arXiv:2603.26390v1 [math-ph] 27 Mar 2026

欧拉元素的正交对 II：几何 Bisognano–Wichmann 与自旋–统计定理

´Vincenzo Morinelli、Karl-Hermann Neeb、Gestur Olafsson

2026年3月30日

摘要

代数量子场论（AQFT）中的模型可以推广至包含对称性李群的情形，其李代数具有欧拉元 h，其特征是 ad h 可对角化，且特征值属于 $\{-1, 0, 1\}$。这些元素对于楔形区域局域化的形式描述至关重要。本文扩展了对欧拉楔的几何分析，并探讨其在代数量子场论框架中的应用。若一对欧拉元 $(h,\ k)$ 满足 $e^{i\pi\,\mathrm{ad}^h(k)} = -k.$，则称其为正交对。基于我们先前工作所建立的几何框架，我们为标准子空间网和冯·诺依曼代数网推导出 Bisognano–Wichmann 定理和自旋–统计定理。我们的结果表明，这一推广方法不仅恢复了 AQFT 文献中的经典结果，还加深了我们对既有模型底层几何结构的理解。

1 引言

几何性质、代数结构与具有物理意义的量之间的相互作用，是代数量子场论（AQFT）的一项显著特征。量子场论代数方法的核心关注点之一，是找出导致理论显著性质的基本结构要素。值得注意的例子包括：在考虑局域代数的不同指标集时，研究局域化性质与带电 Doplicher–Haag–Roberts（DHR）超选择扇区的编织对称性之间的关系（参见 [Ro04，§23] 及其中的参考文献）。此外还有[BDFS00], 中引入的几何模作用概念，它在 [BS05]中对代数量子场论自发对称性破缺的分析中发挥着关键作用。这些及相关研究涉及的模型可由定义在一般指标集上的冯·诺依曼代数网描述；这些模型是在抽象框架中构建的，而该框架可适配具体的时空情形。根据应用的不同，指标集可以由双锥、类空锥、楔形区域，甚至所有开子集构成。

受代数量子场论（AQFT）的基本假设，尤其是 Bisognano–Wichmann（BW）性质和 PCT对称性（参见 [SW00]），以及一种几何洞见的启发，近年来已经建立了一个用于研究代数量子场论模型的广义框架

。在这一方法中，指标集或是以抽象欧拉楔的形式进行抽象描述（参见第2.1节），或是具体地由因果齐性空间中的“楔形”区域描述。这种双重视角使得一大类模型能够得到系统的构造与分析：这些模型或表述为抽象欧拉楔上的网，或表述为齐性空间开子集上的网，涵盖了 AQFT 文献中的许多知名示例（[MN21、MN22、FN´O25a、N´O21、Ne26、N´O26]）。

李代数的欧拉元在这一框架中发挥着根本作用。它们是对称李代数中模群的生成元（[MN24]），因而在表示论结构、代数量子场论中的局域化性质以及算子代数的模理论之间架起了一座自然的桥梁。在这一背景下，标准子空间的语言成为一种核心工具，为该理论的几何与模方面提供了统一的视角。

在本文中，我们在此前关于标准子空间网的工作中所引入的广义几何框架下，提出 Bisognano–Wichmann 定理和自旋–统计定理（[MN21、MN24、MN´O25、FN´O25a、Ne26]），并解释这些结果如何应用于冯·诺依曼代数网。通过这种方式，我们推广了现有文献中的一些关键结果，并将其嵌入代数量子场论的统一几何框架中：

- 闵可夫斯基时空中的代数量子场论模型由以时空开区域（非空、连通的开子集）为指标的冯·诺伊曼代数网描述，并满足量子理论与相对论的基本原则。这些原则特别包括等调性、局域性、Poincar´e 协变性、谱条件，以及存在一个具有 Reeh–Schlieder 性质的真空向量。

  标准子空间网至少有两种自然的产生方式：第一，作为与庞加莱群的不可约反酉表示相关联的单粒子网，并由此通过二次量子化构造自由量子场；第二，将局域冯·诺依曼代数的自伴部分作用于循环且分离的真空向量。

- “自旋–统计”一词源于代数量子场论的背景。从数学角度看，它表达的是空间 2π旋转（自旋群的中心元）与超选择扇区的统计相位之间的关系（[GL95、GL96]）。在闵可夫斯基时空上的场代数背景下（见 [DR89、DR90]），这一关系源自空间 2π旋转与局域代数的对易关系之间的联系，正如第3.1小节中的条件 (SS) 和第5.1 小节中的 (SSA) 所示（参见 [GL95]）。关于这一性质的详细讨论，参见 [Do09] 。在本文背景下，我们将其理解为对称群某些中心元的表示 G与标准子空间网的扭曲局域性之间的关系（参见 [LMR16、MT19]）。

- 对于闵可夫斯基时空中的任意林德勒楔区 W，我们都可以关联一个规范的单参数洛伦兹推动群，该群保持 W 不变。Bisognano–Wichmann

性质如今表明，对于任意林德勒楔区 W，相对于真空态，与 W相关联的冯·诺依曼代数的模群，恰好与这一单参数群相一致。因此，借助 Tomita–Takesaki 理论，模型的代数结构编码了有关该理论对称群的信息，而该群主要由模群生成。除了其他结果外，这一性质对于建立自旋-统计定理（[GL95、GL96]）特别有帮助；它还能揭示不同场论之间的新关系（[GLW98、LMPR19、MR20]），并用于计算量子场论中的熵（[W18]）；近期进展见 [DM+25、HLM26]。

现在我们回顾近期文章 [MN21、MN´O23、MN24、MN´O25] 中建立的主要对象，并总结本文确立的主要结果。全文中，我们通过示例阐释并说明这些基本几何结构的动机。在代数量子场论（AQFT）中，模局域化会产生实子空间网；对于这类网，要求连通对称群 G 的酉表示 $U\colon G \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ 满足 Bisognano–Wichmann 条件：存在一个元素 $h \in \mathfrak{g}$，它属于 G的李代数，并且 $\Delta := e^{2\pi i \cdot \partial U(h)}$ 是与所谓楔形区域相关联的标准子空间的模算子。假设 $\ker U$ 是离散的，根据欧拉元定理（[MN24]），基本的代数量子场论公理表明，自然的假设是 h 为欧拉元，即 $\operatorname{ad} h$ 非零，且该李代数是特征子空间$\mathfrak{g}_j(h)$、核 $\ker(\operatorname{ad} h - j\mathbf{1})$ 和特征子空间 $=$的直和，其中 $j = 1$、0、-1。这里允许空间$\mathfrak{g}_{\pm 1}(h)$之一为平凡空间，但不能二者皆为平凡空间。包含欧拉元的单李代数列于附录 A.1。于是，$\tau_h^{\mathfrak{g}} := e^{\pi i \operatorname{ad} h}$是 $\mathfrak{g}$的对合自同构；若它可积为 G 的自同构τ_h （当且仅当 G 为单连通时，这总是成立），我们便可以构造扩张群

$$G_{\tau_h} := G \rtimes \{\mathbf{1}, \tau_h\}. \tag{1.1}$$

我们还可以根据 [MN24] 假设酉表示 U 可扩张为G_{τ_h}的反酉表示。现在

$$\mathtt{V} = \mathtt{V}(U,h) := \mathrm{Fix}(U(\tau_h)e^{\pi i \partial U(h)})$$

是一个标准子空间，其轨道 $U(G)$。$\mathtt{V}$ 属于$\mathcal{H}$的标准子空间集合 Stand($\mathcal{H}$，并表示因果流形上楔形区域的标准子空间网。根据 [FN´O25a]，，对于半单李群的所有酉表示，这类网都大量存在；参见 [Ne26、第5.4–5节。6]有关这些结果的扩展以及该理论现状的综述。

我们关注此类轨道中标准子空间对之间的关系，尤其希望理解它们如何编码几何代数量子场论的几何局域性条件。

通过将焦点从几何楔形区域——代数量子场论的基本局域化区域——转移到李代数中的欧拉元，局域性数据可抽象编码如下：抽象楔形空间是

$$\mathcal{G}(G_{\tau_h}) := \{(x,\sigma) \in \mathfrak{g} \times G\tau_h \subseteq \mathfrak{g} \times G_{\tau_h} : \sigma^2 = e, \mathrm{Ad}(\sigma)x = x\}. \tag{1.2}$$

抽象楔（x, σ）在李群层面上类似于满足模关系 $J\Delta^{it}J = \Delta^{it}, t \in \mathbb{R}$, [1] 的 Tomita–Takesaki 对（$i\log\ \Delta, J$）。根据 [MN21，MN24]，最相关的是抽象欧拉楔，记作 $\mathcal{G}_E(G_{\tau_h})$，其中 x 是欧拉元，且 $\mathrm{Ad}(\sigma) = \tau_x$。集合 $\mathcal{G}$（G_{τ_h}）带有自然的 G- 作用，其作用为 $g.(x, \sigma) = (\mathrm{Ad}(g)x, g\sigma g^{-1})$；它还具有由不变锥定义的序结构，以及补运算（见第 2.1 节）。关于单李代数中欧拉元的分类，请参阅[MN21]。轨道

$$\mathcal{W}_+ := G.(h, \tau_h) \subseteq \mathcal{G}_E(G_{\tau_h}) \tag{1.3}$$

基本对 $W_0 := (h, \tau_h)$ 扮演抽象李理论版本的轨道$U(G)$。$\mathsf{V} \subseteq \mathrm{Stand}(\mathcal{H})$，它源自标准子空间的协变网。

抽象楔形与标准子空间之间的直接联系由 Brunetti–Guido–Longo（BGL）构造（参见 [MN21]）实现。对于每个 U，$\mathcal{H}$ 的反酉表示，该构造指定了一个自然的 G_{τ_h} -等变映射 G

$$\mathcal{G}(G_{\tau_h}) \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H}), \quad \mathsf{H}_U(x, \sigma) = \mathrm{Fix}(U(\sigma)e^{\pi i \cdot \partial U(x)}), \tag{1.4}$$

将基本对 (h, τ_h) 映射到 $\mathsf{V}(U, h) = \mathrm{Fix}(U(\tau_h)e^{\pi i \cdot \partial U(h)})$。为理解 $\mathcal{W}_+$ 上网的局域性，我们注意到 h 是对称的，也就是说，$-h \in \mathcal{O}_h := \mathrm{Ad}(G)h$ 当且仅当 $\mathcal{W}_+$ 包含一个扭曲中心补

$$W'^{\alpha} = (-h, \alpha\tau_h) \quad \text{for some} \quad \alpha \in Z(G).$$

研究此类局域性

$$\mathsf{H}(W'^{\alpha}) = Z_\alpha \mathsf{H}(W)' \quad \text{for some} \quad Z_\alpha \in \mathrm{U}(\mathcal{H}) \cap U(G)'$$

因此，要在 $\mathcal{W}_+$ 上的网这一层面研究此问题，就必须要求 h 是对称的。BGL 构造（1.4）将反酉表示 U 与抽象楔形 W'^{α} 对应，赋予其标准子空间

$$\mathsf{V}'^{\alpha} := \mathrm{Fix}(U(\alpha)J\Delta^{-1/2}) = Z_\alpha \mathsf{V}',$$

其中 $Z_\alpha \in U(G)'$ 是满足以下条件的酉算子

$$JZ_\alpha J = Z_\alpha^{-1} \quad \text{and} \quad Z_\alpha^2 = U(\alpha) \quad \text{for} \quad J = U(\tau_h)$$

（参见 [MN21，§2.1]）。这一局域性条件出现在关于标准子空间的文献中[LMR16]，也与冯·诺伊曼代数有关 [GL95，DLR07]。抽象楔形（h, τ_h）$\in \mathcal{G}_E(G_{\tau_h})$ 的可能补集由一个中心子群参数化

$$Z_2(G) := \{\alpha \in Z(G) \colon W_0^\alpha = (h, \alpha\tau_h) \in \mathcal{W}_+\}.$$

[1] 给定一个带有循环且分离向量 $\Omega \in \mathcal{H}$ 的冯·诺依曼代数 $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$，Tomita 算子 S 是反线性对合 $\mathcal{M}\Omega \ni a\Omega \mapsto a^*\Omega \in \mathcal{M}\Omega$ 的闭包。其极分解 $S = J\Delta^{1/2}$ 定义了反酉的模共轭 J 和自伴模算子 Δ。

