基于用户定义的感兴趣区域的凸向量优化问题解概念

Daniel Dörfler* Rebecca Köhler† Andreas Löhne‡

2026年3月31日

arXiv:2603.26305v2 [math.OC] 30 Mar 2026

摘要

本文研究任意凸向量优化问题，这类问题构成了适用于各种现实应用的多准则决策通用框架。鉴于其复杂性，此类问题通常采用多面体近似方法求解。现有解概念依赖于额外假设，例如有界性、序锥的多面体性，或序锥中存在内点，并且通常侧重于绝对误差度量。我们提出一种基于上像齐次化的解概念，该概念采用相对误差度量，且无需额外的结构性假设。尽管不明确要求极小性，但该概念隐含地确保了某种近似极小性。该概念简单易用，只需一个精度参数；由于采用相对误差度量，即使目标函数缩放，也能保持稳健。齐次化还消除了区分远离原点的点与方向的二元划分，从而避免了可能出现的数值困难。此外，在实践中，决策者通常会确定一个预期包含偏好解的区域。我们的概念既支持对上像进行全局概览，也支持在此类用户定义的感兴趣区域（RoI）内进行细致的局部考察。我们提出一种决策程序，可迭代地细化该区域及相关偏好。

关键词： 凸向量优化、多目标优化、近似方法、h-齐次化、基于偏好的决策。

MSC2020： 90C29、90C25、90C59、90B50

1 引言

在多准则决策中，目标是找出有效解——即改善一个目标必然会使另一个目标变差的决策。凸向量优化问题具有凸目标函数和可行域，自然见于工程学、经济学、金融数学和动态规划等领域，参见例如 [14], [21]和[16]。由于这类问题本身复杂，通常采用多面体近似 [8, 17, 1, 24], ，以便以便于决策支持的形式表示可行结果的集合。

现有解概念往往对问题设定施加进一步的结构性假设。大多数文献提出的解概念适用于有界问题，参见例如[8] 和 [17]。此外，大多数方法使用绝对误差度量 [8, 17, 1, 24] ，例如

*daniel.doerfler@uni-jena.de，耶拿弗里德里希·席勒大学，德国。ORCID 编号：0000-0002-9503-3619。
†rebecca.koehler@uni-jena.de，耶拿弗里德里希·席勒大学，德国。ORCID 编号：0009-0009-5713-6471。
‡andreas.loehne@uni-jena.de，耶拿弗里德里希·席勒大学，德国。ORCID 编号：0000-0003-0872-4735。

豪斯多夫距离来量化近似质量。这些方法在有界或自有界设定下效果良好，但应用于一般无界问题时会遇到局限 [23]。为解决这些局限， [24] 和 [6]分别独立提出了(ϵ, δ)解概念。这是一种结合绝对误差度量与相对误差度量的混合方法。在凸向量优化背景下， [24] 通过两步过程应用这一概念。首先，在相对截断豪斯多夫距离上界 δ 的约束下，对上像的衰退锥进行近似。基于此，第二步在有界区域内得到一个近似。该近似与上像之间的绝对豪斯多夫距离不超过指定值 ϵ 。值得注意的是，该区域并非预先定义，而是由参数设定和上像的结构隐式决定。尽管该方法适用于一般无界情形，但仍依赖某些结构性质。在 [24]中，为便于算法实现，假设序锥具有多面体性；而序锥中存在内点则是这一解概念的内在要求。

本文基于齐次 δ-近似，为一般凸向量优化问题提出了一种替代性的解概念。该概念仅依赖相对误差度量，不需要额外的结构性假设，以统一的方式处理点和方向，并支持一种实用的决策过程，该过程可聚焦于用户指定的感兴趣区域（*RoI*）。这一概念简单明了，只需一个精度参数 δ。虽然我们不要求（近似）极小性，但在取决于精度参数 δ的某个区域内，仍可对其与弱极小元 的接近程度给出有界估计。

在许多应用中，决策者会确定一个预期存在偏好解的区域——这一判断可能基于先验知识，也可能是在决策过程中通过交互方式作出。我们通过用户定义的感兴趣区域（RoI）将这一想法形式化，并在该区域内提供更严格的近似保证。在该区域之外，近似仍能体现上像的全局性质。我们提出一种交互式过程，使感兴趣区域及相关偏好得以迭代改进，从而推动对上像进行偏好驱动的探索。

在近似求解凸向量优化问题时，采用齐次化 概念的另一个动机，是希望将上像化简为结构更简单的凸锥，从而便于对其进行近似和实现。齐次化是一种几何概念，指构造给定非空凸集 $Z \subset \mathbb{R}^m$ 在空间 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的水平 1 上的闭锥包。确切地说， Z 的齐次化在 [4,第 18 页及后续页]中定义如下：

$$\hom Z := \operatorname{cl}\operatorname{cone}(Z \times \{1\}).$$

这样一来，凸集（例如凸向量优化问题的上像）便可以唯一地对应于一个凸锥。通过用另一个锥近似该集合的齐次化，再将这一锥近似与嵌入半空间相交，并通过去掉最后一个分量将结果投影回原空间，即可得到该集合的齐次 δ-近似，见 [4, 第 18 页及后续页]。图 1 展示了这一思想的直观效果。

原集合中的点和方向在其齐次化中由相同的几何对象表示。这样，在近似集合时，就能避免区分远距离点与衰退方向所带来的数值困难。

本文研究一般形式的凸向量优化问题

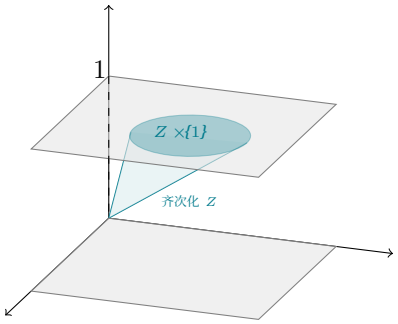


图 1：凸集 Z 的齐次化。

$$\min_x F(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in S \quad \text{w.r.t.} \quad \leqslant_C \tag{VCP}$$

其中，$S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个非空凸集，$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个 C–凸向量值函数，而 $C \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个非平凡尖闭凸序锥。

本文其余部分的结构如下：第2节介绍符号和基本概念。主要结果见第3节，其中阐述了齐次 δ-解概念及其理论和实践意义。第4节介绍一种直接的决策程序，第5节将该概念与现有方法进行比较。在第 6 节中，我们给出第3节结果的数学证明；第7节则以总结性评述作结。

2 预备知识

设 $Z \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个非空凸集。我们分别用 int Z、ri Z、cl Z 和 bd Z 表示集合 Z 的内部、相对内部、闭包和边界。点 $p \in \mathbb{R}^m$ 周围的开欧几里得r球和闭欧几里得r球分别表示为 $U_r(p)$ 和 $B_r(p)$，原点周围的欧几里得单位球记为 $\mathbb{B}$。我们用 $\|x\|$ 表示向量 $x \in \mathbb{R}^m$ 的欧几里得范数。用 $d(x,y) = \|x-y\|$ 表示两点 x、$y \in \mathbb{R}^m$之间的欧几里得距离。若对于所有 x、$y \in Z$ 以及 $\lambda \in (0,1)$，集合Z满足 $\lambda x + (1-\lambda)y \in Z$，则称其为凸集。锥 K 定义为对所有 $k \in K$ 及所有 $\lambda \geqslant 0$，均有 $\lambda k \in K$。Z 的凸包和锥包定义为……，并记作

$$\operatorname{conv} Z = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \;\middle|\; m \in \mathbb{N}, x^i \in Z, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, i = 1, \ldots, m \right\},$$

$$\operatorname{cone} Z = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \;\middle|\; m \in \mathbb{N}, x^i \in Z, \lambda_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, m \right\},$$

分别。Z 的衰退锥由下式给出

$$0^+ Z = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid x + \lambda y \in Z \text{ for all } x \in Z, \lambda \geqslant 0 \},$$

其元素称为 Z的衰退方向或方向。

多面体是有限个闭半空间的交集 [19]。根据 Minkowski-Weyl 定理，任何具有 P个顶点 $P \neq \emptyset$的多面体都可以表示为 P =凸包(顶点 P) +

锥(极射方向 P)，其中 vert P和 extdir P分别是 P的极点集合和方向集合，参见例如 [22, 第 8] 章。

若凸锥的内部非空，则称其为实锥；若不包含任何直线，则称其为尖锥；若不等于{0}，则称其为非平凡。非平凡尖闭凸序锥 C 通过关系 $y_1 \leqslant_C y_2$ 在 (VCP) 中定义了一种序，当且仅当 $y_2 - y_1 \in C$ 对所有y_1、$y_2 \in \mathbb{R}^m$成立。对于 (VCP)，若函数 F 满足以下条件，则称其为凸函数

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant_C \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2)$$

对所有 x_1、$x_2 \in \mathbb{R}^n$ 以及所有 $\lambda \in (0, 1)$均成立。问题 (VCP) 的极小元素 集合等于由以下内容给出的 $F[S]$ 的 C–极小元素集合

$$\operatorname{Min} F[S] = \{y \in F[S] \mid (\{y\} - C \setminus \{0\}) \cap F[S] = \emptyset\}$$

