立；定理 1.1 是否真正达到最优——要注意，Nicaise 的结果实际上比 Ashbaugh–Benguria 定理早了好几年；对于更一般的特征值比，可以得出什么结论；以及在非狄利克雷非树图上，不等式何时会失效、失效程度又有多严重。顺便指出，最后这个问题可能相当微妙：在 [14]中，作者找到了一族这样的非树图，即“仙人掌柱图”，对它们仍然有如下界

$$\frac{\lambda_2(\Gamma)}{\lambda_1(\Gamma)} \leq 2 + \sqrt{5}$$

（以及其他“装饰树”，对于它们，较弱的 PPW界仍然成立 $\lambda_2(\Gamma)\ \lambda_1(\Gamma) \leq 5$）。

因此，我们的目标有三项：

（1）在定理 1.2 中，我们得到如下形式的最优界

$$\frac{\lambda_2(\Gamma)}{\lambda_1(\Gamma)} \le 4 \tag{1.1}$$

对所有紧狄利克雷树 Γ，从非尖锐的 PPW 型界转而得到尖锐的 Ashbaugh–Benguria 界，其中常数 4 是任意有限区间的特征值比（即球在一维情形下的对应结果）。我们还刻画了等号成立的图，结果发现，这类图远不止区间这一种；

(2) 更一般地，我们得到了紧狄利克雷树 Γ以及任意 $k > j$的特征值比界 $\lambda_{k(\Gamma)}\ \lambda_{j(\Gamma)}$。具体而言，对于所有紧狄利克雷树，我们证明了普适不等式$\lambda_{k(\Gamma)}\ \lambda_{j(\Gamma)} \le 4 \cdot \frac{k^2}{j^2}$，对所有 $k > j \ge 1$ 均成立（见定理1.4 和推论 1.5）；

(3) 我们研究一般紧图的比值 $\lambda_{k(\Gamma)}\ \lambda_{j(\Gamma)}$，$k > j$的界问题。这类图可能有若干个 $N \ge 0$ 诺伊曼叶节点和若干个 $\beta \ge 0$ 独立环。我们证明，至少对于 $k > j \ge N + \beta + 1$，该比值可以由一个常数 C(k、j、N、β) 从上方界定，且该常数与 Γ 无关（特别是，事情可能“出问题”的唯一 方式就是出现诺伊曼叶节点和/或环）。我们还研究了哪些图类中可能存在此类特征值比的最大化者和最小化者（分别见定理 1.8 和 1.10）。

1.1. **Ashbaugh–Benguria 型上界**。 我们首先探讨目标列表中的第 1 项。由于区间是一维的球，紧狄利克雷树上的 Ashbaugh–Benguria 上界（或 PPW 猜想）的自然对应形式如下。正如前文所述，能够取等号成立的图类要大得多。

定理 1.2。 设 Γ为一棵紧狄利克雷树。那么

$$\frac{\lambda_2(\Gamma)}{\lambda_1(\Gamma)} \le 4,$$

当且仅当 Γ 是一个区间或等边星形图（边数任意）时，等号成立

本文所有定理中均约定省略度为二的顶点，不过在某些论证中，为方便起见会引入此类“虚拟顶点”。尽管如此，我们仍指出，两条边组成的等边星形图可化为带有一个虚拟顶点的区间，因此也可纳入此处讨论。

我们将在第 3 节中证明这一结论，所用方法与 Ashbaugh 和 Benguria 采用的对称化方法完全不同。事实上，定理 1.2 可直接由下述不等式推出；该不等式本身也具有一定的独立意义，它对在单个顶点处将狄利克雷条件改为诺伊曼条件的影响作出了界定。

下文中，对于一棵树 Γ，我们用 $\tau_1(\Gamma)$ 表示拉普拉斯算子在 Γ上的第一特征值，其中一个叶节点满足诺伊曼条件，其余所有叶节点满足狄利克雷条件，其他所有顶点满足基尔霍夫条件。也就是说，从 λ_1 到 τ_1 时，我们在一个未在记号中指明的任意叶节点处，将一个狄利克雷条件改为了诺伊曼条件。

定理 1.3. 设 Γ 是一棵紧树。那么，采用上述记号，有

$$\frac{\lambda_1(\Gamma)}{\tau_1(\Gamma)} \le 4, \tag{1.2}$$

等号成立当且仅当 Γ 是一个区间。

定理 1.3 的证明也见第 3 节（尽管证明中的一些技术部分见附录 A），它采用了一种形状优化论证，与有时用于

区域和流形上特征值形状优化的论证相似。我们将考察 Γ 的边长扰动对 (1.2) 中特征值比的影响，更确切地说，我们将证明：对于除区间以外的任意固定图拓扑（或“底层离散图”），只要所有边长均为正，泛函 $\lambda_1(\cdot)\,\tau_1(\cdot)$ 就不存在最大值临界点。另一方面，通过紧性论证很容易证明：如果允许边长为零，那么在所有具有相同底层离散图的量子图中，该比值必定能取到最大值和最小值。因此，最大值唯一可能出现在退化情形，这使我们能够通过对图的边数进行归纳，得出所需的界。

据我们所知，这种方法在量子图领域尚属新颖，尽管在固定图拓扑下通过扰动边长来最大化或最小化量子图特征值的原则早已确立；这一原则最初在 [8] 中针对基尔霍夫条件下拉普拉斯算子的第一个非平凡特征值这一基本情形提出，并得到了深入研究。

1.2. 狄利克雷树的一般特征值比。关于我们目标列表中的第 2 项，主要结果如下。

定理 1.4。设 Γ 是任意紧狄利克雷树。那么，对于任意 $k \geq 1$,

$$\frac{\lambda_{2k}(\Gamma)}{\lambda_k(\Gamma)} \leq 4. \tag{1.3}$$

不等式 (1.3) 是锐利的；对于任意给定的 $k \geq 1$，当 Γ 是具有 $2k$ 条边的等边星形图（或当 Γ 是一个区间）时，等号成立，另见 [4, 第 15 节未解决问题 (iii)]。该不等式还可以通过插值推广到任意一对特征值；此外，对于狄利克雷树，它还推出了关于特征值比的许多结果的相应版本，而这些结果在区域上的类似命题仍是猜想。

推论 1.5。设 Γ 为任意紧狄利克雷树。那么对于任意 $k > j \geq 1$，我们有

$$\frac{\lambda_k(\Gamma)}{\lambda_j(\Gamma)} \leq 4^{\lceil \log_2 \frac{k}{j} \rceil} \leq 4 \cdot \frac{k^2}{j^2}. \tag{1.4}$$

定理 1.4 和推论 1.5 将在第 4 节证明。

注 1.6。 (1) 我们注意到，通过迭代 Nicaise 的结果（定理 1.1），我们已经可以推出，对于任意 $k > j$, 存在一个绝对常数 $C(k,\ j) > 0$，使得

$$\frac{\lambda_k(\Gamma)}{\lambda_j(\Gamma)} \leq C(k, j); \tag{1.5}$$

也就是说，我们可以取 $C(k,\ j) := 5^{k-j}$。然而，这个界随 $k - j$ 指数增长，而在 (1.4) 中，除去一个常数因子，该界符合韦尔渐近 $\lambda_k(\Gamma) \sim \frac{\pi^2 k^2}{L^2}$，其中 $L = |\Gamma|$ 是 Γ 的总长度。——

（2）另一方面，目前尚不清楚（1.4）中的常数 4 是否为最优常数，我们将其留作一个未解决问题。定理 1.2 表明，对于特定的二元组 $k = 2, j = 1$，可以用 1 替代 4。另一方面，如果 Γ 是一条具有 m 条边的等边星形图，那么 $\lambda_m(\Gamma) = \frac{\pi^2 m^2}{|\Gamma|^2}$， $\lambda_{m+1}(\Gamma) = \frac{9\pi^2 m^2}{4|\Gamma|^2}$。（事实上，若将该图归一化，使每条边的长度为 $\frac{|\Gamma|}{m} = \pi$，则第一特征函数在每条边 $e \sim [0, \pi]$ 上均具有 $\psi_1(x) = \cos\frac{x}{2}$ 的形式，接下来的 m 个特征函数在每条边上均具有 $\psi(x) = \pm \sin x$ 或 0 的形式，而第（$m+1$）个特征函数在标量倍数意义下唯一，并且在每条边上均为 $\psi_{m+1}(x) = \cos(\frac{3x}{2})$。）由此可得

$$\frac{\lambda_{m+1}(\Gamma)}{\lambda_m(\Gamma)} = \frac{9}{4} = \left(\frac{9m^2}{4(m+1)^2}\right) \cdot \frac{(m+1)^2}{m^2}.$$

由于 m 可以任意大，因而不等式 $\lambda_k(\Gamma)\,\lambda_j(\Gamma) \le C\cdot \frac{k^2}{j^2}$ 中独立于 k、j 和 Γ 的最佳可能因子 C—至少为 $9\,4$。特别地，“最坏情况”（最大值）对于任何由韦尔渐近得到的固定图而言，都大于其渐近值，即 $j^2\lambda_k(\Gamma)\,k^2\lambda_j(\Gamma) \to 1$ 当 $k,\ j\to\infty$ 时，其中 Γ 固定。

启发式论证表明，4 可能不是最优值：在一条 m等边星形图上，比值 $\frac{j^2\lambda_k}{k^2\lambda_j}$ 似乎恰好在 $k=\overline{m}+1,\, j=m$ 时达到最大值；我们还注意到，这些等边星形图在若干相关方面都是极值的（包括 $k=2, j=1$ 的情形；此外，在所有长度固定且边数固定的图中，它们也是所有标准顶点条件下拉普拉斯算子基本谱隙的最大化者 [19, 定理 4.2]）。因此，似乎很有可能这些图在此情形下也能成为最大化者（当 $m\to\infty$ 时取极限），这意味着 (1.4) 中正确的因子应为 $9\,4$。

(3) 最后，我们指出，定理 1.4 立即推出了狄利克雷树版本的若干关于区域上特征值比的猜想（见 [2, 第 8.6] 节或 [3, 第 4]节），特别是对于任意 $m\ge 1$,

$$\frac{\lambda_{m+1}(\Gamma)}{\lambda_m(\Gamma)} \le \max_{\Gamma}\frac{\lambda_2(\Gamma)}{\lambda_1(\Gamma)} = 4,$$

区间对应的值。这也优于 Nicaise 此前已知的最佳结果；参见定理 1.1。此外，这是一个与 m 无关且尽可能好的绝对估计，因为它对区间和 $m=1$ 是尖锐的。

无论如何，即使 (1.4) 中的常数最终并非尖锐，我们仍可看出，至少对于狄利克雷树，特征值满足一组非常强的界，这些界远强于区域上的已知结果。不过，关键界 (1.3) 在区域上确实有某种类似形式，即针对其特征函数分别具有 $2k$ 个和 k 个节点域的特征值之比；一般而言，这些特征函数并不会分别具有 λ_{2k} 个和 λ_k 个节点域。我们的证明将利用这样一个性质：对 Γ 的边长作任意小的扰动（在这种扰动下，特征值是稳定的）之后，对于所有 $j\ge 1$，Γ 的第 j 个特征函数恰有 j 个节点域（参见 [7, 9]）；此外还将用到定理 1.2 的 Ashbaugh–Benguria 界。