若 G 是单连通的，则 $Z_2(G) \cong \pi_1(\mathcal{O}_h)$ 是伴随轨道 $\mathcal{O}_h = \mathrm{Ad}(G)h \subseteq \mathfrak{g}$ 的基本群，而映射 $\mathcal{W}_+ \to \mathcal{O}_h, (x,\sigma) \mapsto x$ 是一个单连通覆盖。本项目第一部分 [MN´O25] 的一项核心结果断言，若 $\mathfrak{g}$ 是单的且 $h \in \mathfrak{g}$ 是欧拉元，则 $\pi_1(\mathcal{O}_h)$ 或者是平凡的，$\mathbb{Z}$ 或者是 $\mathbb{Z}_2$。更具体地说，当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是厄米型时，基本群才是无限的（例如 $\mathfrak{so}_{2,d}(\mathbb{R})$，$d \in \{1,3,4,\dots\}$，参见附录 A.1）；所谓的分裂型情形对应 $\mathbb{Z}_2$（例如 $\mathfrak{sl}_{2r}(\mathbb{R})$ $r > 1$）；而对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{1,d}(\mathbb{R})$ $d > 2$，它是平凡的（参见 [MN´O25] 中的表 2 和定理 4.1）。对于一般的李代数，[MN´O25，定理 4.2] 将问题归约到单李代数的情形。

由此，我们为标准子空间网和冯·诺依曼代数网建立了一个抽象框架，其中包含基本的结构性质 G（参见定义3.1 和5.1），这些性质自然地将代数量子场论中的性质推广到具有对称群 G 的网。

在这一框架中，即给定酉 G表示（U，$\mathcal{H}$）以及定义在H 上的标准子空间网 $\mathcal{W}_+$，我们证明，若 U 相对于某个生成锥满足谱条件，且H 满足等调性和中心扭曲局域性，则它也具有 Bisognano–Wichmann 性质（定理3.10）。此外，若该网还是正则的，则它具有自旋–统计性质（定理3.13）：

$$U(\alpha) = Z_\alpha^2, \quad \text{where} \quad \alpha \in Z_3(G) := Z_2(G) \cup \{\alpha \in Z(G) \colon W_0'^{\alpha} = (-h, \alpha\tau_h) \in \mathcal{W}_+\}.$$

这里的一个关键点是，我们的对称性数据仅包含 U 在 G上的酉表示，而不包含到G_{τ_h}的反酉扩张。因此，我们的策略是指定网H 所需满足的性质，以确保存在扩张 $U\colon G_{\tau_h} \to \mathrm{AU}(\mathcal{H})$，使得H 是（1.4）中的 BGL 网$\mathsf{H}_U$。

我们进一步阐明这一性质的一个相关几何方面：证明给定两个中心互补楔形区 W，$W'^{\alpha} \in \mathcal{W}_+$ 时，α 可以写成 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-子代数的积分子群中的中心元之积，即

$$\alpha = \zeta_1, \dots \zeta_n, \qquad \zeta_j \in Z(S_j) \subseteq Z(G),\ j = 1, \dots, n,$$

其中，$S_j \subset G$ 是李代数为$\mathbf{L}(S_j) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$的积分子群。 n

$$\mathsf{H}(W_0'^{\alpha}) = Z_{\zeta_1} \cdots Z_{\zeta_n} \mathsf{H}(W_0)' \quad \text{with} \quad Z_{\zeta_j}^2 = U(\zeta_j), \quad W_0 = (h, \tau_h).$$

因此，自旋–统计性质和网的局域性依赖于 U 在 $Z(G)$上的限制，分别依赖于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-子代数的积分子群的中心，其中 $\mathfrak{g}$(定理 *3.19*)。这为 [GL95、MT19] 的结果提供了一个通用框架，使其自然地融入其中。我们将这些结果应用于具有循环且分离的真空向量的冯·诺依曼代数网，从而得到 Bisognano–Wichmann 定理5.3和自旋–统计定理5.5。这些定理自然推广了 [Lo08、BGL93、GL95、DLR07]中的结果。

在这一图景中，（对称的）欧拉元素正交对呈现为一种相关的几何结构。它们已被用于 [MN21]，并在 [MN´O25] 中得到分类。在标准子空间层面上，它们对应于满足“正交关系”的一对（v_1,v_2）

$$J_{\mathsf{v}_2} \Delta_{\mathsf{v}_1} J_{\mathsf{v}_2} = \Delta_{\mathsf{v}_1} \quad \text{and} \quad J_{\mathsf{v}_1} \Delta_{\mathsf{v}_2} J_{\mathsf{v}_1} = \Delta_{\mathsf{v}_2}. \tag{1.5}$$

这类正交对自然地源自群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}^{\tau_h}$ 的反酉表示；对于庞加莱协变理论，它们最早见于 [GL95]，而对于莫比乌斯协变理论，则见于 [Lo08, § 5]。在欧拉元层面上，这引出了欧拉元正交对 (h,k) 的概念，其含义是 $\tau_h^{\mathfrak{g}}(k) = -k$。在 [MN21] 中证明了：单李代数 $\mathfrak{g}$ 中的欧拉元 h 是对称的，当且仅当存在第二个欧拉元 k，使得 (h,k) 正交。若此条件成立，则 (k,h) 也正交，并且 h,k 生成实李子代数 $\mathfrak{s}_{h,k} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$。因此，$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 中欧拉元素正交对的一个典型示例是

$$h_0 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad k_0 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

关于欧拉元对，我们发现以下几何图景很有启发性。关于模群对的首批结果归功于 Borchers 和 Wiesbrock（参见 [Lo08，定理 3.21]，[Wi93]，[Wi97]，[GLW98]，[Bo00]）。这些结果涉及半侧模包含。它们是满足以下条件的对 $\mathrm{V}_1 \subseteq \mathrm{V}_2$，：存在仿射群 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ 的正能量表示，使得 $\mathrm{V}_1 = U(1,1)\mathrm{V}_2$，，其中 $(1,1).x = x+1$ 表示单位平移。更一般地，若一对 $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ 满足 $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$ 是循环的，并且

$$\Delta_{\mathrm{V}_j}^{-it}(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2) \subset \mathrm{V}_j \quad \text{for} \quad t > 0, j = 1, 2,$$

且强极限存在（即散射算子）

$$S := \lim_{t\to\infty} \Delta_{\mathrm{V}_1}^{it}\Delta_{\mathrm{V}_2}^{-it} \quad \text{satisfies} \quad J_{\mathrm{V}_1} S J_{\mathrm{V}_1} = S^{-1}.$$

这等价于存在 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ 的一般反酉表示，使得 $\mathrm{V}_1 = U(1,1)\mathrm{V}_2$（参见 [NÓ17，定理 3.22]）。基于这些概念，Wiesbrock 在 [Wi97，定理 6] 中刻画了由标准子空间三元组 $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3)$ 构成的那些情形：其模群与共轭生成扩展的 Möbius 群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^{\tau_h} \rtimes \mathrm{Möb}^{\tau_h}$ 的反酉表示。在 [Lo08] 中证明，这样的三元组生成圆上的 Möb-协变标准子空间网。冯·诺依曼代数的类似结果见 [GLW98]。

欧拉元的空间 $\mathcal{E}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ 在 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 中可与二维单叶双曲面（德西特空间 dS^2）对应，而欧拉对合的空间为 $\mathrm{PdS}^2 = \mathrm{dS}^2/\{\pm\mathbf{1}\}$。这里，具有模交的对对应于在 dS^2，上位于一条光线（即双曲面中的一条仿射直线）上的欧拉元对（[NÓ17，定理 3。22]）。相比之下，正交对位于一条闭类空测地线上，其欧拉对合在 PdS^2，中互为对跖点（分别地，由 $90°$-旋转联系起来，属于 $\mathrm{SO}^{1,2}(\mathbb{R})$）。它们也可通过欧拉对合 τ_h 和 τ_k 彼此可交换来刻画。

实单李代数中欧拉元正交对的伴随轨道分类（h，k）见于 [MNÓ25]（并在附录A.2中回顾）。该分类以我们对 [MN21] 中欧拉元的分类为基础，并运用了关于三阶分次单李代数的一些结构性结果。若单李代数 $\mathfrak{g}$ 是厄米型的，即包含一个尖生成不变闭凸锥 C，那么 C 便在抽象楔形空间上确定了一种非平凡的序结构 $\mathcal{W}_+$（参见第2.1节）。在此背景下，正交对（h，k）分为三种类型：

- 正/负类时：$[h,k] \in \pm C$，以及
- 类空 $[h,k] \notin C \cup -C$。

欧拉元素正交对与自旋–统计定理之间的关系在于，正交对的伴随轨道（h，k）对应于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 子代数$\mathfrak{s}_{h,\,k} = \mathbb{R}h + \mathbb{R}k + \mathbb{R}[h,k]$的伴随轨道，而相应的中心元$\zeta_{h,\,k} = \exp(2\pi[h,k])$ $\in Z(G)$ 则是扭曲局域性关系的结构起源。

作为示例，我们在第 4.1 节讨论 1+2 维空间中的无质量共形自由场。由于缺少惠更斯原理，相应的单粒子网满足类空局域性，但只满足类时扭曲局域性。这一现象与以下事实有关：共形群的酉正能量表示限制到洛伦兹群后，成为洛伦兹群的酉表示；同时，它也限制到群 $\mathrm{M\ddot{o}b}$ 的双重覆盖 $\mathrm{M\ddot{o}b}^{(2)}$，该覆盖固定了时间轴的紧化。我们强调，洛伦兹群与 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 同构；在这一几何框架中，类空区域与类时区域具有不同局域性性质，其根源在于洛伦兹子代数与共形李代数$\mathfrak{so}_{2,\,3}(\mathbb{R})$ 的李子代数 $\mathbf{L}(\mathrm{M\ddot{o}b})$ 是由不等价的欧拉元素正交对生成的。这一点可由以下事实说明：满足谱条件的共形群酉表示限制到洛伦兹群后，得到的酉表示不满足任何谱条件；而限制到 $\mathrm{M\ddot{o}b}^{(2)}$ 时则满足谱条件。

本文的结构如下：

- 在第2 节中，我们介绍几何与解析框架，并回顾以往工作的结果。我们将通过 AQFT 文献中的例子，引导 AQFT 社群的读者了解这些结果如何契合我们的框架。
- 在第3 节中，我们介绍 Bisognano–Wichmann 定理和自旋–统计定理，并将它们与正则性条件联系起来。
- 在第4 节中，我们说明所得结果如何应用于 1+2维闵可夫斯基空间上的单粒子网，以及二维共形网。
- 在第5 节中，我们证明冯·诺依曼代数网的相应定理。我们还将所得结果与 AQFT 在 1+3 维闵可夫斯基空间、手征圆和爱因斯坦宇宙上的结果进行比较。
- 最后一节展望了未来的发展方向。

致谢：

Vincenzo Morinelli 的工作部分得到 INdAM-GNAMPA、罗马第二大学资助项目 OANGQS CUP E83C25000580005，以及授予罗马第二大学数学系的 MIUR 卓越系项目 MatMod@TOV（CUPE83C23000330006）的支持。

Karl-H. Neeb 获得德国研究联合会资助，资助项目编号为 Ne 413/10-2，项目名称为“有序对称空间上的标准子空间网”。

记号与约定：

- 本文中，G 表示一个有限维连通李群，其李代数为 $\mathfrak{g}=\mathbf{L}(G)$，$e\in G$ 表示其单位元，G_e 表示其单位连通分支。
- 对于 $x\in\mathfrak{g}$，我们记 $G^x:=\{g\in G\,\mathrm{Ad}(g)x=x\}$ 为伴随表示中 x 的稳定子，并用 $G_e^x=(G^x)_e$ 表示其单位连通分支。
- 对于 $h\in\mathfrak{g}$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$，我们记 $\mathfrak{g}_\lambda(h):=\ker(\mathrm{ad}\,h-\lambda\mathbf{1})$为伴随表示中相应的特征子空间。
- 对于李子代数 $\mathfrak{s}\subseteq\mathfrak{g}$，我们记 $\mathrm{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})=\langle e^{\mathrm{ad}^{\mathfrak{s}}}\rangle\subseteq\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$为由 $e^{\mathrm{ad}^{\mathfrak{s}}}$生成的子群。若群 $\mathrm{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$的紧闭包存在，我们称 $\mathfrak{s}$ 紧嵌入的 。
- 对于 $x\in\mathfrak{g}$，我们记 $\mathcal{O}_x:=\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})x$ 为其伴随轨道。
- 若 $\mathfrak{g}$ 是李代数，我们用 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$表示欧拉元 $h\in\mathfrak{g}$的集合，即 $\mathrm{ad}\,h$ 非零且可对角化，并且 $\mathrm{Spec}(\mathrm{ad}\,h)\subseteq\{-1,0,1\}$。若 $-h\in\mathcal{O}_h$，则称 h 对称 。由 h 指定的 $\mathfrak{g}$ 的对合记作 $\tau_h^{\mathfrak{g}}:=e^{\pi i\,\mathrm{ad}\,h}$。
- 若 G 是李代数为 $\mathfrak{g}$的群，我们用 $\tau_h\in\mathrm{Aut}(G)$表示其在 G上的相应对合（若存在），并令 $G_{\tau_h}:=G\rtimes\{\mathrm{id}_G,\ \tau_h\}$.
- 抽象欧拉楔：$\mathcal{G}_E(G_{\tau_h})=\{(x,\ \sigma)\in\mathcal{E}(\mathfrak{g})\times G\cdot\tau_h:\ \sigma^2=e,\ \mathrm{Ad}(\sigma)=\tau_x^{\mathfrak{g}}\}$.
- G_{τ_h} 的反酉表示是指同态 $U\colon G_{\tau_h}\to\mathrm{AU}(\mathcal{H})$，使得$U(\tau_h)$是一个反酉对合，即共轭。我们总是假设它是强连续的，也就是说，它具有连续的轨道映射。
- 给定李群 G、非平凡尖锥 $C\subset\mathfrak{g}$ 以及 G的酉表示（或反酉表示） U，若 $C\subseteq C_U:=\{x\in\mathfrak{g}:\ -i\cdot\partial U(x)\geq 0\}$.，则称 U 满足谱条件，或称其为正能量表示
- 对于 G 的酉表示 $(U,\ \mathcal{H})$，我们记：$\partial U(x)=\frac{d}{dt}\big|_{t=0}U(\exp tx)$,_表示依照斯通定理定义的酉单参数群 $(U(\exp tx))_{t\in\mathbb{R}}$ 的无穷小生成元。