而 (VCP) 的弱 C-极小元素 由 $F[S]$的弱 C–极小元素集合给出

$$\operatorname{wMin} F[S] = \{y \in F[S] \mid (\{y\} - \operatorname{int} C) \cap F[S] = \emptyset\}.$$

注意，只有当序锥 C 是实锥时，弱极小性的概念才有意义。若可行点 $x \in S$满足 $F(x) \in$ Min $F[S]$ ($F(x) \in$wMin $F[S]$)，则称其为问题 (VCP) 的（弱）极小解，参见例如 [9, 第 1]章。

我们将形式为 (VCP) 的问题的上像 定义为

$$\mathcal{P} = \operatorname{cl}(F[S] + C),$$

例如参见 [17]。若对于某个紧集 $S \subseteq \mathbb{R}^m$，$\mathcal{P} \subseteq S + C$，则称问题 (VCP) 关于锥 $K \subseteq C$ 有界。注意，若 K 是实心的，则关于 K 有界的定义等价于：对于某个 $p \in \mathbb{R}^m$ [6, ，$\mathcal{P} \subseteq \{p\} + K$，定理 3.2]。如果问题关于 C有界，则称问题本身有界；否则称其无界，例如参见 [23,定义 4.2]。若$\mathcal{P} \neq \mathbb{R}^m$ 且问题关于 0^+有界，则称该问题自有界$\mathcal{P}$[23,定义 4.5]。

为了评估近似的质量，我们使用欧几里得距离、豪斯多夫距离和截断豪斯多夫距离。点 $y \in \mathbb{R}^m$ 与非空集 $M \subseteq \mathbb{R}^m$ 之间的欧几里得距离定义为

$$d(y, M) = \inf_{z \in M} \|y - z\|.$$

对于非空凸集 M_1 和 M_2，豪斯多夫距离通过偏差 [12, p.12]定义。M_1 相对于 M_2 的偏差定义为

$$e[M_1, M_2] = \sup_{x \in M_1} d(x, M_2),$$

豪斯多夫距离为

$$d_H(M_1, M_2) = \max\{e[M_1, M_2], e[M_2, M_1]\}.$$

对于闭凸锥 K_1 和 K_2，截断豪斯多夫距离 [13] 可定义为

$$d_{tH}(K_1, K_2) = d_H(K_1 \cap \mathbb{B}, K_2 \cap \mathbb{B}).$$

3 基于齐次化的求解概念

借助这一新颖的解概念，我们旨在处理形式为 (VCP) 的一般凸向量优化问题，并明确允许出现无界性。我们近似问题上像的目标，源于若干实际考量。由于决策者通常依据可行选择的结果而非选择本身来作出决策，且结果空间的维数通常低于决策空间，因此人们投入了大量精力来表示或近似可能结果的集合 $F[S]$，例如参见 [3]。较新的文献将重点转向近似上像，例如，线性情形可参见 [11]，一般凸情形可参见 [17, 1, 15, 24]。与 $\mathcal{P}$ 不同，在我们的框架中，集合 $F[S]$ 不一定是凸集。近似 $\mathcal{P}$ 而非 $F[S]$ 的优势在于，凸集的近似会变得容易处理得多。这是因为凸集具有有利的结构性质，使得几何形状简单且广为人知的凸多面体能够作为有效的近似对象 [5]。凸集既有原始表示，也有对偶表示，可用于构造此类多面体近似 [4, 第 4 章.2]。重要的是，近似上像不会造成任何信息损失，因为集合 $F[S]$ 与 $\mathcal{P}$ 的闭包具有相同的C–极小元素。因此，上像是一个具有描述性且信息丰富的对象，能够让决策者深入了解可达结果的集合。

我们采用上像的齐次 δ-近似方法，该方法利用多面体和相对误差度量 [7]来近似任意凸集。现在，我们给出非空凸集的齐次 δ-近似的形式化定义。

定义3.1。 [7, 定义3.2]。设 $\delta > 0$。如果非空多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^m$ 满足以下条件，则称其为非空凸集 $Z \subseteq \mathbb{R}^m$ 的齐次 δ-近似：

$$d_{tH}(\hom P, \hom Z) \leqslant \delta.$$

使用这种近似方法具有若干优势。首先，这种两个凸集 P 与 Z 之间的距离度量对于非空闭凸集 [20,是一个度量，即定理4.46]。我们的目标是获得一个近似 P，使其在该度量下与集合 Z 足够接近。其次，误差参数 δ 规定了单位球 $\mathbb{B}$ 上集合 Z 的齐次化与其近似 P的齐次化之间的最大豪斯多夫距离。这是一个相对误差界，因为当我们考虑远离原点的点时，它允许绝对距离增大。对于 $x \in \mathbb{R}^m$ 和 $P = \{x\}$，其中 $d(x,\ Z) \leqslant \epsilon$，有 [7]:

$$d_{tH}\left(\hom P, \hom Z\right) \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{x^T x + 1}}$$

且该上界是紧的。因此，将其应用于凸向量优化的语境中，我们得到了一种能够适应目标函数不同缩放方式的解概念。

采用齐次 δ-近似的另一个优点是，我们可以利用齐次化中更简单的锥结构。特别是，集合中的点和方向在其齐次化中由相同的对象表示。为此，考虑 [19] 中给出的以下基本刻画：

命题 3.2。 *[19, 定理 8。2]*。设 Z 为一个非空闭凸集。则

$$\hom Z = \operatorname{cone}(Z \times \{1\}) \cup (0^+ Z \times \{0\}).$$

该结果还表明，无界非空闭凸集 Z 的一个方向 $d \in 0^+Z$，可以用可能有界的近似集 P 中的一个点来表示，前提是该点距原点足够远。因此，这一概念并未区分远离原点的点与方向。

在凸向量优化的背景下，我们如下定义问题 δ 的（有限）齐次解:

定义 3.3. 设 $\delta > 0$。对于形式为 (VCP) 的问题，称（有限）非空集 $X \subseteq S$ 为具有近似上像 $P_X := \text{conv } F[X] + C$ 的（有限）齐次 δ-解，条件是

$$d_{tH}(\hom P_X, \hom \mathcal{P}) \leqslant \delta.$$

这一概念是将齐次 δ-近似直接应用于凸向量优化背景的结果。近似上像是上像的内齐次 δ-近似。

与已有的解概念不同，该方法仅以欧几里得距离衡量上像与其近似之间的接近程度，而不依赖（ϵ-）极小性等概念（例如，参见 [10] 或 [8] 中关于 ϵ-极小性的若干概念）。我们认为，决策者首先关心的是了解上像的整体结构，而对个别点进行更细致的解释则是次要的。为此，欧几里得距离足以刻画近似上像与上像之间的接近程度。如果决策者希望识别（弱）C–极小元素或近似（弱） C–极小元素，则可采用标量化技术进行细化，参见例如 [9, 第 2] 章。

在接下来的部分中，我们将推导一个项，用于给出指定感兴趣区域（RoI）内绝对近似误差的上界。该区域以原点为中心，是半径为 r 的欧几里得球。请注意，相应地平移上像后，决策者便可以选择一个不同于原点的中心作为其感兴趣区域的中心。图 2 展示了如何向决策者呈现误差项的图像。图像上的点表示在给定精度参数 δ固定值的情况下，半径为 r 的感兴趣区域（横轴）内绝对误差（纵轴）的上界 $\alpha(r, \delta)$ 。根据给定 δ 时该误差项的变化情况，决策者尝试指定一个感兴趣区域，使其中的近似误差 $\alpha(r, \delta)$ 能够被限制在一个可接受的值以内。如果决策者在图像上找到了满意的点，则可以将给定的 δ 用于齐次 δ-近似。否则，将向其展示针对更小 δ 值调整后的图像，直至在图像上找到满意的权衡点。还应考虑到，减小 δ 的值会增加近似所需的计算工作量。

误差界 $\alpha(r, \delta)$ 会随着半径 r 趋近于图 2 中的值 R_δ 而趋于无穷大。因此，误差界仅在原点周围半径为 R_δ 的某个有效区域 内有效。有效区域 R_δ 的大小取决于精度参数 δ ，并且会随着 δ 减小而增大。

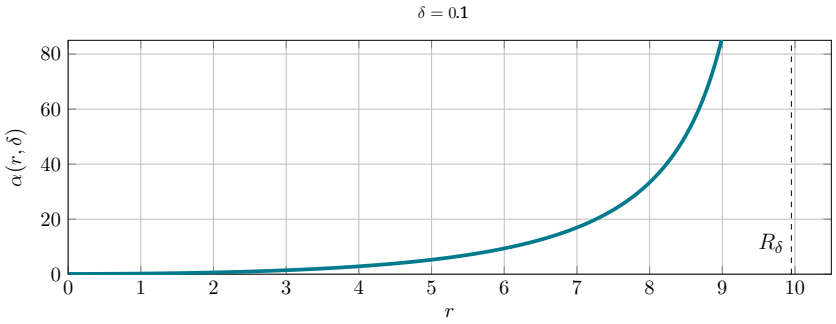


图 2：在感兴趣区域内的误差界 $\alpha(r, \delta)$ 取决于 r （对于 $\delta = 0$）。1。 R_δ表示误差界有效区域的半径。

给定所选的 δ值，系统会生成相应的上像近似，使感兴趣区域内达到所需精度，同时也能提供该区域之外的全局概览。决策者可以通过选择移动或扩大感兴趣区域，或更改该区域内可接受的误差界，迭代探索上像的性质。有关决策程序的更多细节及示例，请参见第4节。