注 1.7. 在某些情况下，狄利克雷树是区域上狄利克雷拉普拉斯算子的自然类比。在此背景下，我们注意到，[10, 定理 4.7] 包含以下界作为一个特例：对于任意总长度为 $L>0$ 的紧狄利克雷树 Γ，以及任意 $k\ge 1$,

$$\lambda_k(\Gamma) \ge \frac{\pi^2k^2}{L^2}. \tag{1.6}$$

这是波利亚猜想在狄利克雷树情形下的一个版本：对于任意狄利克雷树 Γ 和任意 $k\ge 1$，韦尔渐近的主项 $\frac{\pi^2k^2}{L^2}$ 始终为 $\lambda_k(\Gamma)$ 给出一个下界—可与弗里德兰德界 $\frac{\pi^2k^2}{4L^2}$ 比较；该界针对满足基尔霍夫条件 [16], 的拉普拉斯算子的第 $(k+1)$ 个特征值，但同样适用于至少存在一个狄利克雷条件时的第 k 个特征值。

事实上，[10, 定理 4.7] 是一个更一般的结果，其中的特例不等式 (1.6) 此前未被注意到。我们还注意到，等号成立情形尚未得到研究；本文也不打算探讨这一问题。不过，我们预期，对于给定的图 Γ 和指标 k，等号成立当且仅当 Γ 的每条边的长度都是 $\frac{L}{k}$ 的整数倍。（当然，“若”方向显然成立，而“仅若”方向在 $k=1,2$ 的情形下也不难证明。）

公式 (1.6) 除了与韦尔渐近有关之外，还有另一层重要意义：[10, 定理 4.7], 中给出的混合狄利克雷与基尔霍夫条件下更精确的界，其中

(1.6) 是一个特例，其表述为

$$\lambda_k(\Gamma) \geq \left(k - \frac{N+\beta}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2}$$

对于 $k \geq 2$ （如果至少有一个狄利克雷顶点，则为 $k \geq 1$ ），其中与前文一样， N 是诺伊曼叶节点的数量， β 是独立环的数量（对于 (1.6)，只需取 $N = \beta = 0$）。与特征值比的情形一样，值得注意的是，只有 这两个量会导致韦尔渐近所给出的“基准”下界出现“偏离”。探究狄利克雷树是否在其他方面也像此处一样，是欧几里得区域上狄利克雷拉普拉斯算子的自然类比，将会很有意义。

1.3. 一般图上的界与最大化者的存在性。现在我们转向条目 3，并假设 Γ 可以包含环，且其叶节点（如果有）可以采用狄利克雷条件与基尔霍夫条件的任意组合。如上所述，已知对于与图无关的常数 $C(k,\ j)$ ，不可能存在形如 (1.1) 的界，因而也不存在形如 (1.5) 的界。不过，我们可以利用定理 4 中的一个上界。该上界最初由 Ariturk 得到，即

$$\lambda_k(\Gamma) \leq \frac{\pi^2(k - 2 + \beta + D + \frac{N+\beta}{2})^2}{L^2}$$

对于任意 $k \geq 1$，其中如前所述， N 是诺伊曼叶节点的数量， β 是独立环的数量， D 是狄利克雷叶节点的数量；再结合 Nicaise 的法贝尔–克拉恩型下界 [22, Th´eor`eme 3.1], ，该下界表明任何非零特征值都至少为 $\frac{\pi^2}{4L^2}$，即可得到

$$\frac{\lambda_k(\Gamma)}{\lambda_j(\Gamma)} \leq 4\left(k - 2 + \beta + D + \frac{N+\beta}{2}\right)^2 =: C(k, j, N, D, \beta) \tag{1.7}$$

对于任意 $k > j \geq 1$。当然，这个界一般可能非常粗略；其中一个原因是，通过从下方估计 λ_j 为 λ_1 ，我们忽略了对 j 的依赖。但关键在于，对于任意一对指标 $(k,\ j)$，都存在一个至多依赖于这对指标以及 N、 D 和 β 的上界。然而，作为推论 1.5（或者实际上是 (1.5)）以及简单的手术原理（即改变顶点条件时特征值满足的交错不等式，见 [11, Theorem 3.4]）的结果，我们可以轻松消除常数对 D 的依赖（并通常改善其对 j 的依赖），从而得到如下结论：

定理 1.8. 设 Γ 是一个紧图，配备了任意组合的诺伊曼、基尔霍夫和狄利克雷条件，并设 $k > j \geq N + \beta + 1$。那么

$$\frac{\lambda_k(\Gamma)}{\lambda_j(\Gamma)} \leq 4 \cdot \frac{k^2}{(j - (N+\beta))^2}$$

这一结果与推论 1.5 一起，基本上完整地回答了这样一个一般性问题：是什么导致量子图反例违反 Ashbaugh–Benguria（或 PPW）类型的特征值比界。尽管如此，对于所有满足 $\lambda_j(\Gamma) \neq 0$ 的 $j \leq N + \beta$，定理 1.8 也应成立（但上界需调整为 $C(k,\ j,\ N,\ \beta)$），不过这需要采用完全不同的证明方法，因此我们在此不再进一步探讨这个问题。

本着类似的思路，我们考察在给定的量子图类中，特征值比在什么情况下能够达到最小值和最大值。首先注意到，即使在狄利克雷树中，最小化问题也很简单，因此除此之外，我们将只讨论最大化：

命题 1.9。固定 $k > j \geq 1$。那么

$$\inf\left\{\frac{\lambda_k(\Gamma)}{\lambda_j(\Gamma)} : \Gamma \text{ compact Dirichlet tree}\right\} = 1.$$

该下确界总能达到：对于 $j \geq 2$，在等边 k-星形图上达到；对于 $j = 1$，则仅在内部（非叶节点）顶点处具有狄利克雷条件的图上达到，因此这些图实际上是不连通的。特别地，任何在中心顶点处具有狄利克雷条件的等边 k-星形图都能达到该下确界。

显然，如果我们扩大允许考虑的图的类别，将包含有环图和/或带诺伊曼叶节点的图，那么同样的结论自然成立。

否则，如果我们对图的复杂度（以顶点数表示）设定上界，那么可以利用特征值关于边长扰动的连续性（如 [13], 所示；更多详情见第 2.3 节），从而得到极小值与极大值的存在性。

定理 1.10. 固定 $m \geq 2$，并考虑由边数至多为 m、且各叶节点处可采用任意狄利克雷条件与诺伊曼条件组合的紧致连通量子图构成的集合。那么，对于任意一对 $1 \leq j < k$（若 $j = 1$，我们还假设至少有一个狄利克雷叶节点），都存在一张使比值 $\frac{\lambda_k}{\lambda_j}$ 最小的图，以及另一张使该比值最大的图，不过，取极小值或极大值的图可能在非叶节点处具有狄利克雷条件。

假设存在至少一个狄利克雷叶节点，是为了在 $j = 1$ 时控制 λ_1 的下界。无论如何，唯一性并无保证。（事实上，只要 $m > k$，任意 $1 < j < k$ 等边 n星形图 $k \leq n \leq m - 1$都可以作为比值 $\frac{\lambda_k}{\lambda_j}$的极小化者，参见命题 1.9。）请注意，仅从上界限制顶点 的数量是不够的；与边的数量不同，这一点可由 [15, 例 1.2]之后备注（2）中的“一束气球图”例子说明。

推论 1.11。固定 $D \geq 0$、$N \geq 0$ 和 $\beta \geq 0$，并考虑由紧致连通量子图构成的集合，其中狄利克雷叶节点不超过 D 个，诺伊曼叶节点不超过 N 个，独立环不超过 β 个。那么定理 *1.10* 的结论原样成立。

特别是，如果我们愿意，可以只考虑叶节点处满足狄利克雷条件的图，或者（若 $j \geq 2$）只考虑叶节点处满足诺伊曼条件的图。主要问题在于，定理 1.10 中对边数的限制，或者推论 1.11 中的三项限制，能否弱化为仅对 N 和 β 的限制，而不依赖于狄利克雷叶节点的数量。不过，要证明这一点很可能需要一种全新的方法，因此本文不作尝试。

我们将证 明第 1.8 定理、命题 1.9、定理 1.10 和推论 1.11，证明见第 5.

最后，我们汇总并进一步明确贯穿全文提及的未解决问题，以此结束引言。

未解决问题 1.12。(1) 研究狄利克雷树上比值 $\frac{\lambda_k}{\lambda_1}$ 的最大化问题。

特别是，作为 [18, 未解决问题 14], 的一维类比，我们可以预期 $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ 在区间上取得最大值。（见注 1.6(3)。）数值证据表明，即使对一般的 $k \geq 4$，$\frac{\lambda_k}{\lambda_1}$ 也可能在区间上达到最大值。

(2) 确定界 $\frac{\lambda_k(\Gamma)}{\lambda_j(\Gamma)} \leq C \cdot \frac{k^2}{j^2}$ 中对所有狄利克雷树 Γ 及所有 ~~k, j~~ ≥ 1成立的最优常数 $\frac{9}{4} \leq C \leq 4$。它是否为 $\frac{9}{4}$，对应于边数趋于 ∞时等边星形图的极限？（见注 1.6(2)。）

(3) 刻画 P´olya 型界 (1.6) $\lambda_k(\Gamma) \geq \frac{\pi^2 k^2}{L^2}$ 中等号成立的情形，其中对所有 $k \geq 1$ 以及总长度为 L 的狄利克雷树 Γ 均成立。是否当且仅当 Γ 的所有边的长度都是 $\frac{L}{k}$ 的整数倍时，等号才成立？

(4) 对任意紧致量子图 Γ 及任意一对 $k \geq j$，求 $\lambda_k(\Gamma)\ \lambda_j(\Gamma)$ 的上界，该上界应仅取决于诺伊曼叶节点的数量 N 和独立环的数量 β（参见定理 1.8）。(5) 研究对于任意给定的 $N \geq 0$ 和 $\beta \geq 0$，在所有诺伊曼叶节点数不超过 N 且独立环数为 β 的紧致图中，对于任意 $k \geq j \geq 1$，是否存在使 $\frac{\lambda_k}{\lambda_j}$ 最大的图（与狄利克雷叶节点数无关）；参见推论 1.11。

—

2. Notation and preliminaries

2.1. 度量图。 下文中，我们只考虑紧致度量图，即有限边集 $\mathcal{E}$上的图$\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，其基数为 $m := |\mathcal{E}|$（并且有限顶点集 $\mathcal{V}$ 的基数为$n := |\mathcal{V}|$），其中每条边 $e \in \mathcal{E}$ 都可以视为一个有限区间 $e \simeq [0, \ell_e]$，并且与两个顶点 $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$相接，这两个顶点对应于该区间的端点。请注意，通常我们允许自环（即满足上述记号中 $v_1 = v_2$ 的边 e）和平行边。赋予这样的图由各区间上的勒贝格测度自然诱导的勒贝格测度，以及由这些区间及其端点识别形成顶点的方式自然诱导的欧几里得度量后，它便成为一个（紧致）度量测度空间。该度量测度空间在等距同构意义下与表示每条边所选用的区间无关。更多详情请参见 [12, 第 1 节3] 或 [21]。

我们先介绍一些基本的图记号和术语。除非明确另有说明，否则我们一律假设所有图都是连通的。

定义 2.1. 设 $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是一个紧度量图。
(1) 图的总长度记为 $L := |\Gamma| = \sum_{e\in\mathcal{E}} \ell_e$。(2) 图的（第一）贝蒂数，或 Γ 中独立环的数量，记为 $\beta := m - n + 1 = |\mathcal{E}| - |\mathcal{V}| + 1$。(3) 若 $\beta = 0$，则称 Γ 为一棵树。(4) 顶点 $v \in \mathcal{V}$ 的度 $\deg v$，是与 v 相 incident 的边数（自环计数两次）。(5) 若 $\deg v = 1$，则称顶点 $v \in \mathcal{V}$ 为一个叶节点。注意，该术语适用于一般图，而不只是树。(6) 若 $\deg v = 2$，则称顶点 $v \in \mathcal{V}$ 为一个虚拟顶点。

