arXiv:2603.26222v1 [math.KT] 27 Mar 2026

代数 Cuntz-Pimsner 环的 K理论

THIBAUT LESCURE

Abstract. 我们为 Carlsen 和 Ortega 引入的代数 Cuntz-Pimsner 环建立了同伦 K 理论群的长正合列 [CO11]，方法是调整 Pimsner 的原始证明 [Pim97]，使之符合 Cuntz 的形式体系。

1. 引言

在 [Pim97], Pimsner 引入了一类 C^*-代数，它同时推广了交叉积和图 C^*-代数。该构造以一个系数 C^*-代数 A 和一个右 Hilbert 模 $\mathcal{H}$ 为输入，并配备从 A 到 $\mathcal{H}$ 的左作用，该作用由可伴随算子给出。将 $\mathcal{H}$ 中的元素视为 Fock 空间上的产生算子和湮灭算子，即可定义一种称为 Toeplitz(-Pimsner) 代数 $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$的 C^*-代数。若 $\mathcal{I}$ 是 A 的一个 C^*-理想，并通过紧算子在 $\mathcal{H}$ 上左作用，则对一个适当的理想取商，可得到相对 Cuntz-Pimsner 代数$\mathcal{O}_{\mathcal{H},\,\mathcal{I}}$。借助 Kasparov 的双变 K 理论，Pimsner 得以在 K 理论中构造包含映射 $A \to \mathcal{T}_{\mathcal{H}}$的一个逆。结合对诱导映射$K_*(\mathcal{I}) \to K_*(A)$ 的计算，这一结果给出了 K 理论群的长正合列，同时推广了 Pimsner-Voiculescu 的长正合列以及图 C^* 代数对应的长正合列。

Carlsen 和 Ortega [CO11] 将 Pimsner 的构造推广到纯代数情形：其中，A 被一个（非含幺、非交换）环 R 取代，而 $\mathcal{H}$ 被一个 R-系统 $\mathcal{X} = (X, X', g)$取代，该系统由一对 R-双模和一个 R-双模映射 $X' \otimes_R X \to R$组成。在 [CT06], 中，Corti˜nas 和 Thom 将 Kasparov 双变 K 理论的代数类比引入其中，将 Cuntz 的经典方法 [CMR07, C97] 推广到纯离散情形。他们的理论与 Weibel 同伦 K 理论 [Wei89] 的关系，正如算子 K 理论与 Kasparov 的 KK 理论之间的关系。在同一篇论文中，他们为形如 $R \rtimes \mathbb{Z}$的交叉积的同伦 K 理论群建立了 Pimsner–Voiculescu 正合列的代数类比。在 [ABC09] 中，研究者为任意环上的行有限箭图的 Leavitt 路径代数建立了同伦 K 理论群的长正合列。这两类环都是所谓代数 Cuntz-Pimsner 环的特例。

我们用一个合适的拟同态重述 Pimsner 的原始证明，并将其作为 K-理论中到包含映射 $R \to \mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ 的逆。我们不直接研究同伦 K-理论或其双变版本，而是研究一个给定的同伦不变、分裂正合且 M-稳定的函子E : Rings $\to$ Ab（参见 [CMR07] 或 [CT06]）。我们需要确保底层的模结构具有充分的非退化性。特别地，我们假设 R-系统满足 [CO11] 的条件 (FS)，以确保 Toeplitz 环具有泛性质。此外，对于所有 R-系统 $\mathcal{X}$以及任意 M-稳定函子 E，若 $\mathcal{K}_R(\mathcal{X})$ 表示有限秩算子环，则应存在一个诱导映射 $E(\mathcal{K}_R(\mathcal{X})) \to E(R)$。角嵌入应在 E 下映为同构。

基于这些原因，我们假设 R 具有局部单位元，且 R-系统 $\mathcal{X}$ 满足条件 (FS)，并配备了一个到规范 R-系统 $R^{(I)}$（参见定义 2.12）。在这些假设下，我们能够运用 Burgstaller 引入的形式体系解决这些技术问题[Bur25]。随后，我们回顾 Toeplitz 环和相对 Cuntz-Pimsner 环的构造，并着手进行主要计算。我们的第一个结果如下。

定理 A. 设 R 是一个局部幺元环。设 $\mathcal{X}$ 是一个 R-对应。令 $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ 为相应的 Toeplitz 环。每个同伦不变、分裂正合且 M-稳定的函子 E 都会将包含映射 $R \to \mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ 映为一个同构 $E(R) \cong E(\mathcal{T}_{\mathcal{X}})$。

设 $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$: Rings $\to$ 阿贝尔群是一个由同伦不变且 M-稳定的函子构成的序列，并满足切除性质。这意味着任意环扩张

$$I \longrightarrow R \longrightarrow R/I$$

诱导出相应阿贝尔群的长正合列

$$\ldots \longrightarrow E_n(I) \longrightarrow E_n(R) \longrightarrow E_n(R/I) \longrightarrow E_{n-1}(I) \longrightarrow \ldots$$

利用定理 A 以及 Cuntz-Pimsner 环是 Toeplitz 环的一个商这一事实，我们得到

定理 B. 设 R 是一个局部幺元环。设 $\mathcal{X}$ 是一个 R-对应。设 $\mathcal{I} \lhd R$ 是一个具有局部单位元的双边理想，并且它在左侧通过紧算子作用于 X。存在一个长正合列 $(n \in \mathbb{Z})$

$$\ldots \longrightarrow E_n(\mathcal{I}) \xrightarrow{E_n(i)-E_n(\mathcal{X})} E_n(R) \xrightarrow{E_n(j)} E_n(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathcal{I}}) \longrightarrow E_{n-1}(\mathcal{I}) \longrightarrow \ldots$$

这里 $j\colon R \to \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathcal{I}}$ 和 $i\colon \mathcal{I} \to R$ 是自然包含映射。

如果将函子序列（E_n）$_{n\in\mathbb{Z}}$ 替换为 Weibel 同伦 K 理论 [Wei89] 或周期循环同调 [CQ97]，则定理 A 和 B 仍然成立。

2. Preliminaries

2.1 Burgstaller 函数模与 M-稳定函子

我们固定一个（不一定含幺或交换的）环 R。

定义 2.1. 右函数 R-模是一个三元组 (X, X', g)，其中 X 是右 R-模，X' 是左 R-模，而 $g\colon X' \otimes_{\mathbb{Z}} X \to R$ 是一个 R-双模映射（通常称为该函数模的标量积）。对于所有 $f \in \mathrm{Hom}_R(X, X)$，若 f 满足以下条件，且其伴随为 $f^* \in \mathrm{Hom}_R(X', X')$，则称 f 为可伴随：

$$\forall x \in X, \forall \phi \in X', g(\phi \otimes f(x)) = g(f^*(\phi) \otimes x)$$

如果满足以下条件，我们称 g 为非退化：

$$(\forall \phi \in X', g(\phi \otimes x) = 0) \implies x = 0 \text{ and } (\forall x \in X, g(\phi \otimes x) = 0) \implies \phi = 0$$

对于 $x \in X$ 和 ϕ 属于 X'，我们将 $g(\phi \otimes x) = \phi(x)$ 记作 $x \in X$ 和 ϕ。容易定义两个右函数 R-模 $\mathcal{X} = (X, X', g)$ 和 $\mathcal{Y} = (Y, Y', h)$ 的直和为 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} = (X \oplus Y, X' \oplus Y', g + h)$。下面的命题很容易验证。

命题 2.2. 对于 R 上的任意右函数模 $\mathcal{X} = (X, X', g)$，$\mathcal{X}$ 的可伴随自同态集合构成一个环。若 g 非退化，则伴随唯一，且伴随满足 $(f_1 f_2)^* = f_2^* f_1^*$。

我们用 $\mathcal{L}_R(\mathcal{X})$ 表示函数模 $\mathcal{X}$ 上的可伴随右 R-模自同态所构成的环，其运算为逐点求和与复合。我们始终考虑标量积非退化的泛函模。因此，对于两个泛函 R-模 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$，我们通常将 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 写作一个存在伴随的 R-模映射 $f\colon X \to Y$。

定义 2.3. 设 $\mathcal{X} = (X, X', g)$ 是 R 上的右函数模。我们将 $\mathcal{X}$ 的紧算子阿贝尔群定义为 $\mathcal{K}_R(\mathcal{X}) = X \otimes_R X'$。它在乘积运算 $(x_1 \otimes \phi_1)(x_2 \otimes \phi_2) = x_1 \otimes (\phi_1(x_2) \cdot \phi_2)$ 下构成一个环。