目录

1 引言 **1**

2 预备知识 **9**

2.1 抽象欧拉楔 .92.2 欧拉元素正交对 .112.3 例子 .132.4 类空与类时正交对 .16

3 几何 Bisognano–Wichmann 与自旋–统计 **18**
3.1 抽象楔形上的标准子空间网 .183.2 标准子空间网的结果 .22

4 网的 因果时空上的标准子空间 **26**
4.1 闵可夫斯基空间上的 1+2维 .264.2 关于二维共形网 .29

5 应用 冯·诺依曼代数网的相关内容 **34**
5.1 冯·诺依曼代数网的相关结果 .345.2 因果时空上的冯·诺依曼代数网 .385.2.1 关于 1+3维闵可夫斯基空间 .385.2.2 关于圆 .395.2.3 关于爱因斯坦宇宙.41

6 展望 **42**

A 附录 **45**
A.1 简单三重分次李代数列表 .45A.2 正交欧拉对的分类 .46A.3 共形群与共形李代数的欧拉元 . . . 47A.4 标准子空间.50

2 预备知识

设 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的连通李群，且 $h \in \mathfrak{g}$ 是一个欧拉元。我们假设对合 $\tau_h^{\mathfrak{g}} = e^{\pi i \operatorname{ad} h}$ 可积分为 τ_h 上的对合，并构成非连通李群

$$G_{\tau_h} := G \rtimes \{\mathbf{1}, \tau_h\}.$$

2.1 抽象欧拉楔

本节将介绍与空间 $\mathcal{G}_E$相关的一些基本记号，尤其是α-扭曲补和序结构。我们沿用 [MN21, 定义 2。5], ，回顾抽象（欧拉）楔空间

$$\mathcal{G}_E := \mathcal{G}_E(G_{\tau_h}) := \{(x, \sigma) \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}) \times G\tau_h \subseteq \mathfrak{g} \times G_{\tau_h} : \sigma^2 = e, \mathrm{Ad}(\sigma) = e^{\pi i \operatorname{ad} x}\}$$

的 G_{τ_h} 作为一种结构，编码了关于 G作用于希尔伯特空间的标准子空间、模群和模共轭的大量信息。更多详情请参见引言。群 G_{τ_h} 自然地作用于 $\mathcal{G}_E$ ，其作用为

$$g.(x, \sigma) := (\mathrm{Ad}^{\varepsilon}(g)x, g\sigma g^{-1}), \tag{2.1}$$

其中 $\mathrm{Ad}^{\varepsilon}(g) = \varepsilon_G(g)\,\mathrm{Ad}(g)$ 是扭曲伴随作用。这里 $\varepsilon_G\colon G_{\tau_h} \to \{\pm 1\}$ 是满群同态，核为 $\varepsilon_G = G_\circ$。

我们将 $W = (x, \sigma) \in \mathcal{G}_E$ 的互补楔形 W' 定义为：$= (-x, \sigma) = \sigma.W.$。注意，由 (2.1) 可知，对于 $g \in G$，$(W')' = W$ 且 $(gW)' = gW'$。关系 $\sigma.W = W'$ 是我们引入扭曲伴随作用的主要动机。这与标准子空间的关系 $J_{\mathrm{V}}\mathrm{V} = \mathrm{V}'$ 相符（参见附录 A.4）。它也符合从时空流形中的楔形区域以及算子代数的模理论角度出发的几何解释。

我们考虑这一对

$$W_0 := (h, \tau_h) \in \mathcal{G}_E$$

作为一个基点，并将其 G-轨道称为

$$\mathcal{W}_+ := G.W_0 = \{(\mathrm{Ad}(g)h, g\tau_h(g)^{-1} \cdot \tau_h)\colon g \in G\} \tag{2.2}$$

相应的抽象楔形空间。记

$$Z(G)^- := \{z \in Z(G)\colon \tau_h(z) = z^{-1}\},$$

并考虑同态

$$\partial_h\colon G^{\{\pm h\}} := \{g \in G\colon \mathrm{Ad}(g)h \in \{\pm h\}\} \to Z(G)^-, \quad g \mapsto g\tau_h(g)^{-1} \tag{2.3}$$

（参见 [MN21，§2.4]）。对于 $\alpha \in Z(G)^-$，我们定义 α-扭曲补对于 $W = (x, \sigma) \in \mathcal{G}_E(G)$ 的定义如下：

$$W'^{\alpha} = (x, \sigma)'^{\alpha} := (-x, \alpha\sigma). \tag{2.4}$$

我们将形如 W'^{α} 的对象称为抽象楔形的中心补 W。我们将 W'^{α} 视为 $W = (x, \sigma)$ 的一个“补”，因为相应的欧拉元是 $-x$。

∂_h 在 G^h 上的限制的核是开子群

$$G^{W_0} = G^{h,\tau_h} = \{g \in G\colon g.W_0 = W_0\} \subseteq G^h. \tag{2.5}$$

我们考虑中心子群

$$Z_1(G) := \partial_h(Z(G)) \subseteq Z_2(G) := \partial_h(G^h) \subseteq Z_3(G) := \partial_h(G^{\{\pm h\}}) \subseteq Z(G)^-. \tag{2.6}$$

子群 $Z_2(G)$ 描述了轨道 $G^h.W_0 = \{h\} \times Z_2(G) \cdot \tau_h \subseteq \mathcal{W}_+$. 它是投影映射下欧拉元 h 的纤维

$$q\colon \mathcal{W}_+ \to \mathcal{O}_h = \mathrm{Ad}(G)h, \quad (x, \sigma) \mapsto x. \tag{2.7}$$

由于 $\mathcal{W}_+ \cong G/G^{W_0} = G/G^{h,\tau_h}$，且 G^{h,τ_h} 是 G^{τ_h}的开子群，投影 q 是一个G-等变覆盖映射。若 h 不对称，则 $G^{\{\pm h\}} = G^h$ 和 $Z_2(G) = Z_3(G)$,

而若 h 是对称的，则 $G^h \subseteq G^{\{\pm h\}}$ 是指数 2 的子群。因此，我们总有$|Z_3(G)/Z_2(G)| \leq 2$。等号成立的条件由下式刻画：

$$W_0' \in \mathcal{W}_+ \quad \Leftrightarrow \quad (\exists g \in G^{\tau_h})\ \mathrm{Ad}(g)h = -h \quad \Leftrightarrow \quad Z_3(G) = Z_2(G). \tag{2.8}$$

([MN´O25，引理 3。3])

对于一个尖闭凸的 $\mathrm{Ad}^\varepsilon(G_{\tau_h})$-不变锥 $C \subseteq \mathfrak{g}$，我们按如下方式定义 C-序$\mathcal{G}_E(G_{\tau_h})$（[MN21，定义 2。5]）。子集

$$S_{W_0} := \exp(C_+)G^{W_0}\exp(C_-) \subseteq G \quad \text{with} \quad C_\pm := \pm C \cap \mathfrak{g}_{\pm 1}(h)$$

是 G的闭子半群，其单位群是稳定子 G^{W_0}（参见 [Ne22，定理 3。4]）。它定义了一个 G-不变偏序 $\mathcal{W}_+$，其定义方式为

$$g_1.W_0 \leq g_2.W_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad g_2^{-1}g_1 \in S_{W_0}. \tag{2.9}$$

特别地，$g.W_0 \leq W_0$ 等价于$g \in S_{W_0}$。这里也允许 $C = \{0\}$，它表示平凡序。

备注 2.1。令 $q_G\colon G \to G$ 表示单连通覆盖群（在其上 τ_h 总是存在），并令 $G_{\tau_h} = G \rtimes \{\mathbf{1}, \tau_h\}$。

(a) 子群 $\widetilde{G}_e^h$ 是连通的（[Lo69，定理 IV.3.4]），其李代数为 $\mathfrak{g}^{\tau_h} = \mathfrak{g}_0(h) = \ker(\mathrm{ad}\ h)$，因此等于 $\widetilde{G}_e^h$，从而 $\widetilde{W}_0 := (h, \tau_h) \in \mathcal{G}_E(\widetilde{G}_{\tau_h})$ 的连通稳定子群为 $\widetilde{G}^{h,\tau_h} = \widetilde{G}_e^h$。因此 $\widetilde{\mathcal{W}}_+ := \widetilde{G}.\widetilde{W}_0$ 是单连通的，$\widetilde{W}_0' \notin \widetilde{\mathcal{W}}_+$，且映射

$$\widetilde{q}\colon \widetilde{\mathcal{W}}_+ \to \mathcal{O}_h, \quad (x, \sigma) \mapsto x \tag{2.10}$$

是伴随轨道 $\mathcal{O}_h$ 的单连通覆盖空间。由此我们得到 $Z_2(G)$ 的如下拓扑解释：

$$Z_2(\widetilde{G}) = \partial_h(\widetilde{G}^h) \cong \widetilde{G}^h/\widetilde{G}_e^h \cong \pi_0(\widetilde{G}^h) \cong \pi_1(\mathcal{O}_h). \tag{2.11}$$

(b) 如果 h 是对称的，那么 $-\mathcal{O}_h = \mathcal{O}_h$，因此我们还得到一个射影伴随轨道

$$\mathrm{P}\mathcal{O}_h := \mathcal{O}_h/\{\pm\mathbf{1}\} \cong \widetilde{G}/\widetilde{G}^{\{\pm h\}},$$

其中 $\mathcal{W}_+$ 也是万有覆盖。因此，

$$Z_3(\widetilde{G}) = \partial_h(\widetilde{G}^{\{\pm h\}}) \cong \pi_0(\widetilde{G}^{\{\pm h\}}) \cong \pi_1(\mathrm{P}\mathcal{O}_h). \tag{2.12}$$

2.2 欧拉元素正交对

定义 2.2。我们称李代数 $\mathfrak{g}$ 中的一对欧拉元 (h, k) 为正交，如果$\tau_h^{\mathfrak{g}}(k) = -k$。若存在 $\varphi \in \mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$，使得 $(\varphi(h)\ \varphi(k)) = (h', k')$，则记 $(h, k) \sim (h', k')$。

示例 2.3。 （$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 中的欧拉元）在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 中，我们有正交欧拉元素

$$h_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad k_0 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

群 $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$ 在欧拉元集合上具有传递作用

$$\mathcal{E}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) = \left\{x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \colon \det(x) = -\tfrac{1}{4}\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a^2 + bc = \frac{1}{4} \right\}$$

该集合与二维德西特空间 dS^2 （单叶双曲面）（参见 [MN22，注 27]）。由此

$$\tau_{h_0}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & -a \end{pmatrix}$$

可知，与 h_0 正交的欧拉元具有如下形式

$$k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

特别地，对于 $b = 1$，我们得到 k_0。此外，我们还有 $\tau_{k_0}(h_0) = -h_0$。

现在不难看出，数对 $(h_0,\ k_0)$ 和 $(h_0,\ -k_0) \sim (k_0,\ h_0)$ 分别代表正交对的两个共轭类。对于

$$z_0 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = [h_0, k_0] \in \mathfrak{so}_2(\mathbb{R}). \tag{2.14}$$