2.2. 函数空间与拉普拉斯算子。 我们使用函数空间的标准记号来表示Γ上的函数空间：对于 $1 \leq p \leq \infty$，$L^p(\Gamma) \simeq \bigoplus_{e\in\mathcal{E}} L^p(0, \ell_e)$ 表示 p可积函数空间（若 $p = \infty$，则表示本质有界函数空间），$C(\Gamma)$ 表示 Γ 上的连续函数空间（即在每条边上连续至顶点，且在每个顶点处都有定义良好的值），并且

$$H^1(\Gamma) = \{f \in C(\Gamma) : f|_e \in H^1(e) \text{ for all } e \in \mathcal{E}\}$$

表示 Γ上弱导数也平方可积的平方可积函数空间。我们还将使用记号 $H^1_0(\Gamma, V_D)$ 表示 $H^1(\Gamma)$ 中在 Γ 的某个有限点集 $V_D \subset \Gamma$ 上取零的函数子空间（不失一般性，可假设这些点为顶点）；若所指的集合 V_D 没有歧义，也记作 $H^1_0(\Gamma)$（最常见但并非必然的情形是，该集合为 Γ的叶节点集合）。

对于这样的集合 V_D，我们将 Γ 上的拉普拉斯算子定义为与以下半双线性型相关联的 $L^2(\Gamma)$ 上的算子 $-\Delta$

$$h[f, g] = \int_\Gamma f' \bar{g}' \, \mathrm{d}x$$

其型定义域为 $H^1_0(\Gamma, V_D)$。众所周知（许多地方均有介绍，包括 [12,第 1] 章），该算子是自伴且下有界的，并且具有紧预解式，

因此其离散谱仅由特征值构成，这些特征值的有限代数重数与几何重数相同，并将记作

$$\lambda_1(\Gamma) < \lambda_2(\Gamma) \leq \lambda_3(\Gamma) \leq \ldots \to \infty.$$

通常，我们将与 $\lambda_k(\Gamma)$相对应的特征函数（或者说一个特征函数）记为 ψ_k，并通常选择这些特征函数，使其构成 $L^2(\Gamma)$的一组标准正交基。

众所周知，在 V之外的所有顶点处，属于 $-\Delta$ 定义域的函数 f 除了满足连续性外，还满足基尔霍夫条件

$$\sum_{e\sim v} \partial_\nu f|_e(v) = 0,$$

其中， $\partial_\nu f|_e(v)$是 $f|_e \in H^2(e)$在 e对应于顶点 v的端点处的导数，方向指向 v内部。在 V中的顶点处，该算子满足零条件，即狄利克雷条件。

如果 Γ 是一棵树，且 V 是其叶节点集合，那么我们称之为狄利克雷拉普拉斯算子，并称这些叶节点为“狄利克雷叶节点”；如果 $v \notin V_D$ 的度为 1，那么基尔霍夫条件就化为诺伊曼条件 $\partial_\nu f|_e(v) = 0$，此时我们称这些叶节点为“诺伊曼叶节点”。如果 $V_D = \emptyset$，且我们考虑仅满足标准基尔霍夫条件的拉普拉斯算子，那么 $\lambda_1(\Gamma) = 0$；否则，如果 $V_D \neq \emptyset$，则必然有 $\lambda_1(\Gamma) > 0$，这是众所周知的。

我们有时需要在一个或多个点（同样，不失一般性地，取为顶点）施加 δ 条件或 Robin 条件。对于这样的有限集合 V_R，我们为每个 $v \in V_R$ 选取一个数$\alpha_v \in$R，将 α 记为 α_v 的向量（如果所有 α_v 重合，则将 $\alpha \in$ R 用作记号）并定义如下型

$$h_\alpha[f,g] = \int_\Gamma f'\bar{g}'\,\mathrm{d}x + \sum_{v\in V_R} \alpha_v f(v)\overline{g(v)}$$

对所有 f， $g \in H_0^1(\Gamma,\ V_D)$ 均成立。相应的拉普拉斯算子在 $L^2(\Gamma)$ 上具有上述基本相同的性质；我们通常将其特征值记为 $\lambda_k^\Gamma(\alpha)$，因为在这类情形下，我们主要关注特征值对参数 α 的依赖。（需要强调的是，只要 V 是有限的且满足 $V_D \cap V_R = \emptyset$，它就可以是任意集合；也就是说，其余顶点处允许采用狄利克雷条件和标准条件的任意组合。）在任意顶点 $v \in V_R$ 处，相应的 Robin 型条件或 δ 条件为

$$\sum_{e\sim v} \partial_\nu f|_e(v) + \alpha_v f(v) = 0$$

根据我们对 ν 的约定。我们还将讨论在 v处的 δ势（强度为 α_v）。如果 $\alpha_v = 0$，那么我们在该顶点处恢复标准条件，而 $\alpha_v = \infty$ 形式上对应于狄利克雷条件。

在上述所有情况下，特征值都可通过相应瑞利商的通常变分刻画得到

$$R[f] = \frac{h[f,f]}{\|f\|^2_{L^2(\Gamma)}}$$

对于 $f \in H_0^1(\Gamma,\ V_D)$（或者在存在一个或多个罗宾顶点时为 $R_\alpha[f] = \frac{h_\alpha[f,f]}{\|f\|^2_{L^2\ \Gamma}()}$）。

我们不再展开更多细节；相关内容可在多种资料中找到，包括 [12, 20]以及 [11, 第 2] 节。

最后，众所周知，插入（或删除）一个满足基尔霍夫条件的虚拟顶点，会在我们所考虑的所有函数空间层面上诱导出等距同构，并在算子层面上诱导出酉等价；此外，所有我们关心的几何量（狄利克雷叶节点和诺伊曼叶节点的数量、独立环的数量、总长度）均不受影响（参见 [10, 假设 3.1 及其后面的讨论] 或 [11,

备注 2.1], 例如）。因此，按照惯例，只要方便，我们就把图上的任意给定点视为顶点；否则，则省略所有虚拟顶点。

2.3. **边长扰动**。给定一张由 m 条边构成的度量图 $\Gamma := |E|$，我们可以关联一个底层离散图 $G = (V, E)$。此时，每条边 $e \in E$ 仅对应两个顶点 v_1，$v_2 \in V$之间的一种关系 $e \simeq (v_1, v_2)$。实际上，Γ 也可以视为一个有序对 $(G, \mathbf{l})$，其中 G是底层离散图，而 $\mathbf{l} = (\ell_{e_1}, \ldots, \ell_{e_m}) \in \mathbf{R}_+^m \setminus \{0\}$ 是一个边长向量；为便于对应，边的编号固定为关于 G 的编号。实际应用中，允许 $\ell_{e_i} = 0$ 中的一条或多条边长度为零十分重要；在这种情况下，两个相邻顶点将在 Γ 中重合，也就是说，$\mathbf{R}_+^m$ 取为 m 维空间中的闭正象限，并且仅去除原点（此时所有边长均为零）。

D定义 2.2. 设 Γ 是一个紧致度量图，G 是一个离散图 .

(1) 若按照上述记号，$\ell_e > 0$ 对所有 $e \in E$ 都成立，则称 G 是一个适当的 底层离散图。注意，Γ 可能有多个底层离散图，但除边的重新编号外，只有一个适当的底层离散图。**(2)** 设 G 是 Γ 的一个适当底层离散图。我们用 $\mathcal{G}_\Gamma$ 表示所有以 G 为（不一定适当的）底层离散图的度量图的集合。**(3)** 我们用 $\mathcal{G}_G$ 表示所有以 G 为底层离散图（无论是否适当）的紧致度量图的集合。

因此，若 $\Gamma' \in \mathcal{G}_\Gamma$，则只需改变 Γ 中的边长即可得到 Γ'；在从 Γ 变为 Γ' 时，某些边长可能会缩短至零。

然而，对于任意两个紧致度量图 Γ，Γ'，都可以找到一个离散图 G，使得Γ，$\Gamma' \in \mathcal{G}_G$（只需将 Γ 和 Γ' 粘合于一个顶点，并令 G 为粘合后图的适当底层离散图）。

考虑这类图的一个主要原因是，正如现已得到充分证实的，特征值是边长的连续（事实上大多可微）函数。为此，我们需要对这些类别稍作修改，以纳入微分算子；在我们的情形中，该算子由我们施加的顶点条件决定。

定义 2.3。给定一个具有 n 个顶点 $v_1, \ldots, v_n$的离散图 G 以及一个向量 $\alpha \in (\mathbf{R} \cup \infty)^n$，我们假设顶点 v_i配备了强度为 α_i 的势，$i = 1, \ldots, n$（约定 $\alpha_i = 0$ 对应标准条件，$\alpha_i = \infty$ 用于狄利克雷条件）。

我们用 $\mathcal{G}_{G,\alpha}$ 表示所有底层离散图为 G 的量子图 Γ 的集合，它们配备了拉普拉斯算子，且顶点条件由向量 α指定；若 $\Gamma \in \mathcal{G}_{G,\alpha}$ 中与 v 相邻的一条或多条边长为零，则在 v处施加的正确顶点条件等于 G 中所有与 v 相邻且在 Γ中与 v 重合的顶点对应条件之和 $\sum_w \alpha_w$（特别地，若该类 $\mathcal{G}_{G,\alpha}$中的任一 w 处施加了狄利克雷条件，则在 Γ 中的 v 处也施加狄利克雷条件）

稍微滥用一下记号，我们通常不会区分 $\mathcal{G}_G$（具有给定拓扑的所有度量图的集合）与 $\mathcal{G}_{G,\ \alpha}$（具有该拓扑且预先指定顶点条件的所有量子图的集合）。

定理 2.4。设 G 为一个具有 m 条边和 n 个顶点的离散图，并固定任意一组与向量 $\alpha \in (\mathbb{R} \cup \infty)^n$相对应的顶点条件。

(1) 将任意 $\Gamma = \Gamma\ (\ell) \in \mathcal{G}_{G,\ \alpha}$ 与其边长向量 $\ell \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$对应。于是，对每个$k \in \mathbb{N}$，并采用上述顶点条件约定，$\ell \mapsto \lambda_k\ (\ell) :\ = \lambda_k\ (\Gamma\ (\ell)$ 是$\mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$上的连续函数。

(2) 设 $\lambda_k(\Gamma_0)$ 是$\Gamma_0 \in \mathcal{G}_{G,\ \alpha}$的一个单特征值，其中假设 G 是适当的，即对所有 $e \in E$，$\ell_e(\Gamma_0) > 0$属于 Γ_0。记 ψ_k 为相应的特征函数，并将其选取为 L^2-范数1。那么，对任意固定的 $e \in E$，映射 $\ell_e \mapsto \lambda_k(\Gamma)$，$\Gamma \in \mathcal{G}_{G,\ \alpha}$，在 Γ_0处可微，其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\lambda_k(\Gamma_0) = -\psi_k'(x)^2 - \lambda_k(\Gamma_0)\psi_k(x)^2$$

对于 Γ_0 中边 e 内部的任意 x（该量与 $x \in e$无关）。

第一个结论见 [13, 引理 3.4 和定理 3.6]。第二个结论通常称为*Hadamard*公式，这是类比于定义在欧几里得区域上的拉普拉斯算子特征值形状导数公式而得名的。该结论最初仅在标准条件下得到证明 [17, 引理的证明]，但在更一般的情形下同样成立，且证明基本相同，参见 [11, 注 3.14]。

2.4. 极小值与极大值的存在性。在继续讨论之前，我们将利用前述定理，给出一个基本的存在性结果：在所有拓扑相同的图中，存在使任意给定特征值比达到最大值或最小值的图。这与 [8] 的思路十分相近，不过在这里，图的缩放（总长度）无关紧要。下文将使用定义 2.2 和 2.3 中的记号和术语。

命题 2.5。任取一个离散图 G 以及任意一对指标 $k, j \geq 1$，假设只施加狄利克雷条件和标准顶点条件；如果所有顶点均采用标准基尔霍夫条件，则进一步假设 $j \geq 2$。