$\mathcal{K}_R(\mathcal{X})$ 在左侧通过 $(x \otimes \phi) \cdot y = x \cdot \phi(y)$ 作用于 X，也在右侧通过 $\psi \cdot (x \otimes \phi) = \psi(x) \cdot \phi$ 作用于 X'。这给出了一个从 $\mathcal{K}_R(\mathcal{X})$ 到 $\mathcal{X}$ 的可伴算子环同态。

定义 2.4. [CO11] 右泛函 R-模 $\mathcal{X} = (X, X', g)$ 称为满足条件 (FS)，如果对于所有 $x_1, \ldots x_n \in X$ 和 $\phi_1, \ldots \phi_n \in X'$ 都存在 $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathcal{K}_R(\mathcal{X})$，使得 $\Theta_1 \cdot x_i = x_i$ 并且 $\phi_i \cdot \Theta_2 = \phi_i$ 对于所有 $1 \le i \le n$。

回顾一下，若环 R 满足：对任意 r_1、……、$r_n \in R$，都存在一个幂等元 $e \in R$，使得对所有 $1 \le i \le n$，均有 $er_i = r_i e = r_i$，则称其具有局部单位元。回顾一下，若右 R-模 M 满足 $M \cdot R = M$，则称其为非退化模。若 R 具有局部单位元，则非退化性等价于要求右作用映射 $M \otimes_R R \to M$ 为双射。

命题 2.5。 [CO11] 设 $\mathcal{X}$ 是一个满足条件 (FS) 的右函数模，其定义在 R

(i) $\mathcal{X}$ 的底层标量积是非退化的。(ii) $\mathcal{X}$ 的底层 R-模结构是非退化的。(iii) 通过环同态 $j: x\otimes\phi\mapsto\theta_{x,\ \phi}$ （定义为 $\theta_{x,\ \phi}(y)=x\cdot\phi(y)$ ）， $\mathcal{K}_R(\mathcal{X})$ 被嵌入为 $\mathcal{L}_R(\mathcal{X})$ 的一个双边理想。

证明。设 $x\in X$ 满足对所有 $\phi\in X'$，均有 $\phi(x)=0$。存在一个 $\Theta\in\mathcal{K}_R(\mathcal{X})$，使得$\Theta\cdot x=x$。我们可以写成 $\Theta=\sum_i x_i\otimes\phi_i$，于是 $x=\sum_i x_i\cdot\phi_i(x)=0$。类似地，若 $\phi\in X'$ 满足 $\forall x\in X$，且 $\phi(x)=0$，则 $\phi=0$。

公式 $f\circ\theta_{x,\ \phi}=\theta_{f(x),\ \phi}$ 和 $\theta_{x,\ \phi}\circ f=\theta_{x,\ f^*(\phi)}$ 确保 $\mathcal{K}_R(\mathcal{X})$ 的像是 $\mathcal{L}_R(\mathcal{X})$ 的一个双边理想。设 $k\in\mathcal{K}_R(\mathcal{X})$ 满足 $j(k)=0$，即对所有 $x\in X$，都有 $k\cdot x=0$。记为 $k=\sum_i x_i\otimes\phi_i$。设 $e\in\mathcal{K}_R(\mathcal{X})$ 满足对所有 $1\le i\le n$，均有 $\phi_i\cdot e=\phi_i$。我们有$ke=\sum_i x_i\otimes(\phi_i\cdot e)=k$。现在记为 $e=\sum_j y_j\otimes\psi_j$。最后，$k=ke=\sum_j(k\cdot y_j)\otimes\psi_j=0$。□

本文余下部分中，我们始终讨论满足条件 (FS) 的泛函模。因此，我们将元素 $x\otimes\phi\in X\otimes_R X'$ 与 $\theta_{x,\phi}\in\mathcal{L}_R(\mathcal{X})$ 等同。

例 2.6. 对于任意集合 I，我们将 $R^{(I)}$ 记为由 R中的元素构成的有限支撑序列 $(r_i)_{i\in I}$所组成的 R-双模。我们还将 $R^{(I)}$ 记为配备标量积 $\langle(\alpha_i),(\beta_i)\rangle=\sum_i\alpha_i\beta_i$给出的标量积的函数模 $(R^{(I)},R^{(I)},\langle,\rangle_R)$。我们将使用如下识别： $\mathcal{K}_R(R^{(I)})\cong M_I(R)$ 可视为取值于 R 且仅有有限个非零值的矩阵环。当 R 具有局部单位元时，该函数模满足条件 (FS)。

定义 2.7. [Bur25] 设 $\mathcal{X}=(X,X',g)$ 和 $\mathcal{Y}=(Y,Y',h)$ 是两个右泛函 R-模。泛函同态由两个 R-模映射 $U:\ X\to Y$和 $V:\ X'\to Y'$ 组成，且满足

$$\forall\phi\in X',x\in X,V(\phi)(U(x))=\phi(x)$$

如果 $\mathcal{Y}$ 的标量积是非退化的，那么映射 U 和 V 是单射。（如果 $U(x)=0$，那么对所有 $\phi\in X'$， $\phi(x)=0$。）

例 2.8. 假设有三个右 R-模，满足 $\mathcal{Y}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{P}$。在这种情况下，令 $U:\ X\to Y$ 和 $V:\ X'\to Y'$ 为与直和分解 $Y=X\oplus P$ 和 $Y'=X'\oplus P'$ 相对应的包含映射。换言之，若 $\iota:\ \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 和 $\pi:\ \mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ 是显然的包含映射和投影，则令 $U=\iota$ 和 $V=\pi^*$。我们有 $V(\phi)(U(x))=(\pi^*(\phi))(\iota(x))=\phi(\pi(\iota(x)))=\phi(x)$。令 ϕ_1、 $\ldots\phi_n\in X'$ 和 $y\in Y$。 $V(\phi_i)(y)=(\pi^*(\phi_i))(y)=\phi_i(\pi(y))$。因此，$(\iota,\pi^*)$ 是一个泛函同态。

例 2.9. 设 M 是有限生成右 R-模。那么 M 是投射的，当且仅当它是形如 $(eR)^n$ 的右 R-模的直和项，其中 $e\in R$ 是幂等元（见 [Abr83]）。存在一个右泛函 R-模 $\mathcal{M}=(M,M^*,g)$，其中 $M^*=\mathrm{Hom}_R(M,R)$，且 g 是求值映射。我们有 $((eR)^n)^*\cong(Re)^n$。稍微滥用一下记号，我们将右泛函 R-模 $((eR)^n,(Re)^n,\langle,\rangle)$ 记作 $(eR)^n$。存在一个右泛函 R-模 $\mathcal{N}$，使得 $\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}\cong(eR)^n$。此外，由包含映射显然可得一个泛函同态 $(eR)^n\to R^n$。因此存在一个泛函同态 $\mathcal{M}\to R^n$。

设 $(U,V):\ \mathcal{X}=(X,X',g)\to\mathcal{Y}=(Y,Y',h)$ 是两个右泛函 R-模之间的泛函同态。定义 2.7 中的公式使映射 $\iota_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}=U\otimes V:\ \mathcal{K}_R(\mathcal{X})\to\mathcal{K}_R(\mathcal{Y})$ 成为环同态。此外，可以验证，若 $\mathcal{X}$ 满足条件 (FS)，则 $\iota_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ 是单射。令 Rings 表示以环同态为态射的结合环范畴。

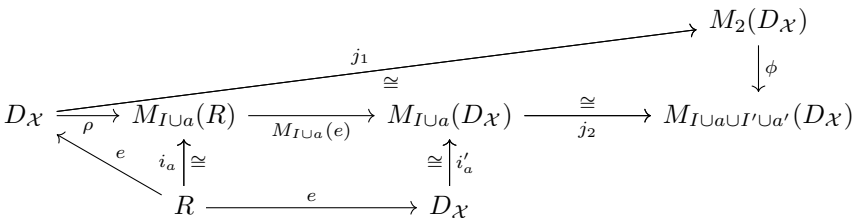
定义 2.10. 设 $E:\mathbf{Rings}\to$ 阿贝尔群 是一个函子。若对于任意环 S、任意集合 I 以及任意指定元素 $i\in I$，对角嵌入 $\sigma_i:\ S\to M_I(S)$ 在第 i 个坐标处映为一个同构，则称其为 M-稳定的。

