arXiv:2603.26312v1 [math.FA] 27 Mar 2026

结构化奇异值的刚性及其应用

SOURAV PAL 和 NITIN TOMAR

摘要。线性子空间 E of $M_n(\mathbb{C})$ 的结构奇异值 μ_E 定义为 b y

$$\mu_E(A) = 1/\inf\{\|X\| : X \in E,\ \det(I_n - AX) = 0\} \quad (A \in M_n(\mathbb{C})),$$

且当不存在满足 $\det(I_n - AX) = 0$ 的 $X \in E$ 时，$\mu_E(A) = 0$。众所周知，当 $E = \{cI_n : c \in \mathbb{C}\}$ 时，$\mu_E(A)$ 与谱半径 $r(A)$ 相同；而当 $E = M_n(\mathbb{C})$ 时，对于所有 $A \in M_n(\mathbb{C})$，$\mu_E(A) = \|A\|$。此外，对于任意满足 $\{cI_n : c \in \mathbb{C}\} \subseteq E \subseteq M_n(\mathbb{C})$ 的线性子空间 E，都有 $r(A) \leq \mu_E(A) \leq \|A\|$。我们证明，若 $E = \{cI_n : c \in \mathbb{C}\}$，且 F 是包含 E 的 $M_n(\mathbb{C})$ 的任意线性子空间，则 $\mu_E = \mu_F$ 当且仅当 $E = F$。对于由 n 阶对角矩阵构成的线性子空间，我们证明了完全相同的刚性定理。相反，当 $E = M_n(\mathbb{C})$ 时，我们证明 $M_n(\mathbb{C})$ 存在一个真子空间 F，即对称矩阵空间，使得 $\mu_E = \mu_F =$ 算子范数。此外，我们刻画了所有满足 μ_F 与算子范数相同的线性子空间 $F \subseteq M_n(\mathbb{C})$。接下来，我们证明一般而言，$M_n(\mathbb{C})$ 中不存在子空间 E 使得 $\mu_E =$ 为数值半径，即使对于 $M_2(\mathbb{C})$ 也不例外。然后，我们证明，除谱半径和算子范数外，对于任何 $E \subseteq M_2(\mathbb{C})$，$\mu_E$ 都不可能是谱半径、数值半径和算子范数的凸组合。函数 μ_E 的单位球会根据 E 在 $\mathbb{C}^d$ 中诱导出各种域，例如对称双圆盘 $\mathbb{G}_2$、四块域 $\mathbb{E}$、五块域 $\mathbb{P}$ 和六块域 $\mathbb{H}$。域 $\mathbb{G}_2$ 和 $\mathbb{E}$ 分别对应于 $M_2(\mathbb{C})$ 中由标量矩阵和对角矩阵构成的线性子空间，而 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{H}$ 则源自 $M_2(\mathbb{C})$ 中某些由上三角矩阵构成的线性子空间。对于这些线性子空间中的每一个，我们都证明了相应结构奇异值的刚性。

1. 引言

结构奇异值是鲁棒控制理论中的核心概念之一，在分析系统在结构化不确定性下的稳定性方面发挥着关键作用。给定复矩阵空间E的一个线性子空间$M_n(\mathbb{C})$，结构奇异值 $\mu_E : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$定义为

$$\mu_E(A) := \frac{1}{\inf\{\|X\| : X \in E,\ \det(I_n - AX) = 0\}}, \quad A \in M_n(\mathbb{C}). \tag{1.1}$$

若不存在满足 $\det(I_n - AX) = 0$ 的 $X \in E$，则将 $\mu_E(A)$ 定义为 0。线性子空间 E 称为“结构”。结构奇异值可在更一般的 $m \times n$ 矩阵情形下定义，例如参见 [1] 的最后一节。不过，本文仅关注 $M_n(\mathbb{C})$。众所周知，对于所有 $A \in M_n(\mathbb{C})$，若 E 是标量矩阵空间 $\{cI_n : c \in \mathbb{C}\}$，则 $\mu_E(A) = r(A)$；若 $E = M_n(\mathbb{C})$，则 $\mu_E(A) = \|A\|$。这里，$r(A)$ 和 $\|A\|$ 分别表示矩阵 A 的谱半径和算子范数，I_n 是 $M_n(\mathbb{C})$ 中的单位矩阵。此外，对于任意满足 $\{cI_n : c \in \mathbb{C}\} \subseteq E \subseteq M_n(\mathbb{C})$ 的子空间 E，对任意 $A \in M_n(\mathbb{C})$，都有 $r(A) \leq \mu_E(A) \leq \|A\|$。这些结果的证明见 [27]。关于结构奇异值的大部分经典文献（例如参见 [18, 19, 27] 及其中的参考文献），尤其是鲁棒控制理论领域的文献，都关注由分块对角矩阵构成的结构 E，其对角块为以下几种之一：

2020年数学主题分类。15A60, 47A12, 93D21。关键词和短语。结构奇异值，μ-综合，谱半径，数值半径，算子范数。1

标量矩阵、对角矩阵，或称为满块的非结构化 $m \times m$ 矩阵。更确切地说，

$$E = \{\mathrm{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \ldots, \delta_k I_{r_k}, \Delta_{k+1}, \ldots, \Delta_{k+\ell}] : \delta_i \in \mathbb{C},\ \Delta_{k+j} \in M_{m_j}(\mathbb{C}), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \ell\},$$

其中 diag[A1, . . . , A$_m$] 是一个以 A j 为对角元素的分块对角矩阵。结构奇异值除了在鲁棒控制中的作用外，还引出了一个有趣的插值问题，即 μ-综合。对于线性子空间 E $\subseteq$M$_n$($\mathbb{C}$), μ-综合的目标如下：给定开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中的不同点 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 以及矩阵 A1, . . . , A$_m$ $\in$ M$_n$($\mathbb{C}$)，求出一个必要且充分的条件，使得存在解析映射 F : $\mathbb{D}$ $\to$M$_n$($\mathbb{C}$)，满足 F (λj) = A j（ 1 $\leq$j $\leq$m），同时满足约束 μ_E(F(λ)) $\leq$ 1，对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$ 均成立。如前所述，当 E =M$_n$($\mathbb{C}$) 时，μ_E 与算子范数一致，相应的 μ-综合可化为到 M$_n$($\mathbb{C}$) 的范数单位球中的经典插值。众所周知，在这种情况下，存在插值函数 F 当且仅当 Pick矩阵

$$\left[(1 - \overline{\lambda}_i \lambda_j)^{-1}(I - A_i^* A_j)\right]_{i,j=1}^m$$

是半正定的，例如，参见 [20] 第 X 章和 [9] 第 XVIII 章。此外，若 $E = \{\alpha I_n : \alpha \in \mathbb{C}\}$，则所讨论的 μ_E-综合问题就变为谱插值。关于此情形的详细研究，请参阅 [4, 5, 10, 16, 17]。

本文旨在研究不同线性子空间 E$\subset$M$_n$($\mathbb{C}$) 的结构奇异值 μ_E 的刚性，以及它与 $\mathbb{C}^d$ 中若干域之间的相互作用；这些域与其中某些子空间的 μ_E-单位球相对应。在定理 2.2 中，我们证明，若 E 是 M$_n$($\mathbb{C}$) 中的标量矩阵子空间，则 μ_E 具有刚性，即对于任何包含 E 的线性子空间 F $\subseteq$ M$_n$($\mathbb{C}$)，$\mu_E = \mu_F$ 当且仅当 E = F。接着，我们考察对角矩阵子空间，并在定理 2.5 中证明一个类似的刚性结果：也就是说，若 E$_{\mathrm{diag}}$ $\subset$M$_n$($\mathbb{C}$) 是对角矩阵空间，且 $\mathscr{F}$ 是 M$_n$($\mathbb{C}$) 的任意子空间，则 $\mu_{E_{\mathrm{diag}}} = \mu_{\mathscr{F}}$ 当且仅当 E$_{\mathrm{diag}} = \mathscr{F}$。然而，当 E = M$_n$($\mathbb{C}$) 时，结论不再成立。正如前文所述，当 E = M$_n$($\mathbb{C}$) 时，对于所有 A $\in$ M$_n$($\mathbb{C}$)，μ_E(A) = ||A|| 。在第3节中，我们证明存在一个真线性子空间，它是 M$_n$($\mathbb{C}$) 的子空间且诱导出算子范数。事实上，所有对称矩阵构成的空间就是这样一个子空间。随后，我们刻画所有满足 μ_E 等于算子范数的线性子空间 E。接下来，我们转而讨论数值半径，其定义为

$$w : M_n(\mathbb{C}) \to [0, \infty), \quad w(A) := \sup\{|x^* A x| \ :\ x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}.$$

众所周知，数值半径在 M$_n$($\mathbb{C}$) 上定义了一个范数，该范数与算子范数等价，并且对所有 A $\in$ M$_n$($\mathbb{C}$)，都有 r(A) $\leq$w(A) $\leq$ ||A|| 。由于谱半径和范数分别由标量矩阵和 M$_n$($\mathbb{C}$) 诱导，自然会引出一个问题：对于 n $\geq$ 2，是否存在 M$_n$($\mathbb{C}$) 的线性子空间 E $\subset$ ，使得对所有 A $\in$ M$_n$($\mathbb{C}$)，都有 μ_E(A) = w(A)? 在第4节中，我们证明，即使对于 n = 2，答案也是否定的。事实上，结论还不止于此。在同一节中，我们证明，不存在 M$_2$($\mathbb{C}$) 的线性子空间 E $\subset$，使得 μ_E 是谱半径、数值半径和算子范数的凸组合；除非 μ_E与谱半径或算子范数相同。

与不同线性子空间 E 相对应的 $M_n(\mathbb{C})$ 的 μ_E-单位球会产生不同的域，关于这一点的详细讨论请见 [14] 。例如，对称双圆盘 [3, 6], 四块域 [1], 五块域 [2] 和六块域 [14], 分别记作 $\mathbb{G}_2$、 $\mathbb{E}$、 $\mathbb{P}$和 $\mathbb{H}$，它们由 $M_2(\mathbb{C})$ 的四个不同线性子空间诱导而成。下面说明一个域如何由 μ_E-单位球生成。设 E 是 $M_2(\mathbb{C})$ 中由对角

矩阵组成的线性子空间，即 $E = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} : z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$。文献 [1] 证明了

四块域

$$\mathbb{E} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : 1 - x_1 z_1 - x_2 z_2 + x_3 z_1 z_2 \neq 0 \text{ for all } z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}\} \tag{1.2}$$

源自相关的 μ_E-单位球。事实上，对于 $X = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \in E$ 和 $A = (a_{ij})_{i,j=1} \in M_2(\mathbb{C})$,

我们有 $\|X\| = \max\{|z_1|, |z_2|\}$ and $\det(I - AX) = 1 - a_{11}z_1 - a_{22}z_2 + \det(A)z_1z_2$。因此，若将此情形的 μ_E 记为 μ_{tetra}，则由公式-(1.1)可得

$$\begin{aligned} \mu_{\text{tetra}}(A) < 1 &\iff \|X\| > 1 \text{ for all } X \in E \text{ with } \det(I - AX) = 0 \\ &\iff \det(I - AX) \neq 0 \text{ for all } X \in E \text{ with } \|X\| \leq 1 \\ &\iff 1 - a_{11}z_1 - a_{22}z_2 + \det(A)z_1z_2 \neq 0 \text{ for all } z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}} \\ &\iff (a_{11}, a_{22}, \det(A)) \in \mathbb{E}. \end{aligned}$$