(1) 假设对于 G 的每个顶点 v，都指定了一个固定的狄利克雷条件或标准类型顶点条件，对应于一个向量 α，且对所有 i 均有 $\alpha_i \in \{0, \infty\}$，并假设 $k > j$。那么存在 $\Gamma^*, \Gamma_* \in \mathcal{G}_{G,\ \alpha}$，使得

$$\frac{\lambda_k(\Gamma^*)}{\lambda_j(\Gamma^*)} = \max_{\Gamma \in \mathcal{G}_{G,\alpha}} \frac{\lambda_k(\Gamma)}{\lambda_j(\Gamma)}, \qquad \frac{\lambda_k(\Gamma_*)}{\lambda_j(\Gamma_*)} = \min_{\Gamma \in \mathcal{G}_{G,\alpha}} \frac{\lambda_k(\Gamma)}{\lambda_j(\Gamma)}.$$

(2) 现在取两种任意的标准条件和狄利克雷条件配置，分别对应于两个向量α, β，且每个向量的各项取值仅为 0 和 ∞。对于 $\Gamma \in \mathcal{G}_G$，用 λ_k 和τ_k 分别表示在 Γ 上、满足与 α和 β 相对应的顶点条件时，拉普拉斯算子的第 k 个特征值。那么对于任意 $k, j \geq 1$（如果 $\beta = 0$，即仅存在标准顶点条件时，也可取 $j \geq 2$），存在 $\Gamma^*, \Gamma_* \in \mathcal{G}_G$，使得

$$\frac{\lambda_k(\Gamma^*)}{\tau_j(\Gamma^*)} = \max_{\Gamma \in \mathcal{G}_G} \frac{\lambda_k(\Gamma)}{\tau_j(\Gamma)}, \qquad \frac{\lambda_k(\Gamma_*)}{\tau_j(\Gamma_*)} = \min_{\Gamma \in \mathcal{G}_G} \frac{\lambda_k(\Gamma)}{\tau_j(\Gamma)}.$$

注意，Γ^* 和 Γ_* 当然并非唯一，因为对任意极值解进行任意的相似缩放，所得结果仍是极值解。还要注意，在将它们视为以 G 为底层离散图时，原则上可能有一条或多条边长为零；此时，正确的顶点条件由定义 2.3 所述方式确定。

命题 *2.5* 的证明。我们先考虑 (1) 以及最大化者的情形。由于比值 $\frac{\lambda_k}{\lambda_j}$具有尺度不变性，因此不失一般性，我们可以只考虑总长度恰好为 1 的所有图 $\Gamma \in \mathcal{G}_{G_\alpha}$。在这种情况下，注意到

$$\lambda_j(\Gamma) \geq \frac{\pi^2}{4}$$

根据 Nicaise 的 Faber–Krahn 型不等式 [22, 定理 3.1]。（更准确地说，若 $j = 1$ 且至少有一个狄利克雷顶点，则有此上界；若 $j \geq 2$，那么即使没有狄利克雷顶点，也可以将此上界改进为 π^2。）类似地，我们可以给 $\lambda_k(\Gamma)$ 找到一个上界，例如使用 (1.7)（并注意到 β、N 和 D 都可以分别替换为 $m = \#V(G)$，等等）。

特别地，在给定的类别中，比值 $\frac{\lambda_k}{\lambda_j}$ 有上界（自然地，下界为 1），因此既存在极小序列，也存在极大序列。

考虑后一种情况，将序列记为 Γ_n。由于每个 Γ_n 都具有相同的底层离散图，因此每个 Γ_n 都可以由一个边长向量唯一确定（$\ell_{1,\ n}$，……，$\ell_{p,\ n}$）$\in \mathbb{R}^p_+$（这里 $p = \#E(G)$ 是这些图共有的边数；注意，$\ell_{i,\ n}$ 可能为零）。

取一个子序列后，由于每个 $\ell_{i,\ n} \in [0,1]$，我们可得每条边的长度都收敛到一个极限值。现在，极限图 Γ^* 仍属于 $\mathcal{G}_G$，尽管某些边长可能为零。[13] 的连续性结果以定理 2.4(1) 的形式表明，$\lambda_k(\Gamma_n)$ 和 $\lambda_j(\Gamma_n)$ 均收敛；因此，Γ^* 确实是给定类中的一个最大化者。

c ɔiɔɥ 以及（2）的证明，完全类似 . □

3. On Ashbaugh–Benguria-type bounds for Dirichlet trees

定理 1.3 的证明将对 $m \geq 1$ 条边的 Γ采用归纳法。如果 $m = 1$（或 2），则无需证明，因为 Γ 是一个区间。

归纳步骤的证明方案大致如下：我们将通过反证法证明，任何具有 m 条边、且关于边长扰动而言是比值 $\frac{\lambda_1}{\tau_1}$ 的局部极大值点的图 Γ，至少有一条边的长度为零，因此等同于一个至多具有 $m-1$ 条边的图；根据归纳假设，该图的结论成立。

为此，我们假设 Γ^* 是任意一个局部临界点，并找到对 Γ^*的局部扰动（实质上使用手术论证），使其比值更大，同时除将某些边长设为零外，与 Γ^* 具有相同的拓扑。更准确地说，我们将把 Γ^* 的一个悬挂星形子图（见定义 (3.1)）替换为一个区间。

证明将分为几个引理。在引理 3.2 和 3.3 中，我们将根据定理 2.4 中的 Hadamard 型公式，描述图 Γ^* 成为临界点时边长必须满足的某些条件。随后我们将证明（引理 3.5）：若沿某个特征函数将合适的悬挂星图从其余部分 Γ^* 中切下，并以长度恰当的区间替代，则狄利克雷特征值 λ_1 不变，而诺伊曼特征值 τ_1 会降低。[11] 中的手术原理将使我们能够通过将该区间重新接回星图所在位置的其余部分 Γ^*，完成证明。

现在我们详细展开证明。假设该命题对边数至多为 $m-1 \geq 1$ 的所有图都成立（并且对所有可能的图及其所有可能选取的诺伊曼叶节点都成立）。现在令 Γ 为任意一棵具有 m 条边的树，且假设所有边的长度都严格为正；再任取 Γ 的一个叶节点 v，并在该节点施加诺伊曼条件。令 G 为与 Γ 对应的（适当的）底层离散图（按构造，它也具有 m 条边），于是 $\Gamma \in \mathcal{G}_G$。由命题 2.5(2)，存在某个 $\Gamma^* \in \mathcal{G}_G$，使得

$$\frac{\lambda_1(\Gamma^*)}{\tau_1(\Gamma^*)} = \max_{\Gamma' \in \mathcal{G}_G} \frac{\lambda_1(\Gamma')}{\tau_1(\Gamma')} \tag{3.1}$$

（按照约定，诺伊曼叶节点始终对应于 G中的同一个顶点。）

我们将证明，Γ^* 至多有 $m-1$ 条长度非零的边。结合归纳假设，即可推出

$$\frac{\lambda_1(\Gamma)}{\tau_1(\Gamma)} < \frac{\lambda_1(\Gamma^*)}{\tau_1(\Gamma^*)} \leq 4,$$

严格不等号源于这样一个事实：Γ有 m 条正长度的边，因此不可能是最大值点。（注意，我们的论证只用到这样一点：Γ^* 是关于边长向量的内点临界点；它不必是该图拓扑下的全局最大值点。）

假设事实上 Γ^* 的 m 条边全都具有正长度。由于 $m \geq 3$，必要时插入一个虚拟顶点后，我们可以找到一个悬挂星图

$$\mathcal{S} \subset \Gamma^* \tag{3.2}$$

具有以下性质的 Γ^*

定义 3.1. 在本节余下部分中，如果给定树 Γ 的子图 $\mathcal{S}$ 作为一张图是一个至少有三个叶节点的星形图，并且存在一点 $w \in \Gamma$（将其视为虚拟顶点；也就是说，若有必要，可人为地将其插入一条边的内部，使其度为二），使得将 $\mathcal{S}$ 视为 Γ的一个（闭）子集时，称 $\mathcal{S}$ 为一张悬挂星图，

$$\mathcal{S} \cap \overline{\Gamma \setminus \mathcal{S}} = \{w\}.$$

除非另有说明，我们假设 $\mathcal{S}$ 在除 w 以外的所有叶节点处均满足狄利克雷条件，也就是说，作为 Γ的顶点，所有叶节点也都是狄利克雷叶节点。

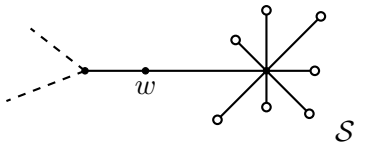

FIGURE 3.1. 连接在树上的一张悬挂星图 $\mathcal{S}$，连接点为虚拟顶点 w。

特别要注意，Γ中有唯一一条边（即对应于或包含虚拟顶点 w 的边）将 $\mathcal{S}$ 与 Γ的其余部分连接起来。我们始终假设悬挂星图$\mathcal{S}$ 不 包含 Γ 中那个满足 τ_1的诺伊曼条件的指定叶节点；也就是说，Γ 中同时也是 $\mathcal{S}$ 叶节点的所有叶节点（我们要求至少有两个），实际上都应在两者中满足狄利克雷条件。

为简化证明的后续步骤，我们采用定理 2.4 中的设定：给定一个含有 n 条边的离散图 G，考虑所有底层离散图为 ℓ、边长向量为 ℓ 的图 $\Gamma(\ell) \in \mathcal{G}_G$，其中边长向量为 $=(\ell_1, \ldots, \ell_n)$，$\ell_i$ 表示第 i 条边 e_i 的长度。对于相应的特征值，我们记 $\lambda_1(\ell) := \lambda_1(\Gamma(\ell))$ 和 $\tau_1(\ell) := \tau_1(\Gamma(\ell))$；$c_{D,i}$ 表示边 ℓ_i 上与 $\lambda_1(\ell)$ 相关的特征函数的振幅，$c_{N,i}$ 表示与 $\tau_1(\ell)$ 相关的特征函数的振幅，其中假设二者在 $\Gamma(\ell)$ 上的 L^2-范数均为 1。此外，我们还将频率记为 $k_D = \sqrt{\lambda_1}$ 和 $k_N = \sqrt{\tau_1}$（若不会引起混淆，我们将省略对 Γ 和 ℓ 的依赖）。

引理 3.2. 设 Γ 是任意一个图。假设边长均为正，且映射 $\mathbb{R}^m \ni \ell \mapsto {}^{\lambda_1(\ell)}\,{}_{\tau_1(\ell)}$ 处于临界点。则对于每个 $i = 1, ..., m$，振幅 $c_{D,i}$ 与 $c_{N,i}$ 相等；也就是说，存在 $c_i > 0$，使得对所有 $i = 1, ..., n$, $c_{D,i} = c_{N,i} =: c_i$。

证明。根据假设，对于所有 $i = 1, ..., n$，$\frac{\partial}{\partial \ell_i} \frac{\lambda_1}{\tau_1} = 0$，这意味着

$$\frac{\frac{\partial \lambda_1}{\partial \ell_i}}{\lambda_1} = \frac{\frac{\partial \tau_1}{\partial \ell_i}}{\tau_1} \tag{3.3}$$

对于所有 i。记 $\psi_1 \sim \lambda_1$ 和 $\phi_1 \sim \tau_1$ 分别为相应的特征函数，取其为正且归一化，使其 L^2-范数为 1，并关联 $e_i \sim [0, \ell_i]$，我们可以写出

$$\psi_1|_{e_i}(x) = c_{D,i} \sin(k_D(x + \theta_{D,i}))$$

对所有 $i = 1, ..., n$，同理

$$\phi_1|_{e_i}(x) = c_{N,i} \sin(k_N(x + \theta_{N,i})).$$

应用定理 2.4，我们得到

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\ell_i} = -\lambda_1 c_{D,i}^2\cos^2(k_D(x+\theta_{D,i})) - \lambda_1 c_{D,i}^2\sin^2(k_D(x+\theta_{D,i})) = -\lambda_1 c_{D,i}^2$$

