arXiv:2603.26368v1 [math.RT] 27 Mar 2026

函子变形的像

EHUD MEIR

摘要。函子变形提供了一种方法，可将有限环上有限模的自同构群的复杂表示转化为某个阿贝尔范畴中函子的自同构群的表示。本文利用抛物子群的作用，给出一个明确判据，以判断某个表示是否属于函子变形的像。随后，我们在有限域上的博雷尔群中展示这一判据。

1. 引言

设 M 是有限环 R上的有限模。在 [CMO4] Tyrone Crisp、Uri Onn与作者提出了一种名为函子变形的新技术，用于研究 $\mathrm{Aut}_R(M)$的表示论。假设$M = M_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus M_n^{a_n}$是 M 分解为两两不同构的不可分解模的直和所得的分解。函子变形为 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的每个不可约表示 V 关联一个加性函子$\sim F : \langle M_1, \ldots, M_n\rangle \to \mathrm{Ab}$ 以及 $\mathrm{Aut}(F)$的一个不可约表示 V。这里，$\langle M_1, \ldots, M_n\rangle$表示由 $M_1, \ldots, M_n$ 生成的 $R-$ 模的全加性子范畴。在大多数情况下，函子变形过程会降低表示 V 的数值复杂度。函子 F是满足 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KF(M), V) \neq 0$的极小函子（相对于子商关系），而表示$\sim V$ 由 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KF(M), V)$给出，其中 $\mathrm{Aut}(F)$ 以自然方式作用于 $KF(M)$。F 是$\tilde{}$唯一确定的，且 V 不可约，这一事实可由作者运用不变理论构造对称幺半范畴的结果推出 [M1]。对群 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 表示论的研究源于对群 $GL_n(o/(\pi^l))$, 表示论的研究，其中 o 是具有一致化子π 和有限剩余域的离散赋值环。函子变形在哲学层面的一个主要推论是，这些群的表示论实际上包含了非常一般的R 和 M下 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的表示论。另见 [CMO1、CMO2、CMO3]，其中利用 Harish-Chandra函子和克利福德理论的推广研究 $GL_n(o/(\pi^l))$ 的表示论。

因此，函子变形为研究一大类有限群的表示论提供了一种新方法。我们得到一个分层 $\mathrm{Irr}(\mathrm{Aut}_R(M)) \cong \sqcup_F \mathrm{Irr}^{M,\ fm}(\mathrm{Aut}(F))$，其中 $\mathrm{Irr}^{M,\ fm}(\mathrm{Aut}(F))$ 表示由 $\mathrm{Aut}(F)$ 的表示经函子变形而得到的不可约表示。这引出了一个问题：$\mathrm{Irr}^{M,\ fm}(\mathrm{Aut}(F))$中究竟有哪些不可约表示？本文旨在回答这一问题，并为上三角群族 $B_n(\mathbb{F}_q)$ 给出具体示例。

为陈述主要结果，我们先引入一些术语。设 $M = \bigoplus_i M_i^{a_i}$、$F$ 和 $\mathcal{C} = \langle M_1, \ldots, M_n\rangle$ 如上所述。我们称 $(X \xrightarrow{f} Y)$ 是 F 的极小表示，当且仅当

$$\mathrm{Hom}_R(Y, -) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(X, -) \to F \to 0$$

是 F 范畴 $\mathcal{C}_{+1} = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}$中的极小分解，$\mathrm{Ab})$。我们已经在 [CMO4] 中看到 F 的极小分解与函子变形之间的联系。在第 3 节，我们证明如下结果：

引理1.1 （见引理 3.18）。$Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的表示能作为 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的表示的函子变形，其必要条件是：若 $(X \xrightarrow{f} Y)$ 是 F 的极小表示，那么 X 是 M 的直和项。

若 $G \subseteq F$ 是一个子函子，我们将 Z_G 记作 $\mathcal{C}$ 中满足 $\mathrm{Hom}_R(Z_G, -)$ 是 G的投射覆盖的唯一对象。我们将 $P_G \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 记作子群 $\{\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) | \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_F) \subseteq G\}$。

在第4节中，我们证明主要结果：

定理1.2。 设 M、 $\mathcal{C}$ 和 F 如上。假设 F 有一个极小表示 $(X \xrightarrow{f} Y)$，且 $M = X \oplus Z$。设 V 是 $Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$的一个不可约表示。那么，当且仅当满足以下条件时， V 是 $Aut\mathrm{Aut}_R(M)$ 的一个不可约表示的函子变形：对于每个满足 Z_G 不是 Z的直和项的半单子函子 $G \subseteq F$，都有 $\mathrm{Hom}_{P_G}(\mathbf{1}, V) = 0$。

主要结果有如下推论，它刻画了 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的所有不可约表示均由函子变形得到的情形：

推论1.3。 设 $M = X \oplus Z$，并设 $(X \xrightarrow{f} Y)$ 是 F的一个极小解。那么以下条件等价：

(1) $Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的每个不可约表示，都是 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的某个不可约表示经函子变形所得。*(2)* $Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的平凡表示 $\mathbf{1}$，是$\mathrm{Aut}_R(M)$ 的某个不可约表示经函子变形所得。*(3)* 如果 $\mathrm{Hom}(X_1, -)$ 是 $\mathrm{soc}(F)$ 的投射覆盖，那么 X_1 是 Z 的一个直和项。

最后，在第5节中我们给出一些示例。我们首先考察群 $GL_n(\mathbb{F}_q)$ 这一族。根据 [Z1]，我们知道这些群会产生一个正自伴 Hopf 代数 $\mathcal{H}$。我们解释主要结果与 $\mathcal{H}$ 的结构之间的联系。我们给出的第二族示例是群$B_n(\mathbb{F}_q)$，即 $\mathbb{F}_q$上的上三角矩阵群。我们说明如何将结果转化为一个组合判据，并展示这如何在 $n \leqslant 4$时，为 $B_n(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示带来一种新的计数方法。Higman 在 1960 [H1] 中提出的一个长期猜想指出，对每个 n， $B_n(\mathbb{F}_q)$ 的幺幂根基 $U_n(\mathbb{F}_q)$ 中共轭类的数量都是 q [VA1, So1] 的多项式。由于共轭类的数量与不可约表示的数量相同，并且 $U_n(\mathbb{F}_q)$ 是 $B_n(\mathbb{F}_q)$的正规子群且其商群为阿贝尔群，这表明 $B_n(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示计数与 Higman 猜想之间存在深刻联系。我们希望本文之后，函子变形这一技巧能得到进一步应用，以研究这一猜想。

2. 预备知识

2.1. 函子变形。设 R 是一个有限环， M 是一个 R-模。函子变形是一种工具，最初由 [CMO4] 引入，用于研究 $\mathrm{Aut}_R(M)$的表示论。这里我们回顾相关细节。记$M = M_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus M_n^{a_n}$为 M 分解成两两不同构的不可分解模。记$\mathcal{C} = \langle M_1, \ldots M_n \rangle \subseteq R - \mathrm{mod}$ 为由形如 $\bigoplus_{i=1}^n M_i^{b_i}$的有限 R-模构成的全子范畴，并记$\mathcal{C}_{+1} = Fun(\mathcal{C}, Ab)$ 为从 $\mathcal{C}$ 到有限阿贝尔群范畴的加性函子范畴。 $\mathcal{C}_{+1}$ 中对象的同构类构成一个偏序，其中 $F \leqslant G$ 当且仅当 F 同构于 G的一个子商。对于每个 $F \in \mathcal{C}_{+1}$， $F(M)$ 自然地是一个 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) \times \mathrm{Aut}_R(M)$-集。因此，线性化 $KF(M) = span\{u_v\}_{v \in F(M)}$ 是一个 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) \times \mathrm{Aut}_R(M)$-表示。

定理 2.1 （定理 A， [CMO4]）。 设 V 是 $\mathrm{Aut}_R(M)$的不可约表示。存在唯一的（在同构意义下）函子 $F \in \mathcal{C}_{+1}$，使得 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KF(M), V) \neq 0$ 且 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KG(M), V) = 0$对每个 $G \prec F$都成立。

该定理表明，对于 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的每个不可约表示 V，我们都可以将一个函子 $F \in \mathcal{C}_{+1}$与之关联。事实上，还有更强的结论。记 $\overline{KF(M)}$ 为 $KF(M)$ 的最大子对象，它满足

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(\overline{KF(M)}, KG(M)) = 0$$

对每个 $G \prec F$ 都成立。$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 在 $KF(M)$ 上的作用限制为在 $\overline{KF(M)}$ 上的作用，并且我们有一个代数态射

$$\Phi_F(M) : K\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) \to \mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}}(\overline{KF(M)}).$$

定理 2.2 (定理 B， [CMO4])。映射 $\Phi_F(M)$ 是满射。如果 a_i 分解 $M_i = \bigoplus_i M_i^{a_i}$中出现的数足够大，那么 $\Phi_F(M)$ 是同构。

该定理使我们能够将不可约表示附加到 $V\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$。事实上，我们可以将$KF(M)$ 分解为一个 $\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}$-表示，并写作 $KF(M) = \bigoplus_j U_j \otimes V_j$，其中 U_j 是向量空间，而 V_j是两两不同构的 $\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}$-表示。$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的作用与 $\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}$的作用相交换，因此可由其在向量空间 U_j上的作用给出。$\Phi_F(M)$ 是满射这一事实意味着 U_j 是一个不可约的 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$-表示。

定义 **2.3 定义**。我们称 (F, U_j^*) 为 (M, V_j)的函子变形，并记作 $(M, V_j) \rightsquigarrow (F, U_j^*)$。