因此，$A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ 属于 μ_E-单位球，当且仅当点 $(a_{11}, a_{22}, \det(A))$ 属于四块域 $\mathbb{E}$，因此可以写成

$$\mathbb{E} = \{\pi_{\mathbb{E}}(A) : A \in M_2(\mathbb{C}),\ \|A\| < 1\} = \{\pi_{\mathbb{E}}(A) : A \in M_2(\mathbb{C}),\ \mu_{\text{tetra}}(A) < 1\},$$

其中 $\pi_{\mathbb{E}}(A) = (a_{11}, a_{22}, \det(A))$。事实证明， $\mathbb{D}$ 与 μ_E-单位球之间的插值问题，等价于 $\mathbb{D}$ 与四块域 $\mathbb{E}$ 之间的类似插值问题，例如参见 [1] 的最后一节。显然，处理像 $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}^3$ 这样的有界域，比处理范数无界的对象—— $\mathbb{C}^4$ 中的 μ_E-单位球——更容易。

类似地，当E 由$M_2(\mathbb{C})$中的标量矩阵构成，即$E = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}$时，结构奇异值 μ_E 与谱半径重合，而 μ_E-单位球给出对称双圆盘 $\mathbb{G}_2$，其定义如下:

$$\mathbb{G}_2 = \{\Pi_2(A) : A \in M_2(\mathbb{C}),\ \|A\| < 1\} = \{\Pi_2(A) : A \in M_2(\mathbb{C}),\ r(A) < 1\},$$

其中， $\Pi_2(A) = (\text{tr}(A), \det(A))$。当$E = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & z \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\}$时，$M_2(\mathbb{C})$中对角线元素相同的上三角矩阵空间所对应的结构奇异值 μ_{penta}给出五块域 $\mathbb{P}$，如下所示:

$$\mathbb{P} = \{\pi_{\mathbb{P}}(A) : A \in M_2(\mathbb{C}),\ \|A\| < 1\} = \{\pi_{\mathbb{P}}(A) : A \in M_2(\mathbb{C}),\ \mu_{\text{penta}}(A) < 1\},$$

其中，对于$A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{C})$， $\pi_{\mathbb{P}}(A) = (a_{21}, \text{tr}(A), \det(A))$。当$E$由$M_2(\mathbb{C})$中的所有上三角矩阵构成时，相应的结构奇异值$\mu_{\text{hexa}}$ 导出六块域$\mathbb{H}$。为构造六块域， [14] 的作者研究了以下集合

$$\mathbb{H}_\mu = \{\pi_{\mathbb{H}}(A) : A \in M_2(\mathbb{C}),\ \mu_{\text{hexa}}(A) < 1\} \quad \text{and} \quad \mathbb{H}_N = \{\pi_{\mathbb{H}}(A) : A \in M_2(\mathbb{C}), \|A\| < 1\},$$

其中 $\pi_{\mathbb{H}} : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^4$， $A \mapsto (a_{21}, a_{11}, a_{22}, \det(A))$，对于 $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{C})$。六块域按以下方式获得:

$$\mathbb{H} = int(\overline{\mathbb{H}}_\mu) = int(\widehat{\overline{\mathbb{H}}_N}),$$

其中 $\mathbb{H}_N$ 是 $\mathbb{H}_N$的多项式凸包。关于 $\mathbb{G}_2$的函数论、几何及算子论方面，进一步阅读可参阅 [3]-[7] 和 [12, 15, 17, 26, 28, 29, 32]。四块域 $\mathbb{E}$ 的相关文献也十分丰富，例如参见 [1, 8, 11, 22, 24, 35, 36]及其中的参考文献。感兴趣的读者可参阅 [2, 21, 23, 30, 33, 34] ，其中对五块域 $\mathbb{P}$进行了详尽讨论。最近，六块域已在 [14, 31, 13]中得到深入研究。

在第2节中，我们证明了诱导出这些域的底层结构化奇异值具有刚性 $\mathbb{G}_2$，$\mathbb{E}$，$\mathbb{P}$和 $\mathbb{H}$。

记号。 在全文中，我们使用以下记号：

$$(i) E_{\text{scalar}} = \{zI_n : z \in \mathbb{C}\}, \qquad (ii)\ E_{\text{diag}} = \{\text{diag}(z_1, \ldots, z_n) : z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\},$$

$$(iii)\ E_{\text{penta}} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & z \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\}, \qquad (iv)\ E_{\text{hexa}} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & w \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} : z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(v)\ E_{\text{symm}} = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : X = X^t\}, \qquad (vi) \quad E_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & w \\ e^{i\theta} w & z_2 \end{pmatrix} : z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \right\},$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$。阶为$p \times q$的零矩阵记作 $\Theta_{p\times q}$，且 $\Theta_p = \Theta_{p\times p}$。对于 $M_n(\mathbb{C})$ 中的单位矩阵，我们记作 I_n ，或简单记作I。 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基记作$\{e1, \ldots, e_n\}$。令$E_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$表示这样一个矩阵：其第（$i$，$j$）个元素为 1，其余元素为 0。

2. 经典结构化子空间的刚性结果

本节的主要目标是建立以下情形下结构奇异值 μ_E 的刚性：当$E \subseteq M_n(\mathbb{C})$是标量矩阵或对角矩阵的子空间时。也就是说，对于$E$、$E' \subset M_n(\mathbb{C})$且$E_{\text{scalar}} \subseteq E$、$E'$的线性子空间，我们证明

(1) 对所有 {style id='2'>A</style}， $= r(A)$ 当且仅当 $E = E_{\text{scalar}}$；

(2) 对所有 A，$= \mu_{E_{\text{diag}}}(A)$ 当且仅当 $E' = E^{\text{diag}}$，其中 $A \in M_n(\mathbb{C})$。

此外，沿着上一节关于域 $\mathbb{G}_2, \mathbb{E}, \mathbb{P}$和 $\mathbb{H}$ 的讨论，我们分别证明了相关结构奇异值$r(\cdot)$ μ_{tetra}，μ_{penta}，和 μ_{hexa} 的刚性。更确切地说，我们研究以下问题：将所有包含单位矩阵的线性子空间 $E \subseteq M_2(\mathbb{C})$ 分类，其中对于每个$A \in M_2(\mathbb{C})$，以下条件之一成立：

$$\mu_E(A) = r(A), \quad \mu_E(A) = \mu_{\text{tetra}}(A), \quad \mu_E(A) = \mu_{\text{penta}}(A), \quad \text{or} \quad \mu_E(A) = \mu_{\text{hexa}}(A).$$

我们给出了这些问题的完整解，并证明每个问题都有唯一解。我们先给出以下结果，证明结构奇异值$r(\cdot)$ $\mu_{\text{diag}}, \mu_{\text{penta}}$ 和μ_{hexa} 都是$M_2(\mathbb{C})$上的不同函数。

命题 2.1。对于 $A \in M_2(\mathbb{C})$，我们有

$$r(A) \le \mu_{diag}(A) \le \mu_{hexa}(A) \le \|A\| \quad and \quad r(A) \le \mu_{penta}(A) \le \mu_{hexa}(A) \le \|A\|.$$

此外，函数 $r(.)$ μ_{diag}、 μ_{penta}、 μ_{hexa} 和 $\|.\|$ 彼此均不相同。特别地，可以选取 A、B、C $\in M_2(\mathbb{C})$ 使得

(1) $r(A) < \mu_{penta}(A) < \mu_{diag}(A) = \mu_{hexa}$ (A)*; (2)* $r(B) = \mu_{diag}(B) < \mu_{penta}(B)$ $= \mu_{hexa}(B)$*; (3)* $\mu_{hexa}(C) < \|C\|$.

证明。对于满足 E_1,E_2 且 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq M_n(\mathbb{C})$ 的线性子空间，我们有 $\mu_{E_1}(A) \le \mu_{E_2}(A) \le \|A\|$，对所有 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 均成立。由于 $E_{\text{scalar}} \subseteq E^{\text{diag}}$，$E_{\text{penta}} \subseteq E_{\text{hexa}} \subseteq M_2(\mathbb{C})$ 且 $\mu_{E_{\text{scalar}}}(.) = r(.)$，我们有

$$r(A) \le \mu_{\text{diag}}(A) \le \mu_{\text{hexa}}(A) \le \|A\| \qquad \text{and} \qquad r(A) \le \mu_{\text{penta}}(A) \le \mu_{\text{hexa}}(A) \le \|A\|$$

对所有$A \in M_2(\mathbb{C})$。定义

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

不难看出， $\sigma(A)=\{0\}$，因此$r(A)=0$。令$D=\mathrm{diag}(d_1,d_2)\in E^{\mathrm{diag}}$。简单计算可得 $\det(I-AD)=1+d_1-d_2$，因此我们有

$$\frac{1}{\mu_{\mathrm{diag}}(A)}=\inf_{d_1,d_2\in\mathbb{C}}\|\mathrm{diag}(d_1,d_1+1)\|\le\|\mathrm{diag}(-1/2,1/2)\|=\frac{1}{2}\quad\text{and so,}\quad\mu_{\mathrm{diag}}(A)\ge 2.$$

由于 $\|A\|=2$，我们有 $\mu_{\mathrm{diag}}(A)=2$。对于 $X=\begin{pmatrix}z & w\\ 0 & z\end{pmatrix}$，可得 $\det(I-AX)=1-w$。于是

$$\frac{1}{\mu_{\mathrm{penta}}(A)}=\inf\left\{\left\|\begin{pmatrix}z & 1\\ 0 & z\end{pmatrix}\right\|:z\in\mathbb{C}\right\}\le\left\|\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\|=1\quad\text{and so,}\quad\mu_{\mathrm{penta}}(A)\ge 1.$$

对于 $X=\begin{pmatrix}z & 1\\ 0 & z\end{pmatrix}$，我们有 $\|X\|\ge 1$，因为 $\|Xe_2\|=\sqrt{1+|z|^2}\le\|X\|$。因此，

$$\frac{1}{\mu_{\mathrm{penta}}}(A)=\inf\{\|X\|:X\in E_{\mathrm{penta}},\det(I-AX)=0\}\ge 1\quad\text{and so,}\quad\mu_{\mathrm{penta}}(A)=1.$$

对于 $X=\begin{pmatrix}z_1 & w\\ 0 & z_2\end{pmatrix}$，经过常规计算可得 $\det(I-AX)=1+z_1-z_2-w$。于是

$$\frac{1}{\mu_{\mathrm{hexa}}(A)}=\inf_{z_1,z_2\in\mathbb{C}}\left\|\begin{pmatrix}z_1 & 1+z_1-z_2\\ 0 & z_2\end{pmatrix}\right\|\le\left\|\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\text{and so,}\quad\mu_{\mathrm{hexa}}(A)\ge\sqrt{2}.$$

因此，$r(A)<\mu_{\mathrm{penta}}(A)<\mu_{\mathrm{diag}}(A)=\mu_{\mathrm{hexa}}(A)=\|A\|=2$。显然，$\|B\|=1, r(B)=0$，且对所有 $D\in E^{\mathrm{diag}}$，$\det(I-BD)=1$。因此，$\mu_{\mathrm{diag}}(B)=0$。对于 $X=\begin{pmatrix}z & w\\ 0 & z\end{pmatrix}$，容易看出 $\det(I-BX)=1-w$。容易验证

$$\frac{1}{\mu_{\mathrm{penta}}(B)}=\inf\left\{\left\|\begin{pmatrix}z & 1\\ 0 & z\end{pmatrix}\right\|:z\in\mathbb{C}\right\}=1\quad\text{and so,}\quad\mu_{\mathrm{penta}}(B)=1=\|B\|.$$