同理

$$\frac{\partial\tau_1}{\partial\ell_i} = -\tau_1 c_{N,i}^2$$

对所有 $i=1$，……，n均成立。结合 (3.3)，并注意到振幅均为正，可得

$$c_{D,i} = c_{N,i} =: c_i$$

对所有 i均成立。 □

引理 3.3。在引理 *3.2* 的假设下，设 $\mathcal{S}$ 是 Γ 的一个悬挂星图（定义见定义 *3.1*），其 $n\geq 2$ 个狄利克雷叶节点的长度为 ℓ_1、ℓ_2、……、ℓ_n。那么存在 $\ell>0$，使得$\ell_i=\ell$对所有 $i=1$、……、n 均成立。此外，频率 k_D 和 k_N 满足关系式 $k_D+k_N=\frac{\pi}{\ell}$。

证明需要仔细分析悬挂星图上的特征函数，详见附录 A。

注记 3.4. 请注意，关系 $k_D+k_N=\frac{\pi}{\ell}$ 对于 $\mathcal{S}$ 意味着，对于 Γ 的任何其他悬挂星图$\backsim\mathcal{S}$（不包含指定顶点 v），狄利克雷叶节点的长度也必须等于同一个常数 ℓ。

下一个引理是一个关键的手术结果，它回顾了 Ashbaugh–Benguria 如何将 Ω 与一个第一狄利克雷特征值相同的球进行比较，而非与一个体积相同的球比较（参见公式 (2.2.7) [3,]中及其前后的策略说明）。我们首先需要引入一些记号。设k_α^I 为区间 I 在一端满足狄利克雷条件、另一端满足参数为 $\alpha\in$R 的罗宾边界条件时的第一特征值 $\lambda_1^I(\alpha)$ 的平方根；设 k_α^S 为（任意）星图 S 在一片叶节点上施加参数为 α 的罗宾边界条件、其余所有边长度均为 ℓ 且在叶节点处满足狄利克雷条件时的第一特征值 $\lambda_1^S(\alpha)$ 的平方根。

引理 3.5。设 $\alpha_D,\alpha_N\in\mathbb{R}$ 为任意两个实数，使得 $k_{\alpha_D}^S>k_{\alpha_N}^S>0$ 且 $k_{\alpha_D}^S+k_{\alpha_N}^S=\frac{\pi}{\ell}$，其中 ℓ 是星形图 S的狄利克雷叶节点的长度。那么存在一个区间 I，使得 $\lambda_1^I(\alpha_D)=\lambda_1^S(\alpha_D)$ 并且

$$\lambda_1^I(\alpha_N) < \lambda_1^S(\alpha_N). \tag{3.4}$$

与前一个引理的证明一样，这里的证明需要借助若干三角恒等式和关系，对相应的特征函数进行详细研究，相关证明将在附录 A 中给出。

定理 *1.3* 的证明结尾。回顾一下，我们需要完成关于边数 $m\geq 3$的归纳步骤；为此，我们重新假设 Γ^* 是满足 (3.1) 的树，且 Γ^* 有 m条正长度的边。这尤其意味着引理 3.2 和引理 3.3 适用；后者适用于证明开头所述的悬挂星图 $\mathcal{S}$（见 (3.2) 和定义 3.1），根据引理 3.3，该图有 $n\geq 2$ 个长度相同为 $\ell>0$ 的狄利克雷叶节点。

与前面一样，设 $\psi_1\sim\lambda_1(\Gamma^*)$和 $\phi_1\sim\tau_1(\Gamma^*)$为两个特征函数，并作适当归一化。我们取 α_N，$\alpha_D\in$ R，使得 $\psi_1|_{\mathcal{S}}$和 $\phi_1|_{\mathcal{S}}$分别是星形图上的第一特征函数：在将 $\mathcal{S}$ 与 Γ^*其余部分分隔开的顶点 w 处，分别施加强度为 α_D和 α_N的罗宾边界条件；在其余叶节点处施加狄利克雷条件（见图 3.1）。

对于区间 I 和 $\alpha\in$R，和之前一样，用 $\lambda_1^I(\alpha)$ 表示在一个端点满足狄利克雷条件、在另一个端点满足强度为 α 的罗宾边界条件时拉普拉斯算子的第一特征值；我们

同样用 $\lambda_1^{\mathcal{S}}(\alpha)$ 表示在 $\mathcal{S}$ 上、于 w 处满足罗宾边界条件且在所有其他叶节点处满足狄利克雷条件时的第一特征值。

令 I 为满足 $\lambda_1^I(\alpha_D) = \lambda_1(\Gamma^*)$ 的区间。由引理 3.5 以及我们对 α_D 的选择可知，α_N，我们知道 $\lambda_1^I(\alpha_D) = \lambda_1^{\mathcal{S}}(\alpha_D)$ 且 $\lambda_1^I(\alpha_N) < \lambda_1^{\mathcal{S}}(\alpha_N)$。我们还用 ψ_1^I 表示 I 上与 $\lambda_1^I(\alpha_D)$ 对应的特征函数，用 ϕ_1^I 表示与 $\lambda_1^I(\alpha_N)$ 对应的特征函数（两者均取正，且 L^2-范数为 1）。

现在我们构造一个新图 $\widehat{\Gamma}$，由 Γ^* 删除 $\mathcal{S}$（位于 w）$\widehat{}$，并将 I 粘合而成（我们设想 $\widehat{}$ $\widehat{}$，使得 I 的罗宾顶点对应于 w）。注意，$\Gamma \in \mathcal{G}_{\Gamma^*}$，因为 Γ 可通过将 $\mathcal{S}$ 的狄利克雷边缩短至 0，并在必要时改变剩余边的长度而得到。我们断言

$$\frac{\lambda_1(\widehat{\Gamma})}{\tau_1(\widehat{\Gamma})} > \frac{\lambda_1(\Gamma^*)}{\tau_1(\Gamma^*)}. \tag{3.5}$$

我们注意到，(3.5) 将完成定理 1.3 的证明，因为我们将得到一个矛盾：比值 $\frac{\lambda_1}{\tau_1}$ within $\mathcal{G}_{\Gamma^*}$ 的极大化图有 m 条正长度边。最大值只能在至多有 $m-1$ 条边的图上取得。因此，对于任何有 m 条正长度边 Γ的图，必有

$$\frac{\lambda_1(\Gamma)}{\tau_1(\Gamma)} < 4. \tag{3.6}$$

这尤其意味着区间是唯一的极大化对象，因为 (3.6) 直接表明，任何有 $m \geq 3$ 条（非零长度）边的树，其比值都严格小于 4。

$\widehat{}$不等式 (3.5) 将通过手术论证得出。我们首先断言 $\lambda_1(\Gamma) = \lambda_1(\Gamma^*)$；为此，我们考虑函数

$$\hat{\psi}_1(x) := \begin{cases} a\psi_1^I(x) & \text{if } x \in I, \\ \psi_1(x) & \text{if } x \in \widehat{\Gamma} \setminus I = \Gamma^* \setminus \mathcal{S}, \end{cases}$$

$\widehat{}$ 其中常数 $a > 0$ 的选取使得 ψ_1 在顶点 w 处连续；I 在该顶点处$\widehat{}$ $\widehat{}$粘接到 $\Gamma \setminus I$ 上，因此在 Γ 上连续。

$\widehat{}$ 现在，由于我们对 I 和 α_D的长度所作的选择，ψ_1 在 I 和 $\Gamma\setminus I$上都满足相同的特征值方程$\widehat{}\ \widehat{}\ \widehat{}-\psi_1 = \lambda_1(\Gamma^*)\psi_1$，并且在顶点$w$处满足连续性条件和基尔霍夫条件；此外，在 $\widehat{\Gamma}$ 的所有其他非叶节点处也满足连续性条件和基尔霍夫条件（因为 ψ_1 和 ψ_1^I 确实如此），因此$\widehat{}\ \widehat{}$必然是 Γ 的第一特征函数 ψ_1，对应特征值 $\lambda_1(\Gamma^*)$；其中 Γ的所有叶节点$\widehat{}$ $\widehat{}$处满足狄利克雷条件，其余位置满足连续性条件和基尔霍夫条件。也就是说，$\lambda_1(\Gamma) = \lambda_1(\Gamma^*)$，正如所声称的那样。

因此，要证明 (3.5)，我们证明不等式 $\lambda_1(\widehat{\Gamma}) < \lambda_1(\Gamma^* \setminus \mathcal{S})$，其中 $\lambda_1(\Gamma^* \setminus \mathcal{S})$ 表示 $\Gamma^* \setminus \mathcal{S}$ 上拉普拉斯算子的第一特征值，其顶点条件与 τ_1 相同，只是在 w 处（即我们将 $\mathcal{S}$ 从图的其余部分切开的顶点）施加强度为 $-\alpha_N \in \mathbb{R}$ 的罗宾势，使得

$$\tau_1(\Gamma^*) = \lambda_1^{\Gamma^* \setminus \mathcal{S}}(-\alpha_N),$$

并且 ϕ_1 在 $\Gamma^* \setminus \mathcal{S}$ 上继续作为相应的特征函数（参见 [11, 式 (3.2)]）。我们注意到，类似地，

$$\tau_1(\Gamma^*) = \lambda_1^{\mathcal{S}}(\alpha_N)$$

具体而言，根据 α_N的选择。

现在恰好满足使用 [11, 定理 3.10(1)]中的手术原理的条件（在一个顶点处连接一个悬挂图，其中 $k = r = 1$、$\mathcal{G} = \Gamma^* \setminus \mathcal{S}$、$\mathcal{H} = I$ 以及连接

点位于顶点 w处）：由于

$$\lambda_1^I(\alpha_N) < \lambda_1^{\mathcal{S}}(\alpha_N) = \tau(\Gamma^*) = \lambda_1^{\Gamma^*\setminus\mathcal{S}}(-\alpha_N)$$

（其中，第一个不等式直接由引理 3.5 得出），我们得到

$$\tau_1(\widehat{\Gamma}) < \tau_1(\Gamma^*),$$

$\widehat{\ }$由于 Γ 是将 I 在 w 处与 $\Gamma^*\setminus\mathcal{S}$ 粘合得到的图，而在 w 处施加的条件是强度为 $\alpha_N + (-\alpha_N) = 0$的罗宾边界条件，即我们在 w处要求函数连续并满足基尔霍夫条件。

这就完成了 (3.5) 的证明，从而也完成了定理 1.3 的证明。 □

我们通过从刚刚证明的结果推导出定理 1.2，来结束本节。基本思路是将后者应用于与 $\lambda_1(\Gamma)$ 对应的特征函数的*诺伊曼区域*，也就是说，在取正值的特征函数 ψ_1达到最大值的点处，将 Γ 切开。

基于定理 1.3 证明定理 1.2。 我们先证明不等式。设 v 是第一特征函数 ψ_1 在 Γ上取得局部最大值的任意一点，不失一般性地，设其为一个顶点。这里选取的第一特征函数为正值。这将图 Γ 分成若干个连通分支 Γ_i、$i = 1, \ldots\ldots, n$（严格来说，这些图是 $\Gamma\setminus\{v\}$的各个连通分支的闭包）。