注 2.4. **(1)** 由第一个定理可知，对于每个 $\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}$ 的不可约表示 V，都存在唯一一个（在同构意义下）函子 F，使得 V 出现在 $KF(M)$ 中。因此，我们可以自由地讨论 V 的函子变形。**(2)** 我们在定义中采用 U_j^* 而非 U_j，是为了确保在特殊情形 $F = \mathrm{Hom}_R(M, -)$ 下，表示在 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) \cong \overline{\mathrm{Aut}_R(M)}$ 的识别下变形为自身。**(3)** 在论文 [CMO4] 中，环 R 是一个 $o_l := o/(\pi^l)$- 代数，其中 o 是某个带一致化子 π 的离散赋值环，而 $\mathcal{C}_{+1}$ 是从 $\mathcal{C}$ 到 o_l–Mod 的 o_l-线性函子范畴。容易看出，这个范畴等价于从 $\mathcal{C}$ 到 Ab 的加性函子范畴。一方面，我们只需与遗忘函子 o_l–Mod $\to$ Ab 复合；另一方面，可以利用以下事实：若 $F : \mathcal{C} \to Ab$ 是一个加性函子，则对于每个 $X \in \mathcal{C}$，$F(X)$ 都具有规范的 o_l-模结构。本文将采用定义 $\mathcal{C}_{+1} = Fun(\mathcal{C}, Ab)$，无需涉及离散赋值环。

2.2. **同态空间**。我们从以下定义开始。

定义 2.5。令 F，$G \in \mathcal{C}_{+1}$ 并令 $H \subseteq F \oplus G \in \mathcal{C}_{+1}$。我们定义

$$T_H \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}}(KF(M), KG(M))$$

$$u_v \mapsto \sum_{\substack{v' \in G(M) \\ (v,v') \in H(M)}} u_{v'}.$$

容易看出，T_H 确实是 $\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}$-模的一个态射。以下是[CMO4]中的命题 2.23

命题 2.6。集合 $\{T_H\}_{H \subseteq F \oplus G}$ 张成 $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}}(KF(M), KG(M))$。

由于 $KF(M)$ 是一个置换模，因此作为 $\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}$-表示，有 $(KF(M))^* \cong KF(M)$。于是我们得到一个自然同构

(2.7) $$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}}(\mathbf{1}, K(F \oplus G)(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}}(\mathbf{1}, KF(M) \otimes KG(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}}(KF(M), KG(M)).$$

注记 2.8。平凡一维表示 $\mathbf{1}$ 同构于 $K0(M)$，其中0 是从 $\mathcal{C}$ 到 Ab的零函数。容易看出，在等式 2.7 的同构下，元素 $T_H \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}}(K0(M), K(F \oplus G)(M))$ 对应于元素 $T_H \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Aut}_R(M)}}(KF(M), KG(M))$。在接下来的讨论中，我们研究元素 T_H 所满足的线性关系时，将用到这一点。

接下来的定义将在我们对函子变形的研究中频繁出现：

定义 2.9. 设 $F \in \mathcal{C}_{+1}$。我们称 $(X \xrightarrow{f} Y)$ 是 F 的一个表示，若 X、$Y \in \mathcal{C}$，且 F 有一个解

$$\mathrm{Hom}_R(Y,-) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(X,-) \to F \to 0.$$

若分解是极小的，则称该表示为极小表示。

根据 [CMO4] 中的引理 4.7，我们知道，如果 F 有一个极小分解 $(X \xrightarrow{f} Y)$ 且 $KF(\overline{M}) \neq 0$，那么 X 是 M的一个直和项。我们将在下文的引理 3.18 中再次证明这一点。有关范畴 $\mathcal{C}_{+1}$中的同调代数背景，请参见 [CMO4]中的附录 A。

3. LINEAR RELATIONS IN HOM-SPACES

根据方程 2.7 可知，只需研究这些元素之间的线性关系

$$\{T_H\}_{H \subseteq F} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(\mathbf{1}, KF(M))$$

对于任意函子 $F \in \mathcal{C}_{+1}$。

定义 3.1。设 $M \in \mathcal{C}$ 和 $F \in \mathcal{C}_{+1}$。我们称 F 是 M-冗余的，当且仅当满足以下条件：

$$F(M) = \bigcup_{H \subsetneq F} H(M).$$

如果 F不是 M-冗余的，我们就称 F是 M-不可约的。

定义 3.2。对于每个 $G \in \mathcal{C}_{+1}$，我们记

$$X_G(M) = G(M) \setminus \cup_{G' \subsetneq G} G'(M).$$

因此，当且仅当 $X_G(M) = \varnothing$时， G是 M-冗余的。

定义 3.3。对于每个 $H \subseteq F$，我们定义 $L_H = \sum_{v \in X_G(M)} u_v \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(\mathbf{1}, KF(M))$

引理 3.4。有

$$H(M) = \bigsqcup_{G \subseteq H} X_G(M).$$

证明。我们首先注意到，对于 $G_1 \neq G_2$，有 $X_{G_1}(M) \cap X_{G_2}(M) = \varnothing$。事实上，如果 $v \in X_{G_1}(M)$ 且 $v \in X_{G_2}(M)$，则 $v \in G_1(M) \cap G_2(M) = (G_1 \cap G_2)(M)$。但是 $G_1 \cap G_2 \subsetneq G_1$、$G_2$，这意味着$v \notin X_{G_1}(M)$ 且 $v \notin X_{G_2}(M)$，矛盾。

显然，对于每个 $G \subseteq H$，都有 $X_G(M) \subseteq H(M)$。对于 $v \in H(M)$，记作 $Y_v = \{G | v \in G(M)\}$。那么 Y_v 按包含关系构成偏序，且其中恰有一个极小元。事实上，若 G_1 和 G_2 是 Y_v中的两个极小函子，则 $G_1 \cap G_2 \in Y_v$ 是极小的，并且 $G_1 \cap G_2 \subseteq G_1$、$G_2$。令 G 为 Y_v中唯一的极小元。于是有 $v \in G(M) \setminus \bigcup_{G' \subsetneq G} G'(M) = X_G(M)$，这就推出了该引理。□

推论 3.5. 对于 $H \subseteq F$，有 $T_H = \sum_{G \subseteq H} L_G$。

证明。利用前一个引理中的等式，我们得到

$$T_H = \sum_{v \in H(M)} u_v = \sum_{G \subseteq H} \sum_{v \in X_G(M)} u_v = \sum_{G \subseteq H} L_G.$$

□

最后一个推论告诉我们如何将元素 T_H 写成元素 L_G的线性组合。我们也可以反过来。

引理 3.6. 设 H 是一个函子，且 H_1，……，H_r 是 H的极大真子函子。则有

$$L_H = T_H - \sum_i T_{H_i} + \sum_{i_1<i_2} T_{H_{i_1} \cap H_{i_2}} - \sum_{i_1<i_2<i_3} T_{H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap H_{i_3}} + \cdots + (-1)^r T_{H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_r}. \tag{3.7}$$

证明。 </style>则有 $X_H(M) = H(M)\backslash\bigcup_{H'\subsetneq H} H'(M) = H(M)\backslash\bigcup_{i=1}^{r} H_i(M)$。应用容斥原理即可得到该等式。□

注记 3.8. 我们也可以用 H的所有子函子来表述上一个引理，而不只是极大子函子。不过，只使用极大子函子会带来巨大优势。事实上，对于每个$i_1 < i_2 < \cdots < i_s$，都有 $H/(H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_s})$ 是简单函子的直和。这使我们能够将第 4 节中的一些计算转化为我们熟悉的一般线性群 $GL_n(\mathbb{F}_q)$的领域，因为半单函子的任意自同构群都具有 $\prod_i GL_{n_i}(\mathbb{F}_{q_i})$ 的形式。

命题 3.9. 如果 H 是 M-冗余的，那么 $L_H = 0$。对于 H M-不可约的情形，集合 $\{L_H\}$ 是$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(\mathbf{1}, KF(M))$的一组基。

证明. 推论 3.5 表明，我们可以将元素 T_H 写成元素 L_H的线性组合。这意味着 $\{L_H\}_{H\subseteq F}$ 张成 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(\mathbf{1}, KF(M))$。如果 H 是 M-冗余的，那么 $X_H(M) = \varnothing$，根据定义可得 $L_H = 0$。另一方面，对于一个 M-不可约的函子 H， L_H 的支集恰好是$X_H(M)$。由于根据引理 3.4，对于 $H \neq H'$ 有 $X_H(M) \cap X_{H'}(M) = \varnothing$，所以集合 $\{L_H\}$ 是线性无关的，其中 H 是 F 的一个 M-不可约子函子，由此我们得到 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(\mathbf{1}, KF(M))$的一组基。□

由此可见， M-冗余这一概念对于理解同态空间和自同态代数至关重要。下一个命题给出了函子为 M-冗余的一个显式判据。

命题 3.10. 假设 F 有一个极小表示 $(X \xrightarrow{f} Y)$。那么，当且仅当 X不是 M的直和项时， F 才是 M-冗余的。

证明。记 $p : \mathrm{Hom}_R(X, -) \to F$。先假设 F是 M-不可约冗余的。取 $\nu \in F(M)\backslash\bigcup_{G\subsetneq F} G(M)$。取 $\varphi \in p_M^{-1}(\nu)$。则 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(X, M)$。特别地，它诱导出一个自然变换 $\varphi^* : \mathrm{Hom}_R(M, -) \to \mathrm{Hom}_R(X, -)$。于是我们有 $\mathrm{Im}(p\varphi^*) = G$ 是 F的子函子。成立的是 $p\varphi^*(\mathrm{Id}_M) = p(\varphi) = \nu \in G(M)$。但是，对于任何 H 为 F的真子函子的 $H(M)$， ν都不包含在其中，因此 $G = F$。这意味着 $\mathrm{Im}(p\varphi^*) = F$，所以 $p\varphi^*$ 是满射。由于 $(X \xrightarrow{f} Y)$ 是 F的极小表示，这意味着 $\varphi^* : \mathrm{Hom}(M, -) \to \mathrm{Hom}_R(X, -)$ 是满射。特别地， $\varphi^* : \mathrm{Hom}_R(M, X) \to \mathrm{Hom}_R(X, X)$ 是满射，因此存在一个 $\psi : M \to X$ 使得 $\varphi^*(\psi) = \psi\varphi = \mathrm{Id}_X$。也就是说—— X 是 M的直和项。