根据 [CMR07，命题3。16] 任意此类函子在内同构下不变，因此 $E(\sigma_i)$ 不依赖于 i的选择。

Burgstaller [Burgstaller25] 最近利用泛函同态，将这一同构推广到了更一般的角嵌入。为方便读者，我们在此回顾他的结果及其证明。

命题 2.11. 设 E : Rings $\to$ 阿贝尔群是一个 M-稳定函子。设 R 是一个环。设 $\mathcal{X}$ 是一个右函数 R-模，且存在一个到形如 $R^{(I)}$的函数模的泛函同态，其中 I 是一个集合。由左上角嵌入 $E(\iota_{R,\ R\oplus\mathcal{X}})$ 诱导的映射 $E(R) \to E(\mathcal{K}_R(R\oplus\mathcal{X}))$ 是一个同构。

证明。写作 $D_{\mathcal{X}} = \mathcal{K}_R(R\oplus\mathcal{X})$。存在一个函数同态 $(U,V)\colon \mathcal{X} \to R^{(I)}$。令$a$ 为不属于 I的形式符号，并将 $I\cup\{a\}$简记为 $I\cup a$。(U,V) 给出另一个函数同态 $(\mathrm{id}_R\oplus U, \mathrm{id}_R\oplus V)\colon R\oplus\mathcal{X} \hookrightarrow R^{(I\cup a)}$，它诱导出一个环同态 $\rho = \iota_{\mathcal{X},R^{(I\cup a)}}\colon D_{\mathcal{X}} \to M_{I\cup\{a\}}(R)$。记 $e\colon R\hookrightarrow D_{\mathcal{X}}$ 为由函数模 $R\hookrightarrow R\oplus\mathcal{X}$的分裂嵌入所诱导的左上角嵌入。考虑以下图表



这里，$e = \iota_{R,R\oplus\mathcal{X}}$ 表示角嵌入 $R\to D_{\mathcal{X}}$。 i_a 和 i'_a 表示嵌入到相应矩阵环中坐标 a 所在角内的嵌入。 $I'\cup a'$ 只是 $I\cup a$ 的一个副本，而 j_2 通过与 $I'\cup a'$的坐标对应，将 $M_{I\cup a}(D_{\mathcal{X}})$嵌入其中。 j_1 是右下角嵌入。我们有以下对应关系 $M_2(D_{\mathcal{X}})\cong\mathcal{K}_R((R\oplus\mathcal{X})^2))$ 和 $M_{I\cup a\cup I'\cup a'}(D_{\mathcal{X}})\cong\mathcal{K}_R((R\oplus\mathcal{X})^{I\cup a\cup I'\cup a'})$。上图中的映射 $\phi\colon M_2(D_{\mathcal{X}}) \to M_{I\cup a\cup I'\cup a'}(D_{\mathcal{X}})$ 对应于以下函数同态

$$(R\oplus\mathcal{X})^2 \xhookrightarrow{\mathrm{id}_{R\oplus\mathcal{X}}\oplus\mathrm{id}_R\oplus f} R\oplus\mathcal{X}\oplus R^{(I\cup a)} \xhookrightarrow{\alpha\oplus\beta} (R\oplus\mathcal{X})^{(I\cup a)}\oplus(R\oplus\mathcal{X})^{(I'\cup a')}$$

这里 $f = (U,V)\colon \mathcal{X}\to R^{(I)}$和 $\alpha\colon R\oplus\mathcal{X}\hookrightarrow(R\oplus\mathcal{X})^{(I\cup a)}$是第 a 个坐标处的嵌入。 $\beta\colon R^{(I\cup a)}\hookrightarrow(R\oplus\mathcal{X})^{(I'\cup a')}$ 是在每个坐标处的嵌入。在上面的图表中，同构应理解为相应阿贝尔群层面的同构：根据 M-稳定性，映射 $E(i_a)$、 $E(i'_a)$、 $E(j_1)$、 $E(j_2)$ 均为双射。

直接计算可证明该图表是可交换的（β 诱导环同态$M_{I\cup a}(e)$）。剩下需要证明 $E(e)$ 是一个同构，其逆为 $E(i_a)^{-1}E(\rho)$。我们有$E(i_a)^{-1}E(\rho)E(e) = \mathrm{id}_{E(R)}$，因为 $i_a = \rho e$。

$$\begin{aligned} E(e)E(i_a)^{-1}E(\rho) &= E(i'_a)^{-1}E(M_{I\cup\{a\}}(e))E(\rho) \\ &= E(i'_a)^{-1}E(j_2)^{-1}E(j_2)E(M_{I\cup\{a\}}(e))E(\rho) \\ &= E(i'_a)^{-1}E(j_2)^{-1}E(\phi)E(j_1) \end{aligned}$$

现在的诀窍是写成 $E(j_2) = E(j'_2)$ 和 $E(j_1) = E(j'_1)$，其中 $j'_1\colon D_{\mathcal{X}}\hookrightarrow M_2(D_{\mathcal{X}})$ 是左上角嵌入，而 $j'_2\colon M_{I\cup a}(D_{\mathcal{X}})\hookrightarrow M_{I\cup a\cup I'\cup a}(D_{\mathcal{X}})$ 是通过识别 $I\cup a\cup I'\cup a'$ 中的坐标 $I\cup a$ 得到的嵌入。由于 $\phi j'_1 = j'_2 i'_a$，我们最终得到$E(i'_a)^{-1}E(j_2)^{-1}E(\phi)E(j_1) = E(i'_a)^{-1}E(j'_2)^{-1}E(\phi)E(j'_1) = \mathrm{id}_{E(D_{\mathcal{X}})}$。 □

定义 2.12. 设 R 和 S 是两个环。一个 R-S 对应是一个四元组 $(\mathcal{X},\Delta,\mathcal{U},I)$，其中

(i) $\mathcal{X}$ 是满足条件 (FS) 的右泛函 S-模 (ii) $\Delta\colon R\to\mathcal{L}_S(\mathcal{X})$ 是环同态（称为左作用），使得在 X 上诱导的左 R-模结构和在 X' 上的右 R-模结构均为非退化:$\Delta(R)\cdot X = X$ 和 $X'\cdot\Delta(R) = X'$(iii) I 是一个集合，且 $\mathcal{U}\colon\mathcal{X}\to S^{(I)}$ 是泛函同态

R-对应是一个 R-R 对应。

对应这一概念在此作为 C^*-对应这一经典概念的最小代数类比。

我们通常直接用 $\mathcal{X}$表示对应 $(\mathcal{X},\Delta,\mathcal{U},I)$。取一个带有泛函同态 $\mathcal{U}_1:\mathcal{X}\to S^{(I)}$ 的 R-S 对应$\mathcal{X}=(X,X',g)$，以及一个带有泛函同态 $\mathcal{U}_2:\mathcal{Y}\to T^{(J)}$的 S-T 对应 $\mathcal{Y}=(Y,Y',h)$。张量积 $\mathcal{X}\otimes_S\mathcal{Y}$ 定义为如下的 R-T 对应：$\mathcal{X}\otimes_S\mathcal{Y}=(X\otimes_S Y,Y'\otimes_S X',k)$，其中 k 由公式 $(\psi\otimes\phi)(x\otimes y)=\psi(\phi(x)\cdot y)$ 定义，对所有 $x\in X,y\in Y,\phi\in X',\psi\in Y'$ 均成立。其底层的泛函同态由下式给出：

$$X\otimes_S Y\xrightarrow{U_1\otimes_S\mathrm{id}_Y}S^{(I)}\otimes_S Y\longrightarrow Y^{(I)}\xrightarrow{\oplus_I U_2}R^{(I\times J)}$$

$$Y'\otimes_S X'\xrightarrow{\mathrm{id}_{Y'}\otimes_S V_1}Y'\otimes_S S^{(I)}\longrightarrow Y'^{(I)}\xrightarrow{\oplus_I V_2}R^{(I\times J)}$$