由于 $\mu_{\mathrm{penta}}(\mathrm{B})\le\mu_{\mathrm{hexa}}(\mathrm{B})\le\|\mathrm{B}\|$，我们有 $\mathrm{r(B)}=\mu_{\mathrm{diag}}(\mathrm{B})<\mu_{\mathrm{penta}}(\mathrm{B})=\mu_{\mathrm{hexa}}(\mathrm{B})=\|\mathrm{B}\|$。显然，$\|\mathrm{C}\|=1$。令 $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}z_1 & w\\ 0 & z_2\end{pmatrix}\in\mathrm{E}_{\mathrm{hexa}}$。则 $\det(\mathrm{I}-\mathrm{CX})=1$，因此，$\mu_{\mathrm{hexa}}(\mathrm{C})=0$，这严格小于 $\|\mathrm{C}\|$。所以，$\mu_{\mathrm{hexa}}(\mathrm{C})<\|\mathrm{C}\|$，从而得到所需结论。 ■

现在我们给出与谱半径相关的第一个刚性结果。这里要指出的是，秩一矩阵在其证明中发挥着至关重要的作用。 [25] 的作者给出了$M_n(\mathbb{C})$中秩一矩阵的结构化奇异值的显式公式。

定理 2.2。 对于 $M_n(\mathbb{C})$ 中的一个线性子空间 E，若 $E_{scalar}\subseteq E$，则以下条件等价：*(1)* $\mu_E(A)=r(A)$ 对所有 $A\in M_n(\mathbb{C})$均成立；*(2)* $E=E_{scalar}$。

证明. (2) $\Longrightarrow$ (1) 是控制理论中的一个众所周知的事实。我们证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)。假设对于所有 $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$，都有 $\mu_E(\mathrm{A})=\mathrm{r(A)}$。设 $\mathrm{X}=(\mathrm{x}_{ij})_{i,j=1}^{n}\in\mathrm{E}$，且 X 有一个非零非对角元素 x_{qp}，其中 $1\le\mathrm{p,q}\le\mathrm{n}$ 且 $\mathrm{p}\ne\mathrm{q}$。考虑 $\mathrm{A}=\mathrm{e}_p\mathrm{e}_q^t$，这是一个 pq 位置为 1、其余位置均为 0 的矩阵。由于 A 是幂零矩阵，$\mathrm{r(A)}=0$。令 $\mathrm{Y}=\frac{1}{\mathrm{x}_{qp}}\mathrm{X}$，$\mathrm{u}=\mathrm{e}_p$，$\mathrm{v}^t=\mathrm{e}_q^t\mathrm{Y}$。显然，$\mathrm{Y}\in\mathrm{E}$，且 $\|\mathrm{Y}\|>0$ 和 $\mathrm{e}_q^t\mathrm{Ye}_p$ 是 Y 的 qp 个元素，即 $\mathrm{e}_q^t\mathrm{Ye}_p=1$。于是

$$\det(I-AY)=\det(I-e_pe_q^tY)=\det(I-uv^t)=1-v^tu=1-e_q^tYe_p=0$$

因此，存在 $Y \in E$，使得 $\det(I - AY) = 0$。因此，我们有

$$\frac{1}{\mu_E(A)} = \inf\{\|Z\| : Z \in E, \det(I - AZ) = 0\} \leq \|Y\| \quad \text{and so,} \quad \mu_E(A) \geq \|Y\|^{-1} > 0,$$

矛盾，因为 $\mu_E(A) = r(A)$ 且 $r(A) = 0$。因此，E 中没有矩阵含有非零非对角元，所以 $E_{scalar} \subseteq E \subseteq E^{diag}$。假设 $E \neq E_{scalar}$。由于 $E_{scalar} = \text{span}\{\text{diag}(1, \ldots, 1)\}$，可以找到 $v = (v_1, \ldots, v_n)^t \in \mathbb{C}^n$，使得 v 和 $(1, \ldots, 1)^t$ 是线性无关向量，并且 $S = \text{span}\{\text{diag}(1, \ldots, 1), \text{diag}(v_1, \ldots, v_n)\} \subseteq E$。此外，存在 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ 使得 $v_i \neq v_{i+1}$。取

$$\alpha = v_i \left(1 - \frac{1}{v_{i+1} - v_i}\right) \quad \text{and} \quad \beta = \frac{1}{v_{i+1} - v_i}.$$

不难看出 $\alpha + \beta v_i = v_i$ 且 $\alpha + \beta v_{i+1} = 1 + v_i$。考虑如下矩阵：

$$X^{\alpha\beta} = \text{对角}(\alpha + \beta v_1, \ldots, \alpha + \beta v_n) = \text{对角}(\alpha + \beta v_1, \alpha + \beta v_{i-1}, v_i, 1 + v_i, \alpha + \beta v_{i+2}, \ldots, \alpha + \beta v_n).$$

显然，$X^{\alpha\beta} = \alpha \text{diag}(1, \ldots, 1) + \beta \text{diag}(v_1, \ldots, v_n)$，因此 $X^{\alpha\beta} \in S$。此外，$X_{\alpha\beta} \neq 0$。考虑由下式给出的分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \Theta_{(i-1)\times(i-1)} & \Theta_{(i-1)\times 2} & \Theta_{(i-1)\times(n-1-i)} \\ \Theta_{2\times(i-1)} & A_0 & \Theta_{2\times(n-1-i)} \\ \Theta_{(n-1-i)\times(i-1)} & \Theta_{(n-1-i)\times 2} & \Theta_{(n-1-i)\times(n-1-i)} \end{pmatrix}, \quad \text{where} \quad A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然，$\sigma(A) \subseteq \sigma(A_0) \cup \{0\} = \{0\}$，因为 $\sigma(A_0) = \{0\}$，因此 $r(A) = 0$。令 $V = \text{diag}(v_i, 1 + v_i)$。直接计算可得

$$I - A_0 V = \begin{pmatrix} 1 + v_i & 1 + v_i \\ -v_i & -v_i \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad I - AX_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & \Theta_{(i-1)\times 2} & \Theta_{(i-1)\times(n-1-i)} \\ \Theta_{2\times(i-1)} & I - A_0 V & \Theta_{2\times(n-1-i)} \\ \Theta_{(n-1-i)\times(i-1)} & \Theta_{(n-1-i)\times 2} & I_{n-1-i} \end{pmatrix}.$$

因此，$\det(I - AX^{\alpha\beta}) = \det(I - A_0 V) = 0$。综合以上结果，得到 $S \subseteq E$，

$$\frac{1}{\mu_S(A)} = \inf\{\|X\| : X \in S, \det(I - AX) = 0\} \leq \|X_{\alpha\beta}\| \quad \text{and so,} \quad \mu_E(A) \geq \mu_S(A) \geq \|X_{\alpha\beta}\|^{-1} > 0,$$

这与 $\mu_E(A) = r(A)$ 以及 $r(A) = 0$ 相矛盾。因此，$E = E_{scalar}$。 ■

下面的引理可视为线性代数中的一个初等结果。为完整起见，我们在此给出一个简短的证明。

引理 2.3。如果 E 是 E^{diag} 的真子空间，那么存在 $W = diag(w_1, \ldots, w_n)$，使得 $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{T}$ 且 $W \notin E$。

证明。我们可以自然地将 E^{diag} 与 $\mathbb{C}^n$ 通过 $diag(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_n)^t$ 对应起来。因此，E^{diag} 上有一个由 $\langle Z, W \rangle = \sum_{j=1} z_j w_j$ 给出的内积结构，其中 $Z = diag(z_1, \ldots, z_n)$，$W = diag(w_1, \ldots, w_n)$，且二者均属于 E^{diag}。由于 E 是 E^{diag} 的真子空间，存在非零的 $P = diag(p_1, \ldots, p_n) \in E^{diag}$，使得对所有 $Z \in E$，均有 $\langle Z, P \rangle = 0$。考虑如下线性泛函：$\xi : E^{diag} \to \mathbb{C}$，$\xi(Z) = \langle Z, P \rangle$，对所有 $Z \in E^{diag}$ 均成立。显然，$\xi(E) = \{0\}$。假设 $p_j = |p_j| e^{i\theta_j}$

对 $1 \le j \le n$。定义 $w_j = \begin{cases} e^{i\theta_j}, & p_j \neq 0, \\ 1, & p_j = 0 \end{cases}$ 对 $1 \le j \le n$。对于 $W = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n)$，我们有

$$\xi(W) = \langle W, P \rangle = \sum_{j=1}^{n} w_j \overline{p}_j = \sum_{j: p_j \neq 0} e^{i\theta_j} |p_j| e^{-i\theta_j} = \sum_{j=1}^{n} |p_j| > 0$$

因此，$W \notin E$。证明至此完成。 ■

下一个引理以更一般的形式出现在 [25]的第3节中。我们为此处讨论的特例给出另一种证明。

n n引理2.4。对于 $u = (u_1, \ldots, u_n)^t, v = (v_1, \ldots, v_n)^t \in \mathbb{C}^n$，且满足 $\sum_{j=1} |u_j v_j| \neq 0$，$\mu_{diag}(uv^*) = \sum_{j=1} |u_j v_j|$.

证明。令 $A = uv^*$，并令 $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$。定义 $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ 和 $c = (c_1, \ldots, c_n)^t$，其中 $n c_j = u_j v_j$。显然，$\|c\|_1 = \sum |u_j v_j| > 0$。由于对于向量 x、$y \in \mathbb{C}^n$，$\det(I - xy^t) = 1 - y^t x$，因此我们有 $j=1$

$$\det(I - AX) = \det(I - uv^* X) = 1 - v^* X u = 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \overline{v}_j = 1 - \langle x, c \rangle. \tag{2.1}$$

若 $\det(I - AX) = 0$，则 $1 = |\langle x, c \rangle| = \left| n\sum_{j=1} x_j u_j v_j \right| \le n\sum_{j=1} |x_j| |u_j v_j| \le \|x\|_\infty \|c\|_1$，因此，

$1/\|c\|_1 \le \|x\|_\infty$。于是，$1/\|c\|_1 \le \inf \{\|X\| : X \in E^{diag}, \det(I - AX) = 0\}$。令 $c_j = |c_j| e^{i\theta_j}$，其中 $1 \le j \le n$。取 $w = (w_1, \ldots, w_n)$，使得 $w_j = \begin{cases} e^{i\theta_j}, & c_j \neq 0 \\ 0, & c_j = 0 \end{cases}$，$c_j$，$c_j$，其中

$1 \le j \le n$。注意，$\|w\|_\infty = 1/\|c\|_1$，且 $\langle w, c \rangle = \sum_{c_j \neq 0} w_j c_j = \|c\|_1 \sum_{c_j \neq 0} |c_j| = 1$。对于 $W = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n) \in E^{diag}$，由 (2.1) 可知 $\det(I - AW) = 0$，且 $1/\|c\|_1 \le \inf \{\|X\| : X \in E^{diag}, \det(I - AX) = 0\} \le \|W\| = \|w\|_\infty = 1/\|c\|_1$。因此，$\mu_{diag}(A) = \|c\|_1$，证毕。 ■

现在我们可以给出结构奇异值的第二个刚性结果μ_{diag}，该结构奇异值对应于子空间 E^{diag}，它是$M_n(\mathbb{C})$ 中所有对角矩阵构成的空间。

定理 2.5. 对于 $M_n(\mathbb{C})$ 的一个线性子空间 E，以下条件等价：

(1) $\mu_E(A) = \mu_{diag}(A)$ 对所有 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 均成立；*(2)* $E = E^{diag}$。