于是我们有

$$e^{\mp\frac{\pi}{2}\operatorname{ad} z_0} h_0 = \mp[z_0, h_0] = \pm k_0 \quad \text{and} \quad e^{-\pi \operatorname{ad} z_0} h_0 = e^{\pi \operatorname{ad} z_0} h_0 = -h_0. \tag{2.15}$$

特别地，$e^{\pi \operatorname{ad} z_0} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ 将 h_0 映射到 $-h_0$，但该元素被 τ_h 固定，因为 $\tau_h(e^{\pi \operatorname{ad} z_0}) = e^{-\pi \operatorname{ad} z_0} = e^{\pi \operatorname{ad} z_0}$。若 S 是一个李代数为 $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 的连通李群，则有

$$Z(S) = \exp(2\pi\mathbb{Z}z_0) = Z_3(S) \supseteq Z_1(S) = Z_2(S) = \exp(4\pi\mathbb{Z}z_0). \tag{2.16}$$

我们还注意到，$\theta(x) = -x^\top$ 在 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 上定义了一个嘉当对合，使得 $\mathrm{Fix}(\theta) = \mathfrak{so}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}z_0$。$\operatorname{ad} h$-特征向量 $e_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 满足

$$h_0 = -\frac{1}{2}[e_0, \theta(e_0)], \quad k_0 = \frac{1}{2}(e_0 - \theta(e_0)), \quad \text{and} \quad z_0 = \frac{1}{2}(e_0 + \theta(e_0)).$$

包含 z_0 的唯一尖生成不变锥 $C \subseteq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 为

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a^2 + bc \le 0, b \ge c \right\}.$$

注 2.4. 由例 2.3 可知，任何包含于某个 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-子代数 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ 中的欧拉元 h 都是对称的，并且存在一个与之配对的欧拉元 k，使得 (h,k) 和 (k,h) 是正交对。我们称具有这一性质的正交对为对称正交。若 $\mathfrak{g}$ 是单的，则由 [MN21，定理 3.13] 可知，所有欧拉元素正交对都是对称正交的。反之，若 (h,k) 是对称正交的，则 h, k 和 $z_{h,k} := [h,k]$ 张成一个子代数 $\mathfrak{s}_{h,k}$，它同构于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$（[MN´O25，定理 2.6]），并且

$$\zeta_{h,k} := \exp(2\pi z_{h,k}) \in Z(G) \tag{2.17}$$

生成可积分子群的循环中心$S_{h,k} := \langle \exp^{\mathfrak{s}_{h,k}} \rangle \subseteq G$。鉴于（2.15），元素 $r_{h.k} = \exp(\frac{\pi}{2} z_{h,k}) \in S$ 满足

$$\mathrm{Ad}(r_{h,k})h = -k \quad \text{and} \quad r_{h.k}^2.(h,\tau_h) = (-h, \zeta_{h,k}\tau_h),$$

因此

$$\tau_k \tau_h = r_{h,k}\tau_h r_{h,k}^{-1}\tau_h = r_{h,k}^2,$$

并且我们得到中心元 $\zeta_{h,k}$ 作为一个交换子的表示

$$\tau_k\tau_h\tau_k\tau_h = r_{h,k}^4 = \partial_h(r_{h,k}^2) = \zeta_{h.k} \in Z_3(G) \tag{2.18}$$

下述定理表明，抽象欧拉楔的所有扭曲补都可以通过作用于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 子群的中心元，分几个步骤得到。

定理 *2.5. ([MN´O25,* 推论 *5.*11*])*（Z_3-定理）设 G 是一个连通李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $h \in \mathfrak{g}$ 是一个对称欧拉元，并且李代数对合 $\tau_h^{\mathfrak{g}}$ 可积分为 G。那么 $Z_3(G)$ 由有限多个形如 $\zeta_{h,k} := \exp(2\pi[h,k])$ 的元素生成，其中 (h,k) 是一对正交欧拉元；而 $Z_2(G)$ 由形如 $\zeta_{h,k,k'} := \zeta_{h,k}\zeta_{h\,k'}^{-1}$ 的元素生成，其中 (h,k') 是另一对正交欧拉元。

此外，如果 $\mathfrak{g}$ 是单的，那么 $Z_2(G)$ 是循环的，并由一个元素 $\zeta_{h,k,k'}$ 生成，其中正交对 (h,k) 和 (h,k') 可按如下方式选取：如果 $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})^{\oplus r}$ 如定理 *A.1* 所示，其中 $h = (h_0, \cdots, h_0)$、$k = (k_0, \cdots, k_0)$ 和 $k' = (-k_0, k_0, \cdots, k_0)$，那么

$$\zeta_{h,k,k'} = \exp(4\pi(z_0, 0, \cdots, 0)).$$

2.3 例子

下面的例子表明，抽象楔及其序结构和补集，与流形中的楔形区域及其包含关系和因果补之间，存在自然的对应关系；这些概念都出现在代数量子场论模型中。关于抽象楔与闵可夫斯基空间中楔形区域之间的对应关系，我们将在下文的示例2.6中简要讨论。关于德西特空间，请参阅 [Mo25，第 2 节。1], [MN24，例 2。7] 以及 [FN´O25b], ；关于手征圆，请参阅 [MN21，例 2.10(c)]。各种具体例子也可参见讲义 [Ne26] 。

示例 2.6。考虑闵可夫斯基时空 $M = \mathbb{R}^{1,\,d}$ 其空间维数为 $d > 0$，洛伦兹度规由双线性形式给出

$$(x_0, \mathbf{x})(y_0, \mathbf{y}) := x_0 y_0 - \mathbf{x}\mathbf{y} = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \cdots - x_d y_d.$$

其等距变换群是庞加莱 $'$群

$$\mathcal{P} := \mathbb{R}^{1,d} \rtimes \mathcal{L}, \qquad \text{where} \qquad \mathcal{L} := \mathrm{O}_{1,d}(\mathbb{R})$$

是洛伦兹　　群。 M 上的因果结构由闭未来光锥指定

$$C = \{x \in M : x^2 \geq 0, x_0 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{1,d}.$$

它在保时子群 $\mathcal{P}^{\uparrow} = \mathbb{R}^{1,\,d} \rtimes \mathcal{L}^{\uparrow}$下保持不变。将 $\mathcal{P}_+ = \mathbb{R}^{1,\,d} \rtimes \mathrm{SO}_{1,\,d}(\mathbb{R})$ 记作保持定向（=正规）的等距变换子群，

$$\mathcal{P}_+^{\uparrow} = \mathcal{P}^{\uparrow} \cap \mathcal{P}_+ = \mathbb{R}^{1,d} \rtimes \mathcal{L}_+^{\uparrow}$$

是单位连通分支。

区域 $\mathcal{O} \subset M$ 的因果补集为

$$\mathcal{O}' = \{y \in \mathbb{R}^{1,d} : (\forall x \in \mathcal{O})\,(x - y)^2 < 0\}^{\circ}. \tag{2.19}$$

我们总有 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}''$，并且称 $\mathcal{O}$ 为因果完备 的，当且仅当 $\mathcal{O} = \mathcal{O}''$。 $\mathbb{R}^1$中的一个楔形区域^{d}是一个庞加莱变换 $W = gW_R,\ g \in \mathcal{P}_+^{\uparrow}$，其中

$$W_R = \{x \in \mathbb{R}^{1,d} : |x_0| < x_1\}$$

是林德勒楔区 W_R。楔形区域总是因果完备的，且 $(gW_R)' = g.(-W_R)$。

我们考虑推动变换的单参数群 $\Lambda_{W_R}(t) = \exp(t h_{W_R}) \in \mathcal{P}_+^{\uparrow}$，其中

$$h_{W_R} x = (x_1, x_0, 0, \ldots, 0).$$

楔形区域与推动变换的单参数群（分别地，与其生成元）之间存在一一对应关系，通过

$$h_W := \mathrm{Ad}(g) h_{W_R} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \Lambda_W := g \Lambda_{W_R} g^{-1} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} W = gW_R \quad \text{for} \quad g \in \mathcal{P}_+^{\uparrow},$$

其中 $h_W \in \mathbf{L}(\mathcal{P}_+^{\uparrow})$ 生成 $\Lambda_W(t) = \exp(t h_W)$。对于每个楔形区域 W，我们还关联对合

$$j_W := e^{\pi i h_W}|_{\mathbb{R}^{1,d}} \in \mathcal{P}_+^{\downarrow}, \qquad \text{and in particular} \qquad j_{W_R}(x) = (-x_0, -x_1, x_2, \ldots, x_d).$$

这建立了抽象楔形 $W = (h_W, j_W) \in \mathcal{W}_+(\mathcal{P}_+)$ 与楔形区域 $W \subseteq \mathbb{R}^{1,d}$之间的一一对应。此外， $j_W(W) = W'$(参见 (2.19))。我们还注意到

庞加莱协变性以及 $W_R' = -W_R$（分别为 $h_{W_R'} = -h_{W_R}$）意味着 $\Lambda_{W'}(t) = \Lambda_W(-t)$（分别为 $h_{W'} = -h_W$）。注意，

$$\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_+^{\uparrow} \cup \mathcal{P}_+^{\downarrow} = \mathcal{P}_+^{\uparrow} \cup j_{W_R}\mathcal{P}_+^{\uparrow}.$$

由于 $Z(\mathcal{P}_+^{\uparrow}) = \{e\}$，投影映射 $q : \mathcal{G}_E(\mathcal{P}_+) \to \mathcal{E}(\mathbf{L}(\mathcal{P})) = \mathcal{O}_{h_W}$ 是双射，因此抽象楔形空间 $\mathcal{G}_E(\mathcal{P}_+)$ 可以与欧拉元集合 $\mathcal{E}(\mathbf{L}(\mathcal{P}))$ 等同。将每个欧拉元 h 视为 M 上的仿射向量场，并与其正性区域相对应

$$W_M^+(h) = \{x \in M : h(x) \in C^\circ\}, \tag{2.20}$$

我们进一步得到一个从 $\mathcal{E}(\mathbf{L}(\mathcal{P}))$ 到 M ([N´O17 中楔形区域集合的双射，引理 4。12])。

对于 $d > 1$，存在与 W_R 相对应的欧拉元 h_{W_R}，以及与楔形相对应的欧拉元 $h_{W_s} \in \mathcal{O}_{h_{W_R}}$

$$W_s := \{x \in \mathbb{R}^{1,d} : |x_0| < x_s\}, \quad s = 2, \dots, d, \tag{2.21}$$

使得所有的对 (h_{W_R}, h_{W_s}) 都是正交的（参见 [MN21，第3]节）。对于 $d = 1$，庞加莱´–李代数中不含正交的欧拉元对。更多详情请参见 [Mo25]及其中的参考文献。

例 2.7。 (a) (M¨圆上的 Möbius 群， [MN21，例 2.10(c)]) Möbius 群 ¨: G M= ob : $= \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 作用于实数直线的紧化上，其作用方式为 $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^1$

$$g.x := \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{for} \qquad g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

群 M¨ob由以下任意两个单参数子群生成（参见示例 2.3）：

- 伸缩变换： $\delta(t)(x) = e^t x$ ，其中 $t \in \mathbb{R}$，由欧拉元 $h_0 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 生成。
- 旋转： $\rho(\theta).x = \frac{\sin(\theta/2)+\cos(\theta/2)x}{\cos(\theta/2)-\sin(\theta/2)x}$，由 z_0 : $= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 生成。
- $\kappa(t).x = \frac{\text{双曲正弦}(t/2)+\text{双曲余弦}(t/2)x}{\text{双曲余弦}(t/2)+\text{双曲正弦}(t/2)} = \frac{x}{e^t}\left(\begin{smallmatrix} 1+x & +x-1 \\ 1+x & +1-x \end{smallmatrix}\right)()$对 $t \in \mathbb{R}$ 而言，由欧拉元 k_0 生成： $= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

我们将非稠密、非空、开且连通的子集 $I \subseteq \mathbb{S}^1$ 称为区间，并用 $\mathcal{I}(\mathbb{S}^1)$ 表示 $\mathbb{S}^1$中的区间集合。正性区域 $W_{\mathbb{S}^1}^+(h_0) = (0, \infty)$ 在 G 中的稳定子是膨胀子群 $\delta(\mathbb{R})$，它与 h_0 在伴随作用下的稳定子一致。因此

$$\mathcal{W}_+(W_0) \to \mathcal{E}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) \to \mathcal{I}(\mathbb{S}^1), \quad (h, \sigma) \mapsto h \mapsto W_{\mathbb{S}^1}^+(h) \tag{2.22}$$