设 $\mathcal{X}$ 是一个 R-S 对应。用 $\Delta:R\to\mathcal{L}_S(\mathcal{X})$ 表示左作用。假设 R 满足 $\forall r\in R,\Delta(r)\in\mathcal{K}_S(\mathcal{X})$。令 E: Rings $\to$ 阿贝尔群为一个 M-稳定函子。由于 $E(\iota_{R,\ R\oplus\mathcal{X}})$ 是一个同构，我们看到 $\mathcal{X}$ 通过以下图表诱导出映射 $E(\mathcal{X}):E(R)\to E(S)$

$$R\xrightarrow{\Delta}\mathcal{K}_S(\mathcal{X})\xrightarrow{\iota_{\mathcal{X},S\oplus\mathcal{X}}}\mathcal{K}_S(S\oplus\mathcal{X})\xleftarrow{\iota_{S,S\oplus\mathcal{X}}}S$$

对于应用，我们还需要另一种计算 $E(\mathcal{X})$ 的方法。$\mathcal{X}$ 的泛函同态保证存在一个环同态 $\iota_{\mathcal{X},\ S^{(I)}}:\mathcal{K}_S(\mathcal{X})\to M_I(S)$。由于 E 是一个 M-稳定函子，因此存在映射 $E(\mathcal{K}_S(\mathcal{X}))\to E(S)$；该映射由与任意角嵌入 $\iota_{S,\ S^{(I)}}:S\to M_I(S)$ 所诱导映射的逆复合而得。

命题 2.13. $E(\iota_{S,S\oplus\mathcal{X}})^{-1}E(\iota_{\mathcal{X},S\oplus\mathcal{X}})=E(\iota_{S,S^{(I)}})^{-1}E(\iota_{\mathcal{X},S^{(I)}})$.

证明. 下列图表

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{K}_S(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{X},S\oplus\mathcal{X}}} & \mathcal{K}_S(S\oplus\mathcal{X}) & \xleftarrow{\iota_{S,S\oplus\mathcal{X}}} & S\\ & {\scriptstyle h}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\rho} & \swarrow{\scriptstyle\iota_a} & \\ & & M_{I\cup a}(S) & & \end{array}$$

是交换的。$\rho=\iota_{S\oplus\mathcal{X},S^{(I\cup a)}}$由分解 $S^{(I\cup a)}=(S\oplus\mathcal{X})\oplus\mathcal{Y}$诱导。$h=\iota_{\mathcal{X},S^{(I\cup a)}}$是$\iota_{\mathcal{X},S^{(I)}}:\mathcal{K}_S(\mathcal{X})\to M_I(S)$与嵌入$\sigma=\iota_{S^{(I)},S^{(I\cup a)}}:M_I(S)\hookrightarrow M_{I\cup a}(S)$的复合。$\iota_a=\iota_{S,S^{(I\cup a)}}$是坐标 a处的嵌入。其交换性推出$E(\iota_{S,S\oplus\mathcal{X}})^{-1}E(\iota_{\mathcal{X},S\oplus\mathcal{X}})=E(i_a)^{-1}E(h)$。该图表

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{K}_S(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{X},S^{(I)}}} & M_I(S) & \xleftarrow{\iota_{S,S^{(I)}}} & S\\ & {\scriptstyle h}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & \swarrow{\scriptstyle i_a} & \\ & & M_{I\cup a}(S) & & \end{array}$$

也具有交换性。类似地，我们得到 $E(\iota_{S,\ S^{(I)}})^{-1}E(\iota_{\mathcal{X},\ S^{(I)}})=E(i_a)^{-1}E(h)$。 □

2.2 代数 Cuntz-Pimsner 环

在本节中，R 是一个局部幺元环，$\mathcal{I}$ 是 R 的一个也具有局部单位元的双边理想。设 $\mathcal{X}=(X,X',g)$ 是一个 R-对应，且 $\mathcal{I}$ 通过紧算子在左侧作用于 X。这意味着，若 $\Delta:R\longrightarrow\mathcal{L}_R(X)$ 是左作用，则 $\Delta(\mathcal{I})\subset\mathcal{K}_R(X)$。

令 $T(X)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}X^{\otimes n}$ 表示称为 Fock 空间的 $\mathbb{N}$-分次 R-R 双模（其中张量积均取在 R 上）。

存在一个 R-对应

$$T(\mathcal{X})=(T(X),T(X'),\widetilde{g})$$

其中 $\widetilde{g}(\phi_1\otimes\cdots\otimes\phi_n,x_1\otimes\cdots\otimes x_m)=0$若 $n\neq m$，且

$$\widetilde{g}(\phi_1\otimes\cdots\otimes\phi_n,x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=\phi_1\big(\phi_2(\cdots(\phi_n(x_1)x_2)\cdots)x_n\big).$$

对所有 $\phi_k \in X'$ 和 $x_i \in X$。对于 $\phi \in X'$，令 $x \in X$ 和 $p \in T(X)$ 为一个纯张量，定义

$$T_x(p) := x \otimes p,$$
$$T_\phi(p) := \begin{cases} 0 & \text{if } \deg(p) = 0 \\ \phi(p_1) \cdot p_2 \otimes \cdots \otimes p_n & \text{if } p = p_1 \otimes \cdots \otimes p_n,\ n \geq 1. \end{cases}$$

于是，$T_x, T_\phi \in \mathcal{L}_R(T(X))$ 的伴随在所有纯张量 $\psi \in T(X')$ 上定义为

$$T_x^*(\psi) := \begin{cases} 0 & \text{if } \deg(\psi) = 0, \\ \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{n-1} \cdot \psi_n(x), & \text{if } \psi = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n \end{cases}$$
$$T_\phi^*(\psi) := \psi \otimes \phi,$$

在 $\mathcal{L}_R(T(X'))$ 中。

定义 2.14。 $\mathcal{X}$ 的 Toeplitz 环 $\mathcal{T}_\mathcal{X}$ 是由 $T_x, T_\phi, r \cdot \mathrm{id}_{T(X)} \in \mathcal{L}_R(T(X))$ $\phi \in X', x \in X, r \in R$ 生成的子环。

设 $J_{\mathcal{X},\mathcal{I}}$ 为由 $\mathcal{T}_\mathcal{X}$ 生成的双边理想 $\mathcal{I} \cdot P_0$ 其中 $P_0 \in \mathcal{L}_R(T(X))$ 是将 x 在 $\deg(x) \geq 1$ 时映为 0，并在 R 上为恒等映射的映射。 Cuntz-Pimsner 环 $\mathcal{X}$ 相对于理想 $\mathcal{I}$ 定义为商环 $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathcal{I}} = \mathcal{T}_\mathcal{X} / J_{\mathcal{X},\mathcal{I}}$.

$T(X)$ 是一个 $\mathbb{N}$-分次 R-双模。环 $\mathcal{T}_\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\ \mathcal{I}}$ 是 $\mathbb{Z}$-分次的。注意，如果基环 R 具有局部单位元，这些环也具有局部单位元。

注记 2.15. 请注意， P_0 通常并不是 $\mathcal{T}_\mathcal{X}$ 的元素。之所以将 $\mathcal{I} \cdot P_0$ 包含在 $\mathcal{T}_\mathcal{X}$ 中，是因为 $\mathcal{I}$ 通过紧算子作用于 X。因此，对于所有 $i \in \mathcal{I}$，都存在 $x_i \in X$ 和 $\phi_i \in X'$，使得

$$\Delta(i) = \sum_i x_i \otimes \phi_i$$

and

$$i \cdot P_0 = i \cdot \mathrm{id}_{T(X)} - \sum_i T_{x_i} T_{\phi_i} \in \mathcal{T}_\mathcal{X}$$

命题 2.16. $J_{\mathcal{X},\ \mathcal{I}}$ 是右函数 R-模 $T(\mathcal{X}) \cdot \mathcal{I} = (T(X) \cdot \mathcal{I}, \mathcal{I} \cdot T(X')\ \widetilde{g})$ 上的紧算子理想。

证明。我们可以通过给出算子在每个子空间 $X^{\otimes n}$ 上的作用，将 $\mathcal{L}_R(T(X))$ 的元素表示为（无限）矩阵。特别地

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ x & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & x & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & x & 0 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}, T_\phi = \begin{pmatrix} 0 & \phi & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \phi & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \phi & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}, \pi_0 \cdot i = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