反过来，假设 X 是 M 的直和项，且 F 是 M-冗余的。设 $\varphi : X \to M$ 是一个分裂单射。于是 $p(\varphi) \in F(M)$，并且由于 F 是 M-冗余的，存在一个真子函子 $G \subsetneq F$，使得 $p(\varphi) \in G(M)$。令 $\mathrm{Hom}_R(Z, -)$ 为 G 的投射覆盖。我们得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Hom}_R(Z, -) & \xrightarrow{p'} & G \\ & & \downarrow{\scriptstyle g^*} & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_R(Y, -) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_R(X, -) & \xrightarrow{p} & F \end{array}.$$

设 $\psi \in p'^{-1}(p(\varphi))$。则有 $p(g^*(\psi)) = p(\psi \circ g) = p(\varphi)$，这意味着 $\psi g - \varphi \in \mathrm{Ker}(p_M)$。但 $\mathrm{Ker}(p_M)$ 恰好包含那些在 f 上分裂的映射 $X \to M$，因此对某个 $\rho : Y \to M$，我们可以写成 $\psi g = \varphi + \rho f$。由于 φ 是一个分裂单射，存在映射 $\nu : M \to X$，使得 $\nu\varphi = \mathrm{Id}_X$。于是得到等式

$$\nu\psi g = \mathrm{Id}_X + \nu\rho f.$$

由于 $(X \xrightarrow{f} Y)$ 是 F 的极小表示，映射 $\nu\rho f$ 必为幂零映射，因此 $\mathrm{Id}_X + \nu\rho f$ 可逆。于是我们得到

$$(\mathrm{Id}_X + \nu\rho f)^{-1}\nu\psi g = \mathrm{Id}_X.$$

这意味着 $g : X \to Z$ 是一个分裂单射，也就是说 g^* 是满射。但通过追踪图表可知，这意味着包含映射 $G \to F$ 是满射，这与 G 是 F的真子函子这一事实矛盾。□

下面的推论可由该命题的证明立即得出：

推论 3.11. 设 M, F, X 和 Y 如上所述。则 $X_F(M) = \{p_M(\varphi) | \varphi : X \to M$ 是分裂单射$\}$。

现在考虑空间 $\mathrm{End}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KF(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(\mathbf{1}, KF(M) \otimes KF(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(\mathbf{1}, K(F \oplus F)(M))$。该空间由 $\{T_H\}_{H \subseteq F \oplus F}$ 张成。$KF(M)$ 的子表示 $KF(M)$ 是特征的，因此限制给出一个代数同态

$$\Theta_F(M) : \mathrm{End}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KF(M)) \to \mathrm{End}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(\overline{KF(M)}).$$

由于 $\mathrm{Rep}(\mathrm{Aut}_R(M))$ 是半单的，这个映射是满射。

定义 3.12. 我们称函子 $H \subseteq F \oplus F$ 是 F-紧的，若 pr_1 和 $pr_2 : H \to F$ 都是同构。此类函子 H 与 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的元素一一对应，其中 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 对应于函子

$$H_\alpha = \mathrm{Im}(F \xrightarrow{\mathrm{Id}_F \oplus \alpha} F \oplus F).$$

以下引理是 [CMO4] 中命题 3.3 的推论。

引理 3.13。 $\Theta_F(M)$ 的核由元素 T_H 张成，其中 H 不是 F-紧的。

定义 3.14。 我们将 T_H 和 L_H 分别记作 $\overline{T_H}$ 和 L_H 在 $\mathrm{End}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KF(M))$ 中的像。

我们总结如下：

命题 3.15。 空间 $\mathrm{End}(KF(M))$ 由元素 $\{T_H\}_{H \subseteq F \oplus F}$ 张成。元素 T_H 之间的所有线性关系如下：

- $\overline{T_H} = 0$ 若 H 不是 F-紧的。
- $L_H = 0$ 若 H 是 M-冗余的。

证明。$\mathrm{End}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KF(M))$ 中元素 T_H 之间的线性关系由 $L_H = 0$ 给出，当且仅当 H 是 M-冗余的。$\mathrm{End}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KF(M)) \to \mathrm{End}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KF(M))$ 的核包含所有满足 H 不是 F-紧的 $\overline{T_H}$。这就证明了该命题。□

命题中的第一类关系很容易理解。我们给出空间 $\mathrm{End}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KF(M))$ 的一组线性生成元，而第一类关系说明其中一些生成元为零。第二类关系则更难处理，因为我们需要理解它们如何影响函子 T_H H 满足 F-紧条件时的元素 $H \subseteq F \oplus F$。现在设 3.7 为任意子函子。回顾方程：

$$L_H = T_H - \sum_i T_{H_i} + \sum_{i_1 < i_2} T_{H_{i_1} \cap H_{i_2}} - \sum_{i_1 < i_2 < i_3} T_{H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap H_{i_3}} + \cdots + (-1)^r T_{H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_r}. \tag{3.16}$$

其中 H_1, ..., H_r 是 H 的极大真子函子。形如 $H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k}$ 的函子恰好是 H' 的子函子 H，且满足 H/H' 是半单的。因此我们看到，F-紧函子出现在方程 3.16 当且仅当 H 包含一个 F-紧子函子 H'，且 H/H' 是半单的。假设确实如此。由于 H' 是 F-紧的，我们可以写成 $H' = H_\alpha$，其中 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$。我们断言如下：

引理 3.17. 函子 H 可分解为直和 $H = H_\alpha \oplus G$，其中 $G \subseteq 0 \oplus F$。

证明。包含 $H_\alpha \to H$ 由 $(1, \alpha)pr_1 : H \to F \to F \oplus F$ 分裂。此映射的核为 $(0 \oplus F) \cap H = G$。□

引理 3.18. 假设 F 有一个极小表示 $(X \xrightarrow{f} Y)$。如果 X 不是 M 的直和项，那么 $KF(M) = 0$。

注记 3.19. 这为 [CMO4] 中的引理 4.7 提供了一种新的证明。

证明。假设引理的条件成立。考虑 $H_{Id_F} = \Delta(F) \subseteq F \oplus F$。像每个 F-紧函子一样， $H_{Id_F} \cong F$。由于 X不是 M的直和项，命题 3.10 告诉我们， F 是 M-冗余的。因此，由命题 3.9 可得 $L_{H_\alpha} = 0$。但是，$L_{H_{Id_F}}$ 是若干个 T_G的交错和，其中 $G \subseteq H_{Id_F}$。由于和中唯一既是 F-紧的、又出现的 $G \subseteq H_{Id_F}$ 是其自身，即 H_{Id_F}，而且对于 G， $T_G = 0$ 并非 F-紧，因此我们得到 $T_{H_{Id_F}} = 0$。这意味着代数 $\mathrm{End}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(KF(M))$ 的恒等元等于零，而这只有在 $KF(M) = 0$时才可能发生。□

从现在起，假设 F 有一个表示 $(X \xrightarrow{f} Y)$，且 X 是 M的一个直和项。记作$M = X \oplus Z$。设 H 是一个包含某个 H_α的函子。那么我们可以写成 $H = H_\alpha \oplus G$。假设 G 有一个极小表示 $(X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1)$。

引理 3.20. 函子 H 是 M-冗余的，当且仅当函子 G 是 Z-冗余的。

证明. 函子 H 分解为 $H_\alpha \oplus G$。函子的直和的极小解是其极小解的直和。由于 $H_\alpha \cong F$， H 有如下形式的极小解： $(X \oplus X_1 \xrightarrow{f \oplus f_1} Y \oplus Y_1)$。根据命题3.10 H 是 M-冗余的，当且仅当 $X \oplus X_1$ 不是 $M = X \oplus Z$的直和项。由于范畴 $\mathcal{C}$ 是 Krull-Schmidt 范畴，这等价于 X_1 不是 Z的直和项；根据命题3.10 这等价于 G 是 Z-冗余的。□

总而言之，我们看到，元素 T_H 与 H 之间，在 F-紧函子中存在的唯一非零线性关系，来自形如 $H_\alpha \oplus (0 \oplus G)$的函子，其中 $G \subseteq F$ 是一个 Z-冗余半单函子。下一节将明确找出这些线性关系。

4. 来自 M-冗余函子的具体线性关系及主定理的证明

固定 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 和 $G \subseteq F$，使得 G 是半单且 Z-冗余的。记作 $H = H_\alpha \oplus (0 \oplus G)$。于是我们知道 $L_H = 0$，并且，对于 F-紧函子 H， T_H 之间的所有线性关系都将来自这类关系。本节将明确用 T_H 表示 F-紧函子 H 中的 L_H。

记 $H_1, \ldots H_r$ 为 H的极大真子函子。回想一下，我们有

$$L_H = T_H - \sum_i T_{H_i} + \sum_{i_1<i_2} T_{H_1 \cap H_2} - \cdots + (-1)^r T_{H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_r}.$$

我们知道 $T_H = 0$ 除非 H' 是 F-紧的。因此我们可以写成 $L_H = \sum_{\beta \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)} a_\beta T_{H_\beta}$，其中

$$a_\beta = \delta_{H_\beta, H} - \sum_i \delta_{H_\beta, H_i} + \cdots + (-1)^r \delta_{H_\beta, H_1 \cap \cdots \cap H_r}. \tag{4.1}$$

因此，我们需要理解这些系数。

引理 4.2. 对于 $\beta \in Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$， 当且仅当 $Im(\alpha - \beta) \subseteq G$时， $H_\beta \subseteq H$ 成立。若此条件成立，则 $H = H_\beta \oplus (0 \oplus G)$。