现在，由于 ψ_1 限制在任意一个 Γ_i 上时，在每条边上都满足特征值方程，并在每个顶点上满足相应的顶点条件，因此它是每个 Γ_i 上拉普拉斯算子的一个特征函数；除在 v 处新产生的叶节点外，所有叶节点处均满足狄利克雷条件，而在该新叶节点处满足诺伊曼条件。由于它处处为正，标准论证表明它必定是这个问题的第一特征函数，因此特别有

$$\lambda_1(\Gamma) = \tau_1(\Gamma_i)$$

对所有 $i = 1, \ldots\ldots, n$ 均成立。

现在，将定理 1.3 应用于每个 Γ_i，可知

$$\frac{\lambda_1(\Gamma_i)}{\tau(\Gamma_i)} \le 4$$

对 $i = 1, \ldots\ldots, n$ 均成立，特别是对 $i = 1, 2$ 也成立。但另一方面，不等式

$$\lambda_2(\Gamma) \le \max\{\lambda_1(\Gamma_1), \lambda_1(\Gamma_2)\}$$

由 λ_2 的变分刻画可得：考虑一对 Γ_i，不失一般性地设 $i = 1, 2$，并将与 $\lambda_1(\Gamma_i)$ 相关的特征函数延拓为整个图 Γ 上处处为 0 的函数，记作 $\varphi_{1,\,2}$。选取 d_i，使得 $\varphi_* = d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2 \in H_0^1(\Gamma,\ V_D)$ 在 L^2 中归一化且与 ψ_1 正交。于是

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &\le \int_\Gamma |\varphi_*'|^2 \\
&= \int_{\Gamma_1} |d_1\varphi_1'|^2 + \int_{\Gamma_2} |d_2\varphi_2'|^2 \\
&\le |d_1|^2\lambda_1(\Gamma_1)\int_{\Gamma_1}|\varphi_1|^2 + |d_2|^2\lambda_1(\Gamma_2)\int_{\Gamma_2}|\varphi_2|^2 \\
&\le \max(\lambda_1(\Gamma_1), \lambda_1(\Gamma_2)\int_\Gamma |\varphi_*|^2) = \max(\lambda_1(\Gamma_1), \lambda_1(\Gamma_2)).
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\lambda_2(\Gamma)}{\lambda_1(\Gamma)} \le \max_i\left\{\frac{\lambda_1(\Gamma_i)}{\tau_1(\Gamma_i)}\right\} \le 4.$$

现在我们来考虑稍微更微妙的等号成立情形。沿用上述不等式证明中的记号，我们假设 $\frac{\lambda_2(\Gamma)}{\lambda_1(\Gamma)} = 4$。

任取一对子图，记为 Γ_1、 Γ_2，则上述论证表明

$$4 = \frac{\lambda_2(\Gamma)}{\lambda_1(\Gamma)} \leq \max_i \left\{ \frac{\lambda_1(\Gamma_i)}{\tau_1(\Gamma_i)} \right\} \leq 4,$$

这意味着处处等号成立。不妨设最大值在 Γ_1处取得；那么，定理 1.3 中关于等号成立的刻画表明， Γ_1 是一个区间。

但现在注意到等式 $\max\{\lambda_1(\Gamma_1)\ \lambda_1(\Gamma_2)\} = \lambda_2(\Gamma)$；更确切地说，分别与 $\lambda_1(\Gamma_1)$和 $\lambda_1(\Gamma_2)$对应的两个特征函数$\psi_{1,\ 1}$ 和 $\psi_{1,\ 2}$ （将它们延拓为零，从而构成 Γ上的试探函数），作为试探函数用于$\lambda_2(\Gamma)$的变分刻画时，会使等号成立。这意味着必定存在一个与 $\lambda_2(\Gamma)$对应的特征函数 ψ_2 ，它是这两个特征函数的线性组合，即对某个 a_1， $a_2 \in \mathbb{R}$，有$\psi_2 = a_1\psi_{1,\ 1} + a_2\psi_{1,\ 2}$，参见 [11, 引理 4.1(1)]。事实上，必有 a_1， $a_2 \neq 0$，因为 ψ_2 必须变号，而$\psi_{1,\ i}$作为 Γ_i上的相应第一特征函数，并不变号。

但这也意味着 $\lambda_1(\Gamma_1) = \lambda_1(\Gamma_2) = \lambda_2(\Gamma)$，由此我们可以推得，$\Gamma_2$ 在比值 $\frac{\lambda_1}{\tau_1}$ （也就是 $\frac{\lambda_1(\Gamma_2)}{\tau_1(\Gamma_2)} = 4$ ）上同样取最大值。因此，再次根据定理 1.3 中等号成立的刻画， Γ_2 也必定是一个区间。但由于第一特征值相等，这些区间的长度必定相同。

最后，若在 v 相交的连通子图数量 n 大于二，我们现在可以归纳地重复这一论证，在每一步都考察 Γ_1 与 Γ_i 这一对，从而得出 Γ_i 同样是一个与 Γ_1 长度相同的区间。因此，最终可以得出， Γ 是一棵具有 n 条边的等边星形图。□

4. General bounds for Dirichlet trees

定理 *1.4* 的证明。 取一棵紧狄利克雷树 Γ。暂且假设存在一个与 $\lambda_k(\Gamma)$ 对应的特征函数 ψ_k ，其具有至少 k 个节点域，也就是说， $\{x \in \Gamma : \psi_k(x) \neq 0\}$ 至少有 k 个连通分支。将它们各自的闭包记为 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$，我们可以将其视为 Γ 的子图。一个标准结果表明，对所有 $i = 1, \ldots, k$,

$$\lambda_1(\Gamma_i) = \lambda_k(\Gamma),$$

其中，在 Γ_i 上，我们仅在 Γ_i 的叶节点处施加狄利克雷条件，包括在 $\partial\Gamma_i$ 上；为说明这一点，注意到 $\psi_k|_{\Gamma_i}$ 在 Γ_i 的每条边上都满足特征值方程 $-\psi_k'' = \lambda_k(\Gamma)\psi_k$ ，并满足所有相关的顶点条件。因此，$(\lambda_k(\Gamma)\ \psi_k|_{\Gamma_i})$ 是 Γ_i 上的一个特征对；由于 ψ_k 按构造在 Γ_i 上不变号，它必定对应于 Γ_i 的第一特征值。

特别地，若我们用 Γ' 表示 k 个图 Γ_1，……，Γ_k 的不交并，则

$$\lambda_1(\Gamma') = \lambda_k(\Gamma') = \lambda_k(\Gamma),$$

此时该特征值在 Γ' 中的重数为 k。不失一般性，设 $\lambda_2(\Gamma_1) = \max_i \lambda_2(\Gamma_i)$。于是

$$\lambda_{2k}(\Gamma') \leq \lambda_2(\Gamma_1),$$

因为 $\lambda_{2k}(\Gamma')$ 不可能大于 $2k$ 个特征值（按重数计） $\lambda_1(\Gamma_1)$……， $\lambda_1(\Gamma_k)$ $\lambda_2(\Gamma_1)$……， $\lambda_2(\Gamma_k)$ 中的最大值（依据与定理 1.2 证明中相同的变分论证）。

另一方面，由于 Γ' 是通过添加额外的狄利克雷条件从 Γ 构造出来的，因此 $\lambda_{2k}(\Gamma) \leq \lambda_{2k}(\Gamma')$。因此，综合以上各点，

$$\frac{\lambda_{2k}(\Gamma)}{\lambda_k(\Gamma)} \leq \frac{\lambda_{2k}(\Gamma')}{\lambda_1(\Gamma')} \leq \frac{\lambda_2(\Gamma_1)}{\lambda_1(\Gamma_1)}.$$

现在，由于 Γ_1 本身就是一棵紧狄利克雷树，定理 1.2 表明

$$\frac{\lambda_{2k}(\Gamma)}{\lambda_k(\Gamma)} \leq \frac{\lambda_2(\Gamma_1)}{\lambda_1(\Gamma_1)} \leq 4.$$

剩下要考虑的是 ψ_k 的节点域少于 k 的情形。这里可以使用一种如今相当标准的扰动论证。更确切地说，给定任意紧树 Γ，其（适当的）底层离散图为 G，已知边长向量 $\mathbf{l}$ 的集合具有第二类贝尔范畴性质；对于这些向量，度量树图 $(G,\mathbf{l})$ 上的狄利克雷拉普拉斯算子的所有特征值都是单的，并且第 k 个特征函数恰有 k 个节点域（更确切地说：其零点不与图的任何顶点重合，且零点恰有 $k-1$ 个）。这里的 $(\mathbb{R}^m)_+$ 中，m 是 G 的边数。这直接由 [9, 注 2.4 和定理 2.5]（其中 $\beta = 0$）得出。

因此，特别地，存在一个紧狄利克雷树序列 Γ_n，其对应的边长向量为 $\mathbf{l}_n \to \mathbf{l}$，其中 $\mathbf{l}$ 是 Γ 的边长向量，并且对所有 n、$\psi_k^{(n)}$，Γ_n 上唯一到标量倍数为止的第 k 个特征函数恰有 k 个节点域；特别是，

$$\frac{\lambda_{2k}(\Gamma_n)}{\lambda_k(\Gamma_n)} \leq 4$$

根据上文所示。但现在，定理 2.4 中的连续性结果意味着同一界在极限情况下也必定成立，即对于 Γ。□

推论 *1.5* 的证明。对于 (1.4) 中的第一个不等式：给定 $1 \leq j < k$，取 $m \in \mathbb{N}$，使得 $2^{m-1}j < k \leq 2^m j$，即 $m = \lceil \log_2 \frac{k}{j} \rceil$；然后迭代应用定理 1.4 m 次，得到

$$\frac{\lambda_k(\Gamma)}{\lambda_j(\Gamma)} \leq \frac{\lambda_{2^m j}(\Gamma)}{\lambda_j(\Gamma)} \leq 4^m.$$

对于 (1.4) 中的第二个不等式，即 $4^{\lceil \log_2 \frac{k}{j} \rceil} \leq 4 \cdot \frac{k^2}{j^2}$：经过一些基本运算（对两边开平方，然后取对数）后可知，只要对所有 $x > 0$ 都有 $\lceil \log_2 x \rceil \leq \log_2(2x)$，结论便成立。但后一个不等式显然成立：给定 $x > 0$，选择 $m \in \mathbb{Z}$，使得 $x \in (2^{m-1}, 2^m]$，那么 $\lceil \log_2 x \rceil = m$，而 $\log_2(2x) \geq \log_2(2 \cdot 2^{m-1}) = m$。□

注 4.1. 正如注 1.6(2)中所指出的，尚不清楚 (1.4) 中的最优常数应当是多少。不过，推论 1.5 的证明中唯一不够锐利的一步（除步骤 $4^{\lceil \log_2 \frac{k}{j} \rceil} \leq 4 \cdot \frac{k^2}{j^2}$ 外）是估计 $\lambda_k < \lambda_{2^m j}$。

5. Bounds and optimizers for general graphs

我们先给出命题 1.9 的一个简单证明。

命题 *1.9* 的证明。显然，下确界至少为 1。对于 $k > j \geq 2$，我们知道，如果 Γ_k 是一个等边 k 星形图，且每条边的长度均为 $\ell > 0$，那么 $\lambda_1(\Gamma_k) = \frac{\pi^2}{4\ell^2}$，而 $\lambda_2(\Gamma_k) = \ldots = \lambda_k(\Gamma_k) = \frac{\pi^2}{\ell^2}$。

对于 $j = 1$，注意我们要对比值 $\frac{\lambda_k(\Gamma)}{\lambda_1(\Gamma)}$ 进行界定。如果 Γ（移除所有狄利克雷顶点后）是连通的，那么 $\lambda_1(\Gamma)$ 是简单的，因此必有 $\lambda_k(\Gamma) > \lambda_1(\Gamma)$。因此，如果 $\lambda_k(\Gamma) = \lambda_1(\Gamma)$，那么 Γ 必须在内部满足狄利克雷条件。显然，对于一个等边 k-星形图 Γ_k，若其中心满足狄利克雷条件且所有边的长度均为 $\ell > 0$，则有 $\lambda_1(\Gamma_k) = \ldots = \lambda_k(\Gamma_k) = \frac{\pi^2}{\ell^2}$。□

接下来我们讨论定理 1.8，因此假设图 Γ 具有给定数量的 $N \geq 0$ 诺伊曼叶节点和 $\beta \geq 0$ 独立环（以及任意数量的狄利克雷叶节点）。

定理 *1.8* 的证明。 我们断言，对于上述给定的图 Γ ，存在一棵狄利克雷~树 Γ，使得

$$\lambda_{k-N-\beta}(\widetilde{\Gamma}) \leq \lambda_k(\Gamma) \leq \lambda_k(\widetilde{\Gamma}), \tag{5.1}$$

wh其中，第一个不等式对所有 $k \geq N+\beta+1$成立，第二个不等式对所有 $k \geq$成立 1.