这里，上述矩阵中的符号 x （分别为 ϕ）应理解为算子 T_x （分别为 T_ϕ）在相应子空间 $X^{\otimes n}$ 上的限制。此外， $\mathcal{K}_R(T(\mathcal{X}) \cdot \mathcal{I}) = T(X) \cdot \mathcal{I} \otimes_R \mathcal{I} \cdot T(X') = T(X) \cdot \mathcal{I} \otimes_R T(X')$，因为 $\mathcal{I}$ 具有局部单位元。展开张量积可得

$$\mathcal{K}_R(T(\mathcal{X} \cdot \mathcal{I})) = \bigoplus_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} X^{\otimes n} \otimes \mathcal{I} \otimes (X')^{\otimes m},$$

它是 $\mathcal{L}_R(T(X))$ 的一个理想。我们有 $J_{\mathcal{X},\ \mathcal{I}} \subset \mathcal{K}_R(T(\mathcal{X}) \cdot \mathcal{I})$，因为 $P_0 \in \mathcal{K}_R(T(\mathcal{X} \cdot \mathcal{I}))$，而且任何形如 T_ϕ 或 T_x 的矩阵与有限矩阵相乘，仍然是有限矩阵。此外，对于任意 $i \in \mathcal{I}$、 $p = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in X^{\otimes n}$、 $\psi = \phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_m \in (X')^{\otimes m}$：

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & (p \cdot i) \otimes \psi & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & & & & \end{pmatrix} = T_{x_1} \dots T_{x_n} (i \cdot P_0) T_{\phi_1} \dots T_{\phi_m} \in \mathcal{T}_\mathcal{X}. \qquad \square$$

例 2.17。设 $\mathcal{X}=(M,M^*,\mathrm{ev})$，其中 M 是一个有限生成且作为右模为投射的 R-R 双模。我们有

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}\cong\varinjlim_{k\in\mathbb{N}}\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{-,R}(M^{\otimes k},M^{\otimes k+d})$$

作为环。对于负的 n，我们约定 $M^{\otimes n}$ 是零模。余极限是通过张量乘以 M 的恒等映射取得的，乘积则由复合给出。事实上，由于 M_R 是有限生成投射的，我们有一个同构（参见 [A´AM87]）$\mathrm{Hom}_{-,R}(M^{\otimes k},M^{\otimes l})\cong M^{\otimes l}\otimes(M^*)^{\otimes k}$。若令 O 为上述余极限的直和所得到的环，则存在一个环同态 $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}\to O$，它是对充分大的 k 对应的模$M^{\otimes k}$作限制而得到的。此映射的核显然是 $J_{\mathcal{X}}=T(M)\otimes T(M^*)$。若 R 含幺，则 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 与双模 M 的强协变环重合（参见 [Mey]）。

例 2.18. 令 $\mathcal{X}=(R,R,\mu)$, $\mathcal{I}=R$。令 R通过乘法作用于 R。则 $T(X)=R^{(\mathbb{N})}$。每个 T_x 都通过乘以 x 并将次数加一的方式作用于 $T(X)$，每个 T_ϕ都乘以 ϕ并将次数减一。此外， $J_{\mathcal{X}}=\mathcal{K}_R(T(\mathcal{X}))=M_\infty(R)$ 且

$$\mathcal{T}_{\mathcal{X}}\cong R\langle x,y\rangle/(xy-1),\qquad \mathcal{O}_{\mathcal{X}}\cong R[x,x^{-1}].$$

更一般地，若 α 是 R 的环自同构，且每个 $r\in R$ 在 R 上左乘 r、右乘 $\alpha(r)$，则 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}\cong R\rtimes_\alpha\mathbb{Z}$ 是 R 与 $\mathbb{Z}$ 关于 α的交叉积环。

TToeplitz 环具有一种关于表示的泛刻画，类似于 e one C^*-代数。

定义 2.19. [CO11，定义 1。2] $(R,\ \mathcal{X})$ 的协变表示是一个四元组 $(S,\ T,\ \sigma,\ D)$，其中

(i) D 是一个环；(ii) $\sigma:R\to D$ 是一个环同态；(iii) $S:X'\to D$ 和 $T:X\to D$ 是 R-双模同态，其中双模结构由乘法和 σ诱导；(iv) $\forall\phi\in X',\forall x\in X,\sigma(g(\phi\otimes x))=S(\phi)T(x)$。

若 $j:R\to\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$是自然包含，且 $T_{\mathcal{X}},S_{\mathcal{X}}:X,X'\to\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$分别将 x映射到 T_x，并将ϕ映射到 T_ϕ，则 $(S,T,j,\mathcal{T}_{\mathcal{X}})$ 是一个协变表示。由非退化性可知，环同态 j是单射。环 $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$由 $T_{\mathcal{X}}(X)$、$S_{\mathcal{X}}(X')$ 和 $j(R)$ 生成。Toeplitz 环在以下意义下是泛的:

定理 2.20. 设 R是一个具有局部单位元的环，且 $\mathcal{X}$是一个 R-对应。若 (S,T,σ,D) 是 $(R,\mathcal{X})$ 的一个协变表示，则存在唯一的环同态

$$\eta:\mathcal{T}_{\mathcal{X}}\to D$$

使得 $\eta\circ j=\sigma$、 $\eta\circ T_{\mathcal{X}}=T$ 和 $\eta\circ S_{\mathcal{X}}=S$。

证明。 参见 [CO11、定理 1.7 和命题 4。2]。 □

相对代数 Cuntz-Pimsner 环 $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\ \mathcal{I}}$ 也具有泛性质 [CO11，定理 3。18]但本文将不使用这一性质。

3. Proofs of main results

设 $\mathcal{X}=$ （X， X'， g）是环 R上的一个对应，其中环具有局部单位元；设 $\mathcal{I}$是 R 的一个双边理想，它具有局部单位元，并且 X 在左侧通过紧算子作用。设 $E:$ **Rings** $\to$ 阿贝尔群是一个同伦不变、分裂正合的 M-稳定函子（关于这些概念的定义以及使用拟同态进行的经典计算，参见 [CMR07] 和 [CT06] ）。存在环的一个自然短正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{K}_R(T(\mathcal{X}\cdot\mathcal{I}))\longrightarrow\mathcal{T}_{\mathcal{X}}\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathcal{I}}\longrightarrow 0.$$

记 $T(\mathcal{X}\cdot\mathcal{I})=\mathcal{I}\oplus T^+(\mathcal{X}\cdot\mathcal{I})$，其中 $T^+(\mathcal{X}\cdot\mathcal{I})\cong\bigoplus_{n\geq1}(\mathcal{X}\cdot\mathcal{I})^{\otimes n}$。由命题 2.11 以及 E 的 M-稳定性，左上角嵌入 $e:\mathcal{I}\to\mathcal{K}_R(T(\mathcal{X}\cdot\mathcal{I}))$ 诱导出一个同构

$$E(\mathcal{K}_R(T(\mathcal{X}\cdot\mathcal{I})))\cong E(\mathcal{I})$$

因此，主要困难在于计算 E 在 $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ 上的取值。根据 Toeplitz 环的定义，我们有一个映射 $j: R \to \mathcal{T}_{\mathcal{X}}$。我们希望构造一个映射，使其在应用 E 后成为 j 的逆。我们定义一个拟同态

$$\pi = \mathcal{T}_{\mathcal{X}} \underset{\pi_1}{\overset{\pi_0}{\rightrightarrows}} \mathcal{L}_R(T(\mathcal{X})) \triangleright \mathcal{K}_R(T(\mathcal{X})).$$

令 π_0 为自然包含，并定义 π_1，使得对于所有纯张量 $p \in T(X)$,

$$\pi_1(T_x)(p) = \begin{cases} 0 & \text{if } \deg(p) = 0, \\ x \otimes p & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\pi_1(T_\phi)(p) = \begin{cases} 0 & \text{if } \deg(p) \leq 1, \\ \phi(p_1) \otimes p_2 \otimes \cdots \otimes p_n & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\pi_1(a)(p) = \begin{cases} 0 & \text{if } \deg(p) = 0, \\ a \cdot p & \text{otherwise.} \end{cases}$$

O可以验证，π_0 和 π_1 都保持配对，因此定义了一个同态 n
$\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ a根据定理 2.22。