我们希望进一步说明这一概念具有广泛适用性。定理 3.4 指出，无需任何额外条件，总是存在有限齐次 δ-解。本节其余结果的证明请参见第 6 节。

定理 3.4。 给定一个形式为 *(VCP)* 的问题。那么，对于每个 $\delta > 0$，*(VCP)* 都存在一个有限齐次 δ-解。

现在我们来探讨齐次化集合的截断豪斯多夫距离与其去齐次化对应集之间距离的误差界之间的关系。对于一个问题 (VCP)，设 X 是某个 $\delta \in (0, 1)$ 对应的齐次 δ-解，其近似上像为 $P_X = \text{conv } F[X] + C$。在本文余下部分，我们假设 $\delta \in (0, 1)$，因为另外两种情形 $\delta = 0$ 和 $\delta = 1$ 是平凡的：若 $\delta = 0$，则 $P_X = \mathcal{P}$ （前提是 $\mathcal{P}$ 为多面体的），否则一般不存在齐次 δ-近似。若$\mathcal{P}$ 为多面体的，只有在寻求上像的精确表示时，选择 $\delta = 0$ 才有意义。这并非本文的重点。若 $\delta = 1$，则齐次 δ-近似没有意义，因为根据截断豪斯多夫距离的定义，对于任意凸锥 K_1 和 K_2，$d_{tH}(K_1, K_2) \leqslant 1$ 都成立。

我们分析近似上像的边界点 y 与问题 (VCP) 中弱 C–最小元素的接近程度。命题 3.2 中的刻画意味着，对于远离原点的点 y，也就是说，当 $\|y\|$ 足够大时，无法再保证最小截断豪斯多夫距离是相对于上像的边界点而非其衰退锥的某个方向取得的。因此，我们得到一个所谓的有效区域，即以原点为中心、半径为

$$R_\delta := \sqrt{\frac{1}{\delta^2} - 1}$$

的开欧几里得球。在此区域内，定理 3.5 给出的到上像边界点的距离误差界可以保证成立。

定理 3.5 给出了上界 $\alpha(r, \delta)$，用于衡量任意点$y \in \text{bd } P_X \cap B_r(0)$ （满足 $0 < r < R_\delta$）与（VCP）上像的一个边界点之间的欧几里得距离；该边界点对应于（VCP）中满足可行性条件的弱极小元素。为此， $B_r(0)$

被解释为决策者的感兴趣区域。上界 $\alpha(r,\delta)$ 可明确表示为 r 和 δ的函数。

定理 3.5。 设 X 是 *(VCP)* 的一个齐次 δ-解，适用于 $\delta \in (0,1)$ ，其近似上像为 $P_X =$凸包 $F[X]+C$。设 $0<r<R_\delta$且 $y \in$边界 $P_X \cap B_r(0)$。则 y 中的绝对近似误差可按以下方式界定：

$$d(y, \mathrm{bd}\,\mathcal{P}) \leqslant \frac{\delta(r^2+1)}{\sqrt{1-\delta^2}-\delta r} =: \alpha(r,\delta).$$

注 3.6。 根据定理 3.5 的证明，可以直接构造一个最坏情况示例，其中在所述假设下有 $d(y$、$\mathcal{P}) = \alpha(r$、$\delta)$。这表明定理 3.5 中的界是紧的。

现在，我们对定理 3.5 的假设未涵盖的近似上像边界点作出解释。定理 3.7 表明，近似边界点 $y \in$边界 P_X若位于有效区域 $U_{R_\delta}(0)$之外，则在满足可行性的情况下，接近 (VCP) 的弱 C–极小元，或者接近上像的衰退方向。

定理 3.7。 设 X 是 *(VCP)* 的一个齐次 δ-解，其中 $\delta \in (0,1)$ ，其近似上像为 $P_X =$凸包 $F[X]+C$。设 $y \in$边界 P_X。则以下情形之一成立：

(i) $d(y$，边界 $P) \leqslant \alpha(\|y\|$，$q)$其中 $q = d\left(\frac{(\ n\ 1\ ^T,\ )(,\ )^T\|}{\|\ n\ 1}\right.$，锥$\{(y,\ 1)^T\}\Big)$，其中 $n \in$ 边界 P 和 $\alpha(\|y\|$，$q)$如定理 *3.5* 中所定义。

(ii) $d\left(\frac{y}{\|y\|}, 0^+\mathcal{P}\right) \leqslant \frac{\|(y,1)^T\|}{\|y\|}\delta.$

因此，对于给定问题 (VCP) 的近似上像边界上的任意一点 y ，以下情形之一成立：它到上像边界的欧几里得距离（因而在可行性约束下到 (VCP) 的一个弱极小元的距离）可以由一个误差项有界控制；或者它到上像某个方向的距离可以有界控制。对于一个近似边界点 $y \in B_r($0$)$ ，若满足 $0<r<R_\delta$，则如定理 3.5 所示，第一种情形必然成立。距离原点较远的近似边界点，不能严格归因于上像的近似边界点或衰退方向。不过，它们确实接近其中之一，因此能够提供有关上像全局行为的有价值信息。

4 决策程序

现在，我们旨在阐明如何将前述结果，尤其是定理 3.5 中推导出的误差界，应用于实践。我们考虑一位决策者，他希望总体了解给定 (VCP) 的上像，并特别关注其在特定点 $p \in \mathbb{R}^m$ 附近的表现。该程序的第一步是定义感兴趣区域，该区域是一个欧几里得球 B_r（p） ，其半径由用户指定 r。

该流程如下：选定初始参考点 p 后，决策者会看到根据定理 3.5 推导出的误差项图像。可以针对所选的不同 δ 值对该图像进行评估（见图 3）。

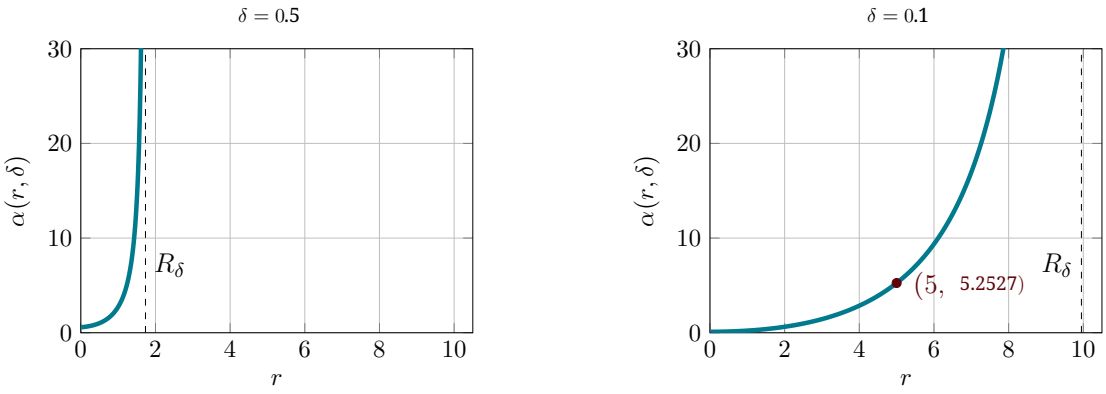


图 3：齐次 δ-近似的边界点到上像边界的距离的误差界 $\alpha(r,\delta)$（见定理 3.5）。对于固定的大 δ（左图）和较小的 δ（右图），该界表示为半径 r 的函数。图中展示了近似误差如何随感兴趣区域的大小而增大，而较小的 δ会产生更紧的误差界。竖直虚线表示每个 δ的有效区域界限R_δ，超出该界限后，误差界未定义。例如，右图中的点突显了精度与覆盖范围之间的一种可行权衡，这可能是决策者设置 $\delta = 0.1$ 时的一种选择。这意味着，在一个齐次 0.1-近似的近似上像中，感兴趣区域内半径为 5 的任意边界点，与一个弱 C–极小元素之间的距离至多为 5.2632 个单位（假定可行）。

目标是尽可能增大精度参数 δ，以减少计算工作量，同时满足决策者的要求。值得注意的是，选择 δ 会隐式确定有效区域 $R_\delta > 0$ 的半径，该半径界定了一个范围：超出此范围后，若不调整 δ，就无法保证感兴趣区域内存在局部误差界（见定理 3.5）。因此，δ 的值越大，所需的计算工作量越少，但图像也会越不清晰（如图 3 左侧更陡的误差曲线所示）。所选 δ 值越小，上像的表示就越全面。