事实上，我们首先将 Γ 的所有 N 诺伊曼叶节点替换为狄利克雷叶节点；这会生成一个新的（量子）图 Γ'（不过作为度量图，它与 Γ 相同），该图具有 β 个环，但只有狄利克雷叶节点；然后根据 [11,定理 3.4],

$$\lambda_{k-N}(\Gamma') \leq \lambda_k(\Gamma) \leq \lambda_k(\Gamma'), \tag{5.2}$$

其中，第一个 不等式对所有 $k \geq N+1$ 成立，后一个不等式对所有 $k \geq$成立 1.

我们现在构造 $\widetilde{\Gamma}$ 从 Γ' 出发如下：我们任选 β 个边的内部的点，移除这些点后会使 Γ' 变成一棵树；这之所以可行，是因为 Γ'和 Γ一样，第一贝蒂数为 β。我们~直接在这些 β 个点上施加狄利克雷条件，并将所得的新图称为 Γ；这等价于将每个这样的 β 点处的顶点条件从 0-δ条件改为 ∞-δ条件；因此，仍由 [11,定理 3.4],

$$\lambda_{k-\beta}(\widetilde{\Gamma}) \leq \lambda_k(\Gamma') \leq \lambda_k(\widetilde{\Gamma}), \tag{5.3}$$

其中再次 ，第一个不等式对所有 $k \geq \beta+1$ 成立，第二个不等式对所有 $k \geq 1$成立 .

结合 (5.2) 和 (5.3) 可立即得到 (5.1)。

To 为完成证明，我们使用推论 1.5：对于任意 $k \geq j \geq N+\beta+1$ ，有

$$\frac{\lambda_k(\Gamma)}{\lambda_j(\Gamma)} \leq \frac{\lambda_k(\widetilde{\Gamma})}{\lambda_{j-N-\beta}(\widetilde{\Gamma})} \leq 4^{\lceil \log_2(\frac{k}{j-N-\beta}) \rceil} \leq 4 \cdot \frac{k^2}{(j-N-\beta)^2},$$

其中，第一个不等式来自 (5.1)，第二个不等式来自 (1.4)。 □

最后，我们给出一般的存在性结果，并假设顶点数下有界；为此，我们假设 $m \geq 2$ 固定，正如在定理 1.10 的假设下 $1 \leq j < k$ 一样。证明直接由我们的第一个存在性结果——命题 2.5——得出。

定理 *1.10* 的证明。 由于边的最大数量固定，对于任何满足该定理假设的 Γ ，其（适当的）底层离散图只有有限种可能，包括顶点的选取。特别地，至多有m 条边的所有图构成有限个形如 $\mathcal{G}_G$ 的集合之并，其中任意图上的任意组合均可采用狄利克雷条件和标准条件；正如定理 2.4 之前所述，如果两个离散图作为图相同，但关联的顶点条件不同，我们就将它们视为不同的图。

现在，根据命题 2.5(1)，在每个集合 $\mathcal{C}_G$ 中， $\frac{\lambda_k}{\lambda_j}$ 比值都有一个最大值和一个最小值的取值者；特别是，它们至多有 m 条边。由于 G 的可能选择只有有限种，因此，在所有至多有 m 条边的图构成的类中，必然存在最大值和最小值的取值者。□

推论 *1.11* 的证明。首先要指出的是，我们将从命题 2.5 推出这一推论；具体来说，它实质上是定理 1.10 证明的推论，而非该定理实际陈述的推论。

给定 D、 N 和 β 的界，图 Γ 中（非虚设）顶点的总数也有上界：也就是说，如果 $\beta = 0$ 和 Γ 是一棵树，那么它至多有 $2(D+N)$ 个 -1 顶点；仅当它是有限有根二叉树，且 $D+N$（即叶节点总数）为 2 的幂时，等号才成立。由于树根的度为二，因此不将其计作顶点。~如果 $\beta > 0$，那么只要 Γ 不是环，就可以通过在每个环的一条边的中点处将其切开一次，总共切开 β 次，将其转化为树 Γ ，从而得到一棵具有 D 的树

狄利克雷叶节点和 $N + 2\beta$ 诺伊曼叶节点，因此至多有 $2(D + N + \beta) - 1$ 个顶点，其顶点数也比 Γ 多 β 个。

因此，与定理 1.10 的证明一样，若我们将范围限制在至多有 D 个狄利克雷叶节点、 N 个诺伊曼叶节点和 β 个独立环的图上，那么可能的底层离散图只有有限多个；因此，根据命题 2.5(1)，在形如 $\mathcal{G}_G$的适当类别的并集中，存在最大化者和最小化者。然而，随着一条或多条边长缩短至零，环的数量以及任一类型叶节点的数量只能保持不变或减少，因此，在这些 $\mathcal{G}_G$ 的并集中，最大化者和最小化者仍满足对 D、 N 和 β的相同限制。□

AppendixA. Proofs of the lemmas

本附录给出了第 3 节中技术性引理的证明。

引理 *3.3* 的证明。继续之前，我们先指出这些关系

$$\frac{\pi}{\ell} > k_D > k_N > 0.$$

第一个不等式直接来自关于定义域包含的（严格）单调性（例如，参见 [11,推论 3.12(1)], ；由于第一特征函数除叶节点外处处严格为正，该推论适用）。第二个不等式显然成立，因为我们将狄利克雷条件替换成了诺伊曼条件（例如，参见 [11, 定理 3.4 或引理 4.1], ；这也意味着第三个不等式成立，因为在 k_N的情形下仍至少有一个狄利克雷顶点）。下文将多次使用这些不等式，不再逐一说明。

对每个狄利克雷叶节点 $e_i \sim [0, \ell_i]$，其中 0 对应叶节点， ℓ_i 对应中心顶点。于是，根据引理 3.2，归一化特征函数 $\psi_1 \sim \lambda_1$ 和 $\phi_1 \sim \tau_1$ 可写为

$$\psi_1|_{e_i}(x) = c_i \sin(k_D x)$$

and

$$\phi_1|_{e_i}(x) = c_i \sin(k_N x)$$

对所有 $i = 1, \ldots\ldots, n$均成立。中心顶点处的连续性条件给出以下方程组：

$$c_i \sin(k_D \ell_i) = c_j \sin(k_D \ell_j)$$

and

$$c_i \sin(k_N \ell_i) = c_j \sin(k_N \ell_j)$$

对于所有 $i, j = 1, \ldots\ldots, n, i \neq j$。将第一个方程除以第二个方程，由于与第一特征值相关的特征函数没有内部零点，因此可以这样做，我们得到

$$\frac{\sin(k_D \ell_i)}{\sin(k_N \ell_i)} = \frac{\sin(k_D \ell_j)}{\sin(k_N \ell_j)}$$

对于所有 $i, j = 1, \ldots\ldots, n, i \neq j$。由于函数 $x \mapsto \sin(\alpha x)\sin(\beta x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{\alpha}]$ 上具有单射性，对于任意 $0 < \beta < \alpha$，注意到对于任意 i，都有 $\ell_i \in [0, \frac{\pi}{k_D}]$，因此必有 $\ell_i = \ell_j =:$ 对于所有 i, j，都有 ℓ。注意，这也意味着：对于所有 i, j，都有 $c :\ c_i = c_j =$。

还需证明关系 $k_D + k_N = \frac{\pi}{\ell}$；为此，我们需要仔细分析特征函数。设 $e_0 \subset \Gamma \setminus \mathcal{S}$ 为连接悬挂星图与图其余部分的唯一边。令 $e_0 \sim [0, \ell_0]$，其中 0 对应于 $\mathcal{S}$ 的中心顶点，并写作 $\psi_1|_{e_0}(x) = c_0 \sin(k_D(x + \theta_D))$ 和 $\phi_1|_{e_0}(x) = c_0 \sin(k_N(x + \theta_N))$。于是，任意叶节点与中心顶点处的 e_0 之间的连续性条件变为

$$c_0 \sin(k_D \theta_D) = c \sin(k_D \ell) \tag{A.1}$$

and

$$c_0 \sin(k_N \theta_N) = c \sin(k_N \ell). \tag{A.2}$$

将 (A.1) 除以 (A.2)，得到

$$\frac{\sin(k_D \theta_D)}{\sin(k_N \theta_N)} = \frac{\sin(k_D \ell)}{\sin(k_N \ell)} =: C > 0. \tag{A.3}$$

我们的目标是证明 $C = 1$。

考虑中心顶点处的基尔霍夫条件，可得以下两个方程：

$$nc \cos(k_D \ell) = c_0 \cos(k_D \theta_D) \tag{A.4}$$

and

$$nc \cos(k_N \ell) = c_0 \cos(k_N \theta_N). \tag{A.5}$$

将 (A.4) 除以 (A.5)，得到

$$\frac{\cos(k_D \ell)}{\cos(k_N \ell)} = \frac{\cos(k_D \theta_D)}{\cos(k_N \theta_N)}.$$

将等式两边平方，并利用 (A.3)，可将上式改写为

$$\frac{1 - C^2 \sin^2(k_N \ell)}{1 - \sin^2(k_N \ell)} = \frac{1 - C^2 \sin^2(k_N \theta_N)}{1 - \sin^2(k_N \theta_N)}.$$

现在假设 $C^2 \neq 1$。那么，由函数 $x \mapsto \frac{1-C^2x^2}{1-x^2}$ 在区间 $[0,1]$, 上的单射性可知，$\sin(k_N \ell) = \sin(k_N \theta_N)$。利用 (A.2)，可得 $c = c_0$，进而由 (A.1) 得 $\sin(k_D \ell) = \sin(k_D \theta_D)$。

上述等式意味着 $\cos(k_D \ell) = \pm \cos(k_D \theta_D)$ 以及 $\cos(k_N \ell) = \pm \cos(k_N \theta_N)$。将这些等式代回 (A.4) 和 (A.5)，我们得到

$$(n \pm 1) \cos(k_D \ell) = 0$$

and

$$(n \pm 1) \cos(k_N \ell) = 0.$$

由于 $n \geq 2$ 和 $0 < \ell < \frac{\pi}{k_D} < \frac{\pi}{k_N}$，上述方程将意味着 $k_D \ell$ 和 $k_N \ell$ 都等于余弦函数的第一个正零点，即 $k_D = k_N = \frac{\pi}{2\ell}$，这立即产生矛盾。

由此可得 $C^2 = 1$，由于 C 为正，这意味着 $C = 1$。进而可知 $\sin(k_D \ell) = \sin(k_N \ell)$，其唯一解为 $k_D \ell = \pi - k_N \ell$，可改写为 $k_D + k_N = \frac{\pi}{\ell}$。□