证明。 首先假设 $H_\beta \subseteq H$。我们有 $H_\alpha \subseteq H$。由于 $H_\alpha = \mathrm{Im}(1_F, \alpha) : F \to F \oplus F$且 $H_\beta = \mathrm{Im}(1_F, \beta) : F \to F \oplus F$, 这两个态射之差的像也包含在 H中。但它们之差恰好是$(0, \alpha - \beta)$。由于 $H \cap (0 \oplus F) = 0 \oplus G$，我们得到 $\mathrm{Im}(\alpha - \beta) \subseteq G$， 如所需。

这个论证反向也成立：若 $\mathrm{Im}(\alpha - \beta) \subseteq G$ 则 $\mathrm{Im}(0, \beta - \alpha) \subseteq 0 \oplus G \subseteq H$且 $H_\alpha = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_F, \alpha) \subseteq H$。于是这些态射之和为 $(1_F, \beta)$，其像为 H_β。最后一个断言显然成立，因为任何包含一个 F-紧函子 H' 的函子 H 都分解为 $H' \oplus (H \cap (0 \oplus F))$。□

现在假设 $H_{Id_F} \subseteq H$。

引理 4.3. 若 H_β， $H_\gamma \subseteq H$ 则 $a_\beta = a_\gamma$。

证明。只需考虑 $\gamma = \mathrm{Id}_F$ 的情形。根据上一个引理，有 $H = H_{\mathrm{Id}_F} \oplus (0 \oplus G) \backsim H_\beta \oplus (0 \oplus G)$。此外，$\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_F - \beta) \subseteq G$ 成立，因此 G 在 β 的作用下保持稳定。设 $\beta = (\mathrm{Id}_F, \beta)$。我们有

$$\widetilde{\beta}(H) = \widetilde{\beta}(H_{1_F}) \oplus \widetilde{\beta}(0 \oplus G) = \widetilde{\beta}(H_{1_F}) \oplus (0 \oplus \beta(G)) = H_\beta \oplus (0 \oplus G) = H.$$

这意味着 β 稳定了函子 H。因此，自同构 β 置换了 H的极大真子函子H_i。交错和中 $T_{H_{\mathrm{Id}_F}}$ 的系数 a_{Id_F}

$$T_H - \sum_i T_{H_i} + \sum_{i_1<i_2} T_{H_{i_1} \cap H_{i_2}} + \cdots + (-1)^r T_{H_1 \cap \cdots \cap H_r}$$

等于交错和中 T_{H_β} 的系数 a_β

$$T_{\widetilde{\beta}(H)} - \sum_i T_{\widetilde{\beta}(H_i)} + \sum_{i_1<i_2} T_{\widetilde{\beta}(H_{i_1}) \cap \widetilde{\beta}(H_{i_2})} + \cdots + (-1)^r T_{\widetilde{\beta}(H_1) \cap \cdots \cap \widetilde{\beta}(H_r)}.$$

但这是同一个和，因此我们得到 $a_\beta = a_{1_F}$ 确实如此。 □

由此可见，所有系数 a_β 都相等。更困难的部分是证明它们也都非零。我们将通过详细分析 H/H_{Id_F} 的子模格来完成这一点。首先介绍一些辅助代数。

定义 4.4。设 X 是阿贝尔范畴中的一个对象。假设 X 只有有限多个子对象。记

$$B_X = \bigoplus_{Y \subseteq X} K\chi_Y.$$

我们在 B_X 上定义交换代数结构如下

$$\chi_{Y_1} \cdot \chi_{Y_2} = \chi_{Y_1 \cap Y_2}.$$

元素 χ_X 是代数 B_X的单位元。

现在我们使用 L_H 在等式 3.7中的表达式。我们得到，系数 a_{Id_F} 等于$\chi_{H_{\mathrm{Id}_F}}$ 在交错和中的系数

$$\chi_H - \sum_i \chi_{H_i} + \sum_{i_1<i_2} \chi_{H_1 \cap H_2} - \cdots + (-1)^r \chi_{H_1 \cap \cdots \cap H_r} = \prod_i (1 - \chi_{H_i}),$$

其中 H_1、.....、H_r是 H的极大子函子，最后一个等式在代数 B_H中成立。下一个引理的证明是直接的。

引理 4.5. *(1)* 代数 B_X 仅取决于 X的子模格的同构类型。*(2)* 若 $Y \subseteq X$，则有代数嵌入

$$B_{X/Y} \to B_X$$

它将 χ_Z 映到 $\chi_{p^{-1}(Z)}$，其中 $p : X \to X/Y$ 是典范投影。像恰好包含满足 $Y \subseteq Z$的元素 χ_Z。*(3)* 若 $G \subseteq \mathrm{Aut}(X)$，则 G 按公式 $g \cdot \chi_Y = \chi_{g(Y)}$作用于 B_X。

命题 4.6。假设 $H = H_{Id_F} \oplus (0 \oplus G)$，其中 $G \subseteq F$ 是半单的，且 Z-冗余。那么系数 a_{Id_F} 在方程 *4.1* 中非零。

证明。根据引理 4.5之前的讨论，我们需要证明 $\chi_{H_{\mathrm{Id}_F}}$ 在表达式 $\prod_i (1 - \chi_{H_i})$ 中的系数非零。根据引理 4.5 的第二部分，只需证明 χ_0 在表达式 $\prod_i (1 - \chi_{H_i/H_{\mathrm{Id}_F}})$ 中的系数在 $B_{H/H_{\mathrm{Id}_F}} \cong B_G$ 中非零。回想一下，函子 G 是半单的。记

$$G = \bigoplus_{j=1}^{k} S_j^{b_j},$$

其中 S_j 是两两不同构的简单函子。记 $F_j = \mathrm{End}(S_j)$。由于 S_j'是简单的，对于每个 j， F_j 都是一个域。定义一个交换代数

$$A = \bigoplus_j F_j e_j,$$

其中 e_j 是两两正交的幂等元。 $N = \bigoplus_j F_j^{b_j}$ 自然具有 A-模结构。此外， $\mathrm{End}_A(N) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{C}_{+1}}(G) \cong \bigoplus_j M_{b_j}(F_j)$，并且 N 的 A-子模与 G的子函子之间存在一一对应关系，且保持序关系。事实上， N 的每个 A-子模都具有 eN 的形式，其中 $e \in$ 是某个幂等元，且属于 $\mathrm{End}_A(N)$。对应的子函子由 eG给出，这里我们直接使用恒等式 $\mathrm{End}_A(N) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{C}_{+1}}(G)$。根据引理 4.5 的第一部分，只需证明表达式 $\prod_i(1-\chi_{N_i})$ 中 χ_0 的系数非零，其中 $\{N_i\}$ 是 N的所有极大真 A-子模的集合。

A 中的正交幂等元 e_j 导出一个张量积分解

$$B_N \cong \bigotimes_j B_{e_j N}. \tag{4.7}$$

同构 $\bigotimes_j B_{e_j N} \to B_N$ 由引理 4.5 第 (2) 部分所述映射 $B_{e_j N} \to B_N$ 的乘积再乘以乘法给出。若 $N' \subseteq N$ 是一个极大子模，那么 N/N' 必为单模，因此同构于某个 j对应的 S_j 。由此可知，对于所有 $j' \neq j$， N' 都包含 $e_{j'}N$ ；事实上，它是 e_jN 的一个极大子模在投影 $N \to e_jN$下的原像。于是，在同构 4.7 下，乘积 $\prod_i(1-\chi_{N_i})$ 对应于 $\prod_j\prod_i(1-\chi_{N_{ji}})$，其中 N_{ji} 是 e_jN的极大子模。因此，只需证明，对于某个特定的j，乘积 $\prod_i(1-\chi_{N_{ji}})$ 中 χ_0 的系数非零。换言之，我们可以假设出现在 G中的直和项的同构类型只有一种。这意味着代数 A 就是域 $\mathbb{F}_q$，而 N 就是某个 $b \in \mathbb{N}$对应的 $\mathbb{F}_q^b$ 。此时，子模就是 $\mathbb{F}_q^b$的 $\mathbb{F}_q$-向量子空间。

因此，我们归结为以下情形：考虑元素

$$P_b = \prod_{\substack{V \subseteq \mathbb{F}_q^b \\ \dim(V)=b-1}} (1-\chi_V)$$

在代数 $B_{\mathbb{F}_q^b}$ 中。我们要证明 P_b 中 χ_0 的系数非零。设 $P_b = \sum_{V\subseteq\mathbb{F}_q^b} a_V\chi_V$。首先断言， a_V 仅取决于 V 的维数。这很容易由以下事实得出：群 $\mathrm{GL}_b(\mathbb{F}_q)$ 在 $\mathbb{F}_q^b$ 的给定维数的向量子空间上具有传递作用，并且稳定 P_b。因此，我们可以写成

$$P_b = \sum_{m=0}^{b} a_{m,b} \sum_{\substack{V \subseteq \mathbb{F}_q^b \\ \dim(V)=m}} \chi_V. \tag{4.8}$$

接下来，我们断言 $a_{m,\,b} = a_{0,\,b-m}$。为此，我们固定一个维数为 m 的向量空间 $W \subseteq \mathbb{F}_q^b$ 。然后写成

$$P_b = \prod_{V\in X_1}(1-\chi_V)\cdot\prod_{V\in X_2}(1-\chi_V),$$

其中 $X_1 = \{V | W \subseteq V \subseteq \mathbb{F}_q^b,\ \dim(V) = b-1\}$，且 $X_2 = \{V | W \nsubseteq V \subseteq \mathbb{F}_q^b,\ \dim(V) = b-1\}$。那么， P 中 χ_W 的系数就是 $\prod_{V\in X_1}(1-\chi_V)$ 中 χ_W 的系数。但这恰好是 P_{m-b} 在映射 $B_{\mathbb{F}_q^{m-b}} = B_{\mathbb{F}_q^m/W} \to B_{\mathbb{F}_q^m}$ 作用下在 $B_{\mathbb{F}_q^b}$ 中的像。这确实说明 $a_{m,\,b} = a_{0,\,m-b}$。今后我们将记作$a_m = a_{0,\,m}$。