从图 3 的展示中选取一个满意的点 (r,α) 后，针对相应的 δ 值计算一个齐次 δ-解。对于感兴趣区域 RoI $B_r(p)$ 内近似边界上的任意点 y，该近似都满足$d(y, \operatorname{bd}\mathcal{P}) \leqslant \alpha$。随后，决策者会看到该近似，并可根据需要查看相应的 (VCP) 齐次 δ-解。此结果全面展示了上像，使决策者能够识别新的感兴趣点。借助图 3 中的可视化结果，通过调整参考点或 δ 的值，决策者可以在后续的近似轮次中迭代改进对上像的探索。

决策者可以从最终近似中选取感兴趣的边界点，并通过求解问题 (VCP) 的适当标量化形式，将其进一步细化为 C–极小或弱 C–极小元素，参见例如 [9, 第 2]章。该过程还会给出所得（弱）C–极小元素的原像，对应于实现期望目标所需的决策变量取值。下面通过一个具体示例来说明这一过程。

例 4.1. 设 (VCP) 的上像为

$$\mathcal{P} := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 - 1 \leqslant y\right\} + \mathbb{R}^2_+.$$

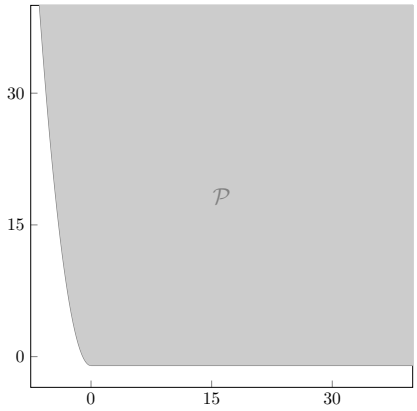
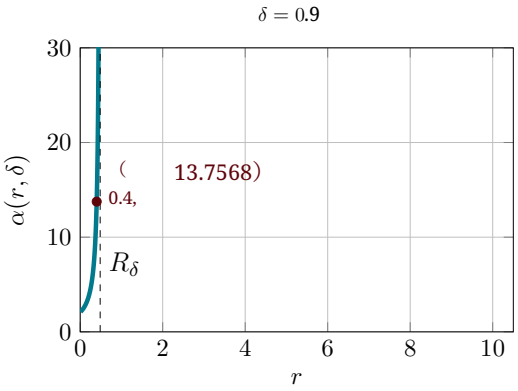
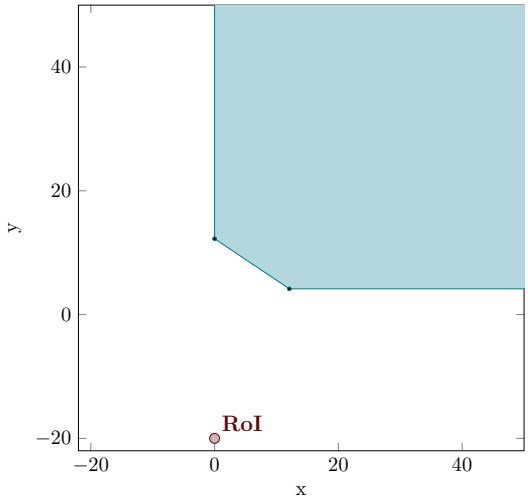


图 4：例 4.1 中无界上像的有界部分。

显然，无法向决策者展示如图 4 所示的可视化表示，因为 (VCP) 的上像通常难以任意程度地进行可视化。因此，目标是获得一个可处理近似。让决策者按照上述说明进行操作。为了定位上像并获得初步的大致印象，决策者选择一个相对较大的 δ 值，并搭配一个任意参考点。例如，考虑在感兴趣区域 $B_{0.4}((0,-20)^T)$内采用 $\delta = 0.9$ 进行近似。在这种情况下，初始参考点为 $p = (0,-20)^T$。请注意，感兴趣区域与集合$\mathcal{P}$ 的交集为空。尽管如此，如图 5 所示，齐次 δ-近似仍能提供初步印象，从而使决策者能够以更有意义的方式重新定义感兴趣区域。



（a）给定$\delta = 0.9$ 时，感兴趣区域的大小与该区域内误差上界之间选定的权衡：感兴趣区域（$r = 0.4$）和该区域内误差的上界（α（0.4,0.9） $= 13.7568$）。



（b）例 4.1 中 $\delta = 0.9$ 的上像近似，其近似中心由选定的感兴趣区域$B_{0.4}$（（0, −20）^{T}）定义。

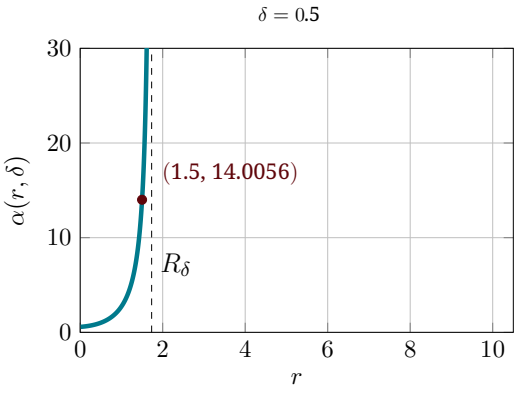
图 5：决策程序的第 1 步。定位上像，并使用较高的 $\delta(\delta = 0.9)$ 值和初始参考点 $(p = (0,-20)^T)$ 形成粗略印象。

根据这一印象，决策者可以选择移动其感兴趣区域。例如，令其选择参考点 $(0,0)^T$ 以及半径 1.5。对于 $\delta = 0.5$，图 6 显示，感兴趣区域内的最大误差约为 14。现在以$\delta = 0.5$近似上像，可得到更精细的表示，如图 6 右侧所示。由于上像与感兴趣区域的交集非空，感兴趣区域现在包含一些点，对于这些点

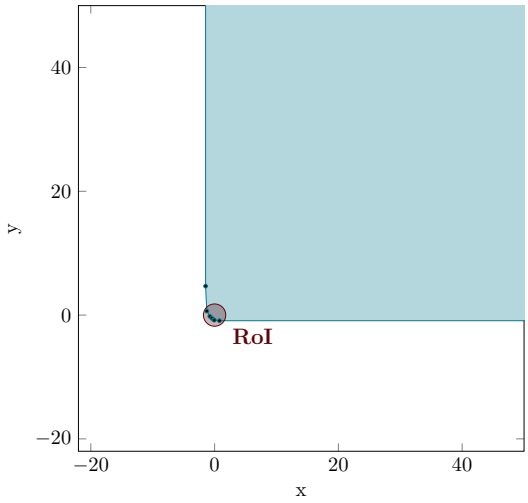
误差界是有效的。此外，感兴趣区域之外的顶点也传达了关于上像全局行为的大量信息。

最后，如果决策者对其感兴趣区域的位置感到满意，就可以进一步细化近似，例如选择 $\delta = 0.1$ 和感兴趣区域 $B_5(0)$（见图 7），或者选择 $\delta = 0.01$ 和感兴趣区域 $B_{50}(0)$（见图 8）。图 8 展示了高度精细的图示。在感兴趣区域内，尤其是在接近原点的位置，到弱 C–极小元的距离很小。在感兴趣区域之外，则通过近似上像衰退方向的顶点，以及刻画上像左侧特征性抛物线形状的顶点，展现其全局行为。

当决策者对探索结果感到满意时，便可以做出充分知情的选择。他们可以从近似上像的边界中选取点，并将其细化为给定问题的 C–极小元或弱 C–极小元，参见例如 [9,第 2]章。

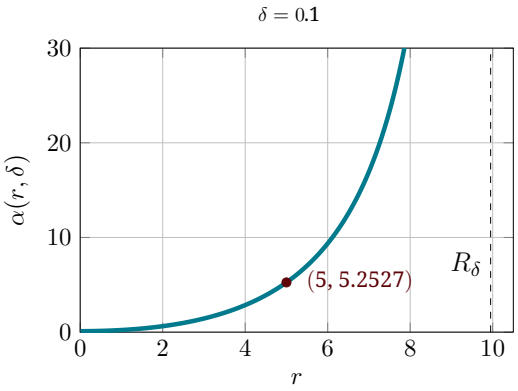


(a) 给定 $\delta = 0.5$ 时，所选取的感兴趣区域（RoI）大小与该区域内误差上界之间的权衡（$r = 1.5$）和 $\alpha(1.5,\ 0.5) = 14.0056$）。