是等变双射。特别地，对于区间 $I = W^+_{\mathbb{S}^1}(h)$，我们得到反射 $\tau_I = \tau_h$ 以及单参数群 $\delta_I(t) = \exp(th)$。对合 τ_I 反转定向，并将 I 映射到补开区间，我们将其记为 I'。

(b)（直线上的 M¨obius 群的覆盖； [MN21，例 2.10(d)]）考虑 M~obius 群的万有 G覆盖¨，并令 $G_{\tau_{h_0}} := G \rtimes \{\mathbf{1}, \tau_{h_0}\}$，其中 τ_{h_0}是欧拉对合，积分得到 $\widetilde{G}$。令 $q_G : \widetilde{G}_{\tau_{h_0}} \to G_{\tau_{h_0}}$ 为覆盖映射。 G 在 $\mathbb{S}^1$ 上的作用可提升为连通群 $\widetilde{G}$ 在万有覆盖 $\widetilde{\mathbb{S}}^1 \cong \mathbb{R}$上的作用，其中 $\widetilde{\rho}(\theta).x = \theta + x$ 是旋转单参数群 $\rho(\theta)$在 G中的提升到 G 的结果。我们指定单连通覆盖

$$q_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\infty, \quad q_{\mathbb{S}^1}(\theta) = q_{\mathbb{S}^1}(\widetilde{\rho}(\theta).0) = \rho(\theta).0.$$

对合 τ_{h_0} 在覆盖 $\mathbb{R}$上的作用是以基点 0 为中心的点反射 $\tau_{h_0}.x = -x$。~我们还注意到，$\ker(q_G) = \widetilde{\rho}(2\pi\mathbb{Z}) = Z(G) \simeq \mathbb{Z}$ 是覆盖 $q_{\mathbb{S}^1}$ 的甲板变换群，其作用方式为

$$\widetilde{\rho}(2\pi n).x = x + 2\pi n \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

我们称非空区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为可容许区间，当且仅当其长度严格小于 2π，并用 $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ 表示可容许区间的集合。区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是可容许区间，当且仅当存在区间 $I \in \mathcal{I}(\mathbb{S}^1)$，使得 I 是 $q^{-1}_{\mathbb{S}^1}(I)$ 的一个连通分支。~群 $Z(G)$ 在这些连通分支的集合上简单传递地作用。由于 G 在 $\mathcal{I}(\mathbb{S}^1)$ 上传递地作用，(2.23) 表明 $\widetilde{G}$ 在集合 $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ 上传递地作用。我们有一个等变双射映射

$$\mathcal{W}_+(\widetilde{G}) \ni g.(h_0, \tau_{h_0}) \mapsto g.(0, \pi) \in \mathcal{I}(\mathbb{R}), \qquad g \in \widetilde{G}.$$

欧拉元 $W^+_{\mathbb{R}}(h_0)$（参见（2.20））的正性区域的连通分支h_0 是区间

$$\widetilde{I}_{2n} := (2n\pi, (2n+1)\pi), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.24}$$

~同样，区间 I_{2n+1}、 $n \in \mathbb{Z}$是 $-h_0$的正性域的连通分支。此外， $\widetilde{G}^{h_0} = Z(\widetilde{G})\exp(\mathbb{R}h_0)$ 意味着 $Z_2(\widetilde{G}) = 2Z(\widetilde{G})$ 且 $Z_3(\widetilde{G}) = Z(\widetilde{G})$。更多细节请参见 [MN21，例 2.10(d)]。

2.4 类空与类时正交对

令 $(\mathfrak{g}, C)$ 为一个单李代数，且 $C \subseteq \mathfrak{g}$ 为一个尖的、生成的、$\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$-不变的闭凸锥。我们回顾一下，这样的锥存在当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是厄米型的（参见 [MN´O23]，[Vi80]）。令 $h \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 为一个欧拉元（因此根据 [MN21]， $\mathfrak{g}$ 是管型的），从而得到对称李代数 $(\mathfrak{g}, \tau^{\mathfrak{g}}_h)$（参见附录 A.1）。我们采用定理 A.1 中的记号。这里，限制根系 $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ 为 C_r 型，而 $\Sigma(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{c})$ 为 A_{r-1}型，因此 G^h-轨道在 $\mathcal{E}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{q}$ 中由以下元素表示

$$k^0, k^1, \ldots, k^r.$$

因此，我们得到 $r+1$ 对 (h,k^j)、 $j=0,\dots,r$，它们表示 $\mathfrak{g}$ 中正交欧拉元素对的 $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$-共轭类。

描述这些元素在如下形式的子代数中如何出现，会很有启发性

$$\mathfrak{s} := \mathfrak{s}_1 + \cdots + \mathfrak{s}_r \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})^{\oplus r},$$

其中

$$h = (h_0, \cdots, h_0) \quad \text{and} \quad k^j := (\underbrace{k_0, \cdots k_0}_{j \text{ times}}, \underbrace{-k_0, \cdots, -k_0}_{r-j \text{ times}}). \tag{2.25}$$

([MN´O23，推论 3。5]）。它包含三维李子代数

$$\mathfrak{s}^j := \mathrm{span}\{h, k^j, [h,k^j]\} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}).$$

我们从引言中回顾，正交对 $(h,\ k)$ 分为三种类型：

- 正类时/负类时： $[h,k] \in \pm C$，以及
- 类空 $[h,k] \notin C \cup -C$。

命题 2.8。 </style}当且仅当，，。更具体地说，配对 (h,k^0) 是负类时，而 (h,k^r) 是正类时。特别地，$\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$ 在负/正类时对的集合上传递作用。

证明。我们 将对应于 $e_0 \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 的元素记为 $e_j \in \mathfrak{s}_j$。首先我们注意到 t

$$C_{\mathfrak{s}} := C \cap \mathfrak{s} = \sum_{j=1}^{r} C_j \quad \text{with} \quad C_j := C \cap \mathfrak{s}_j \quad \text{and} \quad C_j \cap \mathfrak{g}_1(h) = [0,\infty)e_j.$$

由此可知， $C_{\mathfrak{s}}$ 是 $\mathfrak{s}$ 中的一个尖生成不变锥。这个李代数包含具有 $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$ 的 2^r 不变锥 $\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j C_j$。

我们有

$$[h,k^j] = \sum_{\ell=1}^{j}(e_\ell + \theta(e_\ell)) - \sum_{\ell=j+1}^{r}(e_\ell + \theta(e_\ell)) = e^j + \theta(e^j) \quad \text{for} \quad e^j = e_1 + \cdots + e_j - e_{j+1} - \cdots - e_r.$$

因此 $\mathfrak{s}^j \cap \mathfrak{g}_1(h) = \mathbb{R}e^j$，并且 $C \cap \mathfrak{s}^j$ 非零当且仅当 $C \cap \mathbb{R}e^j \neq \{0\}$。这里我们用到： $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 中每个闭生成不变锥都与限制根空间相交。现在

$$C \cap \mathfrak{s}_1(h) = C \cap (\mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_r) = [0,\infty)e_1 + \cdots + [0,\infty)e_r$$

i这意味着 $C \cap \mathbb{R}e^j$ 非零当且仅当 $j \in \{0,r\}$。特别地，我们有

$$[h,k^0] = -e - \theta(e) \in -C \quad \text{and} \quad [h,k^r] = -[h,k^0] = e + \theta(e) \in C.$$

至此，证明完成。 □

3 几何 Bisognano–Wichmann 与自旋–统计

我们沿用上一节的设定，其中 G 是一个连通李群，$h \in \mathfrak{g}$ 是一个欧拉元，而 τ_h 是 G 上相应的对合。我们还固定一个尖的、生成的、闭的凸 Ad^ε-不变锥 $C \subseteq \mathfrak{g}$，以及抽象楔形空间

$$\mathcal{W}_+ = G.W_0 \subseteq \mathfrak{g} \times G_{\tau_h} \quad \text{with} \quad W_0 = (h, \tau_h)$$

由（2.2）在第 2.1 节中，赋予 C-序。

3.1 抽象楔形上的标准子空间网

本节回顾（一粒子）标准子空间网的概念及其相关性质。关于标准子空间的基本事实将在附录 A.4 中回顾。

定义 3.1。设 $(U, \mathcal{H})$ 是 G 的酉表示，$\mathrm{Stand}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准子空间集合，并且

$$\mathsf{H}\colon \mathcal{W}_+ \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H}) \tag{3.1}$$

是一个映射（关于，参见（1.3）），也称为抽象楔形上的标准子空间网。下文将此数据记作（$\mathcal{W}_+, U, \mathsf{H}$）。若要强调网 H 对几何数据和表示数据的依赖性，则将其称为四元组（$G, \mathcal{W}_+, U, \mathsf{H}$）。

我们考虑以下性质：

(HK1) **等调性（Iso）：** $\mathsf{H}(W_1) \subseteq \mathsf{H}(W_2)$，其中 $W_1 \le W_2$ 的含义见（2.9）。

(HK2) 协变性（Cov）： $\mathsf{H}(gW) = U(g)\mathsf{H}(W)$，其中 $g \in G$, $W \in \mathcal{W}_+$。

(HK3) 谱条件（SC）： $C \subseteq C_U := \{x \in \mathfrak{g}\colon -i \cdot \partial U(x) \ge 0\}$. 于是称 U为C-正的。

(HK4) 中心扭曲局域性（CTL）： 对于每个 $\alpha \in Z(G)^-$，若 $W_0'^{\alpha} = (-h, \alpha\tau_h) \in \mathcal{W}_+$，则存在酉算子 $Z_\alpha \in U(G)'$ 满足

$$J_{\mathsf{H}(W_0)} Z_\alpha J_{\mathsf{H}(W_0)} = Z_\alpha^{-1}, \tag{3.2}$$

并且使得

$$\mathsf{H}(W_0'^{\alpha}) \subseteq Z_\alpha \mathsf{H}(W_0)'. \tag{3.3}$$

(HK5) Bisognano–Wichmann 性质（BW）： $U(\exp(th)) = \Delta^{-it/2\pi}_{\mathsf{H}(W_0)}$ 适用于 $t \in \mathbb{R}$。

(HK6) **中心扭曲 Haag 对偶性（CTHD）**：对于每个 $\alpha \in Z(G)^-$ 满足 $W_0'^{\alpha} \in \mathcal{W}_+$的情形，都存在 $Z_\alpha \in U(G)'$ 满足（3.2）且

$$\mathsf{H}(W_0'^{\alpha}) = Z_\alpha \mathsf{H}(W_0)'.$$

(HK7) 扭曲 G_{τ_h}-协变性（TCov）：对于每个 $\alpha \in Z(G)^-$ 满足 $W_0'^{\alpha} \in \mathcal{W}_+$的情形，都存在一个扩张 U^α，将 U 扩张为 G_{τ_h}的反酉表示，使得：

$$\mathsf{H}(g *_\alpha W) = U^\alpha(g)\mathsf{H}(W) \quad \text{for} \quad g \in G_{\tau_h}, W \in \mathcal{W}_+, \tag{3.4}$$

其中 $*_\alpha$ 是 G_{τ_h} 在 $\mathcal{G}_E(G_{\tau_h})$上的 α-扭曲作用，定义为

$$g *_\alpha (x,\sigma) := \begin{cases} g.(x,\sigma) & \text{for } g \in G \\ g.(x,\alpha^{-1}\sigma) & \text{for } g \in G\tau_h \end{cases} \tag{3.5}$$

(详见 [MN21] 。

(HK8) **模反射（MRef）：**(HK7) 对扩张 U^α成立，其定义为

$$U^\alpha(\tau_h) = Z_\alpha J_{\mathsf{H}(W_0)},$$

其中 Z_α 是满足（3.2）的酉算子。

(SS) **自旋–统计：**(HK4) 成立，此外还有 $Z_\alpha^2 = U(\alpha)$。

(Reg) **正则性：**存在一个 e-邻域 $N \subseteq G$，使得 $\bigcap_{g\in N} U(g)\mathsf{H}(W_0)$ 是循环的。

定义 3.2 定义。若网 H 满足 (Reg)、(Iso)、(Cov) 和 (SC)，则称其为正则的。 .