考虑 $m = 0$ 和 $m = 1$ 的情形，我们得到 $a_0 = 1$ 和 $a_1 = -1$。回顾一下， $\mathbb{F}_q^b$ 中 m维子空间的数量由 q二项式系数给出

$$\frac{(q^b-1)(q^b-q)\cdots(q^b-q^{m-1})}{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{m-1})} = \binom{b}{m}_q.$$

应用环同态 $B_{\mathbb{F}_q^b} \to K$，它将所有 χ_V 映射为 1，对每个 $V \subseteq \mathbb{F}_q^b$ 映射到方程 4.8。我们得到

$$\sum_{m=0}^{b} a_m \binom{b}{b-m}_q = \sum_{m=0}^{b} a_m \binom{b}{m}_q = 0,$$

这给出了数列 a_m 的线性递推（这里我们用到了这样一个事实：$\binom{b}{m}_q = \binom{b}{b-m}_q$）。为了实际求出 a_m，我们现在使用 q 二项式公式，该公式指出：

$$\prod_{k=0}^{b-1}(1+q^k t) = \sum_{k=0}^{b} q^{k(k-1)/2}\binom{b}{k}_q t^k.$$

代入 $t=-1$ 得

$$0 = \sum_{k=0}^{b} q^{k(k-1)/2}\binom{b}{k}_q (-1)^k.$$

这表明 $a_m = q^{m(m-1)/2}(-1)^m$ 满足上述线性递推。因此，$a_m \neq 0$，如所求。□

现在我们推导一些推论。

定义 4.9。对于子函子 $G \subseteq F$，我们定义子群

$$P_G = \{\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) | \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_F) \subseteq G\}.$$

注记 4.10。若 $F = G \oplus G'$，那么我们可以将 P_G 视为所有具有分块对角形式的自同构所构成的群

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

这就是我们选择术语 P_G的原因，因为它与抛物子群有关。

现在，我们已经看到，若 $H = H_{\mathrm{Id}_F} \oplus (0 \oplus G)$ 是一个 M-冗余函子，且 G 半单，那么除非相差非零标量 a_{Id_F}，否则有

$$\overline{L_H} = \sum_{\substack{\beta \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) \\ H_\beta \subseteq H}} \overline{T_{H_\beta}}.$$

由引理4.2 可得

$$\overline{L_H} = \sum_{\beta \in P_G} \overline{T_{H_\beta}}.$$

若 $H = H_\alpha \oplus (0, G)$ 是一个 M-冗余函子，且 G-半单并且是 Z-冗余函子，且 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$，那么我们可以应用将 H_α 映到 H_{Id_F} 的自同构 $(\alpha, 1)$，从而将问题化归到 $\alpha = \mathrm{Id}_F$的情形。事实上，在这种情况下，我们将得到

$$\overline{L_H} = \sum_{\beta \in P_G} \overline{T_{H_\beta} T_{H_\alpha}}.$$

注意，它成立 可知，对于 $g \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$，有 $gP_Gg^{-1} = P_{g(G)}$。我们将这些内容总结如下 g:

命题 4.11. 假设 $M = X \oplus Z$，并且 F 具有极小表示 $(X \xrightarrow{f} Y)$。考虑同态

$$\Phi : K\mathit{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) \to \mathrm{End}_{\mathrm{Aut}_R(M)}(\overline{KF(M)})$$
$$\alpha \mapsto T_{H_\alpha}.$$

那么 Φ 的核是由幂等元 e_{P_G}生成的双边理想，其中 $G \subseteq F$是一个半单的Z-冗余子函子。

最后，我们可以陈述主定理：

定理 4.12. 假设 $M = X \oplus Z$，且 F 具有极小表示 $(X \xrightarrow{f} Y)$。$Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的不可约表示 V 是 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的某个不可约表示的函子变形，当且仅当满足以下条件：每当 $G \subseteq F$ 是一个具有投射覆盖 $\mathrm{Hom}(Z_G, -)$ 的半单子函子，且 Z_G 不是 Z 的直和项时，我们都有 $\mathrm{Hom}_{P_G}(\mathbf{1}, V) = 0$。

证明。 在半单代数 $\bigoplus \mathrm{End}(V_i)$ 中，由幂等元 e 生成的双边理想恰好包含那些满足 $e \cdot V_i \neq 0$ 的 $\mathrm{End}(V_i)$ 的直和。但对于 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的不可约表示 V，当且仅当 $\mathrm{Hom}_{P_G}(\mathbf{1}, V) = 0$ 时，$e_{P_G} \cdot V = 0$。□

推论 4.13。 设 $M = X \oplus Z$，且令 $(X \xrightarrow{f} Y)$ 为 F 的极小解。则以下条件等价：

(1) $Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的每个不可约表示，都是 $Aut\mathrm{Aut}_R(M)$ 的某个不可约表示的函子变形。*(2)* $Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的平凡表示 $\mathbf{1}$，是某个不可约表示$\mathrm{Aut}_R(M)$ 的函子变形。*(3)* 如果 $\mathrm{Hom}_R(X_1, -)$ 是 $soc(F)$ 的投射覆盖，那么 X_1 是 Z 的一个直和项。

证明。 显然，1 蕴含 2。若存在一个半单函子 $G \subseteq F$，其具有投射覆盖 $\mathrm{Hom}_R(Z_G, -)$，使得 Z_G 不是 Z 的直和项，那么根据定理，$\mathbf{1}$ 就不是 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的不可约表示的函子变形。因此，如果 $\mathbf{1}$ 是 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的某个表示的函子变形，这种情况就不可能发生，从而任何出现在任意半单子函子$G \subseteq F$的投射覆盖中的模 X_2 都必须是 Z的直和项。特别地，这对 $G = soc(F)$ 成立，由此可知 2 蕴含 3。最后，若 3 成立，则定理的条件显然都满足，因此 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的每个不可约表示都是 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的某个不可约表示的函子变形。□

我们记录下面这个引理，它将有助于分析下一节中的一些示例。

引理 4.14. 若 $G_1 \subseteq G_2$ 是半单函子，则 $P_{G_1} \subseteq P_{G_2}$。因此，应用定理 *4.12*时，我们只需考虑 $\{G | Z_G$ 不是 $Z\}$的直和项的情形下，关于包含关系极小的函子。

证明。 子群 P_{G_1} 包含所有形如 $\varphi = 1 + \psi$ 的自同构，其中 $\psi : F \to G_1 \to F$。由于$G_1 \subseteq G_2$，这类自同构显然也包含在 P_{G_2} 中。这意味着，如果 $\mathrm{Hom}_{P_{G_1}}(\mathbf{1}, V) = 0$，那么 $\mathrm{Hom}_{P_{G_2}}(\mathbf{1}, V) = 0$，结论即得。□

5. 示例

5.1. 群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$。 设 $R = \mathbb{F}_q$ 是含有 q 个元素的有限域，且 $M = \mathbb{F}_q^n$。有 $\mathrm{Aut}_R(M) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$。 $\mathcal{C}_{+1}$ 中的函子均具有如下形式： $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q^m, -)$，并且有等价 $\mathcal{C}_{+1} \cong \mathcal{C} = \mathrm{Vect}^{\mathbb{F}_q}$。对于 $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q^m, -)$，有 $X = \mathbb{F}_q^m$；并且 X 是M 的直和项，当且仅当 $m \leqslant n$。此时，我们记作 $M = X \oplus Z$，其中 $Z = \mathbb{F}_q^{n-m}$。

接下来，我们注意到， F 的所有子对象都是半单的。 F 的一个子对象 G 同构于某个 $k \leqslant m$对应的 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q^k, -)$；如果 $G_1 \cong G_2 \subseteq F$ 是两个同构的子函子，那么它们在 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) \cong \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q)$的作用下共轭。当且仅当 $k > n - m$时， $\mathbb{F}_q^k$ 不是 Z 的直和项。由于$k \leqslant m$， 只有在 $n - m < m$ 或 $m > n/2$时，这个不等式才可能成立。因此我们看到，若 $m \leqslant n/2$， 则 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q)$ 的每个表示都来自 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$的一个表示的函子变形。若 $m > n/2$，则根据引理 4.14，只需考虑函子 $G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q^{n-m+1}, -)$，因为 $\mathbb{F}_q^{n-m+1}$是一个不是 Z直和项的极小$\mathbb{F}_q$-向量空间。以下记 $k = n - m + 1$。

我们有

$$P_G = \{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} | A \in M_{k\times k}(\mathbb{F}_q)\, B \in M_{k,m-k}(\mathbb{F}_q)\} \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F).$$

为了理解哪些 $V\,\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的表示满足 $\mathrm{Hom}_{P_G}(\mathbf{1},\ V)=0$，我们回顾泽列文斯基利用正自伴 Hopf 代数对 GL 的不可约表示所作的分类$_n(\mathbb{F}_q)$，出自 [Z1]。

撰写

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{a\geqslant 0}K_0(GL_a(\mathbb{F}_q)).$$

那么，$\mathcal{H}$ 具有正自伴 Hopf 代数（或 PSH 代数）的结构，其中乘法是分次的，由 Harish-Chandra（抛物）诱导给出

$$K_0(GL_a(\mathbb{F}_q))\otimes K_0(GL_b(\mathbb{F}_q))\cong K_0(GL_a(\mathbb{F}_q)\times GL_b(\mathbb{F}_q))\overset{inf}{\to}K_0(P_{a,b})\overset{Ind}{\to}K_0(GL_{a+b}(\mathbb{F}_q)),$$

而余乘法是其对偶算子，由 Harish-Chandra（抛物）限制给出

$$K_0(GL_{a+b}(\mathbb{F}_q))\overset{res}{\to}K_0(P_{a,b})\overset{inv_{U_{a,b}}}{\to}K_0(GL_a(\mathbb{F}_q)\times GL_b(\mathbb{F}_q))\cong K_0(GL_a(\mathbb{F}_q))\otimes K_0(GL_b(\mathbb{F}_q)).$$