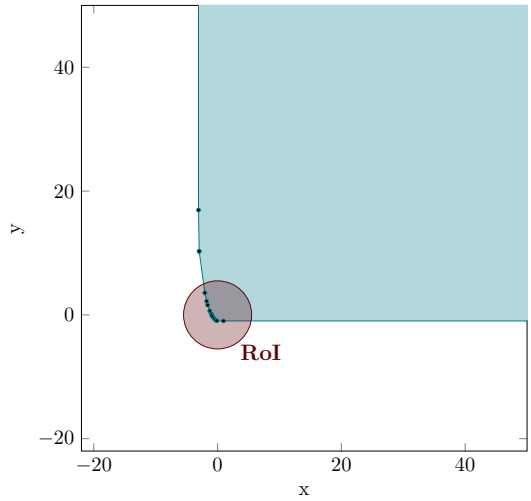


(b) 例 4.1 中 $\delta = 0.5$ 的近似上像，其近似中心由所选感兴趣区域 $B_{1.5}((0,\ 0)^T)$ 定义。

图 6：决策程序的步骤 2。调整参考点的选择（$p = (0, 0)^T$），并使用稍低的 δ 值（$\delta = 0.5$），以便整体了解上像。

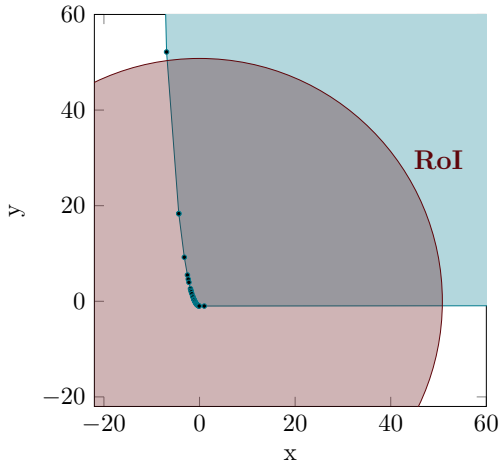


(a) 对感兴趣区域 (RoI) 的大小（$r = 5$）与该区域内误差的上界（$\alpha(5,0.1) = 5.2527$）之间所选的权衡，适用于给定的 $\delta = 0.1$。



(b) 例 4.1 中 $\delta = 0.1$ 的近似上像，其近似中心由所选感兴趣区域 $B_5((0,0)^T)$ 定义。

图 7：决策程序的第 3 步。使用较小的 δ ($\delta = 0.1$) 值，获得对上像更精细的认识。



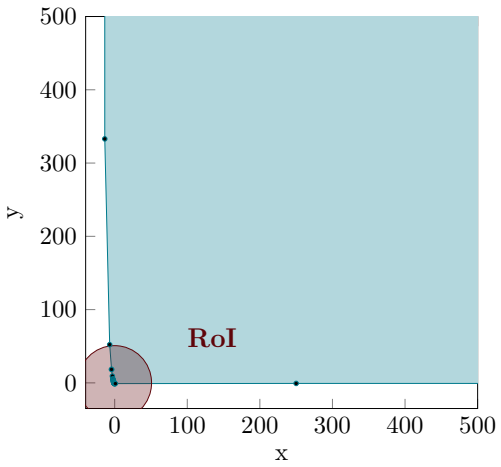


图 8：例 4.1 中 $\delta = 0.01$ 的近似上像，其近似中心由所选感兴趣区域 $B_{50}((0,0)^T)$ 定义。放大图（左）和缩小图（右）。

5 与现有概念的比较

下一节将简要比较本文方法与文献中已有的方法。关于凸向量优化 [17] 和凸多目标优化 [8]的大多数文献都聚焦于有界问题的解概念。然而，这一假设具有局限性。例 4.1 给出了一个无界且非自有界的 (VCP)。假设将针对有界 (VCP) 设计的解概念应用于上像的一个有界部分，即使用有界近似工具，在感兴趣区域 $B_r(p)$内近似上像。根据图6、图7和图8，我们可以得出结论：与齐次 δ-近似相比，这种方法提供的整体信息较少。即使将 (VCP) 的序锥也加入有界近似中，结论仍然成立。图 6、图 7、图 8 显示，位于感兴趣区域之外的近似上像顶点截断

刻画上像的抛物线形状及其衰退方向。与有界近似相比，当序锥明显小于上像的衰退锥时，这种差异尤为显著，即假设 $C \subsetneq \mathbb{R}^m$ 的例 4.1。

当无界问题未被化归为有界问题时，(VCP) 的非自有界性可能成为一个问题。据我们所知，在现有概念中， [24] 中详细讨论的(ϵ, δ)概念是唯一适用于一般无界问题（包括非自有界问题）的框架。 然而，此处引入的齐次 δ 解概念比(ϵ, δ)概念更一般。正如定理 3.4所证明的，对于任何类型为 (VCP) 的问题以及任何给定精度 $\delta > 0$，都存在齐次δ解。相比之下， [24] 并未给出(ϵ, δ)解存在性的一般结论，而是提出了一种寻找此类解的算法。尽管他们证明了算法的正确性，并对如何证明算法有限性给出了一些提示，但其方法依赖于额外假设。特别是，为了使该概念成立，要求序锥是实心的。在讨论其算法时， [24] 还进一步假设可行域是闭且满维的，并且目标函数在可行集上连续。因此，尚不清楚 (VCP) 的(ϵ, δ)解在什么一般条件下存在。此外，[24] 假设其算法实现中的序锥具有多面体性。

最后需要指出的是，在(ϵ, δ)-近似框架下，无法预先明确指定保证 ϵ-近似质量的半径。在 [24], 提出的实现中，该半径取决于参数 ϵ 和 δ ，以及上像本身的性质。与此相反，第4节展示了如何在齐次 δ-近似的背景下选择参数 δ ，从而保证在指定半径内使近似误差满足所需上界。因此，由齐次 δ-近似概念导出的决策程序在本质上截然不同。

6 定理3.4–3.7的证明

本节给出第3节所述结果的数学证明。

定理 ***3.4*** 的证明。不失一般性，设给定 $\delta \in (0, 1)$ 。注意，对于$\delta \geqslant 1$，任意有限非空集 $X \subseteq S$ 都是 (VCP) 的有限齐次 δ-解，因为两个集合的截断豪斯多夫距离始终小于或等于 1。注意，hom$\mathcal{P} \cap \mathbb{B}$是一个非空紧凸集。因此，根据 [18, 定理 2.1], ，存在有限集 $Y = \{(y^1, \mu^1)$，…，$(y^r, \mu^r)\}$，使得 $r \in \mathbb{N}$ 且 conv $Y \subseteq$hom $\mathcal{P} \cap \mathbb{B}$，满足

$$d_H(\operatorname{conv} Y, \hom \mathcal{P} \cap \mathbb{B}) \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

对于以下推理，我们不失一般性地假设 dim(conv Y) $=$dim(hom P $\cap \mathbb{B}$) $=$dim(hom P)。第二个等式显然由定义可知。由于 conv$Y \subseteq$hom P $\cap \mathbb{B}$，关系 dim(conv Y) $\leqslant$ dim(hom P $\cap \mathbb{B}$) 始终成立。如果 dim(conv Y) $<$dim(hom P $\cap \mathbb{B}$)，我们可以向集合 Y 中添加足够多的 hom P $\cap \mathbb{B}$ 的仿射无关点，直到得到 dim(conv Y) $=$dim(hom P $\cap \mathbb{B}$)。

现在我们继续证明，可以从给定集合 Y 中选取点集 $\bar{Y} \subseteq$ ri(hom $\mathcal{P}$)，使得 d_H(conv $\bar{Y}$, conv Y)$\leqslant \frac{\delta}{2}$。由于 ri(conv Y)$\neq \emptyset$ [19, 定理 6.2],，我们可以选取 $(\bar{y}, \bar{\mu})^T \in$ ri(conv Y)。注意，$\bar{\mu} > 0$: 显然 $\bar{\mu} \geqslant 0$，因为 $(\bar{y}, \bar{\mu})^T \in$ hom $\mathcal{P}$。

由于 $\mathcal{P} \neq \emptyset$，存在一点 $(z, 1)^T \in \operatorname{hom} \mathcal{P}$，因此

$$\mathcal{P} \not\subseteq \left\{ (z,0)^T \,\middle|\, z \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

由于已假设 $\dim(\operatorname{conv} Y) = \dim(\operatorname{hom} \mathcal{P})$，

$$\operatorname{conv} Y \not\subseteq \left\{ (z,0)^T \,\middle|\, z \in \mathbb{R}^m \right\}$$

由此可得。这意味着，对于一个相对内点，最后一个分量 $\bar{\mu}$ 必须严格为正。

对于 $i = 1, \ldots, r$，定义

$$d^i := (\bar{y}, \bar{\mu})^T - (y^i, \mu^i)^T.$$

那么，对于所有 $t \in (0,1]$ [19,，$(y^i, \mu^i)^T + td^i \in$ 属于 $\operatorname{ri}(\operatorname{conv} Y)$。定理 6.1]。考虑

$$\bar{t} := \min_{1 \leqslant i \leqslant r} \left\{ \frac{\delta}{2 \left\| d^i \right\|}, 1 \right\}.$$

现在我们可以用如下方式定义 $\operatorname{conv} Y$ 中相对内部点的集合 $\bar{Y} = \{(\bar{y}^1, \bar{\mu}^1)^T, \ldots, (\bar{y}^r, \bar{\mu}^r)^T\}$:

$$(\bar{y}^i, \bar{\mu}^i)^T := (y^i, \mu^i)^T + \bar{t} d^i.$$

我们有

$$\operatorname{conv} \bar{Y} \subseteq \operatorname{ri}(\operatorname{conv} Y),$$