引理 3.1。对于所有 $\tau \in \mathcal{T}_{\mathcal{X}}$,

$$\pi_0(\tau) - \pi_1(\tau) \in \mathcal{K}_R(T(X))$$

证明。Toeplitz 环中的每个元素都可以写成如下形式的元素的有限和：$\tau = T_{p_1} \dots T_{p_k} T_{\phi_1} \dots T_{\phi_l}$，其中 k、$l \geq 0$、p_1、$\dots p_k \in X$ 和 ϕ_1，……，$\phi_l \in X'$。$\pi_0(\tau) - \pi_1(\tau)$ 在次数为 $\geq l+1$ 和次数为 $\leq l-1$ 的齐次张量上均为零。令 $q = q_1 \otimes \dots \otimes q_l$ 为一个次数为 l 的纯张量。我们有

$$(\pi_0(\tau) - \pi_1(\tau))(q) = (p_1 \otimes \dots \otimes p_k \cdot (\phi_1(\dots \phi_l(q_1)\dots)q_l)$$

因此，$\pi_0(\tau) - \pi_1(\tau)$ 属于 $\mathcal{K}_R(T(X)) = \bigoplus_{n,m \in \mathbb{N}} X^{\otimes n} \otimes_R (X')^{\otimes m}$。 □

定理 3.2. 设 $\mathcal{X}$ 是局部幺元环 R 上的一个 R-对应。每个同伦不变、分裂正合、M-稳定函子 $E: \mathsf{Rings} \to$ 阿贝尔群都会将包含映射 $j: R \to \mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ 送到同构 $E(\mathcal{T}_{\mathcal{X}}) \cong E(R)$。

证明。首先计算 $E(\pi \circ j)$。令 $\iota = \iota_{R,T(X)}: R \to \mathcal{K}_R(T(X))$ 为左上角的包含映射（当 $\deg(p) \geq 1$ 时为 $\iota(r)(p) = 0$，否则为 $\iota(r)(p) = r \cdot p$）。映射 $E(\iota)$ 根据命题 2.11 是一个同构。我们计算

$$E(\pi \circ j) = E(j, \pi_1 \circ j) = E(\iota + \pi_1 \circ j, \pi_1 \circ j) = E(\iota)$$

当 $\pi_1 \circ j$ 和 ι 是正交的拟同态（参见 [CMR07，命题 3.3]）。
现在我们计算 $E(j) \circ E(\pi)$。为简便起见，记作 $\mathcal{T}_{\mathcal{X}} = \mathcal{T}$。映射 $j: R \to \mathcal{T}$ 使得 $(\mathcal{T}, \mathcal{T}$ $\mu)$ 一个 R-$\mathcal{T}$ 对应。考虑如下图表：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \underset{\pi_1}{\overset{\pi_0}{\rightrightarrows}} & \mathcal{L}_R(T(\mathcal{X})) \triangleright \mathcal{K}_R(T(\mathcal{X})) \\ & & \Big\downarrow [-\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{T}}] \quad \Big\downarrow [-\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{T}}] \\ & & \mathcal{L}_{\mathcal{T}}(T(\mathcal{X}) \otimes_R \mathcal{T}) \triangleright \mathcal{K}_{\mathcal{T}}(T(\mathcal{X}) \otimes_R \mathcal{T}) \end{array}$$

我们首先验证，$[- \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{T}}]$ 将紧算子映射为紧算子。$\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(T(\mathcal{X}) \otimes_R \mathcal{T}) = T(X)$ $\otimes_R \mathcal{T} \otimes_{\mathcal{T}} \mathcal{T} \otimes_R T(X') \cong T(X) \otimes_R \mathcal{T} \otimes_R T(X')$，并且 $\mathcal{K}_R(T(\mathcal{X})) = T(X) \otimes T(X') \cong T(X)$ $\otimes R \otimes T(X')$。令 $p \in X^{\otimes n}$、$q \in X'^{\otimes m}$ 和 $r \in R$。作用于 $T(\mathcal{X}) \otimes_R \mathcal{T}$ 上的紧算子 $p \otimes r \otimes q$ 等于 $p \otimes j(r) \otimes q \in T(X) \otimes_R \mathcal{T} \otimes_R T(X')$。因此，$[- \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{T}}]$ 限制在 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_R(T(\mathcal{X}))$ 上时，就是由 j 在每个坐标上诱导的映射。我们将 $[- \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{T}}]: \mathcal{L}_R(T(\mathcal{X})) \to \mathcal{L}_{\mathcal{T}}(T(\mathcal{X}) \otimes_R \mathcal{T})$ 写作 j。$E(j|_{\mathcal{K}})$ 与 $E(j)$ 在稳定化同构意义下相等。

$$E(j) = E(\iota_{\mathcal{T}, T(\mathcal{X}) \otimes_R \mathcal{T}})^{-1} E(\tilde{j}|_{\mathcal{K}}) E(\iota).$$

这里，$\iota_{\mathcal{T},T(\mathcal{X})\otimes_R\mathcal{T}}\colon \mathcal{T}\to\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(T(\mathcal{X})\otimes_R\mathcal{T})$ 是左上角嵌入。现在我们定义$\lambda_0,\lambda_1\colon \mathcal{T}\to\mathcal{L}_{\mathcal{T}}(T(\mathcal{X})\otimes_R\mathcal{T})$ 两个环同态。我们令 $\lambda_1(\tau)$ 在 $p\otimes\tau$上当 $\deg(p)\geq 1$ 时为零，而当 $\deg(p)\geq 1$ 时为左乘 τ 的算子，该算子作用于 $R\otimes_R\mathcal{T}\cong\mathcal{T}$（此同构成立是因为我们假设左作用是非退化的）。令 $\lambda_0(T_x)$ 在 $\deg(p)\geq 1$时将 $p\otimes\tau$映射为零，否则映射为 $x\otimes p\otimes\tau$。令 $\lambda_0(T_\phi)$ 在 $\deg(p)\geq 2$ 或 $\deg(p)=0$ 时将 $p\otimes\tau$映射为零，而在 $\deg(p)=1$时将其映射为$\phi(p)\cdot\tau$。最后，令 $\lambda_0(r)$ 在次数为 ≥ 1的张量上为零，并将 $\tau\in\mathcal{T}$映射为 $r\otimes\tau$。容易验证，λ_0保持了 $\mathcal{X}$的配对。我们可以通过给出元素在形如 $X^{\otimes n}\otimes\mathcal{T}$ 的每个子空间上的作用，将 $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}(T(\mathcal{X})\otimes_R\mathcal{T})$ 的元素表示为无限矩阵。我们有

$$\lambda_0(T_x)=\begin{pmatrix}0&0&0&\dots\\T_x&0&0&\dots\\0&0&0&\dots\\\dots&&&\end{pmatrix},\lambda_0(T_\phi)=\begin{pmatrix}0&T_\phi&0&\dots\\0&0&0&\dots\\0&0&0&\dots\\\dots&&&\end{pmatrix},\lambda_0(r)=\begin{pmatrix}r&0&0&\dots\\0&0&0&\dots\\0&0&0&\dots\\\dots&&&\end{pmatrix}$$

证明的最后一步是构造一个多项式同伦

$$H:\pi_0\otimes\mathrm{id}\sim\lambda_1+\pi_1\otimes\mathrm{id}.$$

我们利用一个类似于 [CT06]的“旋转”同伦来定义

$$\begin{aligned}H(T_x)&=(1-t^2)\lambda_0(T_x)+(2t-t^3)\lambda_1(T_x)+(\pi_1\otimes\mathrm{id})(T_x),\\H(T_\phi)&=(1-t^2)\lambda_0(T_\phi)+t\,\lambda_1(T_\phi)+(\pi_1\otimes\mathrm{id})(T_\phi),\\H(r)&=r\cdot\mathrm{id}.\end{aligned}$$

换言之

$$H(T_x)=\begin{pmatrix}(2t-t^3)T_x&0&0&0&\dots\\(1-t^2)T_x&0&0&0&\dots\\0&T_x&0&0&\dots\\0&0&T_x&0&\dots\\\dots&&&&\end{pmatrix}$$

$$H(T_\phi)=\begin{pmatrix}tT_\phi&(1-t^2)T_\phi&0&0&\dots\\0&0&T_\phi&0&\dots\\0&0&0&T_\phi&\dots\\0&0&0&0&\dots\\\dots&&&&\end{pmatrix}$$

直接计算表明，H 确实保持配对不变，因此定义了一个环同态

$$H:\mathcal{T}\to\mathcal{L}_{\mathcal{T}}(T(\mathcal{X})\otimes_R\mathcal{T})[t]$$