Here

$$P_{a,b}=\{\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}|A\in M_{a\times a}(\mathbb{F}_q),B\in M_{a\times b}(\mathbb{F}_q),C\in M_{b\times b}(\mathbb{F}_q)\}$$

and

$$U_{a,b}=\{\begin{pmatrix}I & B\\ 0 & I\end{pmatrix}\}\subseteq P_{a,b}$$

是自然投影的核

$$P_{a,b}\to GL_a(\mathbb{F}_q)\times GL_b(\mathbb{F}_q)$$

$$\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}\mapsto(A,C).$$

注意，群 P_G 是 $P_{k,\ m-k}$ 中所有满足 $C=I$的矩阵所构成的子群。

代数 $\mathcal{H}$ 有一个自然的 $\mathbb{Z}$-基，由不可约表示给出。正自伴这个术语指的是，相对于此基的所有结构常数都是非负整数，并且乘法与余乘法互为对偶。泽列文斯基证明，存在唯一的（除对分次进行重标度外）泛 PSH 代数，而且每个 PSH 代数都以唯一的方式分解为泛 PSH 代数的张量积。泛 PSH 代数是 $Zel=\bigoplus_{a\geqslant 0}K_0(S_a)$，其中乘法和余乘法分别来自诱导和限制。由于$S_a$ 的不可约表示由 a 的分拆参数化，泛 PSH 代数有一个基 w_λ，其中 $\lambda\vdash a$，对某个 a成立。泽列文斯基证明，$Zel\cong\mathbb{Z}[x_1、\ x_2、\ \ldots]$。这里 $x_a=w_{(a)}$，其中 $(a)\vdash a$ 是分拆 $a=a$。元素 x_a 对应于 S_a的平凡表示。元素 x_1 的余乘法由$\Delta(x_c)=\sum_{a+b=c}x_a\otimes x_b$给出。

回到代数 $\mathcal{H}$，我们可以写成

$$\mathcal{H}=\bigotimes_{\rho}\mathcal{H}_\rho,$$

其中，张量积取遍 $GL_a(\mathbb{F}_q)$ 中所有尖点元素，适用于某个 $a>0$。这尤其意味着，对于每个 GL$_a(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示 V，我们都有唯一的分解

$$[V]=\prod_{\rho}w_{\rho,\lambda_\rho},$$

其中，对于每个尖点元素 ρ，$\lambda_\rho\vdash a_\rho$ 是某个自然数的一个分拆，而 $w_{\rho,\ \lambda_\rho}$ 是 $\mathcal{H}_\rho$ 中对应于 w_{λ_ρ} 的不可约表示，这种对应关系由同构 $H_\rho\cong Zel$ 给出。对于几乎所有 ρ，数 a_ρ 都为零

回到群 P_G，命题 $\mathrm{Hom}_{P_G}(\mathbf{1},V)\neq 0$ 等价于 $V\in\mathrm{Rep}(GL_m(\mathbb{F}_q))$ 是 $\mathbf{1}_k\cdot W$ 的一个直和项，其中某个 $W\in\mathrm{Rep}(GL_{m-k}(\mathbb{F}_q))$，而 $\mathbf{1}_k$ 表示 $GL_k(\mathbb{F}_q)$ 的平凡表示。记作 $x_k=[\mathbf{1}_k]$。那么上述命题等价于 $\langle x_k^*([V]),[W]\rangle=\langle[V],x_k\cdot[W]\rangle\neq 0$,

其中 x_k^* 是乘以 x_k 的伴随算子。由于 W 是任意的，这等价于 $x_k^*([V]) \neq 0$。现在 x_k 属于 $\mathcal{H}_\varepsilon$，其中 $\varepsilon : GL_1(\mathbb{F}_q) \to K^\times$ 是平凡表示。因此，若记作$[V] = \prod_\rho w_{\rho,\ \lambda_\rho}$，则

$$x_k^*([V]) = x_k^*(w_{\varepsilon,\lambda_\varepsilon}) \prod_{\rho \neq \varepsilon} w_{\rho,\lambda_\rho}.$$

综上所述，我们看到 $\mathrm{Hom}_{P_G}(\mathbf{1},\ V) = 0$ 当且仅当 $x_k^*(w_{\varepsilon,\ \lambda_\varepsilon}) = 0$。根据[Z1], 第 50 页上的公式，当且仅当 $(\lambda_\varepsilon)_1 < k$时，这种情况才会发生，其中 $(\lambda_\varepsilon)_1$ 表示分拆 λ第一行的长度（ [Z1] 中的公式适用于 $X^* = \sum_{k\geqslant 0} x_k^*$，但通过分次考虑，我们也能得到 x_k^* 的公式）。我们总结一下这番讨论。

命题 5.1。 不可约表示 V *of* 一般线性群$_m(\mathbb{F}_q)$ 来自对一般线性群$_n(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示进行函子变形，当且仅当满足以下条件：在分解 $[V] = \prod_\rho w_{\rho,\ \lambda_\rho}$中，有 $(\lambda_\varepsilon)_1 < n - m + 1$。

在 [CMO4] 中，我们已明确描述了 $GL_n(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示的函子变形。我们已证明，如果 $[W] = \prod_\rho w_{\rho,\mu_\rho}$，那么 W 的函子变形是 $GL_m(\mathbb{F}_q)$ 的一个表示 V，其中 $m = n - (\mu_\varepsilon)_1$ 由下式给出

$$[V] = w_{\varepsilon,\lambda_\varepsilon} \prod_{\rho \neq \varepsilon} w_{\rho,\mu_\rho},$$

其中 $\lambda_\varepsilon = ((\mu_\varepsilon)_2, (\mu_\varepsilon)_3, \cdots)$。根据上述函子变形的描述，很容易推出前述命题。

5.2. **这些群** $B_n(\mathbb{F}_q)$**.** 设 $n \geqslant 1$，并设 $\mathbb{F}_q$ 为含有 q 个元素的有限域。考虑环 $R = \mathrm{span}_{\mathbb{F}_q}\{e_{ij}\}_{i\geqslant j} \subseteq M_n(\mathbb{F}_q)$，它由 $\mathbb{F}_q$ 上的下三角矩阵构成。我们可以将 R 看作箭头 A_n 的箭图代数。

$A_n =$ 

对于 $i = 1, \ldots, n$，我们记作 $M_j = Re_{jj} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}_q}\{e_{ij}\}_{i\geqslant j}$。如果 $i < j$，则同态空间 $\mathrm{Hom}_R(M_i, M_j)$ 为零；否则它是一维的，且由下式张成

$$f_{ij} : M_i \to M_j$$
$$e_{ki} \mapsto e_{kj}$$

若 $i \geqslant j$。若 $i \leqslant j \leqslant k$，则有 $f_{jk}f_{ij} = f_{ik}$。考虑模 $M = \bigoplus_{i=1}^n M_n$。作为 R-模，有 $R = M$，并且我们可以自然地将 $\mathrm{End}_R(M) \cong R^{op}$ 认作 $\mathbb{F}_q$ 上的上三角矩阵环。$\mathrm{Aut}_R(M)$ 群是由 $\mathbb{F}_q$ 上的可逆上三角矩阵构成的群 $B_n(\mathbb{F}_q)$。记 $\mathcal{C} = \langle M_1, \ldots, M_n \rangle$。每个函子 $F \in \mathcal{C}_{+1} = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, Ab)$ 都由其在 R 上的取值确定，而范畴 $\mathcal{C}_{+1}$ 等价于所有有限 R^{op}-模构成的范畴。由箭图 A_n 的表示分类可知，不可分解函子的同构类对应于区间 $[i,j]$，其中 $i \leqslant j$。对应于 $[i,j]$ 的函子 F_{ij} 定义如下

$$F_{ij}(M_k) = \begin{cases} \mathbb{F}_q & \text{if } i \leqslant k \leqslant j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

在对象上，而在态射上，我们有

$$F_{ij}(f_{kl}) = \begin{cases} \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_q} & \text{if } i \leqslant l \leqslant k \leqslant j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

函子 F_{ij} 有极小分解

$$\mathrm{Hom}_R(M_{i-1}, 0) \xrightarrow{f_{j,i-1}^*} \mathrm{Hom}_R(M_j, -) \to F_{ij} \to 0,$$

为方便起见，我们记 $M_0 = 0$ 和 $f_{j0} = 0$。于是简单函子为 F_{ii}，而 F_{ij} 的底为F_{ii}。此外，我们可以明确描述不可分解函子之间的同态空间。我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{ij}, F_{kl}) = \begin{cases} \mathbb{F}_q & \text{if } i \leqslant k \leqslant j \leqslant l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

若 $i \leqslant k \leqslant j \leqslant l$、$k \leqslant r \leqslant l \leqslant s$ 和 $i \leqslant r \leqslant j \leqslant s$，则态射复合

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{kl}, F_{rs}) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{ij}, F_{kl}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{ij}, F_{rs})$$

由乘法 $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ 给出。在其他所有情况下，它都为零。

有了这些术语，我们来研究 Aut 的不可约表示的函子变形$_R(M) \cong B_n(\mathbb{F}_q)$。令 $F = \bigoplus F_{ij}^{x_{ij}}$ 其中整数 x_{ij}。F的投射覆盖是 $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_j M_j^{y_j}, -)$其中$y_j = \sum_i x_{ij}$。由引理 3.18 可知，若 F 出现在 Aut 表示的函子变形中$_R(M)$，则$\bigoplus_j M_j^{y_j}$ 是 $M = \bigoplus M_j$的一个直和项。因此得到以下结论：

引理5.2。若 F 出现在从 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 出发的函子变形中，则对于所有 i，j，$x_{ij} \leqslant 1$；并且对于任意给定的 j，至多存在一个指标 i 使得 $x_{ij} = 1$。