证明。(2) 部分 $\Longrightarrow$ (1) 是显然的。假设对于所有 $A \in M_n(\mathbb{C})$，都有 $\mu_E(A) = \mu_{\mathrm{diag}}(A)$。若可能，设存在 $X = (x_{ij})_{i,j=1}^{n} \in E$，其中含有一个非零的非对角元素 x_{qp}，满足 $1 \le p, q \le n$ 且 $p \neq q$。考虑 $A = e_p e_q^t$，它是一个矩阵，pq 位置上的元素为 1，其余位置均为 0。令 $Y = \frac{1}{x_{qp}} X$，$u = e_p$，$v^t = e_q^t Y$。显然，$Y \in E$，且 $\|Y\| > 0$，而 $e_q^t Y e_p$ 是 Y 的 qp 位置元素，即 $e_q^t Y e_p = 1$。于是

$$\det(I - AY) = \det(I - e_p e_q^t Y) = \det(I - uv^t) = 1 - v^t u = 1 - e_q^t Y e_p = 0 \tag{2.2}$$

因此，存在 $Y \in E$，使得 $\det(I - AY) = 0$。因此，我们有

$$\frac{1}{\mu_E(A)} = \inf\{\|Z\| : Z \in E,\ \det(I - AZ) = 0\} \leq \|Y\| \quad \text{and so,} \quad \mu_E(A) \geq \|Y\|^{-1} > 0.$$

对于任意 $D \in E^{\text{diag}}$，我们有 $e_q^t D e_p = 0$。现在，应用与 (2.2) 中相同的论证可得 $\det(I - AD) = \det(I - e_p e_q^t D) = 1 - e_q^t D e_p = 1$，因此 $\mu_{\text{diag}}(A) = 0$。这是矛盾的，因为$\mu_E(A) = \mu_{\text{diag}}(A)$，且 $\mu_E(A) > 0$。因此，$E \subseteq E^{\text{diag}}$。

若可能，设 E 是 E^{diag} 的真子空间。由引理 2.3 可知，存在 $W = \text{diag}(w_1, \ldots, w_n)$，使得 $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{T}$ 且 $W \notin E$。取 $u = (1, \ldots, 1)^t$，$w = (w_1, \ldots, w_n)^t$。注意到 $\sum_{j=1}^{n} |u_j w_j| = n$。对于 $B = uw^*$，由引理2.4可得 $\mu_{\text{diag}}(B) = \sum_{j=1}^{n} |u_j w_j| = n$，因此 $\mu_E(B) = n$。于是，$\inf\{\|X\| : X \in E, \det(I - BX) = 0\} = 1/n$。根据紧性论证，存在 $X \in E$，使得 $\det(I - BX) = 0$ 且 $\|X\| = 1/n$。令 $X = \text{diag}(x_1, \ldots, x_n)$，$x = (x_1, \ldots, x_n)^t$。则 $\|X\| = \|x\|_\infty = 1/n = 1/\|w\|_1$。应用与 (2.1) 中类似的论证，我们得到

$$\det(I - BX) = 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{w}_j = 1 - \langle x, w \rangle \quad \text{and thus,} \quad \langle x, w \rangle = 1.$$

因此，$1 = |\langle x,\ w \rangle| = \|x\|_\infty \|w\|_1$。若可能，设存在$k \in \{1, \ldots, n\}$，使得 $|x_k| < \|x\|_\infty$。那么

$$\|x\|_\infty \|w\|_1 = |\langle x, w \rangle| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\ |\overline{w}_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| < n\|x\|_\infty = \|x\|_\infty \|w\|_1,$$

这就产生了矛盾。因此，$x = (x1,\ \ldots\ldots,\ x_n)^t$ 满足$x_j| = \|x\|_\infty = 1/n$，其中 $1 \leq j \leq n$。注意

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{and} \quad \|w\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n}.$$

因此，$|\langle x,\ w \rangle| = \|x\|_2 \|w\|_2 = 1$。根据柯西-施瓦茨不等式，$x$ 和w 是线性相关向量，即$w = ax$，其中某个$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。因此，$W = aX$，从而$W \in E$，因为$X \in E$。这与$W \notin E$这一事实矛盾。因此，$E = E^{\text{diag}}$，证明至此完成。 ∎

现在，我们给出与由以下线性子空间相关的结构化奇异值 μ_{penta} 和 μ_{hexa} 的刚性结果：$M_2(\mathbb{C})$

$$E_{\text{penta}} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & z \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{and} \quad E_{\text{hexa}} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & w \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} : z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \right\},$$

分别。 这些刚性定理的证明彼此采用了相似的论证。

定理 2.6. 对于 $M_2(\mathbb{C})$ 的线性子空间 E，若 $E_{scalar} \subseteq E$，则以下条件等价：

(1) 对所有 $A \in M_2(\mathbb{C})$，$\mu_E(A) = \mu_{penta}$

(A)；*(2)* $E = E^{penta}$。

证明。（2） $\Longrightarrow$ (1) 显然。现在，假设对所有 $A \in M_2(\mathbb{C})$，都有 $\mu_E(A) = \mu_{\text{penta}}(A)$。设 $X = (x_{ij})_{i,j=1}^{2} \in E$，且其非对角元素为 $x_{21} \neq 0$。定义 $A = e_1 e_2^t$，并令 $Y = x_{21}^{-1} X$。显然 $Y \in E$ $\|Y\| > 0$，且 $e_2^t Y e_1 = 1$。因此，$\det(I - AY) = \det(1 - e_1 e_2^t Y) = 1 - e_2^t Y e_1 = 0$。我们有

$$\frac{1}{\mu_E(A)} = \inf\{\|Z\| : Z \in E, \det(I - AZ) = 0\} \leq \|Y\| \quad \text{and so,} \quad \mu_E(A) \geq \|Y\|^{-1} > 0. \tag{2.3}$$

令 $Z=\begin{pmatrix} z & w \\ 0 & z \end{pmatrix}\in E^{\text{penta}}$。则 $\det(I-AZ)=\det(I-e_1e_2^tZ)=1-e_2^tZe_1=1$，因此，$\mu_{\text{penta}}(A)=0$。因此，$0=\mu_{\text{penta}}(A)=\mu_E(A)$，这与（2.3）矛盾。综合以上各点，我们得到

$$E_{\text{scalar}}\subseteq E\subseteq\left\{\begin{pmatrix} z_1 & w \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}: z_1,z_2,w\in\mathbb{C}\right\}=E_{\text{hexa}}.$$

由命题 2.1 可知$E_{\text{scalar}}\subsetneq E\subsetneq E_{\text{hexa}}$。于是 $\dim(E)=2$，因此我们可以写成

$$E=\text{span}\left\{I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right\},$$

其中，M 和I 在$M_2(\mathbb{C})$中线性无关。现在根据a,b和c讨论两种情形。

情形 1. 设$a\neq c$ 且$b=0$。在这种情况下，我们有$E=E^{\text{diag}}$ 在$M_2(\mathbb{C})$中，因此，$\mu_{\text{penta}}=\mu_E=\mu_{\text{diag}}$，这与命题 2.1 矛盾。

情形 2. 设$a\neq c$ 且$b\neq 0$。设$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。由命题 2.1 的证明可知 $\mu_{\text{penta}}(B)=1$，因此，$\mu_E(B)=1$。因此，$\inf\{\|X\|: X\in E,\det(I-BX)=0\}=1$。根据紧性论证，存在$X\in E$，使得 $\det(I-BX)=0$，且 $\|X\|=1$。可以选取 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，使得

$$X=\alpha I_2+\beta M=\begin{pmatrix} \alpha+a\beta & b\beta \\ 0 & \alpha+c\beta \end{pmatrix}.$$

简单计算可得

$$I-BX=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha-a\beta & 1-b\beta \end{pmatrix}\text{ and so, }\quad \det(I-BX)=1-b\beta=0.$$

因此，$\beta=1/b$和 $X=\begin{pmatrix} \alpha+a\beta & b\beta \\ a0 & \alpha+c\beta \end{pmatrix}$。由 $\|X\|=1$可知，$\alpha+c\beta=0=\alpha+a\beta$，因此，$(a-c)\beta=0$，这就产生了矛盾。

因此，唯一剩下的可能性是$a=c$。显然$b\neq 0$，否则$M=aI_2$，从而导致矛盾。因此，$a=c$ 且$b\neq 0$。于是

$$E=\left\{\begin{pmatrix} z & w \\ 0 & z \end{pmatrix}: z,w\in\mathbb{C}\right\},$$

这就是子空间E^{penta}。证明至此完成。 ■

定理 2.7。 对于 $M_2(\mathbb{C})$ 的线性子空间 E，若 $E_{scalar}\subseteq E$，则以下条件等价 *t:*

（*1*）对于所有 $A\in M_2(\mathbb{C})$，均有 $\mu_E(A)=\mu_{hexa}(A)$；（*2*）$E=E_{hexa}$。

证明。（2）$\Longrightarrow$ (1) 是显然的。假设对所有 $A\in M_2(\mathbb{C})$，都有 $\mu_E(A)=\mu_{\text{hexa}}(A)$。设 $X=(x_{ij})_{i,j=1}^2\in E$，且其非对角元素为 $x_{21}\neq 0$。定义 $A=e_1e_2^t$，并令 $Y=x_{21}^{-1}X$。显然，$Y\in E$ $\|Y\|>0$，且 $e_2^tYe_1=1$。因此，$\det(I-AY)=\det(1-e_1e_2^tY)=1-e_2^tYe_1=0$。我们有

$$\frac{1}{\mu_E(A)}=\inf\{\|Z\|: Z\in E,\det(I-AZ)=0\}\leq\|Y\|\quad\text{and so,}\quad \mu_E(A)\geq\|Y\|^{-1}>0. \tag{2.4}$$

令 $Z = \begin{pmatrix} z_1 & w \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \in E_{\text{hexa}}$。则 $\det(I - AZ) = \det(I - e_1 e_2^t Z) = 1 - e_2^t Z e_1 = 1$，因此，$\mu_{\text{hexa}}(A) = 0$。因此，$0 = \mu_{\text{hexa}}(A) = \mu_E(A)$，这与（2.4）矛盾。由此可得

$$E_{\text{scalar}} \subseteq E \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & w \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} : z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \right\} = E_{\text{hexa}}.$$

由命题 2.1 可知，$E_{\text{scalar}} \subsetneq E$。若可能，设 $\dim(E) = 2$。那么我们可以写成

$$E = \text{span}\left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\},$$

其中，M 和 I 在 $M_2(\mathbb{C})$中线性无关。现在根据a,b和c讨论三种情形。

情形 1. 设 $a \neq c$ 且 $b = 0$。在这种情形下，我们有 $E = E^{\text{diag}}$ 在 $M_2(\mathbb{C})$中，因此，$\mu_{\text{hexa}} = \mu_E = \mu_{\text{diag}}$，这与命题 2.1 矛盾。

情形 2. 设 $a \neq c$ 且 $b \neq 0$。设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。由命题 2.1 的证明可知，$\mu_{\text{hexa}}(B) = 1$，因此，$\mu_E(B) = 1$。所以，$\inf\{\|X\| : X \in E, \det(I - BX) = 0\} = 1$。根据紧性论证，存在 $X \in E$，使得 $\det(I - BX) = 0$，且满足 $\|X\| = 1$。可以选取 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，使得

$$X = \alpha I_2 + \beta M = \begin{pmatrix} \alpha + a\beta & b\beta \\ 0 & \alpha + c\beta \end{pmatrix}.$$