使得 $H(0)=\pi_0\otimes\mathrm{id}$ 且 $H(1)=\lambda_1+\pi_1\otimes\mathrm{id}$。因此，利用 E的同伦不变性

$$E(\tilde{j}\circ\pi)=E(\pi_0\otimes\mathrm{id},\pi_1\otimes\mathrm{id})=E(\lambda_1+\pi_1\otimes\mathrm{id},\pi_1\otimes\mathrm{id})=E(\lambda_1)$$

因为 λ_1和 $\pi_1\otimes\mathrm{id}$ 是正交同态。但 $\lambda_1=\iota_{\mathcal{T},\,T(\mathcal{X})\otimes_R\mathcal{T}}$是 $\mathcal{T}$在 $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(T(\mathcal{X})\otimes_R\mathcal{T})$ 中的左上角嵌入。因此，根据命题 2.11 以及 E 的 M-稳定性，$E(\lambda_1)$ 是一个同构。

由于 j与 $\tilde{j}\circ E(\pi)$，这就完成了证明，因为现在我们有两个互为逆映射的同构：

$$\begin{aligned}E(j)E(\iota)^{-1}E(\pi)&=\mathrm{id}_{\mathcal{T}},\\E(\pi)E(j)E(\iota)^{-1}&=\mathrm{id}_R.\end{aligned}$$

□

引理 3.3. 设 E 是一个分裂正合且 M-稳定的函子。设$\iota_{R,\,T(\mathcal{X})}$为 $R\to\mathcal{K}_R(T(\mathcal{X}))$ 的左上角嵌入。我们将包含映射记为 $i\colon\mathcal{I}\to R$，以及 $i'\colon\mathcal{K}_R(T(\mathcal{X})\cdot\mathcal{I})\to\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$。有

$$E(\pi)\circ E(i'\circ\iota_{\mathcal{I},T(\mathcal{X})\cdot\mathcal{I}})=E(\iota_{R,T(\mathcal{X})})\circ(E(i)-E(\mathcal{X}))$$

其中，$E(\mathcal{X})$定义为由 $\mathcal{I}$-R 对应的结构诱导出的映射，作用于 R.

证明。回顾 $E(\mathcal{X}) = E(\iota_{R,\ R\oplus\mathcal{X}})^{-1} \circ E(\iota_{\mathcal{X},\ R\oplus\mathcal{X}}) \circ E(\Delta)$，其中 $\Delta\colon \mathcal{I} \to \mathcal{K}_R(\mathcal{X})$是左作用，$\iota_{\mathcal{X},\ R\oplus\mathcal{X}}\colon \mathcal{K}_R(\mathcal{X}) \to \mathcal{K}_R(R\oplus\mathcal{X})$是右下角嵌入，而$\iota_{R,\ R\oplus\mathcal{X}}\colon R \to \mathcal{K}_R(R\oplus\mathcal{X})$是左上角嵌入。还有另一个自然包含$\iota_{\mathcal{X},\ T(\mathcal{X})}\colon \mathcal{K}_R(\mathcal{X}) \to \mathcal{K}_R(T(\mathcal{X}))$。

$$E(\pi) \circ E(i' \circ \iota_{\mathcal{I},T(\mathcal{X})\cdot\mathcal{I}}) = E(i' \circ \iota_{\mathcal{I},T(\mathcal{X})\cdot\mathcal{I}}, \pi_1 \circ i' \circ \iota_{T,T(\mathcal{X})\cdot\mathcal{I}})$$

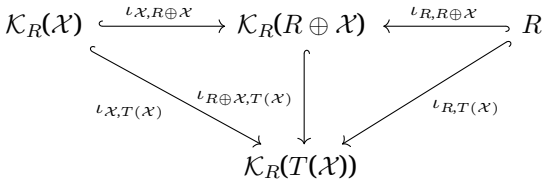
对于所有 $a \in \mathcal{I}$，记 $\Delta(a) = \sum_k x_k \otimes \phi_k$ 其中 $x_k \in X$ 和 $\phi_k \in X'$。我们有

$$i'(\iota_{\mathcal{I},T(\mathcal{X})\cdot\mathcal{I}}(a)) = a \cdot p_0 = a \cdot \mathrm{id}_{T(\mathcal{X})} - \sum_k T_{x_k} T_{\phi_k}$$

根据 π_1的定义，我们得到 $\pi_1(i'(\iota_{\mathcal{I},T(\mathcal{X})\cdot\mathcal{I}}(a))) = \iota_{\mathcal{X},T}(x)(\Delta(a))$。环同态$\pi_0 \circ i' \circ \iota_{\mathcal{I},T(\mathcal{X})\cdot\mathcal{I}}$和$\pi_1 \circ i' \circ \iota_{\mathcal{I},T(\mathcal{X})\cdot\mathcal{I}}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{L}_R(T(\mathcal{X}))$映射到 $\mathcal{K}_R(T(\mathcal{X}))$中。 [CMR07，命题 3.3] 给出

$$E(\pi) \circ E(i' \circ \iota_{\mathcal{I},T(\mathcal{X})\cdot\mathcal{I}}) = E(\iota_{R,T(\mathcal{X})} \circ i) - E(\iota_{\mathcal{X},T(\mathcal{X})}) \circ E(\Delta).$$

还需证明 $E(\iota_{R,\ T(\mathcal{X})}) \circ E(\iota_{R,\ R\oplus\mathcal{X}})^{-1} \circ E(\iota_{\mathcal{X},\ R\oplus\mathcal{X}}) = E(\iota_{\mathcal{X},\ T(\mathcal{X})})$。这直接源于下图的交换性



□

定理 3.4. 设 $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$: Rings $\to$ 阿贝尔群是一列满足切除性质的同伦不变且 M-稳定的函子。设 R 是一个局部幺元环。设 $\mathcal{X}$ 是一个 R-对应，且$\mathcal{I} \lhd R$ 是一个具有局部单位元的双边理想，并通过紧算子在左侧作用于 $\mathcal{X}$。存在一个长正合列

$$\ldots \longrightarrow E_n(\mathcal{I}) \xrightarrow{E_n(i)-E_n(\mathcal{X})} E_n(R) \xrightarrow{E_n(j)} E_n(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathcal{I}}) \longrightarrow E_{n-1}(\mathcal{I}) \longrightarrow \ldots$$

这里 $j : R \to \mathcal{O}_{\mathcal{X},\ \mathcal{I}}$ 和 $i\colon \mathcal{I} \to R$ 是自然包含映射。

现在我们展示，如何在将某些特定环实现为代数 Cuntz-Pimsner 环时，直接得到这些特定环类的一些 KH 群和 HP群长正合列。我们固定（E_n）$_{n\in\mathbb{Z}}$： **Rings** $\to$ 阿贝尔群这一列满足切除性质的同伦不变稳定函子。作为定理 B 的直接推论，我们得到（详见[CO11，例 5。5] ）

定理3.5。（Pimsner-Voiculescu）
设 R 是一个局部幺元环，设 $\alpha\colon R \to R$ 是一个环自同构。令 $R \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ 为交叉积环 R 与 α 的交叉积环。存在一个长正合列:

$$\ldots \longrightarrow E_n(R) \xrightarrow{1-E_n(\alpha)} E_n(R) \xrightarrow{E_n(j)} E_n(R \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \longrightarrow E_{n-1}(R) \longrightarrow \ldots$$

设 $Q = (Q^0, Q^1, r, s)$ 是一个箭图。回顾一下，若 $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$，则顶点 $v \in Q^0$ 是正则顶点；记 $\rho(Q) \subseteq Q^0$ 为正则顶点的集合。已知 [CO11，例 5.8] ，Leavitt路径代数 $L_k(Q)$ 是与环 R、理想$\mathcal{I}$以及 R-对应 $\mathcal{X} = (X, X', \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 相关联的代数Cuntz-Pimsner环，其定义如下:

$$R = \bigoplus_{v\in Q^0} k\cdot 1_v, \qquad \mathcal{I} = \bigoplus_{v\in\rho(Q)} k\cdot 1_v, \qquad X = \bigoplus_{e\in Q^1} k\cdot 1_e, \qquad X' = \bigoplus_{e\in Q^1} k\cdot 1_{e^*}.$$