备注 3.3。(a) 性质 (Cov)、(SC) 和 (BW) 通过 [MN21，命题 4。10]，蕴含等调性 (Iso)。

(b) 若 $C = \{0\}$，则 $\mathcal{G}_E(G_{\tau_h})$ 上的序是平凡的，因此 (Iso) 和 (SC) 平凡成立。(c) 为便于验证，我们将条件 (HK4-6) 和 (HK8) 表述为关于 W_0 的条件；但若协变性条件 (Cov) 成立，则 $\mathcal{W}_+ = G.W_0$ 的齐性意味着：只要这些条件对 W_0 成立，它们就对每个 $W \in \mathcal{W}_+$ 成立。

(d) 如果 h 不是对称的，即 $-h \notin \mathcal{O}_h$，那么 (CTL) = (HK4)、(SS) 和 (HK6-8) 显然成立，因为 W'^{α} 从不包含于 $\mathcal{W}_+$中。

设 $(U, \mathcal{H})$ 是 G_{τ_h} 的反酉表示，且 $W = (x, \sigma) \in \mathcal{G}_E$ 是一个欧拉楔。那么我们有一个自然映射

$$\mathsf{H}_U : \mathcal{G}_E(G_{\tau_h}) \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H}), \qquad \mathsf{H}_U(W) := \mathrm{Fix}(U(\sigma)e^{\pi i \partial U(x)}), \tag{3.6}$$

称为与 U 相关联的 Brunetti–Guido–Longo（BGL）网。根据以下定理，它满足定义 3.1 中的所有假设。因此，我们所讨论框架的一个关键特点是，它以酉表示 $U: G \to \mathsf{U}(\mathcal{H})$ 为起点。这样的表示可能不存在到 G_{τ_h} 的反酉扩张；但若存在，根据 [N´O17，定理 2.11]，它们在酉算子 $T \in U(G)'$ 下全都共轭。若 $J = U(\tau_h)$，则 $J_T = TJT^{-1}$ 对应于共轭表示，因此所有这些扩张都由算子 J_T 参数化。此外，若 $JTJ = T^{-1}$，则 $J_T = T^2 J$，而这些修改会体现在 (CTL) 条件中。定理 3.5 给出了扩张存在的一个重要充分条件。

定理 3.4. ([MN21，定理 4.12，命题 4.16]) 设 $(U,\ \mathcal{H})$ 是一个反酉 C-正表示 G_{τ_h}，其中 $h \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$。则 *BGL* 网 H_U 满足 (HK1)-(HK8) 以及 定义 3.1中的 (SS)。

定理 3.5. ([欧拉元定理（1]) 设 G 是一个连通李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $h \in \mathfrak{g}$。设 $(U, \mathcal{H})$ 是 G 的酉表示，且核是离散的。假设 $\mathtt{V}$ 是一个标准子空间，且 $N \subseteq G$ 是一个单位元邻域，使得

(a) $U(\exp(th)) = \Delta_{\mathtt{V}}^{-it/2\pi}$ *for* $t \in \mathbb{R}$, *i.e.,* $\Delta_{\mathtt{V}} = e^{2\pi i\, \partial U(h)}$, *and*
(b) $\mathtt{V}_N := \bigcap_{g\in N} U(g)\mathtt{V}$ 是循环的。

那么， h 是中心的或是一个欧拉元，且共轭 $J_{\mathtt{V}}$ 满足

$$J_{\mathtt{V}} U(\exp x) J_{\mathtt{V}} = U(\exp \tau_h^{\mathfrak{g}}(x)) \quad \textit{for} \quad \tau_h^{\mathfrak{g}} = e^{\pi i \operatorname{ad} h}, x \in \mathfrak{g}. \tag{3.7}$$

注 3.6. (a) 定理 3.5 不要求 U 到 G_{τ_h} 的反酉扩张，只要求 G 的酉表示。实际上，(3.7) 的一个重要推论是， $\tau_h^{\mathfrak{g}} \in \mathsf{Aut}(\mathfrak{g})$ 可积分为群 $G := U(G) \cong G/\ker(U)$ 上的一个对合自同构（参见 [MN24, 注 3.6]）。只要 G 上存在对合 τ_h， U 就可通过 (3.7) 扩张为 G_{τ_h} 的反酉表示。特别是在单连通覆盖群 $\sim$ $\sim q_G$: $G \to G$ 上，情况即是如此，其对应的酉表示 $U \circ q_G$ 也同样如此。
(b) 鉴于 (a)，将 G 替换为 G后，表示 U 可反酉延拓至 G_{τ_h}，由 $U(\tau_h) = J_{\mathtt{V}}$可知 $\mathtt{V} = \mathrm{Fix}(U(\tau_h)e^{\pi i\cdot \partial U(h)}$成立，这由定理 3.5得出。根据构造，BGL 网 H_U 满足

$$\mathsf{H}_U(g.W_0) = U(g)\mathtt{V} \quad \text{for} \quad g \in G, W_0 = (h, \tau_h) \in \mathcal{G}_E(G_{\tau_h}).$$

命题 3.7。 (BGL 网的自然性) 对于 $j = 1,2$，设 G_j 是连通李群， $h_j \in \mathfrak{g}_j$ 是欧拉元，且群 $G_{j,\tau_{h_j}}$ 存在。此外，设 $\varphi\colon G_{1,\tau_{h_1}} \to G_{2,\tau_{h_2}}$是李群态射，其中 $\mathbf{L}(\varphi)h_1 = h_2$和 $\varphi(e, \tau_{h_1}) = (e, \tau_{h_2})$。则可得到一个自然映射

$$\varphi^{\mathcal{W}}\colon \mathcal{W}_+^{G_1} = G_1.(h_1, \tau_{h_1}) \to \mathcal{W}_+^{G_2} = G_2.(h_2, \tau_{h_2}), \quad (x, \sigma) \mapsto (\mathbf{L}(\varphi)x, \varphi(\sigma)).$$

若 $(U_j, \mathcal{H}_j)_{j=1,2}$ 是 $G_{j,\tau_{h_j}}$ 的反酉表示，且 $\Phi\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ 是酉算子，并满足 $U_2 \circ \varphi = \Phi \circ U_1(\cdot) \circ \Phi^{-1}$，则相应的 *BGL* 网满足

$$\mathsf{H}_{U_2}^{\mathrm{BGL}} \circ \varphi^{\mathcal{W}} = \Phi \circ \mathsf{H}_{U_1}^{\mathrm{BGL}}\colon \mathcal{W}_+^{G_1} \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H}_2). \tag{3.8}$$

证明。 根据定义即可轻松得出证明。由于 (3.8) 两边均关于表示 G_1- 协变，且该表示 $U_2 \circ \varphi$ 作用于 G_1 上的 $\mathcal{H}_2$，只需验证两边在 $W_1 = (h_1, \tau_{h_1})$ 上取值相同。左侧的映射对应标准子空间$\mathtt{V}_L$ 及其模对象

$$\Delta_L := e^{2\pi i\cdot \partial U_2(h_2)} \quad \text{and} \quad J_L = U_2(\varphi(\tau_{h_1})) = U_2(\tau_{h_2}).$$

对于右侧的映射，我们得到标准子空间 $\mathsf{V}_R = \Phi(\mathsf{V}_1)$，其中

$$\Delta_1 := e^{2\pi i\cdot\partial U_1(h_1)} \quad \text{and} \quad J_1 = U_1(\tau_{h_1}).$$

因此，结论由

$$\Phi\Delta_1\Phi^{-1} = e^{2\pi i\cdot\partial U_2(h_2)} \quad \text{and} \quad \Phi J_1\Phi^{-1} = U_2(\tau_{h_2}). \qquad \square$$

注 3.8. (a) 若 $(U,\mathcal{H})$ 是 G_{τ_h} 的反酉表示，且其核为离散的，并且 $G := G/\Gamma$，对于一个离散中心子群 $\Gamma \subseteq \ker(U)$，满足 $\tau_h(\Gamma) = \Gamma$，那么商映射 $\varphi\colon G \to G$ 满足 $\mathrm{L}(\varphi) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$（若以自然方式识别两个群的李代数）。此时命题 3.7 适用于 φ，并给出一个自然映射 $\varphi^{\mathcal{W}}\colon \mathcal{W}_+^G \to \mathcal{W}_+^G$，使得

$$\mathsf{H}_{\underline{U}}^{\mathrm{BGL}} \circ \varphi^{\mathcal{W}} = \mathsf{H}_U^{\mathrm{BGL}},$$

且表示 $U(g\Gamma) := U(g)$ 是良定义的，并满足 $U = U\circ\varphi$，由定理 3.13 得出。(b) 前述构造尤其适用于 $\Gamma = \ker U$，只要 $\ker U$ 是离散的。

引理 3.9。设 G_1 和 G_2 是具有相同李代数 $\mathfrak{g}$ 的连通李群，且 $h \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 使得 τ_h 可积分为 G_1 和 G_2。若 $\varphi\colon G_{1,\,\tau_h} \to G_{2,\,\tau_h}$ 是一个具有离散核 $D \subseteq Z(G_1)$ 的覆盖态射，并且 $(U,\mathcal{H})$ 是 $G_{1,\,\tau_{h_1}}$ 的反酉表示，那么 *BGL* 网 $\mathsf{H}_U\colon \mathcal{W}_+^{G_1} \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H})$ 可经由一个映射分解

$$\overline{\mathsf{H}}_U\colon \mathcal{W}_+^{G_2} \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H}) \quad \textit{with} \quad \overline{\mathsf{H}}_U \circ \varphi^{\mathcal{W}} = \mathsf{H}_U$$

当且仅当

$$\partial_h(G_1^{h_1}) \cap D = Z_2(G_1) \cap D \subseteq \ker(U). \tag{3.9}$$

证明。我们考虑由 φ 诱导的 G_1 在 $\mathcal{G}_E(G_{2,\,\tau_{h_2}})$ 上的作用。于是，$(h_2,\ \tau_{h_2}) \in \mathcal{G}_E(G_{2,\,\tau_{h_2}})$ 在 G_1 中的稳定子为

$$G_1^{(h_2,\tau_{h_2})} = \{g \in G_1^{h_1} : \partial_h(g) \in D\}. \tag{3.10}$$

BGL 网 H_U 在 $\mathcal{W}_+^{G_1}$ 上通过一个映射分解为 $\mathcal{W}_+^{G_2} \cong G_2/G_2^{(h_2,\tau_{h_2})}$ 当且仅当 $G^{(h_2,\tau_{h_2})}$ 1 固定 H_U（h_1，τ_{h_1}）。由（3.10），这意味着，对于 $g \in G_1^{h_1}$ 满足 ∂_h（g）$\in D$，我们有 ∂_h（g）$\in \ker(U)$。这就是（3.9）。 $\square$

由于（3.9）左侧可能是 D 的真子群，这个条件**并不**意味着 $D \subseteq \ker(U)$，也就是说，U 可经由 $G_{2,\tau_{h_2}}$ 的反酉表示分解。我们只需要交集 $Z_2(G_1)\cap D$ 包含于 $\ker(U)$。然而，如果 $D \subseteq Z_2(G_1)$ 且 $D \subseteq \ker U$，那么 U 可经由 G_2 分解。

3.2 标准子空间网的结果

在存在对称欧拉元的情况下，以下定理由谱条件推导出 Bisognano–Wichmann 性质以及保序协变中心扭曲局域标准子空间网的中心扭曲 Haag 对偶性。我们进一步假设，$\mathrm{Ad}^{\varepsilon}(G_{\tau_h})$-不变锥 C 在适当意义下是“大的”，其具体含义将在下文说明。

定理 3.10。（几何 Bisognano–Wichmann 定理）设 H: $\mathcal{W}_+ \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H})$ 是满足 (Iso), (Cov), (SC),(CTL) 的标准子空间网。假设锥 $C_\pm = \pm C \cap \mathfrak{g}_{\pm 1}$ 具有内点，且 $\mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}]$，并且$\ker U$是离散的。进一步假设，对于某个 $\alpha \in Z(G)^-$，$W_0'^{\alpha} \in \mathcal{W}_+$，即 h 是对称的。则 *Bisognano–Wichmann* 性质（BW）和扭曲 *Haag* 对偶性（CTHD）成立。

证明。 对于 $W = (x,\ \sigma) \in \mathcal{W}_+$，我们定义映射

$$z_W : \mathbb{R} \to \mathrm{U}(\mathcal{H}), \quad z_W(t) := \Delta_{\mathsf{H}(W)}^{it} U(\exp(2\pi t x))$$

若 $g \in G^W$，则根据协变性 $U(g)$ 与 z_W对易。根据协变性 (Cov) 和引理 A.4，$\Delta_{\mathsf{H}(W)}^{it}$与 $U(\exp(2\pi t x))$对易，因此 z_W定义了一个单参数群。