简单计算可得

$$I - BX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha - a\beta & 1 - b\beta \end{pmatrix} \text{ and so, } \det(I - BX) = 1 - b\beta = 0.$$

因此，$\beta = 1/b$ 且 $X = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ a & \alpha + c\beta \end{pmatrix}$。由 $\|X\| = 1$ 可知，$\alpha + c\beta = 0 = \alpha + a\beta$，因此（$a - c$）$\beta = 0$，这就产生了矛盾。

情形 3。设 $a = c$。若 $b = 0$，则 $M = aI$，这就产生了矛盾。因此，$a = c$ 且 $b \neq 0$。于是

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & z \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\} = E_{\text{penta}}.$$

在这种情况下，$\mu_{\text{penta}} = \mu_{\text{hexa}}$，这与命题 2.1 矛盾。

上述三种情形表明，$\dim(E) > 2$，因此 $E = E_{\text{hexa}}$。证明至此完成。 ∎

3. 算子范数与结构奇异值

本节讨论如何确定满足结构奇异值 μ_E 与算子范数相等的线性子空间 $E \subseteq M_n(\mathbb{C})$。空间 $M_n(\mathbb{C})$ 是一个众所周知的例子；与以往的刚性现象不同，我们证明，具有这一性质的 $M_n(\mathbb{C})$ 的真子空间也存在。我们首先给出所有满足等式 $\mu_E = \|.\|$ 的子空间的如下刻画。

定理 3.1. 对于 $M_n(\mathbb{C})$ 的线性子空间 E，以下条件等价：

(1) $\mu_E(A) = \|A\|$ 对所有 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 均成立；*(2)* 对每一对单位向量 u、$v \in \mathbb{C}^n$，都存在 $X \in E$，满足 $\|X\| = 1$，使得 $Xu = v$。

证明。(1) $\Longrightarrow$(2)。令 $\mu_E(A) = \|A\|$，对所有 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 均成立。取单位向量 u、$v \in \mathbb{C}^n$，并定义 $M = uv^*$。显然，$\|M\| = 1$ 且 $Mv = u$。根据假设，$\mu_E(M) = 1$，因此，$\inf\{\|X\| : X \in E, \det(I - AX) = 0\} = 1$。根据紧致性论证，存在 $X \in E$，使得 $\det(I - AX) = 0$ 且 $\|X\| = 1$。对于任意 $z \in \mathbb{C}^n$，我们有

$$MXz = u(v^*Xz) = \alpha_0 u, \quad \text{where } \alpha_0 = v^*Xz \in \mathbb{C}.$$

因此，MX 的值域包含于子空间 $\mathrm{span}\{u\}$ 中。由于 $\det(I - MX) = 0$，存在 $y \in \mathbb{C}^n$，使得 $\|y\| = 1$，且 $y = MXy$。因此，y 属于 MX 的值域，故可选取 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，使得 $y = \alpha u$。注意，$MX(\alpha u) = MXy = y = \alpha u$，因此，$\alpha u(v^*Xu) = \alpha MXu = \alpha u$。由于 $\alpha \neq 0$，且 $u^*u = 1$，我们有 $v^*Xu = 1$，即 $\langle Xu, v\rangle = 1$。由柯西-施瓦茨不等式可得

$$1 = |\langle Xu, v\rangle| \leq \|Xu\| \, \|v\| \leq \|X\| \, \|u\| \|v\| = 1$$

因此，v 和 Xu 是 $\mathbb{C}^n$中的线性相关向量。现在可以选取 $\beta \in \mathbb{C}$，使得 $Xu = \beta v$。利用以下事实：$\langle Xu, v\rangle = 1$ 以及 $\|v\| = 1$，可得 $\beta = 1$。因此，$Xu = v$。

(2) $\Longrightarrow$ (1)。证明基本上基于 [27] 中引理 3.7 后的讨论。对于任意 $A \in M_n(\mathbb{C})$，众所周知，$\mu_E(A) \leq \|A\|$。设 $A \in M_n(\mathbb{C})$。若 $A = 0$，则 $\mu_E(A) = \|A\| = 0$。假设 $A \neq 0$。取单位向量 u、v，使得 $\mathbb{C}^2$ $\|Av\| = \|A\|$ 且 $Av = \|A\|u$。根据给定假设，存在 $S \in E$，满足 $\|S\| = 1$，且 $Su = v$。定义 $X = \|A\|^{-1}S$。注意，$X \in E$ 且 $\|X\| = 1/\|A\|$。于是 $AXu = \|A\|^{-1}ASu = \|A\|^{-1}Av = u$，且 $\det(I - AX) = 0$。因此，$\mu_E(A)^{-1} = \inf\{\|Y\| : Y \in E, \det(I - AY) = 0\} \leq \|X\| = \|A\|^{-1}$，所以 $\|A\| \leq \mu_E(A)$。■

我们的下一个结果给出了满足 $\mu_E = \|.\|$ 的 E 维数的一个下界。

推论 3.2。对于 $M_n(\mathbb{C})$ 中的线性子空间 E，若满足 $\mu_E = \|.\|$，则有 $\dim(E) \geq n$。

证明。令 u 为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个单位向量。考虑线性映射 $\varphi : E \to \mathbb{C}^n$，其定义为 $\varphi(A) = Au$。令 v 为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个非零向量。定理 3.1 保证存在 $X \in E$，使得 $Xu = v/\|v\|$，因此，$\varphi(\|v\|X) = \|v\|Xu = v$。所以，$\varphi$是满射，所需结论成立。■

现在我们给出适当线性子空间的具体例子 $E \subseteq M_2(\mathbb{C})$，满足 $\mu_E = \|.\|$。为此，定理 3.1 将任务归结为构造子空间 $E \subseteq M_2(\mathbb{C})$，使其单位范数矩阵在 $\mathbb{C}^2$ 的单位球面上具有传递作用。在这方面，我们的第一个例子表明，当 $\mu_E = \|.\|$ $E = E^{\mathrm{symm}}$ 属于 $M_2(\mathbb{C})$ 时。

例 3.3. 设 u、v 是 $\mathbb{C}^2$ 中的单位向量。选取酉矩阵 $W \in M_2(\mathbb{C})$，使得 $We_1 = u$。定义 $w = Wtv = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$。显然，$\|w\|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$。选取 $\gamma \in \mathbb{T}$使得 $\beta = \gamma\beta$，并定义 $B = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\gamma\alpha\end{pmatrix}$。注意，$B$ 是对称酉矩阵，且 $Be_1 = w = Wtv$。因此，对称酉矩阵 $A = (W^*)^tBW^*$ 满足 $Au = (W^*)^tBW^*u = (W^*)^tBe_1 = (W^*)^tWtv = (WW^*)^tv = v$。由定理 3.1 可得 $\mu_{E_{\mathrm{symm}}} = \|.\|$。■

现在，我们将推广上述例子，构造 E 中 $M_2(\mathbb{C})$的一族真线性子空间，使得 $\mu_E = \|.\|$。

例 3.4。设 $\theta \in \mathbb{R}$ 并设

$$E_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & w\\ e^{i\theta}w & z_2 \end{pmatrix} : z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

对于由 $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$ 给出的酉矩阵，我们有 $E_{symm} = \{S^*AS : A \in E_\theta\}$。设 u、v 是 $\mathbb{C}^2$ 中的单位向量。定义 $u_1 = S^*u$ 和 $v_1 = S^*v$。显然，u_1 和 v_1 是 $\mathbb{C}^2$ 中的单位向量。根据例 3.3，存在一个 $M_2(\mathbb{C})$ 中的对称酉矩阵 B，使得 $Bu_1 = v_1$。对于 $A = SBS^*$，我们有 A 是 E_θ 中的酉矩阵，并且 $Au = SBS^*u = SBu_1 = Sv_1 = v$。因此，由定理 3.1 可得 $\mu_{E_\theta} = \|.\|$。 ∎

下面的例子给出了 $M_2(\mathbb{C})$ 中另一类真线性子空间，在这些子空间中，相应的结构奇异值与算子范数相等。

例 3.5. 考虑 $M_2(\mathbb{C})$ 中由下式给出的线性子空间

$$E_M = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(M^*A) = 0\},$$

其中 $M \in M_2(\mathbb{C})$ 是一个酉矩阵。我们证明 $\mu_{E_M} = \|.\|$；由定理 3.1 可知，只需证明：对于任意单位向量 u、$v \in \mathbb{C}^2$，存在一个酉矩阵 $A \in M_2(\mathbb{C})$，使得 $\mathrm{tr}(M^*A) = 0$ 且 $Au = v$。为此，设 u、v 是 $\mathbb{C}^2$ 中的单位向量，并令 $v_0 = M^*v$。选取酉矩阵 $W \in M_2(\mathbb{C})$，使得 $We_1 = u$。定义 $w = W^*v_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$。显然，$\|w\|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$。选取 $\gamma \in \mathbb{T}$ 使得 $\alpha = -\gamma\alpha$，并定义 $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma\beta \\ \beta & \gamma\alpha \end{pmatrix}$。容易验证，B 是一个满足 $\mathrm{tr}(B) = 0$ 且 $Be_1 = w = W^*v_0$ 的酉矩阵。因此，酉矩阵 $U = WBW^*$ 的迹为零，且 $Uu = WBW^*u = WBe_1 = WW^*v_0 = v_0 = M^*v$。容易验证，$A = MU$ 是 E_M 中的酉矩阵，且 $Au = v$。 ∎

所有满足上述例子中所述条件 $\mu_E = \|.\|$ 的真线性子空间 $E \subseteq M_2(\mathbb{C})$ 的维数都是三。推论 3.2 表明，任何这样的线性子空间 E 的维数至少为二；我们将在推论 4.3 中证明 E 的维数不可能等于 2。最后，我们将给出高维情形下例 3.3 的一个类似结果，并证明：当 E 是包含子空间 E^{symm} 的 $M_n(\mathbb{C})$ 的线性子空间时，$\mu_E = \|.\|$。

定理 3.6. 对于单位向量 $u、v \in \mathbb{C}^n$，存在一个对称酉矩阵 $U \in M_n(\mathbb{C})$，使得 $Uu = v$。特别地，若 E 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的线性子空间，且 $E_{symm} \subseteq E$，则 $\mu_E = \|.\|$。

证明。给定一个阶数为 $m \times n$ 的复矩阵 W，记 $W = (W^*)^t$。设 u、v 是 $\overline{\mathbb{C}^n}$ 中的单位向量，且 $\zeta = u^tv$。于是 $|\zeta| = |u^tv| = |u^*v| = |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \leq 1$。我们可以将其写成 $\zeta = |\zeta|e^{i\theta}$，其中 $\theta \in \mathbb{R}$。取 $y = (y_1, y2, 0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{C}^n$，使得

$$y_1 = e^{i\theta/2}\sqrt{\frac{1+|\zeta|}{2}} \quad \text{and} \quad y_2 = ie^{i\theta/2}\sqrt{\frac{1-|\zeta|}{2}}.$$