以及

$$d_H(\operatorname{conv} \bar{Y}, \operatorname{conv} Y) \leqslant \max \left\{ d(\bar{y}, \operatorname{conv} Y) \,\middle|\, \bar{y} \in \bar{Y} \right\} \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

请注意，后者可由集合 Y 的构造、集合 Y 以及两个多胞体之间的豪斯多夫距离在某个极点处取得这一事实推出 [2, 定理 3.3]。我们得到 $\operatorname{conv} \bar{Y} \subseteq \operatorname{conv} Y$，且多胞体 $\operatorname{conv} \bar{Y}$ 的每个顶点到多胞体 $\operatorname{conv} Y$ 中某个点的距离至多为 $\frac{\delta}{2}$。由 $\operatorname{conv} \bar{Y} \subseteq \operatorname{ri}(\operatorname{conv} Y)$，可得关系式

$$\operatorname{conv} \bar{Y} \subseteq \operatorname{ri}(\operatorname{conv} Y) \subseteq \operatorname{ri}(\operatorname{hom} \mathcal{P} \cap \mathbb{B}) \subseteq \operatorname{ri}(\operatorname{hom} \mathcal{P}).$$

第二个和最后一个包含关系可由以下事实推出：$\dim(\operatorname{conv} Y) = \dim(\operatorname{hom} \mathcal{P} \cap \mathbb{B}) = \dim(\operatorname{hom} \mathcal{P})$，以及 [19, 推论 6.5.2]。我们有

$$d_{tH}(\operatorname{conv} \bar{Y}, \operatorname{hom} \mathcal{P}) = d_H(\operatorname{conv} \bar{Y}, \operatorname{hom} \mathcal{P} \cap \mathbb{B})$$

由于 $\operatorname{conv} \bar{Y} \subseteq \operatorname{hom} \mathcal{P} \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}$。由 $d_H(\operatorname{conv} Y, \operatorname{hom} \mathcal{P} \cap \mathbb{B}) \leqslant \frac{\delta}{2}$, $d_H(\operatorname{conv} \bar{Y}, \operatorname{conv} Y) \leqslant \frac{\delta}{2}$以及三角不等式，可得

$$\begin{aligned} d_{tH}(\operatorname{conv} \bar{Y}, \operatorname{hom} \mathcal{P}) &= d_H(\operatorname{conv} \bar{Y}, \operatorname{hom} \mathcal{P} \cap \mathbb{B}) \\ &\leqslant d_H(\operatorname{conv} \bar{Y}, \operatorname{conv} Y) + d_H(\operatorname{conv} Y, \operatorname{hom} \mathcal{P} \cap \mathbb{B}) \\ &\leqslant \delta. \end{aligned} \tag{1}$$

S 由于 $\operatorname{hom} \mathcal{P}$是一个凸锥，且 $\operatorname{conv} Y \subseteq \operatorname{cone} Y \cap \mathbb{B}$，我们得到 $\operatorname{cone} Y \subseteq \operatorname{hom} \mathcal{P}$，其中

$$d_{tH}(\operatorname{cone} \bar{Y}, \operatorname{hom} \mathcal{P}) \leqslant \delta.$$

由此我们证明，对于任意 $\delta \in (0,1)$，都可以找到一个由 $\bar{Y}$ hom $\mathcal{P}$ 的相对内点构成的集合，从而通过 cone Y 可以确定 $\mathcal{P}$ 的一个齐次 δ-近似。

为了求得 (VCP) 的齐次 δ-近似和齐次 δ-解，考虑以下由 [19, 推论 6.8.1]给出的 ri(hom $\mathcal{P}$) 表示:

$$\operatorname{ri}(\hom \mathcal{P}) = \left\{ \mu(x,1)^T \,\middle|\, \mu > 0, x \in \operatorname{ri} \mathcal{P} \right\}.$$

因此，我们有

$$\operatorname{cone} \bar{Y} = \hom \left(\operatorname{conv} \left\{ \frac{\bar{y}^1}{\bar{\mu}^1}, \ldots, \frac{\bar{y}^r}{\bar{\mu}^r} \right\} \right), \tag{2}$$

其中 $\{\frac{\bar{y}^1}{\bar{\mu}^1}, \ldots, \frac{\bar{y}^r}{\bar{\mu}^r}\} \subseteq \operatorname{ri} \mathcal{P} = \operatorname{ri}(F[S]+C) \subseteq F[S]+C$。注意，$\operatorname{ri} \mathcal{P} = \operatorname{ri}(F[S]+C)$ 成立，因为集合 $F[S]+C$ 的闭包的相对内部与集合 $F[S]+C$ [19, 的相对内部相同，这由定理 6.3] 得出。因此，这意味着对于所有 $i = 1, \ldots, r$:

$$\frac{\bar{y}^i}{\bar{\mu}^i} = F(x^i) + c^i$$

对于某个 $x^i \in S$ 和某个 $c^i \in C$。令 $X = \{x^1, \ldots, x^r\}$。那么我们有

$$\operatorname{conv} \left\{ \frac{\bar{y}^1}{\bar{\mu}^1}, \ldots, \frac{\bar{y}^r}{\bar{\mu}^r} \right\} \subseteq \operatorname{conv} F[X] + C \subseteq \mathcal{P}. \tag{3}$$

由不等式 (1)、方程 (2) 中的关系以及包含关系 (3)，现在显然， X 表示问题 (VCP) 的一个有限齐次 δ-解。 □

为证明定理 3.5，我们首先在引理 6.1 中证明一个辅助结论。

引理 6.1. 设 $A \subseteq \mathbb{R}^m$ 和 $B \subseteq \mathbb{R}^m$ 是两个非空闭凸集，满足 $A \subseteq B$ 且 d_{tH}(齐次 A，齐次 B) $\leqslant \delta$，其中 $\delta \in (0,1)$。设 $y \in$ 边界 A 且满足 $\|y\| < R_\delta$。那么

$$\exists n \in \operatorname{bd} B : d\left(\frac{1}{\|(n,1)^T\|}(n,1)^T, \operatorname{cone}\left\{(y,1)^T\right\} \right) \leqslant \delta.$$

证明。 考虑满足 $\|y\| < \sqrt{\frac{1}{\delta^2} - 1}$的 $y \in$ 边界 A。首先注意，对于任意 $\bar{n} \in \mathbb{R}^{m+1}$，我们有

$$d\left(\frac{1}{\|\bar{n}\|}\bar{n}, \operatorname{cone}\left\{(y,1)^T\right\} \right) = d\left(\frac{1}{\|(y,1)^T\|}(y,1)^T, \operatorname{cone}\{\bar{n}\} \right). \tag{4}$$

由命题 3.2 可知， $y \in$ 边界 A 意味着 $(y,1)^T \in$ 边界(齐次 A)。根据假设，我们有

$$d_{tH}(\hom A, \hom B) = d_H\left(\hom A \cap \mathbb{B}, \hom B \cap \mathbb{B}\right) \leqslant \delta.$$

根据 [25, 定理 20], ，由于 hom $A \cap \mathbb{B}$ 和 hom $B \cap \mathbb{B}$ 是紧的、凸的且非空的，我们得到

$$d_H\left(\hom A \cap \mathbb{B}, \hom B \cap \mathbb{B}\right) = d_H\left(\operatorname{bd}\left(\hom A\right) \cap \mathbb{B}, \operatorname{bd}\left(\hom B\right) \cap \mathbb{B}\right).$$

因此，对于给定的 $y \in$ 边界 (hom A) 满足 $\frac{1}{\|y\ 1(,\ )^T\|}(y,\ 1)^T \in$ 边界 (hom A) $\cap \mathbb{B}$

$$
\begin{aligned}
d_H\left(\hom A \cap \mathbb{B}, \hom B \cap \mathbb{B}\right) &\geqslant \max_{z \in \mathrm{bd}(\hom A) \cap \mathbb{B}} d\left(z, \mathrm{bd}\left(\hom B\right) \cap \mathbb{B}\right) \\
&\geqslant d\left(\frac{1}{\|(y,1)^T\|}(y,1)^T, \mathrm{bd}\left(\hom B\right) \cap \mathbb{B}\right).
\end{aligned}
$$

Thus

$$
d\left(\frac{1}{\|(y,1)^T\|}(y,1)^T, \mathrm{bd}\left(\hom B\right) \cap \mathbb{B}\right) \leqslant \delta.
$$

根据方程 (4)，这意味着存在 $\bar{n} \in \mathrm{bd}\ (\hom B)$ 使得

$$
d\left(\frac{1}{\|\bar{n}\|}\bar{n}, \mathrm{cone}\{(y,1)^T\}\right) \leqslant \delta.
$$