设 $y \in C_\pm$，从而 $\mp i\partial U(y) \geq 0$由 (SC) 得出，因此 $U(\exp ty)\mathsf{H}(W_0) \subseteq \mathsf{H}(W_0)$ 对于 $t \geq 0$由 (Iso/Cov) 得出。因此，Borchers–Wiesbrock 定理 A.6 推出以下关系

$$\Delta_{\mathsf{H}(W_0)}^{-it/2\pi} U(\exp y) \Delta_{\mathsf{H}(W_0)}^{it/2\pi} = U(\exp e^{\pm t} y).$$

Thus

$$U(\exp th) U(\exp y) U(\exp th)^{-1} = U(\exp e^{\pm t} y)$$

这表明 z_{W_0} 与 $\exp(C_\pm)$ 对易，因此 $\mathfrak{g}_{\pm 1} = C_\pm - C_\pm$ 意味着它与 $G_{\pm 1}$对易。根据假设，$\mathfrak{g}$ 由 $\mathfrak{g}_{\pm 1}$生成。因此，由两个子群 G_1 和 G_{-1} 生成的 G的弧连通（故由山边定理 [HN12，定理 9.6.1] 可积分）子群与 G重合，从而 $z_{W_0}(\mathbb{R}) \subseteq U(G)'$。根据协变性，这意味着对于 $g \in G$，$z_{g.W_0} = U(g) z_{W_0} U(g)^{-1} = z_{W_0}$，即 z_W不依赖于 W。对于满足 $W_0'^{\alpha} \in \mathcal{W}_+$的 $\alpha \in Z(G)^-$，这进一步导出

$$z_{W_0}(t)\mathsf{H}(W_0'^{\alpha}) = z_{W_0'^{\alpha}}(t)\mathsf{H}(W_0'^{\alpha}) = \mathsf{H}(W_0'^{\alpha}). \tag{3.11}$$

根据协变条件 (Cov)，两个子空间 $\mathsf{H}(W_0'^{\alpha})$ 和 $Z_\alpha \mathsf{H}(W_0)'$ 在 $U(\exp \mathbb{R}h)$ 下保持不变；根据 (3.11)，它们在模群 $\Delta_{\mathsf{H}(W_0)}^{i\mathbb{R}}$下也保持不变。现在，由 (CTL) 和引理 A.5 可知，两者相等，即 (CTHD)。

此外，$z_W = z_{W'^{\alpha}}$ 可得

$$z_{W'^{\alpha}}(t) = \Delta_{\mathsf{H}(W'^{\alpha})}^{it} U(\exp(-2\pi t x)) = \Delta_{\mathsf{H}(W)}^{-it} U(\exp(-2\pi t x)) = z_W(-t) = z_{W'^{\alpha}}(-t)$$

并且由于 $z_W = z_{W'^{\alpha}}$ 是一个单参数群，它是常数**1**。这意味着 (BW) 得以满足。

□

以下定理证明了一个标准子空间网的正则性，该网不一定是 BGL 网（参见 (3.6)）。基于欧拉元定理 3.5，BGL 网的正则性见 [MN24，第 4]节；另见 [BN25]和 [Ne26，§5。3]。

定理 3.11。 (正则性定理) 设 H: $\mathcal{W}_+ \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H})$ 是一个标准子空间的网。假设 $C_\pm = \pm C \cap \mathfrak{g}_{\pm 1}$ 生成 $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ 且$\ker U$ 是离散的。则有以下蕴含关系：

(a) (Iso)和 (Cov) 蕴含 (Reg)。

(b) (SC)、(BW) 和 $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}h + [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}]$ 蕴含 (Reg)。

证明。 (a) 假设 (Iso) 和 (Cov) 成立。由于锥 $C_\pm$ 在$\mathfrak{g}_{\pm 1}(h)$ 中具有非空内部，且$\mathbf{L}(G^{W_0}) = \mathfrak{g}_0(h)$，半群

$$S_{W_0} := \exp(C_+) G^{W_0} \exp(C_-)$$

具有一个内部点 s_0。设 $N \subseteq G$ 是一个满足 $N^{-1}s_0 \subseteq S_{W_0}$的单位元邻域。由 (Iso/Cov) 可得，对于 $g \in N$，有 $U(g^{-1}s_0)\mathsf{H}(W_0) \subseteq \mathsf{H}(W_0)$，因此$U(s_0)\mathsf{H}(W_0) \subseteq \bigcap_{g\in N} U(g)\mathsf{H}(W_0) = \mathsf{H}(W_0)_N$。

(b)：若满足 (SC) 和 (BW)，则 Borchers 定理 A.6 意味着 t

$$\exp(C_+)\exp(\mathbb{R}h)\exp(C_-) \subseteq S_{\mathsf{H}(W_0)} := \{g \in G\colon U(g)\mathsf{H}(W_0) \subseteq \mathsf{H}(W_0)\}.$$

因此，李楔 $\mathbf{L}(S_{\mathsf{H}(W_0)})$ 包含 $C_\pm$ 和 h。由于 $C_\pm$ 张成 $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ 和 $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}h + [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}]$，由 $\mathbf{L}(S_{\mathsf{H}(W_0)})$ 生成的李代数与 $\mathfrak{g}$相同。因此，根据 $S_{\mathsf{H}(W_0)}$，由 [HN93 定理 3 可知其具有内部点。8]现在，(Reg) 可如 (a) 中所述推出。 □

注 3.12。(a) 锥 $C_\pm$ 在 $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ 中具有非空内部，或者等价地说，它们生成 $\mathfrak{g}_{\pm 1}$，当 $\mathfrak{g}$是厄米单李代数时，这些条件成立。事实上，对于任意这样的李代数，都存在一个非平凡的尖闭凸锥 $C \subset \mathfrak{g}$，它在 Inn($\mathfrak{g}$) 作用下不变（[MN21, 命题 3.11(a)]）。此时 $C \cap -C$和 $C - C$是 ad $\mathfrak{g}$-不变子空间；由于 $\mathfrak{g}$ 是单的，C 是尖的且生成整个空间。于是，投影 $p_{\pm 1}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\pm 1}$ 满足$C_\pm = p_{\pm 1}(C)$（依据 [N´OØ21，引理 3.2], ），因此两个锥 $C_\pm$ 在$\mathfrak{g}_{\pm 1}$中都具有非空内部。含有欧拉元的厄米实单李代数列于附录 A.1 的表 2 中。

(b) 锥 $C_\pm$ 生成 $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ 的条件不适用于庞加莱群。事实上，在这种情况下，$C = V_+$ 和 $\mathfrak{g}_1 \cap C$ 是一条无法生成 $\mathfrak{g}_1$的半直线。特别是，上述论证不适用于庞加莱协变的标准子空间网。 [Mo18]给出了庞加莱协变标准子空间网的 Bisognano–Wichmann 性质的代数证明。德西特空间上的洛伦兹协变标准子空间网也不属于这一框架，因为在这种情况下 $C = \{0\}$，所以生成性质不成立。另一方面，对于闵可夫斯基空间共形群 PSO$2,d(\mathbb{R})_e$ 的李代数，以及手征圆的 M¨obius 群 M¨ob（情形 $d = 1$），该条件均成立。它们的李代数是简单厄米的。从这个意义上说，定理 3.10 推广了 [BGL93、Lo08、DLR07] 中的共形 Bisognano–Wichmann 定理。

在我们的语境中，以下自旋–统计定理是正则性和协变性的结果；二者意味着，所考虑的网 H 是 U 的某个反酉扩张的 BGL 网。

定理 3.13。（标准子空间网的自旋–统计定理）设

$$\mathsf{H}\colon \mathcal{W}_+ \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H})$$

是酉表示 $(U,\mathcal{H})$ 对应的正则标准子空间网，其中 G满足 (BW) 条件。假设 U 具有离散核，且 h 是对称的。那么，H 也满足 (CTL)、(HK6)-(HK8) 和 (SS)，并且 H 与由 U 的反酉扩张所指定的 *BGL* 网 $\mathsf{H}\widetilde{U}$ 一致，该扩张由 $U(\tau_h) := J_{\mathsf{H}(W_0)}$指定。

证明。 由 (Reg)、定理 3.5和注 3.6， U可扩张为反酉表示 $\widetilde{U}$，其作用于 G_{τ_h}，使得 $\mathsf{H}(W_0)$ 是标准子空间 $\mathrm{Fix}(Je^{\pi i\cdot\partial U(h)})$，其中 $J=\widetilde{U}(\tau_h)$。于是$\mathsf{H}(W_0)$ 是由 BGL 构造与 (h,τ_h) 相关联的标准子空间

$$\mathsf{H}_{\widetilde{U}}(x,\sigma)=\mathrm{Fix}(\widetilde{U}(\sigma)e^{\pi i\cdot\partial U(x)}) \tag{3.12}$$

由（3.6）。网 H和 $\mathsf{H}\widetilde{U}$的协变性因此意味着 $\mathsf{H}=\mathsf{H}\widetilde{U}$在整个$\mathcal{W}_+ = G.W_0$上成立。因此 [MN21，定理 412] 适用。由于 h 是对称的，(SS)、(CTL) 和 (CTHD) 可由 [MN21，命题 4 16], 推出，其中这些性质包含在 (HK4) 和 (HK6) 中。 □

注记 3.14。 (a) 根据注记 3.12，若 $\mathfrak{g}=\mathbf{L}(G)$ 是厄米单李代数，则锥$C_\pm$ 在 $\mathfrak{g}_{\pm1}$中有内点。此外，根据 $h\in\mathfrak{g}$，每个欧拉元都是对称的 [MN21，命题 3.11(b)]。若 H 是满足定理 3.10假设的标准子空间网，则条件 (BW) 和 (CTHD) 均成立，并且定理 3.11(a) 保证 H 也满足 (Reg)。因此，定理3.13 的所有假设均已满足，且 (HK7)、(HK8) 以及 (SS) 条件也成立。

（b）对 h 的对称性这一假设在定理3.13中至关重要。如果 h 不具有对称性，那么对 $W'^{\alpha}\notin\mathcal{W}_+$ 任意 $\alpha\in Z(G)^-$均成立，因此（CTL）、（SS）和（HK6-8）的假设永远无法满足，该陈述也就变得空泛。

（c）给定群 G_{τ_h} 的反酉表示 U，则对于一大类李群 G，BGL 网（3.12）是正则的。事实上，如果 G 是半直积 $G=N\rtimes L$，其中 L 为约化群，那么当 $C_U\cap\mathfrak{n}_{\pm1}(h)$ 在 $\mathfrak{n}_{\pm1}=\mathrm{L}(N)\cap\mathfrak{g}_{\pm1}$ 中生成时，正则性成立（[MN24，定理 4.11，推论 4.24]）。另见 [BN25]和 [Ne26，第 5.3] 节，了解这一方向上的更多结果。

(d) 设 $(G,\ \mathcal{W}_+,\ U,\ \mathsf{H})$ 是一个满足 (HK1)-(HK8)、(Reg) 和 (SS) 的标准子空间网。于是我们有 $Z_\alpha^2=U(\alpha)$。这里的 Z_α 远非唯一。例如，若 $T\in\mathcal{Z}(U(G_{\tau_h})')$ 是一个酉对合，那么 $Z'_\alpha := Z_\alpha T\in U(G)'$ 也满足 (CTL)、(SS)、(CTHD)：

$$JZ'_\alpha J=Z_\alpha^{-1}T=Z_\alpha^{-1}T^{-1}=T^{-1}Z_\alpha^{-1}=(Z'_\alpha)^{-1}$$

以及 $(Z'_\alpha)^{\,2}=Z_\alpha^2T^2=U(\alpha)$。

如果酉表示 $U|_G$ 是不可约的，那么

$$U(G)' \cap \mathrm{U}(\mathcal{H}) = \mathbb{T}\mathbf{1} \quad \text{and} \quad U(G_{\tau_h})' \cap \mathrm{U}(\mathcal{H}) = \{\pm\mathbf{1}\},$$

因此，选择 Z_α 时唯一的歧义在于，我们可以将 Z_α 替换为 $-Z_\alpha$。

注 3.15. 注意，对于商群$G := G/\Gamma$，若 $\Gamma \subseteq Z(G)$是离散的，则其补抽象楔形$(W_0^G)' = (-h, \tau_h)$可能包含于 $\mathcal{W}_+^G$，即使 $W_0' \notin \mathcal{W}_+^G$。

例如，考虑 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$和 $\Gamma = Z(G) = \{\pm\mathbf{1}\}$。根据 [MN21, Ex. 2.10(e)], $W'^{-1} = (-h, -\tau_h) \in \mathcal{W}_+^G$，但 $W' = (-h, \tau_h) \notin \mathcal{W}_+^G$。另一方面，对于 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$，我们有$(-h, \tau_h) \in \mathcal{W}_+^G$。在此情形下，商映射 $q\colon G \to G$ 诱导出齐性 G-空间 $\mathcal{W}_+^G \to \mathcal{W}_+^G$ 之间的双射 $q^{\mathcal{W}}$。这里 $-\mathbf{1} \in G$在 $\mathcal{W}_+^G$上平凡作用，因此 G-作用可分解为 G的作用。