显然，$\|y\| = \sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2 = 1}$ and $y^ty = y_1^2 + y_2^2 = |\zeta|e^{i\theta} = \zeta$。对于 $u_1 = u, v_1 = y, u_2 = \bar{v}, v_2 = \bar{y}$，我们有 $u_i^*u_j = v_i^*v_j$，对 $1 \leq i, j \leq 2$ 成立。换言之，格拉姆矩阵 $[u_i^*u_j]_{i,j=1}^2$ 和 $[v_i^*v_j]_{i,j=1}^2$ 相同。因此，可以找到一个酉矩阵 $W \in M_n(\mathbb{C})$，使得对 $1 \leq i, j \leq 2$，$Wu_i = v_i$。于是，$Wu = y$ 且 $Wv = y$。此外，$v = \bar{W}^*y$，因此 $v = W^ty$。显然，对称酉矩阵 $U = WtW$ 满足 $Uu = WtWu = Wty = v$。由于 $E_{\mathrm{symm}} \subseteq E \subseteq M_n(\mathbb{C})$，对于所有 $A \in M_n(\mathbb{C})$，都有 $\mu_{E_{\mathrm{symm}}}(A) \leq \mu_E(A) \leq \|A\|$。其余结论由定理 3.1 得出，证明完毕。 ∎

显然，例 3.3 和定理 3.6 都利用定理 3.1 建立了单位范数矩阵在 $\mathbb{C}^2$ 的单位球面上的传递性。例 3.3 针对 $\mathbb{C}^2$ 中给定的一对单位向量，给出了此类单位范数矩阵的显式构造；而定理 3.6 中针对 $\mathbb{C}^n$ 中单位向量的论证则证明了此类单位范数矩阵的存在性。

4. 结构奇异值与数值半径

本节中，我们考察是否存在一个E 子$M_n(\mathbb{C})$线性子空间，使得相应的结构奇异值 μ_E 与数值半径相同。回忆一下，矩阵$A \in M_n(\mathbb{C})$的数值半径定义为$w(A) = \sup\{|x^*Ax| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$。众所周知，数值半径在$M_n(\mathbb{C})$上定义了一个与算子范数等价的范数，并且满足

$$\max\{r(A), \|A\|/2\} \le w(A) \le \|A\| \quad \text{for all } A \in M_n(\mathbb{C}).$$

这里，我们证明，即使对于$n = 2$，也不存在$E \subseteq M_2(\mathbb{C})$的线性子空间，使得对所有$A \in M_2(\mathbb{C})$，$\mu_E(A) = w(A)$。令人惊讶的是，结论还可以加强：我们证明，不存在$E \subseteq M_2(\mathbb{C})$的线性子空间，使得 μ_E 是谱半径、数值半径和算子范数的凸组合；除非 μ_E 与谱半径或算子范数之一相同。为达到这一目标，我们需要一些初等结果。

引理 4.1。如果 E 是 $M_2(\mathbb{C})$ 的线性子空间，且 维数$(E) \ge 2$，那么 E 含有一个秩一矩阵 x.

证明。 由于 $\dim(E) \ge 2$，存在两个线性无关的矩阵 A 和 B 属于E。根据代数基本定理，可以选取 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得多项式 $p(z) = \det(Az + B)$ 以α为根。于是 $\alpha A + B$ 不可逆，因此其秩至多为 1。由于 A 和 B 线性无关， $\alpha A + B$ 的秩不可能为 0，因此 $\alpha A + B$ 的秩为 1。 ■

考虑空间 $M_n(\mathbb{C})$，其内积结构由下式定义 y

$$\langle A, B\rangle_{\mathrm{HS}} = tr(B^*A),$$

对所有 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$。内积 $\langle ., .\rangle_{\mathrm{HS}}$通常称为希尔伯特-施密特内积。对于$E$ 这一$M_n(\mathbb{C})$的线性子空间，我们记为

$$E_{\mathrm{HS}}^{\perp} = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : \langle X, Y\rangle_{\mathrm{HS}} = 0 \text{ for all } Y \in E\} = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : tr(Y^*X) = 0 \text{ for all } Y \in E\}.$$

希尔 伯特–施密特内积在 $M_n(\mathbb{C})$ 上贯穿整个章节，起着至关重要的作用 n.

引理 4.2. 设 E 是 $M_2(\mathbb{C})$ 的一个线性子空间。如果 $E_{HS}^{\perp}$ 含有一个秩一矩阵，那么存在一个秩一矩阵 $A \in M_2(\mathbb{C})$ 使得 $\mu_E(A) = 0$。

证明。设 $Y \in E_{\mathrm{HS}}^{\perp}$ 的秩为一。那么 $Y = vu^*$，其中 u、v $\in \mathbb{C}^2$ 是非零向量。对于每个 $X \in E$，都有 $\langle X, Y\rangle_{\mathrm{HS}} = 0$。因此，$\det(I - uv^*X) = 1 - v^*Xu = 1 - \mathrm{tr}(uv^*X) = 1 - \mathrm{tr}(Y^*X) = 1 - \langle X, Y\rangle_{\mathrm{HS}} = 1$.。于是，没有 $X \in E$ 能满足 $\det(I - uv^*X) = 0$，所以 $\mu_E(uv^*) = 0$。由于 uv^* 是秩一矩阵，所需结论得证。 ■

推论 4.3. 若 E 是 $M_2(\mathbb{C})$ 的一个线性子空间，且维数$(E) \le 2$，则 μ_E 不能在 $M_2(\mathbb{C})$上定义范数。

证明。 显然，$\dim(E_{\mathrm{HS}}^{\perp}) = 4 - \dim(E) \ge 2$。由引理 4.1，$E_{\mathrm{HS}}^{\perp}$ 含有一个秩一矩阵。由引理 4.2 可知，存在一个秩一矩阵 $A \in M_2(\mathbb{C})$，使得 $\mu_E(A) = 0$。由于A 的秩为一且 $\mu_E(A) = 0$，函数 μ_E 不能在 $M_2(\mathbb{C})$ 上定义范数。 ■

在讨论主要结果之前，我们先证明，除了算子范数之外，数值半径与算子范数的任何凸组合都不可能成为结构奇异值。为此，我们先给出以下结果。

命题 4.4. 设 E 是 $M_2(\mathbb{C})$ 的一个线性子空间，满足 $E_{diag} \subseteq E$，且 $t \in (0,1]$。则存在一个矩阵 A(依赖于 t)，使得 $\mu_E(A) \neq tw(A) + (1-t)\|A\|$。

证明。显然，函数 $\mathrm{f}_t\colon \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \to [0,\infty)$，定义为 $\mathrm{f}_t(\mathrm{A}) = \mathrm{tw(A)} + (1-\mathrm{t})\|\mathrm{A}\|$，在 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 上定义了一个范数。若可能，设 $\mu_E = \mathrm{f}_t$。由于 $\mathrm{E} \supseteq \mathrm{E}^{\mathrm{diag}}$，我们有 $\dim(\mathrm{E}) \geq 2$。根据推论 4.3，$\dim(\mathrm{E}) \neq 2$。若 $\dim(\mathrm{E}) = 4$，则 $\mu_E = \|.\|$，因此对所有 $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$，都有 $\mathrm{f}_t(\mathrm{A}) = \mathrm{tw(A)} + (1-\mathrm{t})\|\mathrm{A}\| = \|\mathrm{A}\|$。因此，对所有 $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$，都有 $\mathrm{w(A)} - \|\mathrm{A}\| = 0$，而这通常并不成立。所以，$\dim(\mathrm{E}) = 3$，并且我们有

$$E = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \beta & 0\end{pmatrix}\right\}$$

对于某个 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$。由于 $w(E_{12}) = w(E_{21}) = 1/2$，我们有 $f_t(E_{12}) = f_t(E_{21}) = 1 - t/2$。现在，我们根据 α 和 β 的取值讨论四种情况。

情形 1. 设 $\alpha = 0$。则 $\beta \neq 0$，否则 $\dim(E) = 2$。显然，$E = \operatorname{span}\{E_{11}, E_{22}, E_{21}\}$。对于任意 $X \in E$，$\det(I - E_{21}X) = 1$。因此，$\mu_E(E_{21}) = 0$，这与 $\mu_E = f_t$ 矛盾，因为 $f_t(E_{21}) = 1 - t/2$。

情形 2. 设 $\beta = 0$。则 $\alpha \neq 0$，否则 $\dim(E) = 2$。显然，$E = \operatorname{span}\{E_{11}, E_{22}, E_{12}\}$。对于任意 $X \in E$，$\det(I - E_{12}X) = 1$。因此，$\mu_E(E_{12}) = 0$，这与 $f_t(E_{12}) = 1 - t/2$ 矛盾。

情形 3. 设 $\alpha, \beta \neq 0$，且 $|\alpha| \leq |\beta|$。我们可以直接写为

$$E = \operatorname{span}\left\{E_{11}, E_{22}, \begin{pmatrix}0 & x\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a & \gamma x\\ \gamma & b\end{pmatrix} : a, b, \gamma \in \mathbb{C}\right\},$$

其中 $x = \alpha/\beta$。对于每个 $X = \begin{pmatrix}a & \gamma x\\ \gamma & b\end{pmatrix} \in E$，有 $\det(I - E_{12}X) = 1 - \gamma$。于是

$$1 \leq \inf\{\|X\| : X \in E, \det(I - E_{12}X) = 0\} = \inf\left\{\left\|\begin{pmatrix}a & x\\ 1 & b\end{pmatrix}\right\| : a, b \in \mathbb{C}\right\} \leq \left\|\begin{pmatrix}0 & x\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\| \leq 1,$$

其中最后一个不等式成立，因为 $|x| \leq 1$。因此，$\mu_E(E_{12}) = 1$，这与 $\mu_E = f_t$ 矛盾，因为 $f_t(E_{12}) < 1$.

情况4. 设 $\alpha, \beta \neq 0$，且 $|\beta| \leq |\alpha|$。我们可以直接写成

$$E = \operatorname{span}\left\{E_{11}, E_{22}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ y\gamma & 0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a & \gamma\\ \gamma y & b\end{pmatrix} : a, b, \gamma \in \mathbb{C}\right\},$$

其中 $y = \beta/\alpha$。对于每个 $X = \begin{pmatrix}a\gamma & \\ & yb\end{pmatrix} \in E$，有 $\det(I - E_{21}X) = 1 - \gamma$。于是

$$1 \leq \inf\{\|X\| : X \in E, \det(I - E_{21}X) = 0\} = \inf\left\{\left\|\begin{pmatrix}a & 1\\ y & b\end{pmatrix}\right\| : a, b \in \mathbb{C}\right\} \leq \left\|\begin{pmatrix}0 & 1\\ y & 0\end{pmatrix}\right\| \leq 1,$$

其中最后一个不等式成立，因为 $|y| \leq 1$。因此，$\mu_E(E_{21}) = 1$，这与 $\mu_E = f_t$ 矛盾，因为 $f_t(E_{21}) < 1$。

无论哪种 情况，我们都会得到矛盾，因此，$\mu_E \neq f_t$。证明至此完成。 ∎

以下结果表明，除算子范数外，数值半径与算子范数的凸组合都无法表示为结构奇异值。

定理 4.5. 设 $t \in (0,1]$. 若 $f_t\colon M_2(\mathbb{C}) \to [0,\infty)$ 是函数 $f_t(A) = tw(A) + (1-t)\|A\|$，则 $M_2(\mathbb{C})$ 中不存在满足 $\mu_E = f_t$ 的线性子空间 E。