对于 e、$f \in Q^1$，求值映射定义为

$$\langle 1_{e^*}, 1_f\rangle = \delta_{e,f}\, 1_{r(e)}$$

且双模结构由生成元上的以下规则确定

$$1_e \cdot 1_v = \delta_{r(e),v}\, 1_e, \qquad 1_v \cdot 1_e = \delta_{s(e),v}\, 1_e,$$
$$1_{e^*} \cdot 1_v = \delta_{s(e),v}\, 1_{e^*}, \qquad 1_v \cdot 1_{e^*} = \delta_{r(e),v}\, 1_{e^*}.$$

该对应的泛函同态由映射 $U\colon X \to R^{(Q^1)}$ 和$V\colon X' \to R^{(Q^1)}$给出，它们定义为 $U(1_e) = (\delta_{e,f}1_{r(e)})_{f\in Q^1}$ 以及 $V(1_{e^*}) = (\delta_{e,f}1_{r(e)})_{f\in Q^1}$，对所有 $e \in Q^1$ 均成立。

令 $N'_Q = (n_{x,y})_{x,y\in Q^0}$ 为 Q 的邻接矩阵，其中 $n_{x,y}$ 表示从x 到 y的箭数。令 N_Q 为从 N'_Q 中删除由$Q^0 \setminus \rho(Q)$中的元素所索引的列后得到的矩阵。

定理3.6. 设 k 是一个局部幺元环。存在一个长正合列 ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\dots \longrightarrow E_n(k)^{(\rho(Q))} \xrightarrow{E_n(i)-N_Q} E_n(k)^{(Q^0)} \xrightarrow{E_n(j)} E_n(L_k(Q)) \longrightarrow \dots$$

证明. 我们只需证明映射

$$E_n(\mathcal{X}) : E_n(\mathcal{I}) = E_n(k)^{(\rho(Q))} \to E_n(R) = E_n(k)^{(Q^0)}$$

等于 N_Q。 $\mathcal{K}_R(\mathcal{X})$ 是由形如 $1_e \otimes 1_{f^*}$ 的元素构成的 k-线性组合的集合，其中 $e, f \in Q^1$。上文所述的 $\mathcal{X}$ 的泛函同态诱导出环同态 $\rho : \mathcal{K}_R(\mathcal{X}) \to M_{Q^1}(R)$，它将每个形如 $1_e \otimes 1_{f^*}$ 的元素映射到矩阵 $(\delta_{e,e'}1_{r(e)} \otimes \delta_{f,f'}1_{r(f)})_{e',f'\in Q^1} = \delta_{e,f}1_{r(e)}$。根据命题 2.13， $E_n(\mathcal{X})$ 等于以下映射

$$E_n(\mathcal{I}) \xrightarrow{E_n(\Delta)} E_n(\mathcal{K}_R(\mathcal{X})) \xrightarrow{E_n(\rho)} E_n(M_{Q^1}(R)) \xrightarrow{\sim} E_n(R)$$

这里， $\Delta\colon \mathcal{I} \to \mathcal{K}_R(\mathcal{X})$ 是左作用。对于所有 $v \in \rho(Q)$,

$$\rho(\Delta(1_v)) = \rho\Big(\sum_{e\in s^{-1}(v)} 1_e \otimes 1_{e^*}\Big) = \sum_{e\in s^{-1}(v)} 1_{r(e)}. \qquad \square$$

Nekrashevych代数最初是为 C^*-代数而引入的，它们是与自相似群 [Nek04]自然关联的Cuntz-Pimsner代数。最近，离散情形下的类似结构也已被发现 [SS23]。设 X 是一个有限集合，且 $|X| \geq 2$，并设 X^* 是由 X生成的自由幺半群。定义在 X 上的自相似群是一个群 G，它在 X^* 上有一个由保长度置换构成的忠实作用，使得对每个 $g \in G$ 和每个 $x \in X$，都存在一个元素 $g|_x \in G$ 满足

$$g(xw) = g(x)\, g|_x(w) \qquad \text{for all } w \in X^*.$$

设 k 是一个域，设 $R = kG$ 是 G 在系数取自 k 时的卷积代数，设

$$R = \bigoplus_{g\in G} k\cdot g = k^{(G)}, \qquad X = R^{(X)} = k^{(G\times X)}, \qquad X' = R^{(X)}$$

我们定义 k-双线性标量积

$$\Big\langle \sum_{x\in X} \lambda_x\, x\cdot g_x,\ \sum_{x\in X} \mu_x\, x\cdot h_x \Big\rangle = \sum_{x\in X} \lambda_x\mu_x\, g_x^{-1}h_x$$

这里， X 和 X' 分别是右自由 R-模和左自由 R-模；但作为左 R-模，我们通过关系 $g\cdot x = g(x)\cdot g|_x$ 定义 X，对所有 $g \in G$、 $x \in X$ 均成立（利用自相似条件可得 $g|_x \in G$）。

Nekrashevych代数[SS23] 与自相似群 G （以及集合 X）相关，系数取自 k，显然同构于与环 R和对应 $\mathcal{X} = (X,\ X',\ \langle,\ \rangle)$ 相关的代数Cuntz-Pimsner环

$$\mathcal{N}_k(G, X) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}.$$

由于 X 是有限的，左作用显然映入紧算子。紧算子环就是 $M_d(kG)$，其中 $d = |X|$。

定理 3.7。对于任意自相似群（G, X），存在一个长正合列（$n \in \mathbb{Z}$）

$$\dots \longrightarrow E_n(kG) \xrightarrow{1-E_n(\mathcal{X})} E_n(kG) \xrightarrow{E_n(j)} E_n(\mathcal{N}_k(G, X)) \longrightarrow \dots$$

ACKNOWLEDGEMENTS

作者谨向 Ralf Meyer 教授致谢，感谢他就本文早期版本进行的富有见地的讨论并提出宝贵意见。

References

[Abr83] G. D. Abrams, *Morita equivalence for rings with local units*, 《Communications in Algebra》11 (1983), 801–837.[A´AM87] P. N. ´Anh and L. M´arki, *Morita equivalence for rings without identity*《筑波数学杂志》11 (1987), no. 1, 1–16.[ABC09] P. Ara, M. Brustenga, and G. Corti˜nas, *K-theory of Leavitt path algebras*, M¨unster J. Math. 2 (2009), 5–34.[Bur25] B. Burgstaller, 算子 K 理论中嵌入紧算子代数的角嵌入，arXiv:2501.11504, 2025. [CO11] T. M. Carlsen and E. Ortega, *Algebraic Cuntz–Pimsner rings*, 《伦敦数学会会刊》103 (2011), no. 4, 601–653.[CT06] G. Corti˜nas and A. Thom, *Bivariant algebraic K-theory*, arXiv:math/0603531, 2006. [C97] J. Cuntz, *Bivariante K-Theorie für lokalkonvexe Algebren und der Chern-Connes-Charakter*, 《数学文献》2 (1997), 139–182. [CMR07] J. Cuntz, R. Meyer, and J. M. Rosenberg, *Topological and bivariant K-theory*, 施普林格，2007. [CQ97] J. Cuntz and D. Quillen, *Excision in bivariant periodic cyclic cohomology*, 《数学发明》127 (1997), no. 1, 67–98. [Mey] R. Meyer.《非交换几何中的双范畴》。作者个人网页。[Nek04] V. Nekrashevych, *Cuntz–Pimsner algebras of group actions* **51** 2004 2, , 《算子理223 249论杂志》（），no. [Pim97] M. V. Pimsner, *A class of C*-algebras generalizing both Cuntz–Krieger algebras and crossed products by* ℤ *Free Probability Theory* 1995 **12**, ，载于（安大略省滑铁卢，），《菲尔兹研究所通讯》美国数学学会，1997，pp. 189–212.[Rie82] M. A. Rieffel, *Morita equivalence for operator algebras*，载于 *Proc. Sympos. Pure Math.* **38**，1982，pp. 285– 298.[SS23] B. Steinberg and N. Szak´acs, ,《数学*On the simplicity of Nekrashevych algebras of contracting self-similar groups* **386** 2023 3, 1391 1428年刊》（），no. – . [Wei89] C. A. Weibel, *Homotopy algebraic K-theory*，载于 *Algebraic K-theory and Algebraic Number Theory*（檀香山，HI，1987），《当代数学》83，美国数学学会，1989，pp. 461–488.

LMNO, 6 Boulevard Maréchal Juin, 14000 Caen, FRANCE
Email address: thibaut.lescure@etu.unicaen.fr