引理 *3.5* 的证明。首先，对于某个 $L > 0$，我们将 $I \sim [0, L]$ 识别为，其中 0 对应狄利克雷顶点， L对应参数为 α 的罗宾顶点。于是，第一特征函数 ψ_1 可写为 $\psi_1(x) = c \sin(k_\alpha^I x)$，因此罗宾边界条件化为

$$k_\alpha \cos(k_\alpha L) + \alpha \sin(k_\alpha L) = 0,$$

利用恒等式 $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$，可将其改写为

$$L = \frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(\frac{\alpha}{k_\alpha}\right)}{k_\alpha}. \tag{A.6}$$

我们对星形图 S 也进行相同处理，将带有罗宾边界条件 $e_0 \sim [0,r]$ for some$r>0$ 的边与之对应，其中 $x=0$ 对应罗宾顶点。在这条边上，第一特征函数 ϕ_1 可写为 $\phi_1|_{e_0}(x) = c_0\sin(k_\alpha^S x+\theta)$，其中 θ 必须满足：

$$-k_\alpha^S\cos(\theta)+\alpha\sin(\theta)=0,$$

可改写为

$$\theta = \operatorname{arccot}\left(\frac{\alpha}{k_\alpha^S}\right).$$

记 $\theta_N = \operatorname{arccot}\left(\frac{\alpha_N}{k_{\alpha_N}^S}\right)$ 和 $\theta_D = \operatorname{arccot}\left(\frac{\alpha_D}{k_{\alpha_D}^S}\right)$，定义

$$\ell_N = \frac{\pi-\theta_N}{k_{\alpha_N}^S} \quad \text{and} \quad \ell_D = \frac{\pi-\theta_D}{k_{\alpha_D}^S}. \tag{A.7}$$

由方程 (A.6) 可知，长度为 ℓ_D、罗宾参数为 α_D 的区间 I 的第一特征值为 $\lambda_1^S(\alpha_D)$，即若取 $L=\ell_D$，则有 $k_{\alpha_D}^I = k_{\alpha_D}^S$（对 α_N 也类似，若取 $L=\ell_N$）。

要证明所需的不等式，我们需要证明对于这一选择的 $L=\ell_D$，有 $k_{\alpha_N}^I < k_{\alpha_N}^S$。我们断言，只需证明 $\ell_N<\ell_D$。

事实上，注意到对于固定的 α，只要 $0<k_\alpha L<\pi$，函数 $L\mapsto k_\alpha\cot(k_\alpha L)+\alpha$ 和 $k_\alpha \mapsto k_\alpha\cot(k_\alpha L)+\alpha$ 都严格递减。因此，若 $\ell_N<\ell_D$，则由 (A.7) 中对 ℓ_N 的选择以及恒等式 $-\cot(x)=\cot(\pi-x$可得

$$k_{\alpha_N}^S\cot(k_{\alpha_N}^S\ell_D)+\alpha_N<0;$$

并且根据 $k_{\alpha_N}^I$ 的定义，

$$k_{\alpha_N}^I\cot(k_{\alpha_N}^I\ell_D)+\alpha_N=0,$$

因此我们可以得出 $k_{\alpha_N}^I<k_{\alpha_N}^S$，这等价于 (3.4)。

因此，我们需要证明

$$\ell_N=\frac{\pi-\theta_N}{k_{\alpha_N}^S}<\frac{\pi-\theta_D}{k_{\alpha_D}^S}=\ell_D. \tag{A.8}$$

首先，将星形图 S 的狄利克雷叶节点与区间 $[0,\ell]$ 对应，其中 0 对应于狄利克雷顶点，则中心顶点处的基尔霍夫条件可写为

$$n\cot(k_{\alpha_N}^S\ell)+\cot(k_{\alpha_N}^S r+\theta_N)=0 \tag{A.9}$$

and

$$n\cot(k_{\alpha_D}^S\ell)+\cot(k_{\alpha_D}^S r+\theta_D)=0. \tag{A.10}$$

由于根据假设，$k_{\alpha_D}^S+k_{\alpha_N}^S=\frac{\pi}{\ell}$，我们有 $\cot(k_{\alpha_N}^S\ell)=-\cot(k_{\alpha_D}^S\ell)$。因此，将 (A.9) 和 (A.10) 相加，得到

$$\cot(k_{\alpha_D}^S r+\theta_D)+\cot(k_{\alpha_N}^S r+\theta_N)=0.$$

由于 $k_{\alpha_D}^S>k_{\alpha_N}^S$，我们有 $k_{\alpha_D}^S>\frac{\pi}{2\ell}>k_{\alpha_N}^S$，这意味着 $\cot(k_{\alpha_N}^S\ell)>0$ 且 $\cot(k_{\alpha_D}^S\ell)<0$。利用上述方程，这又意味着 $k_{\alpha_N}^S r+\theta_N>\frac{\pi}{2}$和 $k_{\alpha_D}^S r+\theta_D<\frac{\pi}{2}$。因此，上述方程唯一可能的解是

$$k_{\alpha_D}^S r+\theta_D=\pi-(k_{\alpha_N}^S r+\theta_N),$$

由此可得

$$\theta_N=\pi\left(1-\frac{r}{\ell}\right)-\theta_D.$$

利用这一点，(A.8) 可化简为

$$\frac{\pi-\theta_D}{k^S_{\alpha_D}} > \frac{\pi\frac{r}{\ell}+\theta_D}{\frac{\pi}{\ell}-k^S_{\alpha_D}}. \tag{A.11}$$

为进一步减少上述不等式中的未知数个数，利用 (A.10)，我们可以将 r 明确表示为 $k^S_{\alpha_D}$、θ_D 和 ℓ 的函数：

$$r=\frac{\pi-\operatorname{arccot}(n\cot(k^S_{\alpha_D}\ell))-\theta_D}{k^S_{\alpha_D}},$$

这成立，因为 $k^S_{\alpha_D}\ell\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$。

将其代入 (A.11)，得到

$$\frac{\pi-\theta_D}{k^S_{\alpha_D}}-\frac{\frac{\pi}{\ell}\left(\frac{\pi-\operatorname{arccot}(n\cot(k^S_{\alpha_D}\ell))-\theta_D}{k^S_{\alpha_D}}\right)+\theta_D}{\frac{\pi}{\ell}-k^S_{\alpha_D}}>0,$$

进一步化简可得

$$\frac{\pi\left(\frac{1}{\ell}\operatorname{arccot}(n\cot(k^S_{\alpha_D}\ell))-k^S_{\alpha_D}\right)}{k^S_{\alpha_D}\left(\frac{\pi}{\ell}-k^S_{\alpha_D}\right)}>0.$$

因此，只需证明对于任意 $\ell>0$ 和 $n\geq 2$，函数 $f(x)=\frac{1}{\ell}\operatorname{arccot}(n\cot(x\ell))-x$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2\ell},\frac{\pi}{\ell}\right)$ 上严格为正。这很容易证明，因为 $f\left(\frac{\pi}{2\ell}^+\right)=f\left(\frac{\pi}{\ell}^-\right)=0$，且其二阶导数 $f''(x)=\frac{2\ell n(n^2-1)\cot(x\ell)\csc^2(x\ell)}{(n^2\cot^2(x\ell)+1)^2}$ 在该区间上严格为负。□

References

[1] S. Ariturk, *Eigenvalue estimates on quantum graphs*, 预印本（2016），arXiv:1609.07471。[2] M. S. Ashbaugh, *Universal inequalities for the eigenvalues of the Dirichlet Laplacian*, 载于 A. Henrot（编），*Shape optimization and spectral theory*, De Gruyter Open，华沙，2017 年，第 8 章。[3] M. S. Ashbaugh, *Isoperimetric and universal inequalities for eigenvalues*, 载于《谱理论与几何》，《伦敦数学学会讲义》**273**，E. B. Davies 和 Y. Safarov 编，第 95–139 页，剑桥大学出版社，2010 年。https://doi.org/10.1017/CBO9780511566165.007；亦可通过 arXiv:math/0008087 获取。[4] M. S. Ashbaugh 和 R. D. Benguria, *Isoperimentric inequalities for eigenvalues of the Laplacian*, 载于 F. Gesteszy 等编，《谱理论与数学物理：纪念 Barry Simon 60 岁寿辰文集》，第 1 部分：量子场论、统计力学与非相对论量子系统，美国数学会，普罗维登斯，2007 年。[5] M. S. Ashbaugh 和 R. D. Benguria, *A sharp bound for the ratio of the first two eigenvalues of Dirichlet Laplacians and extensions* 2 **135** 1992 601 628 ，《Ann. Math.》（） （），–。[6] M. S. Ashbaugh 和 R. D. Benguria, *Proof of the Payne–Pólya–Weinberger conjecture*, 《Bull. Am. Math. Soc., New Ser.》**25**（1991），19–29。[7] R. Band, *The nodal count* $\{0,1,2,3,\dots\}$ *implies the graph is a tree*, 《Phil. Trans. Roy. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.》**372**（2007），20120504。[8] R. Band 和 G. L´evy, *Quantum graphs which optimize the spectral gap*, 《Ann. Henri Poincar´e》**18**（2017），3269–3323。[9] G. Berkolaiko, *A lower bound for nodal count on discrete and metric graphs*, 《Comm. Math. Phys.》**278**（2008），803–819。[10] G. Berkolaiko, J. B. Kennedy, P. Kurasov 和 D. Mugnolo, *Edge connectivity and the spectral gap of combinatorial and quantum graphs* **50** 2017 365201, 29 ，《J. Phys. A: Math. Theor.》（），第 [11] 页。G. Berkolaiko、J. B. Kennedy、P. Kurasov 和 D. Mugnolo, *Surgery principles for the spectral analysis of quantum graphs* **372** 2019 5153 5197 ，《Trans. Amer. Math. Soc.》（），–。[12] G. Berkolaiko 和 P. Kuchment, *Introduction to Quantum Graphs*, 数学调查与专著，第 186 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013 年。

[13] G. Berkolaiko、Yu. Latushkin 和 S. Sukhtaiev, *Limits of quantum graph operators with shrinking edges*, 《Adv. Math.》**352** （2019）, 632–669。[14] D. Borthwick、E. M. Harrell 和 H. Yu, *Gaps between consecutive eigenvalues for compact metric graphs*, 《J. Math. Anal. Appl.》**531** （2024）, 127802, 26 页。[15] S. Demirel 和 E. M. Harrell, *On semiclassical and universal inequalities for eigenvalues of quantum graphs*, 《Rev. Math. Phys.》**22** （2010）, 305–329。[16] L. Friedlander, *Extremal properties of eigenvalues for a metric graph*, 《Ann. Inst. Fourier》**55** （2005）, 199–211。[17] L. Friedlander, *Genericity of simple eigenvalues for a metric graph*, 《Israel J. Math.》**146** （2005）, 149–156。[18] A. Henrot, *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Birkh¨auser, 巴塞尔, 2006 年。[19] J. B. Kennedy、P. Kurasov、G. Malenov´a 和 D. Mugnolo, *On the spectral gap of a quantum graph*, 《Ann. Henri Poincar´e》**17** （2016）, 2439–2473。[20] P. Kurasov, *Spectral Geometry of Graphs*。《算子理论进展与应用》**293**, Birkh¨user, 柏林, 2024 年。[21] D. Mugnolo, *What is actually a metric graph?*, 预印本（2019）, arXiv:1912.07549。[22] S. Nicaise, *Spectre des réseaux topologiques finis*, 《Bull. Sci. Math., II. S´er.》**111** （1987）, 401–413。[23] L. E. Payne、G.P´olya 和 H.F. Weinberger, *On the ratio of consecutive eigenvalues*, 《J. Math. Phys.》**35**（1956）, 289–298。

School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332-0160, United Statesof America*Email address*: harrell@math.gatech.eduJames B. Kennedy, Departament of Mathematics, University of Aveiro, 3810-193 Aveiro, Portugal*Email address*: jbkennedy@ua.ptGrupo de Física Matemática, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Por-tugal*Email address*: fc58288@alunos.ciencias.ulisboa.pt