证明。显然，f_t 在 $M_2(\mathbb{C})$ 上定义了一个范数。设 E 是 $M_2(\mathbb{C})$ 的线性子空间。若可能，令 $\mu_E(A) = f_t(A)$ 对所有 $A \in M_2(\mathbb{C})$ 成立。由推论 4.3，$\dim(E) > 2$。若 $\dim(E) = 4$，则$\mu_E = \|\cdot\|$。因此，对所有 $A \in M_2(\mathbb{C})$，有 $f_t(A) = tw(A) + (1-t)\|A\| = \|A\|$。这将推出对所有 $A \in M_2(\mathbb{C})$，$w(A) = \|A\|$，矛盾。因此，唯一的可能是 $\dim(E) = 3$。设 U 是 $M_2(\mathbb{C})$ 中的一个酉矩阵。注意到

$$\mu_E(U^*AU) = f_t(U^*AU) = f_t(A) = \mu_E(A) \tag{4.1}$$

对于所有 $A \in M_2(\mathbb{C})$。对于任意非零的 $A \in M_2(\mathbb{C})$，有 $\mu_E(U^*AU) = \mu_E(A) = f_t(A) > 0$。于是

$$\begin{aligned}\mu_E(U^*AU)^{-1} &= \inf\{\|X\| : X \in E,\ \det(I - U^*AUX) = 0\}\\ &= \inf\{\|UXU^*\| : UXU^* \in UEU^*,\ \det(I - AUXU^*) = 0\}\\ &= \inf\{\|Y\| : Y \in E_U,\ \det(I - AY) = 0\}\\ &= \mu_{E_U}(A)^{-1},\end{aligned}$$

其中 E_U 是由下式给出的线性子空间

$$E_U = UEU^* = \{UXU^* : X \in E\} = \{Y \in M_2(\mathbb{C}) : U^*YU \in E\}.$$

由于 $\dim(E) = 3$，因此 $\dim(E_U) = 3$，所以对于每个酉矩阵$U \in M_2(\mathbb{C})$，$\dim(E_{\mathrm{HS}}^{\perp}) = \dim((E_U)_{\mathrm{HS}}^{\perp}) = 1$。因此，我们可以写作 $E_{\mathrm{HS}}^{\perp} = \mathrm{span}\{M\}$。若 M 的秩为一，则由引理 4.2 可得所需结论。我们假设 M 的秩为二。此时 M 可逆，且我们选取一个酉矩阵U 使得

$$UMU^* = \begin{pmatrix}\lambda_1 & m_{12}\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \quad \text{and so,} \quad U\left(\lambda_1^{-1}M\right)U^* = \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix},$$

其中 $x = \lambda_1^{-1}m_{12}$ 且 $y = \lambda_1^{-1}\lambda_2$。令 $M_1 = \lambda_1^{-1}M$，并令 $N = UM_1U^*$。显然，$M_1 \in E_{\mathrm{HS}}^{\perp}$，且有 $E = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : tr(M_1^*X) = 0\}$。此外，由此可得

$$E_U = \{Y \in M_2(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(M_1^*U^*YU) = 0\} = \{Y \in M_2(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(N^*Y) = 0\}$$

因此，$(E_U)_{\mathrm{HS}}^{\perp} = \mathrm{span}\{N\}$。此外，由 (4.1) 可得

$$\mu_{E_U}(A) = f_t(A) \quad \text{for all } A \in M_2(\mathbb{C}). \tag{4.2}$$

特别地，$\mu_{E_U}(E_{ii}) = f_t(E_{ii}) = 1$对于 $i = 1, 2$。因此，$\inf\{\|X\| : X \in E_U,\ \det(I - E_{ii}X) = 0\} = 1$对于 $i = 1, 2$。由紧致性论证可知，存在 $P = (p_ij)_{i,j=1}^2$，$Q = (q_ij)_{i,j=1}^2 \in E_U$，使得 $\|P\| = \|Q\| = 1$ 且 $\det(I - E_{22}P) = \det(I - E_{11}Q) = 0$。经简单计算可得 $\det(I - E_{22}P) = 1 - p_{22}$ 且 $\det(I - E_{11}Q) = 1 - q_{11}$。因此，$p_{22} = 1 = q_{11}$。由于$\|P\| = \|Q\| = 1$，必有 $p_{12} = p_{21} = q_{12} = q_{21} = 0$。于是，$P = \mathrm{diag}(p_{11}, 1)$，$Q = \mathrm{diag}(1, q_{22})$。若 P 和 Q 在 $M_2(\mathbb{C})$ 中线性无关，则 $\mathrm{span}\{P, Q\} = E^{\mathrm{diag}}$。因此，$E_{\mathrm{diag}} \subseteq E_U$，根据命题 4.4，$\mu_{E_U} \neq f_t$，这与 (4.2) 矛盾。因此，P 和 Q 是线性相关矩阵。对于 $W = (w_ij) \in M_2(\mathbb{C})$，有

$$N^*W = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \bar{x} & \bar{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_{11} & w_{12}\\ w_{21} & w_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_{11} & *\\ * & \bar{x}w_{12} + \bar{y}w_{22}\end{pmatrix} \quad \text{and so,} \quad \mathrm{tr}(N^*W) = w_{11} + \bar{x}w_{12} + \bar{y}w_{22}.$$

因此，$\mathrm{tr}(N^*P) = 0$ 给出 $p_{11} = -y$。现在我们来求一个包含 P 的E_U 的基。注意，

$$\begin{aligned} E_U = \{W \in M_2(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(N^*W) = 0\} &= \{(w_{ij}) \in M_2(\mathbb{C}) : w_{11} + \bar{x}w_{12} + \bar{y}w_{22} = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -\bar{x}w_{12} - \bar{y}w_{22} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} : w_{12}, w_{21}, w_{22} \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} -\bar{x} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\bar{y} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

对于任意 $W = \begin{pmatrix} -xw_{12} - yw_{22} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \in E_U$，有 $\det(I - E_{12}W) = 1 - w_{21}$。于是

$$1 \leq \inf \left\{ \left\| \begin{pmatrix} -\bar{x}w_{12} - \bar{y}w_{22} & w_{12} \\ 1 & w_{22} \end{pmatrix} \right\| : w_{12}, w_{22} \in \mathbb{C} \right\} \leq \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1 \quad \text{and so,}$$

$$\inf\{\|W\| : W \in E_U, \det(I - E_{12}W) = 0\} = \inf \left\{ \left\| \begin{pmatrix} -\bar{x}w_{12} - \bar{y}w_{22} & w_{12} \\ 1 & w_{22} \end{pmatrix} \right\| : w_{12}, w_{22} \in \mathbb{C} \right\} = 1.$$

因此，$\mu_{E_U}(E_{12}) = 1$，这与 (4.2) 矛盾，因为 $f_t(E_{12}) = 1 - t/2$。无论哪种情况，我们都会得到矛盾。因此，所需结论得证。 ∎

现在我们将上述定理推广，事实上表明，除了谱半径和算子范数外，谱半径、数值半径与算子范数的任何凸组合都不能给出结构奇异值。这里给出的论证与定理 4.5 的论证类似。

定理 4.6. 设 $t = (t_1, t_2) \in [0,1] \times [0,1]$，其中 $t_1 + t_2 \leq 1$，且 $(t_1, t_2) \notin \{(0,0), (1,0)\}$。若 h_t: $M_2(\mathbb{C}) \to [0,\infty)$ 是由下式给出的函数

$$h_t(A) = t_1 r(A) + t_2 w(A) + (1 - t_1 - t_2)\|A\|,$$

那么就不存在 t 一个 M_2（$\mathbb{C}$）的线性子空间 E，使得对所有 $A \in M_2$（$\mathbb{C}$），μ_E（A）$= h_t$（A）.

证明。首先注意，对于非零 $A \in M_2(\mathbb{C})$，有 $h_t(A) > 0$，否则 $t_1 r(A) = t_2 w(A) = (1 - t_1 - t_2)\|A\| = 0$。在这种情况下，$(t_1, t_2) = (1, 0)$，这是不可能的。假设 $h_t = \|.\|$，那么 $h_t(E_{12}) = 1 - t_1 - t_2/2 = \|E_{12}\| = 1$。因此，$(t_1, t_2) = (0, 0)$，这又产生矛盾。

反设存在 $M \subseteq (2)$ 中的线性子空间 E，使得对所有 $A \in M_2(\mathbb{C})$ 都有 $\mu_E(A) = h_t(A)$。若 $\dim(E) \leq 2$，则 $\dim(E_{HS}^{\perp}) = 4 - \dim(E) \geq 2$。由引理 4.1，$E_{HS}^{\perp}$ 含有一个秩一矩阵；由引理 4.2，存在一个秩一矩阵 $A \in M_2(\mathbb{C})$，满足 $\mu_E(A) = 0$。因此，对于 $M_2(\mathbb{C})$ 中的非零 A，有 $h_t(A) = 0$，这与假设矛盾。若 $\dim(E) = 4$，则 $\mu_E = h_t = \|.\|$，这如上所述是不可能的。因此，$\dim(E) = 3$。令 U 为 $M_2(\mathbb{C})$ 中的一个酉矩阵。按照定理 4.5 中的类似论证，我们有

$$\mu_{E_U}(A) = \mu_E(U^*AU) = h_t(U^*AU) = h_t(A) = \mu_E(A) \tag{4.3}$$

对于所有的 $A \in M_2(\mathbb{C})$ 和酉矩阵 $U \in M_2(\mathbb{C})$，其中 $E_U = \{Y \in M_2(\mathbb{C}) : U^*YU \in E\}$。由于 $\dim(E) = 3$，我们可以写成 $E_{HS}^{\perp} = \mathrm{span}\{M\}$。若 M 的秩为一，则根据引理 4.2，存在秩一矩阵 $A \in M_2(\mathbb{C})$，使得 $\mu_E(A) = 0$；但这不可能，因为 $h_t(A) > 0$。现在假设 M 的秩为二。那么 M 可逆，且我们选取酉矩阵 U，使得

$$UMU^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & m_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{and so,} \quad U\left(\lambda_1^{-1} M\right) U^* = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

其中 $x = \lambda_1^{-1} m_{12}$ 且 $y = \lambda_1^{-1}\lambda_2$。令 $M_1 = \lambda_1^{-1} M$，$N = U M_1 U^*$。显然，$M_1 \in E_{HS}^{\perp}$ 且 $E = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(M_1^* X) = 0\}$。此外，$E_U = \{Y \in M_2(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(M_1^* U^* Y U) = 0\} = \{Y \in M_2(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(N^* Y) = 0\}$，因此 $(E_U)_{HS}^{\perp} = \mathrm{span}\{N\}$。此外，根据 (4.3) 可得

$$\mu_{E_U}(A) = h_t(A) \quad \text{for all } A \in M_2(\mathbb{C}). \tag{4.4}$$

特别地，我们必有

$$\mu_{E_U}(E_{ii}) = h_t(E_{ii}) = 1 \quad \text{and} \quad \mu_{E_U}(E_{12}) = h_t(E_{12}) = 1 - t_1 - \frac{1}{2}t_2 = h_t(E_{21}) = \mu_{E_U}(E_{12}) \tag{4.5}$$

对 $i = 1, 2$。因此，$\inf\{\|X\| : X \in E_U, \det(I - E_{ii}X) = 0\} = 1$ 对 $i = 1, 2$。重复定理 4.5 中的相同论证，可以找到 $P = \mathrm{diag}(p_{11}, 1)$ 和 $Q = \mathrm{diag}(1, q_{22})$，它们属于 E_U。若 P、Q 线性相关，则由定理 4.5 的证明可得 $\mu_{E_U}(E_{12}) = 1$。由 (4.4)，$h_t(E_{12}) = 1 - t_1 - t_2/2 = 1$，因此，$(t_1, t_2) = (0, 0)$，这又构成矛盾。现在假设 P、Q 线性无关。那么 $\mathrm{span}\{P, Q\} = E_{\mathrm{diag}} \subseteq E_U$。在这种情况下，我们可以写成

$$E_U = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ for some } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