剩下要证明的是，$\bar{n}$ 可以取为 $\bar{n} = (\tilde{n}, 1)^T$ 的形式。由于 $\bar{n}$ 包含于一个非空凸集的齐次化中，因此它具有 $\bar{n} = (\tilde{n}, \mu)^T$ 的形式，其中 $\mu \geqslant 0$。显然，若$\mu > 0$，$\frac{1}{\|\bar{n}\|}\bar{n} = \frac{1}{\|n\ 1(,\ )^T\|}(n, 1)^T$ 对于 $n = \frac{\tilde{n}}{\mu}$ 成立，则所需结论对 $(n, 1)^T$ 也成立。假设 $\mu = 0$ 成立。由于

$$
d\left((y,1)^T, \mathrm{cone}\left\{(\tilde{n},0)^T\right\}\right) \geqslant d\left((y,1)^T, \mathrm{cone}\left\{(y,0)^T\right\}\right)
$$

由于 $(y, 0)^T$ 是 $(y,1)^T$ 在 $\{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_{m+1} = 0\}$ 上的投影，因此可得

$$
d\left(\frac{1}{\|(\tilde{n},0)^T\|}(\tilde{n},0)^T, \mathrm{cone}\left\{(y,1)^T\right\}\right) \geqslant d\left(\frac{1}{\|(y,0)^T\|}(y,0)^T, \mathrm{cone}\left\{(y,1)^T\right\}\right).
$$

这意味着 $d\left(\frac{1}{\|y\ 0(,\ )^T\|}(y, 0)^T, \text{锥}\{(y, 1)^T\}\right) \leqslant \delta$. 根据基本几何考量可得:

$$
\frac{\left\|(y,1)^T\right\|}{1} = \frac{1}{d\left(\mathrm{cone}\{(y,1)^T\}, \frac{1}{\|(y,0)^T\|}(y,0)^T\right)},
$$

这意味着 $\left\|(y, 1)^T\right\| \geqslant \frac{1}{\delta}$。这与初始假设 $\|y\| <$ 矛盾 $\sqrt{\frac{1}{\delta^2} - 1}$. □

定理 *3.5* 的证明。 下面，我们排除 $y \in \mathrm{bd}\,\mathcal{P}$。由于这将意味着，在给定假设 $r < R_\delta$ 下，$d(y, \mathrm{bd}\,\mathcal{P}) = 0$ 且 $\alpha(r, \delta) \geqslant 0$，因此在这种情况下该命题始终成立。

根据假设 $r < R_\delta$，且 P_X 是 $\mathcal{P}$ 的内齐次 δ-近似，引理 6.1 表明存在 $(n, 1)^T \in \mathrm{bd}(\hom \mathcal{P})$，使得

$$
d\left(\frac{1}{\|(n,1)^T\|}(n,1)^T, \mathrm{cone}\left\{(y,1)^T\right\}\right) \leqslant \delta.
$$

Let

$$
q := \min\left\{d\left(\frac{1}{\|(n,1)^T\|}(n,1)^T, \mathrm{cone}\{(y,1)^T\}\right) \,\middle|\, (n,1)^T \in \mathrm{bd}(\hom \mathcal{P})\right\}.
$$

于是，根据引理 6.1，$q \leqslant \delta$ $0 < q < 1$。

因此，q的截断豪斯多夫距离在 $d\left(\frac{1}{\|n\ 1(,)^T\|}(n, 1)^T、\text{锥}\{(y, 1)^T\}\right)$处取得。从此处开始，分析可简化为在平面嵌入$(y, 1)^T$、$(n, 1)^T$及原点上的二维讨论。这是因为在接下来的考察中，只有两条射线锥$\{(y, 1)^T\}$和锥$\{(n, 1)^T\}$与讨论相关。

在二维情形下， y 和 n 分别与其范数 $\|y\|$和 $\|n\|$等同。因此，在本证明余下部分，我们分别用 y 和 n表示 $\|y\|$和 $\|n\|$。此外，定义：

$$z_1 := \frac{\sqrt{1-q^2}}{\|(y,1)^T\|}(y,1)^T, \quad z_2 := \frac{1}{\|(n,1)^T\|}(n,1)^T$$

and

$$\alpha_{y,q} := d\left((y,1)^T,(n,1)^T\right) = \|n-y\|. \tag{5}$$

(5) 中的最后一个等式源于这样一个事实：两个点，$(y,1)^T$和 $(n,1)^T$，都位于超平面 $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 1\}$上。显然，$\alpha_{y,q}$ 是我们要给出上界的距离。

现在我们来讨论一些几何考量：注意，根据定义， z_1 位于锥$\{(y,1)^T\}$上，而 z_2 位于锥$\{(n,1)^T\}$ 上，其中

$$\|z_1\| = \sqrt{1-q^2},\ \|z_2\| = 1$$

由于截断豪斯多夫距离 q 在 $d\left(\|\ n\ 1^{(\cdot)^T}\|(n,1)^T、锥\{(y,1)^T\}\right)$处取得，因此显然有 $d(z_1,z_2) = q$。

此外，显然有

$$z_2 = z_1 + \frac{q}{\|(y,1)^T\|}(1,-y)^T,$$

因为方向 $(-1,y)^T$与锥$\{(y,1)^T\}$ 垂直，并且根据定义，从 z_1移动时， z_2 与 q 之间的欧几里得距离为此。查看 z_2的定义，可知存在$k>0$ 使得

$$(n,1)^T = kz_2 = k\left(\frac{\sqrt{1-q^2}}{\|(y,1)^T\|}(y,1)^T + \frac{q}{\|(y,1)^T\|}(1,-y)^T\right).$$

这意味着

$$1 = k\left(\frac{\sqrt{1-q^2}}{\|(y,1)^T\|} - \frac{qy}{\|(y,1)^T\|}\right) \Longrightarrow k = \frac{\left\|(y,1)^T\right\|}{\sqrt{1-q^2}-qy}, \tag{6}$$

以及

$$n = k\left(\frac{\sqrt{1-q^2}}{\|(y,1)^T\|}y + \frac{q}{\|(y,1)^T\|}\right). \tag{7}$$

请注意，根据第一个方程，当且仅当 $y < \sqrt{\frac{1}{q^2}-1}$时， k 可以证明为严格正值；而给定 $r < R_\delta$ 时，这一条件必然成立：

$$y \leqslant r < \sqrt{\frac{1}{\delta^2}-1} \leqslant \sqrt{\frac{1}{q^2}-1}.$$

结合方程（6）和方程（7）可得

$$n = \frac{\sqrt{1-q^2}y - q}{\sqrt{1-q^2}+qy}. \tag{8}$$

因此 此外，根据方程（5）和方程（8），经过一些化简可得 n:

$$\alpha_{y,q} = \|n - y\| = \frac{q(y^2+1)}{\sqrt{1-q^2} - qy}.$$

此外，$\alpha_{y,q}$ in q 的一阶导数为

$$\frac{\delta \alpha_{y,q}}{\delta q} = \frac{(1+q^2)(y^2+1)}{\sqrt{1-q^2}\left(\sqrt{1-q^2} - yq\right)^2},$$

对于 $q \in (0,1)$，该值严格为正。这是由假设 $\delta \in (0,1)$ 和$y/\in \text{bd}\,\mathcal{P}$得出的。因此，它在所有 $q \in (0,1)$上都是单调递增函数。

接下来，考虑 y 中的一阶导数:

$$\frac{\delta \alpha_{y,q}}{\delta y} = \frac{q\left(q + 2\sqrt{1-q^2}y - qy^2\right)}{\left(qy - \sqrt{1-q^2}\right)^2}.$$

可以证明，在假设 $q < \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$ 下，该导数严格为正，因此函数在 y 中单调递增。

因此，给定 $r < R_\delta$，且已知 $q \leqslant \delta$，可得

$$\alpha_{y,q} = \frac{q(y^2+1)}{\sqrt{1-q^2} - qy} \leqslant \frac{\delta(r^2+1)}{\sqrt{1-\delta^2} - \delta r} = \alpha(r,\delta).$$

□

定理 ***3.7*** 的证明。 首先需要指出，根据命题 3.2 中对非空闭凸集齐次化的刻画以及齐次δ-近似的定义，对于 $y \in \text{bd}\ P_X$，以下情况总有一种成立:

(iii) $\exists (n,1)^T \in \text{bd}(\text{hom P}):\ d\left(\|\ {}_{n\ 1}^{1}(\ ,\ )^T\|(n,1)^T, \text{锥}\{(y,1)^T\}\right) \leqslant \delta$. (iv) $\exists (d,0)^T \in \text{bd}(\text{hom P}):\ d\left(\|\ {}_{d\ 0}^{1}(\ ,\ )^T\|(d,0)^T, \text{锥}\{(y,1)^T\}\right) \leqslant \delta$.