换言之，我们可以写作 $F = \bigoplus_{i=1}^{l} F_{a_i,\ b_i}$，其中 $b_i \neq b_j$ 对 $i \neq j$成立。于是，F的投射覆盖为 $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i=1}^{l} M_{b_i}, -)$。我们可以写作 $M = \bigoplus_{i=1}^{l} M_{b_i} \oplus Z$，其中 $Z = \bigoplus_{i\in S} M_i$ 对$S = [n]\backslash\{b_i\}$成立。

b_i的判据对 a_i也适用。

引理5.3。若 F 由 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的一个表示经函子变形得到，则 $a_i \neq a_j$ 对 $i \neq j$成立。

证明。假设存在 $i \neq j$ 使得 $a_i = a_j$。记作 $a = a_i = a_j$。我们有 $G := \mathrm{soc}(F_{a_i,\ b_i} \oplus F_{a_j,\ b_j}) = F_{aa} \oplus F_{aa}$。于是，$G$ 的投射覆盖为 $\mathrm{Hom}(M_a^2, -)$，而且显然 M_a^2 不是 Z的直和项。因此，我们可以检验主定理的判据。

如果不存在指标 k 使得 $b_k = a$，那么 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{+1}}(F, G) = 0$。由于 $P_G = \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) \cap (\mathrm{Id}_F + \mathrm{Hom}(F, G))$，因此有 $P_G = \{\mathrm{Id}_F\}$。但这样一来，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的每个不可约表示 V 都满足 $\mathrm{Hom}_{P_G}(\mathbf{1}, V) \neq 0$，因此 V 不会是 Aut $_R(M)$ 中某个表示的函子变形。

现在假设存在指标 k 使得 $b_k = a$。在这种情况下，M_a 是 X 的一个直和项，因此不是 Z 的直和项。我们将区分两种情况。首先假设$b_i \neq a \neq b_j$。有 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{aa}) = \mathbb{F}_q$。对于 $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$，我们将 $G_{[x:y]}$ 记为映射 $F_{aa} \xrightarrow{(x,\ y)} F_{aa} \oplus F_{aa} = G$ 的像。不难看出，这与 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ 中元素的代表元无关，并且 $G_{[x:y]}$ 与 F_{aa} 同构。群 P_G 包含所有形如 $\varphi = 1 + \psi$ 的自同构，其中 $\psi : F \twoheadrightarrow F_{a_k,a} \to G \to F$。这里的第一个态射是将 F 投影到其直和项 $F_{a_k,a}$ 上，第二个态射由某个 $(x, y) \in \mathbb{F}_q^2$ 给出，最后一个态射则是 G 到 F 中的包含。我们将这样的态射记为 $\psi = \psi_{(x,\ y)}$。由于 $b_i \neq a \neq b_j$，对于每个这样的 $\psi_{(x,y)}$，所得的 φ 都是可逆的。此外，$\psi_{(x,y)} + \psi_{(z,\ w)} = \psi_{(x+z,y+w)}$。于是我们有$(1 + \psi_{(x,y)})(1 + \psi_{(z,w)}) = 1 + \psi_{(x,y)} + \psi_{(z,w)} = 1 + \psi_{(x+z,y+w)}$，因此群 P_G 与 $\mathbb{F}_q^2$ 同构。

现在选取一个非平凡的加性特征标 $\zeta : \mathbb{F}_q \to K^\times$。那么，$\mathbb{F}_q$ 上的每个特征标都可写成 $a \mapsto \zeta(xa)$ 的形式，其中 $x \in \mathbb{F}_q$。这样，P_G 的特征标群也与 $\mathbb{F}_q^2$ 同构。我们将由 $(z,\ w) \mapsto \zeta(zx + yw)$ 给出的那个一维特征记为 $\zeta_{(x,y)} : P_G \to K^\times$，其中我们将$P_G$ 与 $\mathbb{F}_q^2$等同。

现在令 V 为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的一个不可约表示。考虑 V 到 P_G 的限制。将V 分解为不可约的 P_G-表示后，我们可以找到一个非零向量 $v \in V$，使得 $g \cdot v = \zeta_{(x,\ y)}(g)v$，其中$(x、y) \in \mathbb{F}_q^2$。若 $(x、y) = (0、0)$，则 $\mathrm{Hom}_{P_G}(\mathbf{1}, V) \neq 0$，这表明 V 不是 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的任何表示的函子变形。若 $(x、y) \neq (0、0)$，则直接计算可得，对于 $g \in G_{[y:-x]}$，$g \cdot v = v$。由此可知 $\mathrm{Hom}_{P_{G_{[y:-x]}}}(\mathbf{1}, V) \neq 0$，而且 V 也不是 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的任何表示的函子变形。

我们需要考虑的第二种情况是 $b_i = a$ 或 $b_j = a$。由于 $b_i \neq b_j$，不失一般性，我们可以假设 $b_i = a$。又因为 $b_k = a$，可知 $k = i$。子群 P_G 现在包含所有形如 $1+\psi$ 的自同构，其中 $\psi : F \twoheadrightarrow F_{a,a} \to F_{a,a} \oplus F_{a,a} = G \to F$。这里，$F_{a,a}$ 的第一个副本是 F 的直和项 $F_{a,a}$，我们将其记为 G_1。$F_{a,a}$ 的第二个副本是 F_{a,b_j} 的底，我们将其记为 G_2。与之前一样，态射 ψ 由 $(x,y) \in \mathbb{F}_q^2$ 给出。然而，在这种情况下，态射 $\varphi = 1+\psi$ 可逆当且仅当 $x \neq -1$。所得的群 P_G 与 $\mathbb{F}_q^\times \ltimes \mathbb{F}_q$ 同构。于是，群 P_{G_1} 是 P_G 的子群 $\mathbb{F}_q^\times$，而群 P_{G_2} 是 $\mathbb{F}_q$。

现在令 V 为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$的一个不可约表示。我们考虑它在 $P_G = \mathbb{F}_q^\times \ltimes \mathbb{F}_q$上的限制。我们希望证明 $\mathrm{Hom}_{P_{G_1}}(\mathbf{1}, V) \neq 0$，或者说 $\mathrm{Hom}_{P_{G_2}}(\mathbf{1}, V) \neq 0$。这将表明，$V$ 不可能是 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的某个表示经过函子变形得到的像。将 V 分解为不可约的 P_G 表示后，只需对不可约 P_G-表示证明这一结论

因此，假设 $\mathrm{Hom}_{P_{G_2}}(\mathbf{1}, V) = 0$。由于 $\mathrm{Hom}_{P_{G_2}}(\mathbf{1}, V) = 0$，必有 $\mathbb{F}_q$ 通过非平凡特征作用于 V。群 $\mathbb{F}_q^\times$ 在 $\mathbb{F}_q$的非平凡特征集合上自由作用，因此由克利福德理论可得$V = \mathrm{Ind}_{\mathbb{F}_q}^{\mathbb{F}_q^\times \ltimes \mathbb{F}_q} \tilde{V}$，其中 $\tilde{V}$ 是 $\mathbb{F}_q$的一个表示。但这意味着 V 是一个正则 $\mathbb{F}_q^\times$-表示，也就是说，特别有 $\mathrm{Hom}_{P_{G_1}}(\mathbf{1}, V) \neq 0$。

这涵盖了所有 $a_i = a_j$ 的情况，并且表明，当这种情况发生时，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的不可约表示不会作为 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的任何不可约表示的函子变形出现。□

最后两个引理告诉我们，只有形如 $F = \bigoplus_{i=1}^{l} F_{a_i,\, b_i}$ 的函子才能在 $i \neq j$ 时由 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的表示经过函子变形产生，其中 $a_i \neq a_j$ 且 $b_i \neq b_j$。因此，这类函子的投射覆盖 F为 $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i=1}^{l} M_{b_i}, -)$，而 F 的底为

$$\mathrm{soc}(F) = \bigoplus_{i=1}^{l} F_{a_i,a_i}.$$

因此我们有 $X = \bigoplus_{i=1}^{l} M_{b_i}$ 以及 $Z = \bigoplus_{s\in S} M_s$，其中 $S = [n]\backslash\{b_i\}$。因此，我们需要考虑的半单函子 G 都具有如下形式：$\bigoplus_{i\in T} F_{a_i,\, a_i}$，其中 $T \subseteq [l]$满足：存在某个 $i \in T$ 使得 $a_i \in \{b_j\}$。根据引理 4.14 我们只需考虑形如 $G = F_{a_i,\, a_i}$ 的函子，其中 $a_i = b_j$ 对某个 j成立。

引理 5.4. 若 $G = F_{a_i,\, a_i}$ 且 $a_i = b_j$，则 P_G 是 $Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的正规子群。若 $i \neq j$，则 $P_G \cong \mathbb{F}_q$；若 $i = j$，则 $P_G \cong \mathbb{F}_q^\times$。

证明。记 $F = \bigoplus_k F_{a_k,\, b_k}$。使 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{a_k,\, b_k}, F_{a_i,\, a_i}) \neq 0$ 成立的唯一 k 是 j。使 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{a_i,\, a_i}, F_{a_k,\, b_k}) \neq 0$ 成立的唯一 k 是 i。现在分两种情况讨论。

若 $i = j$，则 $a_i = b_i$。当 $k \neq i$ 时，不存在非零态射 $F_{a_i,\, b_i} \to F_{a_k,\, b_k}$ 和 $F_{a_k,\, b_k} \to F_{a_i,\, a_i}$。环 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 分解为 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{a_i,\, a_i}) \oplus \mathrm{End}_{\mathcal{C}_{+1}}(\bigoplus_{k\neq i} F_{a_k,\, b_k})$，因此

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{a_i,a_i}) \times \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(\bigoplus_{k\neq i} F_{a_k,b_k}).$$

由于 $G = F_{a_i,a_i}$ 且 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{a_i,a_i}) = \mathbb{F}_q$，我们得到 $P_G = \mathbb{F}_q^\times$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$的一个直和项，尤其是正规子群。