我们根据 α 和 β 的取值，采用与命题 4.4 中类似的论证。

情形 1. 设 $\alpha = 0$。则 $\beta \neq 0$，否则 $\dim(E_U) = 2$。显然，$E_U = \mathrm{span}\{E_{11}, E_{22}, E_{21}\}$。对于 $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \in E_U$，我们有 $\det(I - E_{21}X) = 1$，且 $\det(I - E_{12}X) = 1 - c$。于是

$$\inf\{\|X\| : X \in E_U, \det(I - E_{12}X) = 0\} = \inf\left\{ \left\| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \right\| : a, b \in \mathbb{C} \right\} = 1.$$

因此，$\mu_{E_U}(E_{12}) = 1$，且 $\mu_{E_U}(E_{21}) = 0$，这与 (4.5) 矛盾。

情形 2. 设 $\beta = 0$。则 $\alpha \neq 0$，否则 $\dim(E_U) = 2$。显然，$E_U = \mathrm{span}\{E_{11}, E_{22}, E_{12}\}$。对于 $X \in E_U$，$\det(I - E_{12}X) = 1$。此外，对于 $X = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E_U$，$\det(I - E_{21}X) = 1 - c$。于是

$$\inf\{\|X\| : X \in E_U, \det(I - E_{21}X) = 0\} = \inf\left\{ \left\| \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\| : a, b \in \mathbb{C} \right\} = 1.$$

因此，$\mu_{E_U}(E_{12}) = 0$ 且 $\mu_{E_U}(E_{21}) = 1$，这再次与 (4.5) 矛盾。

情形 3. 令 $\alpha, \beta \neq 0$ 满足 $|\alpha| \leq |\beta|$。我们可以直接写成

$$E_U = \mathrm{span}\left\{ E_{11}, E_{22}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \gamma x \\ \gamma & b \end{pmatrix} : a, b, \gamma \in \mathbb{C} \right\}, \text{ where } x = \alpha/\beta.$$

对于每个 $X = \begin{pmatrix} a & \gamma x \\ \gamma & b \end{pmatrix} \in E_U$，$\det(I - E_{12}X) = 1 - \gamma$ 且 $\det(I - E_{21}X) = 1 - \gamma x$。于是

$$1 \leq \inf\{\|X\| : X \in E_U, \det(I - E_{12}X) = 0\} = \inf\left\{ \left\| \begin{pmatrix} a & x \\ 1 & b \end{pmatrix} \right\| : a, b \in \mathbb{C} \right\} \leq \left\| \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| \leq 1,$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $|x| \leq 1$。因此，$\mu_{E_U}(E_{12}) = 1$。此外，我们有

$$\frac{1}{|x|} \leq \inf\{\|X\| : X \in E_U, \det(I - E_{21}X) = 0\} = \inf\left\{ \left\| \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1/x & b \end{pmatrix} \right\| : a, b \in \mathbb{C} \right\} \leq \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{|x|},$$

其中，最后一个等式成立是因为 $0<|x|\leq 1$。因此， $\mu_{E_U}(E_{21}) = |x|$ 并且根据（4.5）， $|x| = 1$。经过一些常规计算可得

$$(E_U)^{\perp}_{\mathrm{HS}} = \{Y \in M_2(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(X^*Y) = 0 \text{ for all } X \in E\} = \mathrm{span}\{V\}, \quad \text{where } V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\overline{x} & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $|x| = 1$，我们有 V是一个酉矩阵。根据定义，$E_U = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : tr(V^*X) = 0\}$，并且根据例 3.5， $\mu_{E_U} = \|.\|$。因此， $h_t = \|.\|$，这与前面所示的不可能性相矛盾。

情况4。 设 $\alpha,\ \beta \neq 0$且 $|\beta| \leq |\alpha|$。我们可以简单地写成

$$E_U = \mathrm{span}\left\{E_{11}, E_{22}, \gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & \gamma \\ \gamma y & b \end{pmatrix} : a, b, \gamma \in \mathbb{C}\right\},$$

其中 $y = \beta/\alpha$。对于每个 $X = \begin{pmatrix} a\gamma & \\ & yb \end{pmatrix} \in E_U$，我们有 $\det(I - E_{21}X) = 1 - \gamma$。于是

$$1 \leq \inf\{\|X\| : X \in E_U, \det(I - E_{21}X) = 0\} = \inf\left\{\left\|\begin{pmatrix} a & 1 \\ y & b \end{pmatrix}\right\| : a, b \in \mathbb{C}\right\} \leq \left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}\right\| \leq 1.$$

因此， $\mu_{E_U}(E_{21}) = 1$。此外， $\det(I - E_{12}X) = 1 - \gamma y$，所以我们有

$$\frac{1}{|y|} \leq \inf\{\|X\| : X \in E_U, \det(I - E_{12}X) = 0\} = \inf\left\{\left\|\begin{pmatrix} a & 1/y \\ 1 & b \end{pmatrix}\right\| : a, b \in \mathbb{C}\right\} \leq \left\|\begin{pmatrix} 0 & 1/y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{|y|}.$$

因此， $\mu_{E_U}(E_{12}) = |y|$，并且根据（4.5）， $|y| = 1$。简单计算可得

$$(E_U)^{\perp}_{\mathrm{HS}} = \{Y \in M_2(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(X^*Y) = 0 \text{ for all } X \in E_U\} = \mathrm{span}\{V_0\}, \quad \text{where } V_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{y} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $|y| = 1$，我们有 V_0 是酉矩阵。根据定义，$E_U = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : tr(V_0^*X) = 0\}$。根据例 3.5，我们有 $\mu_{E_U} = \|.\|$。因此， $h_t = \|.\|$，这与前文讨论的情况不符。无论哪种情况，我们都得到矛盾，因此所需结论成立。 ■

资助。 第一作者获得印度政府印度国家研究基金会（ANRF）核心研究资助，项目编号 CRG/2023/005223，部分支持。第二作者通过第一作者的印度理工学院孟买分校 RDF 资助获得支持，项目代码为 RI/0115-10001427。

参考文献

[1] A. A. Abouhajar、M. C. White、N. J. Young，关于与 μ-综合相关的域的施瓦茨引理，《几何分析杂志》，17（2007年），717 – 750。[2] J. Agler、Z. A. Lykova、N. J. Young，与 μ-综合相关的域的复几何，《数学分析及其应用杂志》，422（2015年），508 – 543。[3] J. Agler、N.J. Young，关于 $\mathbb{C}^2$ 中的域的交换子提升定理与谱插值，《泛函分析杂志》，161（1999年），452 – 477。[4] J. Agler、N. J. Young，两点谱 *Nevanlinna-Pick* 问题，《积分方程与算子理论》，37（2000年），375 – 385。[5] J. Agler、N. J. Young，二阶谱 *Nevanlinna-Pick* 问题，《美国数学会汇刊》，356（2004年），573 – 585。[6] J. Agler、N. J. Young，对称双圆盘的双曲几何，《几何分析杂志》，14（2004年），375 – 403。[7] J. Agler、N. J. Young，某个域的魔函数与自同构，《复分析与算子理论》，2（2008年），383 – 404。

[8] O. M. O. Alsalhi、Z. A. Lykova，有理四块内函数与四块域的特殊簇，《数学分析及其应用杂志》，506（2022年），125534，52页。[9] J. A. Ball、I. Gohberg、L. Rodman，有理矩阵函数插值，OT45，Birkhäuser 出版社，1990年。[10] H. Bercovici、C. Foias、A. Tannenbaum，谱交换子提升定理，《美国数学会汇刊》，325（1991年），741 – 763。[11] T. Bhattacharyya，作为谱集的四块域，《印第安纳大学数学杂志》，63（2014年），1601 – 1629。[12] T. Bhattacharyya、S. Pal、S. S. Roy，通过求解算子方程对 Γ-压缩算子进行扩张，《数学进展》，230（2012年），577 – 606。[13] E. Bi、Z. Shaaban、G. Su，六块域适当全纯自映射的刚性，arXiv：2507.16176。[14] I. Biswas、S. Pal、N. Tomar：$M_2(\mathbb{C})$ 中与 μ-综合相关的域——六块域，arXiv：2506.15149。[15] C. Costara，对称双圆盘与 Lempert 定理，《伦敦数学会通报》，36（2004年），656 – 662。[16] C. Costara，关于谱 Nevanlinna-Pick 问题，《数学研究》，170（2005年），23 – 55。[17] C. Costara，2×2 谱 Nevanlinna-Pick 问题，《伦敦数学会杂志》，71（2005年），684 – 702。[18] J. Doyle，具有结构化不确定性的反馈系统分析，《IEE控制理论与应用学报》，129（1982年），242 – 250。[19] J. Doyle、G. Stein，多变量反馈设计：经典/现代综合的概念，《IEEE自动控制汇刊》，26（1981年），4 – 16。[20] C. Foias、A. E. Frazho，插值问题的交换子提升方法，Birkh¨auser，柏林，1990年。[21] A. Jindal、P. Kumar，五块域上的算子理论，《数学分析及其应用杂志》，540（2024年），第1期，论文编号128589，17页。[22] L. Kosi´nski，拟圆形域的几何及其在四块域中的应用，《美国数学会会刊》，139（2011年），559 – 569。[23] L. Kosi´nski，五块域的自同构群，《复分析与算子理论》，9（2015年），1349 – 1359。[24] L. Kosi´nski、W. Zwonek，凸域、对称双圆盘和四块域中的 Nevanlinna-Pick 问题与左逆的唯一性，《几何分析杂志》，26（2016年），1863 – 1890。[25] T. Mushtaq、P. Seiler、M. S. Hemati，具有重复复全块不确定性的秩一结构奇异值的精确解，《IFAC自动化学报》，167（2024年），论文编号111717，4页。[26] N. Nikolov、P. Pflug、P. J. Thomas，$n \leq 3$的谱 Nevanlinna-Pick 与 Carath´eodory-Fej´ér 问题，《印第安纳大学数学杂志》，60（2011年），883 – 893。[27] A. Packard、J. Doyle，复结构化奇异值，《IFAC自动化学报》，29（1993年），71 – 109。[28] S. Pal，从 Stinespring 扩张到对称双圆盘上的 Sz.-Nagy 扩张及算子模型，《纽约数学杂志》，20（2014年），645 – 664。[29] S. Pal、O. M. Shalit，对称双圆盘中的谱集与特征簇，《泛函分析杂志》，266（2014年），5779 – 5800。[30] S. Pal、N. Tomar，与五块域相关的算子及其与双球和对称双圆盘的关系，arXiv：2309.15080。[31] S. Pal、N. Tomar，与六块域相关的算子，arXiv：2507.14589。[32] P. Pflug、W. Zwonek，对称双圆盘中所有复测地线的描述，《伦敦数学会通报》，37（2005年），575 – 584。[33] G. Su，五块域的几何性质，《复分析与算子理论》，14（2020年），论文编号44，14页。[34] G. Su、Z. Tu、L. Wang，五块域适当全纯自映射的刚性，《数学分析及其应用杂志》，424（2015年），460 – 469。[35] N. J. Young，四块域的自同构群，《伦敦数学会杂志》，77（2008年），757 – 770。[36] W. Zwonek，四块域的几何性质，《数学档案》，100（2013年），159 – 165。

(Sourav Pal) 印度理工学院孟买分校数学系，Powai，孟买 - 400076，印度。电子邮箱地址：sourav@math.iitb.ac.in (NitinTomar) 印度理工学院孟买分校数学系，Powai，孟买- 400076，印度。电子邮箱地址：tomarnitin414@gmail.com