设 (i) 不成立，即 $d(y, \text{bd}\,\mathcal{P}) > \alpha(\|y\|, q)$ 其中

$$q = d\left(\frac{(n,1)^T}{\|(n,1)\|}, \text{cone}\{(y,1)^T\}\right)$$

对所有 $n \in \text{bd}\mathcal{P}$ 均成立。然后，根据定理 3.5 的证明，并且由于在证明中假设 q 表示锥 $\left\{(y,1)^T\right\}$ 到由某点 $(n,1)^T \in \text{bd}(\text{hom}\,\mathcal{P})$ 生成的任意射线的最小欧几里得距离，因此 (iii) 不可能成立。所以，由命题 3.2 可知 (iv) 必须成立。

现在可以证明 (iv) 蕴含 (ii): 设 (iv) 成立。因此，存在 $d \in 0^+\mathcal{P}$ 使得 $d\left(\|\ {}_{y\ 1}^{1}(,)^T\|(y,1)^T, \sqrt{1-q^2}(d,0)^T\right) = q$，其中 $q \leqslant \delta$(命题 3.2)。不失一般性，假设 $\|d\| = 1$。给定 $q \in (0,1)$，这意味着

$$q = \sqrt{\left\|\frac{1}{\|(y,1)^T\|}y - \sqrt{1-q^2}d\right\|^2 + \frac{1}{\|(y,1)^T\|^2}} \geqslant d\left(\frac{1}{\|(y,1)^T\|}y, \sqrt{1-q^2}d\right)$$

$$\geqslant d\left(\frac{1}{\|(y,1)^T\|}y, \operatorname{cone}\{d\}\right) =: a.$$

由于 $a \leqslant q$，考虑平面上的射线锥$\{d\}$ 和锥$\{y\}$以及基本比例关系的原理，可得以下不等式:

$$b := d\left(\frac{y}{\|y\|}, \operatorname{cone}\{d\}\right) = \frac{\left\|(y,1)^T\right\|}{\|y\|}a \leqslant \frac{\left\|(y,1)^T\right\|}{\|y\|}q \leqslant \frac{\left\|(y,1)^T\right\|}{\|y\|}\delta.$$

此外，由于 $d \in 0^+\mathcal{P}$，我们得到

$$b \geqslant d\left(\frac{y}{\|y\|}, 0^+\mathcal{P}\right).$$

因此,

$$d\left(\frac{y}{\|y\|}, 0^+\mathcal{P}\right) \leqslant \frac{\left\|(y,1)^T\right\|}{\|y\|}\delta$$

由此可知，命题 (ii) 成立。

现在假设命题 (ii) 不成立。这意味着

$$d\left(\frac{y}{\|y\|}, 0^+\mathcal{P}\right) > \frac{\left\|(y,1)^T\right\|}{\|y\|}\delta.$$

根据前述论证的逆向过程，这意味着 (iv) 不成立。现在我们证明 (iv) 不成立意味着 (i) 成立。命题 (iv) 不成立意味着

$$d\left(\frac{1}{\|(y,1)^T\|}(y,1)^T, 0^+\mathcal{P} \times \{0\}\right) > \delta.$$

因此，根据命题 3.2 给出的刻画，$(y,1)^T \in \mathsf{bd}\ P_X \times\{1\}$ 相对于点 $(n,1)^T \in \mathsf{bd}(\mathsf{hom}\ \mathcal{P})$的截断豪斯多夫距离至多为 δ，即 (iii) 成立。根据定理 3.5 的证明中的论证，这意味着 y 到上像 $\mathcal{P}$ 边界的距离由下式给出

$$\alpha(\|y\|, q) = \frac{q(\|y\|^2 + 1)}{\sqrt{1 - q^2} - q\|y\|}$$

其中，$q < \delta$ 表示上述截断豪斯多夫距离。请注意，定理 3.5 证明中的这部分并不依赖于假设 $\|y\| < R_\delta$。因此，(i) 成立。 □

7 结论

在本研究中，我们为凸向量优化问题引入了齐次 δ-解的概念。该概念只依赖一个精度参数 δ，无需区分远离原点的点与方向，并且在目标函数缩放时具有稳健性。我们证明，对于任意类型为 (VCP) 的问题以及任意 $\delta > 0$，均存在齐次 δ-解，无需额外的结构性假设。此外，还能保证某种形式的近似极小性：在用户定义的、半径为r 的感兴趣区域内，近似集的边界点与上像边界的距离至少为 $\alpha(r, \delta)$，因此在满足可行性的条件下，这些点对应于弱 C–极小元。我们给出了 $\alpha(r, \delta)$ 关于 r 和 δ的显式表达式。在感兴趣区域之外，近似集的边界点

与上像的边界点或衰退方向距离较近 .

我们进一步展示了一种决策程序，突显了这一概念的实际意义。决策者通过权衡感兴趣区域的大小与所保证的近似质量，选择精度参数 δ，同时尽可能增大 δ，以提高计算效率。该程序可迭代细化，从而能够以可调整的感兴趣区域和精度，逐步探索上像。

最后，我们将齐次 δ-近似与现有方法进行了比较。与有界方法不同，齐次 δ-近似能够提供丰富的全局信息。据我们所知，(ϵ, δ)框架是唯一适用于一般无界问题的框架；与之相比，我们的方法不需要额外假设，并且保证解的存在。除了技术层面的差异，所提出的齐次 δ 概念还提供了一种根本不同的视角：它将全局信息与用户指定的逐步局部细化相结合。由此，我们为凸向量优化中的决策制定提供了一个灵活的框架。

利益披露

作者声明不存在需要披露的竞争利益。

参考文献

[1] Çağın Ararat、Firdevs Ulus 和 Muhammad Umer。《基于范数最小化的凸向量优化算法》。载于：优化理论与应用杂志194.2（2022），第 681–712 页。[2] Robert G Batson。《Radstrom 引理的推广及其在数学规划稳定性理论中的应用》。载于：数学分析与应用杂志117.2（1986），第 441–448 页。[3] Harold P Benson。《一种用于生成多目标线性规划问题结果集内所有有效极点的外逼近算法》。载于：全球优化期刊13（1998），第 1–24 页。[4] Jan Brinkhuis。《优化的凸分析：统一方法》。运筹学研究生教材。瑞士沙姆：施普林格，2020。[5] Efim M Bronstein。《用多胞体近似凸集》。载于：数学科学杂志153.6（2008），第 727–762 页。[6] Daniel Dörfler。《用多面体近似无界凸集》。载于：优化理论与应用杂志194.1（2022），第 265–287 页。[7] Daniel Dörfler 和 Andreas Löhne。《通过齐次化对谱影进行多面体近似》。载于：优化理论与应用杂志200.2（2024），第 874–890 页。[8] Matthias Ehrgott、Lizhen Shao 和 Anita Schöbel。《凸多目标规划问题的近似算法》。载于：全球优化期刊50（2011），第 397–416 页。[9] Gabriele Eichfelder。《多目标优化中的自适应标量化方法》。向量优化。柏林、海德堡：施普林格，2008。[10] César Gutiérrez、Bienvenido Jiménez 和 Vicente Novo。《通过标量化求解向量优化问题的近似解》。载于：计算优化与应用35.3（2006），第 305–324 页。[11] Andreas H Hamel、Andreas Löhne 和 Birgit Rudloff。《线性向量优化的 Benson 型算法及其应用》。载于：全球优化期刊 59（2014），第 811–836 页。[12] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty 和 Claude Lemaréchal。《凸分析基础》。Grundlehren 文本版。柏林、海德堡：施普林格科学与商业媒体，2004。[13] Alfredo Iusem 和 Alberto Seeger。《闭凸锥之间的距离：新旧结果》。载于：凸分析杂志17.3-4（2010），第 1033–1055 页。[14] Johannes Jahn。《向量优化：理论、应用与拓展》。第 2 版。柏林、海德堡：施普林格，2011。[15] Irem N Keskin 和 Firdevs Ulus。《凸向量优化问题的外逼近算法》。载于：优化方法与软件38.4（2023），第 723–755 页。[16] Gabriela Kováčová 和 Birgit Rudloff。《均值—风险问题的时间一致性》。载于：运筹学69.4（2021），第 1100–1117 页。

[17] Andreas Löhne、Birgit Rudloff 和 Firdevs Ulus。“凸向量优化问题的原始与对偶近似算法”。载于：全球优化期刊 60.4 (2014)，第 713–736 页。[18] Peter E Ney 和 Stephen M Robinson。“凸集的多面体近似及其在大偏差概率论中的应用”。载于：凸分析杂志 2.1-2 (1995)，第 229–240 页。[19] Ralph T Rockafellar。凸分析。第 28 卷，普林斯顿数学丛书。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1970 年。[20] Ralph T Rockafellar 和 Roger J-B Wets。变分分析。柏林、海德堡：施普林格，1998 年。[21] Birgit Rudloff 和 Firdevs Ulus。“通过凸向量优化研究不完备偏好的确定性等价与效用无差异定价”。载于：数学与金融经济学 15.2 (2021)，第 397–430 页。[22] Alexander Schrijver。线性规划与整数规划理论。奇切斯特：John Wiley & Sons，1998 年。[23] Firdevs Ulus。“多面体近似意义下凸向量优化问题的可处理性”。载于：全球优化期刊 72.4 (2018)，第 731–742 页。[24] Andrea Wagner、Firdevs Ulus、Birgit Rudloff、Gabriela Kováčová 和 Niklas Hey。“求解无界凸向量优化问题的算法”。载于：*SIAM*优化杂志 33.4 (2023)，第 2598–2624 页。[25] Michael D Wills。“豪斯多夫距离与凸集”。载于：凸分析杂志14.1 (2007)，第 109–117 页。