如果 $i \neq j$，那么 $I = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{a_j,b_j}, F_{a_i,b_i}) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{+1}}(\bigoplus_k F_{a_k,b_k}, F_{a_k,b_k}) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 是一个幂零双边理想。这是因为对于任意 $k \neq i$，任意复合$F_{a_j,b_j} \to F_{a_i,b_i} \to F_{a_k,b_k}$ 都为零，这是因为 $a_i \neq a_k$，因此 $b_j = a_i < a_k$；而对于任意 $k \neq j$，复合 $F_{a_k,b_k} \to F_{a_j,b_j} \to F_{a_i,b_i}$ 也因类似原因而为零。于是，群 P_G 与 $1+I$同构，而后者又与 $\mathbb{F}_q$同构。□

我们总结一下这次讨论

命题 5.5. 设 $F := \bigoplus_i F_{a_i,b_i}$。那么，$F$ 源自对 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的表示进行函子变形，当且仅当 $a_i \neq a_j$ 且 $b_i \neq b_j$ 对于 $i \neq j$ 成立。在这种情况下，$Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的不可约表示 V 源自

对 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的表示进行函子变形，当且仅当满足以下条件：若 $a_i = b_i$，则子群 $\mathbb{F}_q^\times \cong Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{a_i,a_i}) < Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 在 V 上的作用非平凡；若 $a_i = b_j$ 对于 $i \neq j$ 成立，则子群 $\mathbb{F}_q \cong 1 + \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{a_j,b_j}, F_{a_i,b_i})$ 在 V 上的作用非平凡。

证明。 命题中唯一的新内容是：如果确实有 $a_i \neq a_j$，且对所有 $i \neq j$ 都有 $b_i \neq b_j$，那么这样的表示就存在。不过，这很容易证明：考虑所有 P_G 子群的乘积即可；在这种情况下，该乘积仍是阿贝尔群。□

我们可以毫不费力地去掉区间 $[a_i, b_i]$ 中的单点集。对于给定的函子 $F = \bigoplus_{i=1}^m F_{a_i,b_i}$，通过重新排列区间，可以假设 $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$ 都不是单点集，而 $[a_{k+1}, b_{k+1}], \ldots, [a_m, b_m]$ 都是单点集（即 $a_{k+1} = b_{k+1}, \ldots, a_m = b_m$）。记作 $F' = \bigoplus_{i=1}^k F_{a_i,b_i}$。那么 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F') \times (\mathbb{F}_q^\times)^{m-k}$。 F 的每个不可约表示 V 都能唯一地写成 $V = V' \otimes K_{\psi_1,\ldots,\psi_{m-k}}$，其中 $\psi_j : \mathbb{F}_q \to K$ 是一个一维特征，而 $V' \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F'))$。回忆一下，$\mathrm{Irr}^{M,\,fm}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F))$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$的不可约表示，它们由 $\mathrm{Aut}_R(M)$的不可约表示经函子变形得到。上述命题给出如下结果：

推论 5.6. $V \in \mathrm{Irr}^{M,\,fm}(Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(F))$ 成立，当且仅当 $V' \in \mathrm{Irr}^{M,\,fm}(Aut_{\mathcal{C}_{+1}}(\mathrm{Irr}(F'))$，且所有特征 ψ_j 均非平凡。

推论 5.7. 设 $F' = \bigoplus_{i=1}^k F_{a_i,b_i}$，其中对所有 i，$a_i \neq b_i$。记 $l = |[n]\backslash\{a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k\}|$。则存在一一对应

$$\bigsqcup_F \mathrm{Irr}^{M,fm}(F) \cong \mathrm{Irr}^{M,fm}(F') \times \mathrm{Irr}((\mathbb{F}_q^\times)^l),$$

其中，左侧的并集取遍所有形如 $F = F' \oplus \bigoplus_{j=1}^r F_{c_j,c_j}$ 的函子 F，其中 $c_j \notin \{a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k\}$。

证明。 前一个推论表明，对于 $F = F' \oplus \bigoplus_{j=1}^r F_{c_j,c_j}$，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F)$ 的一个表示可给出 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F') \times (\mathbb{F}_q^\times)^r$的一个表示。我们可以将其扩展为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F') \times (\mathbb{F}_q^\times)^l$的一个表示，方法是令 $\mathbb{F}_q^\times$ 的额外因子平凡作用。反过来，若我们有一个表示 $V = V' \otimes K_{(\psi_1,\ldots,\psi_l)} \in \mathrm{Irr}^{M,\,fm}(F') \times \mathrm{Irr}((\mathbb{F}_q^\times)^l)$，则很容易看出它来自函子 $F = F' \bigoplus_{c:\psi_c \neq \varepsilon} F_{c,c}$。□

总结以上讨论，为了研究 $B_n(\mathbb{F}_q)$ 的函子变形的像，只需研究满足以下条件的函子 $F = \bigoplus F_{a_i,b_i}$：对所有 i，都有 $a_i \neq b_i$，并且对于 $i \neq j$，有 $a_i \neq a_j$ 和 $b_i \neq b_j$。最后，我们给出 n取较小值时的示例。

当 $n = 2$ 时，不含单点集的函子只有零函子和 $F_{1,2}$。我们不能向$\{[1, 2]\}$ 添加单点集；由于 $1 \neq 2$，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{1,2}$的每个不可约表示 $) \cong \mathbb{F}_q^\times$都由函子变形得到。对于零函子，我们有 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(0) = \{1\}$。我们可以添加单点集 $[1, 1]$ 以及 $[2, 2]$，从而得到 $\mathrm{Irr}^{M,\,fm}(0) \sqcup \mathrm{Irr}^{M,\,fm}(F_{1,1}) \sqcup \mathrm{Irr}^{M,\,fm}(F_{2,2}) \sqcup \mathrm{Irr}^{M,\,fm}(F_{1,1} \oplus F_{2,2}) \cong \mathrm{Irr}((\mathbb{F}_q^\times)^2)$。这个示例见[CMO4]的第6节。

现在考虑 $n = 3$ 的情况。这里得到的唯一一个无法由保序嵌入 $[1,2] \to [1,3]$ 导出的新例子是 $F_{1,2} \oplus F_{2,3}$。事实上，$F_{1,2}, F_{1,3}, F_{2,3}$ 的情况，以及涉及单点集的函子，都可以从 $n = 2$ 的情况推导出来。我们有

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{1,2} \oplus F_{2,3}) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} | a, c \in \mathbb{F}_q^\times, b \in \mathbb{F}_q\}.$$

不可约表示 V 来自 $\mathrm{Aut}_R(M)$ 的函子变形，当且仅当正规子群 $N := \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} | b \in \mathbb{F}_q\}$ 在其上的作用非平凡。对 N 应用克利福德理论可得 $\mathrm{Irr}^{M,\,fm}(F_{1,2} \oplus F_{2,3}) \cong \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)$，因为 $\mathrm{Irr}(N)$中只有一个非平凡的 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(\mathbb{F}_{1,2} \oplus F_{2,3})$-轨道，且它在 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{1,2} \oplus F_{2,3})/N$ 中的稳定子由 $\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\} \cong \mathbb{F}_q^\times$给出。

对于 $n = 4$，不能由保序嵌入 $[1,3] \to [1,4]$ 得到的情形只有$F_{1,2} \oplus F_{3,4}$, $F_{1,3} \oplus F_{2,4}$, $F_{1,4} \oplus F_{2,3}$, $F_{1,2} \oplus F_{2,3} \oplus F_{3,4}$。前三种情形中，区间的端点互不相交，因此函子变形不构成限制。我们得到 $\mathrm{Irr}^{M,fm}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{1,2} \oplus F_{3,4})) \cong \mathrm{Irr}^{M,fm}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{1,4} \oplus F_{2,3})) \cong (\mathbb{F}_q^\times)^2$ 以及 $\mathrm{Irr}^{M,fm}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{1,3} \oplus F_{2,4})) \cong B_2(\mathbb{F}_q)$，因为存在一个非平凡态射$F_{1,3} \to F_{2,4}$。以与$F_{1,2} \oplus F_{2,3}$情形类似的方式应用克利福德理论，当 $n = 3$ 时可得 $\mathrm{Irr}^{M,fm}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{+1}}(F_{1,2} \oplus F_{2,3} \oplus F_{3,4})) \cong \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)$。

致谢

我谨向朋友 Tiah Thackston-Watson 和 Danny Kane 致谢，感谢他们在撰写本手稿期间给予的热情款待。

参考文献

[CMO1] Tyrone Crisp、Ehud Meir 和 Uri Onn，《Harish-Chandra函子的一个变体》。J. Inst. Math. Jussieu，第18卷，第5期（2019年），993–1049。arXiv:1607.04486。[CMO2] Tyrone Crisp、Ehud Meir 和 Uri Onn，《有限交换环上一般线性群的主系列》。Communications in Algebra，第49卷，2021年，第11期。arXiv:1704.05575。[CMO3] Tyrone Crisp、Ehud Meir 和 Uri Onn，《紧离散赋值环上一般线性群表示的归纳方法》。Advances in Mathematics 440（2024）109516。arXiv:2005.05553。[CMO4] Tyrone Crisp、Ehud Meir 和 Uri Onn，《函子变形与模的自同构群的表示》。Representation Theory，第29卷，第789–837页（2025年）。arXiv:2308.03248[H1] G. Higman，《枚举p群：I. 不等式》，Proc. LMS 3（1960年），24–30[M1] Ehud Meir，《通过不变理论对幺半范畴和代数结构进行插值》。Selecta Mathematica 29（2023年），第58篇。arXiv:2105.04622[So1] Andrew Soffer，《$U_n(F_q)$中的共轭类组合学》，博士论文，加州大学洛杉矶分校，https://escholarship.org/uc/item/08q9k3gg[VA1] A. Vera-Lopez 和 J. M. Arregi，《单位上三角矩阵中的共轭类》，Linear Algebra Appl. 370（2003年），85–124。[Z1] A. Zelevinsky，《有限经典群的表示：霍普夫代数方法》，Springer数学讲义（1981年）。

阿伯丁大学数学研究所，弗雷泽·诺布尔大楼，阿伯丁 AB24 3UE，英国电子邮件地址：ehud.meir@abdn.ac.uk