推论 3.16. 假设锥 $C_\pm$ *span* $\mathfrak{g}_{\pm 1}$。设 $(U, \mathcal{H})$ 是 G 的酉表示，且具有离散核，并设 $\mathsf{H}: \mathcal{W}_+ \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H})$ 是满足(HK1)-(HK4)的标准子空间网。那么，H就是 *BGL* 网 $\mathsf{H}^{\tilde{U}}$，它与 U 的反酉表示相关联，该表示是G_{τ_h}的延拓，并由 $U(\tau_h) = J_{\mathsf{H}(W_0)}$给出。

证明。 由于定理 3.10 和 3.11(a) 适用，定理3.13 的假设成立，因此 (HK5)-(HK8)、(SS) 和 (Reg) 均得到满足。这就推出了该推论。 □

注 3.17. 在推论 3.16的背景下，由注 3.8可知，对于 G: $G/\ker(U)$，标准子空间网 $(\mathcal{W}_+^G, U)$ 是反酉表示 U的 BGL 网，该表示作用于 $G_{\tau_h} \cong G_{\tau_h}/\ker(U)$。特别地，$\mathsf{H}$ 满足 (HK1)-(HK8)、(Reg) 和 (SS)。

例 3.18. 设 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})(= \mathrm{M\ddot{o}b} \times \mathrm{M\ddot{o}b})$，其中 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的万有覆盖。其李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 是半单的。设 $C \oplus C \subseteq \mathfrak{g}$是一个 G-不变锥，其中 C 是 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 中一个非平凡的 $\mathrm{Ad}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$-不变锥。设 $h = h_1 \oplus h_2 \in \mathfrak{g}$ 是一个对称欧拉元，其中 $h_1, h_2 \neq 0$，令 G_{τ_h}为相应的扩张，并且 $W_0 = (h, \tau_h) \in \mathcal{W}_+$。设 U 是 G 的一个酉表示，其核为离散核，且满足谱条件 (SC)。设 $\mathsf{H}: \mathcal{W}_+ = G.W_0 \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H})$ 是一个满足 (HK1)-(HK4) 的标准子空间网。由于 $C_\pm$ 生成 $\mathfrak{g}_{\pm 1}$，定理 3.10 和 3.11 通过定理 3.13 表明，(HK5)-(HK8)、(SS) 和 (Reg) 也成立。

特别地，G_{τ_h} 是与该酉表示相关联的 BGL 网：$= \ker U$在 τ_h下保持不变。考虑到注 3.8(b)，我们定义 H 为作用在 $\mathcal{W}_+^G$ 上、与 $\tilde{U}$相关联的 BGL 网，它满足 (HK1)-(HK8)、(Reg) 和 (SS)。

这完全刻画了抽象楔形空间 $\mathcal{W}_+$ 上中心的、扭曲局域且等调的标准子空间网 U，这些网关于某个覆盖群的忠实正能量表示协变 G，该覆盖群是共形群 $\mathrm{PSO}_{2,2}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的覆盖群$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$：每个这样的网都是相应协变表示的 *BGL* 网 U 扩展到 G_{τ_h}，其方式为$U(\tau_h) = J_{\mathsf{H}(W_0)}$。

以下定理表明，任意两个中心互补楔形区 W'^{α} 和 W'^{β} 在 $\mathcal{W}_+$ 中都可以通过初等步骤相互转化；这些步骤对应于从一个正交对（h， k）转到另一个正交对（h， k'）。

定理 3.19。 (扭转生成定理) 设 $(G, \mathcal{W}_+, U, \mathsf{H})$ 是具有 *Bisognano–Wichmann* 性质(BW)的标准子空间正则网，且 U 具有离散核。令$W_0 = (h, \tau_h)$ 和 $W_0'^{\alpha} = (-h, \alpha\tau_h) \in \mathcal{W}_+ = G.W_0$。

那么存在欧拉元 $k_1, \ldots, k_n$，与 h正交，使得 $\alpha = \zeta_1 \cdots \zeta_n$，其中$\zeta_j := \zeta_{h,\, k^j} \in Z_3(G) \subset Z(G)$，且(3.3) 以如下形式成立

$$\mathsf{H}(W_0'^{\alpha}) = Z_{\zeta_1} \cdots Z_{\zeta_n} \mathsf{H}(W_0)' \quad with \quad Z_{\zeta_j}^2 = U(\zeta_j). \tag{3.13}$$

由协变性可知，对于 $\mathcal{W}_+$ 中任意一对中心补的楔形区域 W'^{α} 和 W，都有类似的关系成立。

证明。 网 H 满足定理 3.13的假设，特别是 (SS) 成立。由定理 2.5，存在欧拉元 k_j，与 h正交，使得 $\alpha = \zeta_{h,\, k_1} \cdots \zeta_{h,\, k_n}$。这几对 h， k_j 生成子代数 $\mathfrak{s}_j \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$，并且 $\zeta_{h,\, k_j} \in Z(S_j)$ 对应于积分子群 $S_j \subseteq G$，因此 (3.13) 可由 (SS) 得出。 □

4 因果时空上的标准子空间网

现在我们介绍几何自旋–统计定理和比萨诺–维奇曼定理在 $1{+}2$ 维闵可夫斯基空间中的标准子空间网，以及具有共形对称性的 $1{+}1$ 维空间中的一些应用。关于闵可夫斯基时空的共形群 $\mathbb{R}^{1,\, d-1}$、共形李代数的欧拉元，以及庞加莱正群的无质量标量反酉表示 U ，请参阅附录 A.3 中的基本事实´ $\mathcal{P}_+$。

4.1 关于 1+2维闵可夫斯基空间

作为一个示例，我们现在说明抽象的自旋–统计定理如何应用于抽象欧拉楔设定下定义在 $1{+}2$ 维闵可夫斯基空间上的共形网。代数量子场论模型见 [GL95]。更高维闵可夫斯基空间上的共形网将在 [MN25] 中讨论。考虑 $\mathbb{R}^{1,2}$，即 $d := 1 + 2$ 维闵可夫斯基时空。结合 ˜附录 A.3，设 U 是 G_{τ_h} 的一个反酉表示，其中 G 是 $\mathrm{SO}^{2,3}(\mathbb{R})_e$ 的双重覆盖，并扩张了正向庞加莱群 $\mathcal{P}_+ \cong (\mathcal{P}_+^{\uparrow})_{\tau_h}$ 的无质量标量反酉表示 U。这里， $h \in \mathsf{L}(\mathcal{P}_+^{\uparrow})$ 是与林德勒楔区 $W_R = \{x \in \mathbb{R}^{1,2} : |x_0| < x_1\}$ 相关的推动变换单参数群的生成元。注意， G_{τ_h} 由注 3.6 定义，且 U 满足相对于尖锥 C 的谱条件；该尖锥由轨道 $\mathrm{Ad}(G)\mathsf{e}_0 \subset \mathfrak{g}$ 生成，其中 $\mathsf{e}_0 \in \mathsf{L}(\mathcal{P}_+^{\uparrow})$ 是时间平移的生成元。令 $W_h = (h, \tau_h) \in \mathcal{W}_+^{\mathcal{P}_+^{\uparrow}}$ 为如注

2.6 中与 π 相关的空间旋转在 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ 上的作用为 $r(\pi).W_h = W_h'$（与 $r(\pi)W_R = W_R'$ 一致）。特别地，$W_h' \in \mathcal{W}_+$。令

$$q_M\colon M^{(2)} := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \to M \tag{4.1}$$

是紧化闵可夫斯基时空 M 的双重覆盖，并且

$$\iota : \mathbb{R}^{1,2} \to M, \quad \iota(x) = \Big[\frac{1-\beta(x,x)}{2} : x_0 : x_1 : x_2 : -\frac{1+\beta(x,x)}{2}\Big] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{2,3}),$$

典范嵌入，其中 $\beta(x,y) = x_0y_0 - \mathbf{xy}$ 是 $\mathbb{R}^1$上的洛伦兹型，2 (例如参见 [GL96] 或 [MN25])。注意，此映射自然地提升到

$$\iota : \mathbb{R}^{1,2} \to M^{(2)}, \quad \iota^{(2)}(x) = \Big(\Big(\frac{1-\beta(x,x)}{2\delta(x)}, \frac{x_0}{\delta(x)}\Big), \Big(\frac{x_1}{\delta(x)}, \frac{x_2}{\delta(x)}, -\frac{1+\beta(x,x)}{2\delta(x)}\Big)\Big) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2,$$

其中

$$\delta(x) := \Big(x_0^2 + \Big(\frac{1-\beta(x,x)}{2}\Big)^2\Big)^{1/2} = \Big(x_1^2 + x_2^2 + \Big(\frac{1+\beta(x,x)}{2}\Big)^2\Big)^{1/2}.$$

记

$$q\colon G \to \mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{R})_e$$

表示商映射，并将 $\mathbf{L}(\mathcal{P}_+^\uparrow)$ 视为共形李代数$\mathfrak{so}_{2,\ 3}(\mathbb{R})$ 的一个李子代数。令 $T = \mathbb{R}\mathbf{e}_0 \subset \mathbb{R}^{1,2}$ 为时间轴上的点集，并

$$\overline{T} := \overline{\iota(T)} \subseteq M$$

为紧化时间线。对于固定 T 的变换子群 $\mathrm{M\ddot{o}b} \subset \mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{R})$，其逆像

$$\mathrm{M\ddot{o}b}^{(2)} = q^{-1}(\mathrm{M\ddot{o}b})$$

是 $\mathrm{M\ddot{o}b}$ 的连通双重覆盖，参见附录 A.3。事实上，记 $\rho(\theta))_{\theta\in\mathbb{R}}$ 为 $\mathrm{M\ddot{o}b}$ 中的一参数旋转群，并记 $\widetilde{\rho}$ 为提升 G 的一参数群 ρ，则

$$Z(G) = \{e, \alpha\} \simeq \mathbb{Z}_2, \quad \text{where} \quad \alpha = \widetilde{\rho}(2\pi)$$

是二重覆盖 $\mathrm{M\ddot{o}b}^{(2)} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 中的 2π-旋转。由于 U，因此 $\widetilde{U}$ 也不可约 $\widetilde{\ }$，且 $\alpha \in Z(G)^-$ 是一个对合，$U(\alpha) = -\mathbf{1}$。

设 H_U 和 $\mathrm{H}_{\widetilde{U}}$ 分别为 $\mathcal{W}_+^{\mathcal{P}_+^\uparrow} \subset \mathcal{W}_+^G$，并且 BGL 网 H_U 延拓至 $\mathrm{H}_{\widetilde{U}}$（命题 3.7 和注 3.6(b)）。特别地，对于每个楔形区域 $W \in \mathcal{W}_+^{\mathcal{P}_+^\uparrow}$，我们有 $W' \in \mathcal{W}_+^{\mathcal{P}_+^\uparrow}$（见注 2.6），根据等变性，$W \in \mathcal{W}_+^G$也蕴含 $W' \in \mathcal{W}_+^G$。由 $Z_2(G) = Z_3(G)$ 以及 (2.8)，W_h的两个补集 W'和 W'^α 都包含于 $\mathcal{W}_+^G$ 中，因为

$$Z(G) = Z(G)^- = Z_2(G) = Z_3(G) \cong \mathbb{Z}_2.$$

由 BGL 构造，我们得到扭曲对偶关系：

$$\mathsf{H}_{\widetilde{U}}(W_h'^{\alpha}) = i\mathsf{H}_{\widetilde{U}}(W_h)', \qquad \mathsf{H}_{\widetilde{U}}(W_h') = \mathsf{H}_{\widetilde{U}}(W_h)', \tag{4.2}$$

因为

$$\Delta_{\mathsf{H}_{\widetilde{U}}(W_h^{\alpha})} = \exp(2\pi i \cdot \partial U(h)) \quad \text{and} \quad J_{\mathsf{H}_{\widetilde{U}}(W_h^{\alpha})} = U(\alpha) J_{\mathsf{H}_{\widetilde{U}}(W_h)} = -J_{\mathsf{H}_{\widetilde{U}}(W_h)}.$$

因此，我们可以令 $Z_\alpha = i\mathbf{1}$ （但 $Z_\alpha = -i$ 也满足关系 $Z_\alpha^2 = -\mathbf{1}$）以及 $Z_{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$。

我们将把抽象欧拉楔及其局域性与二重覆盖空间中的区域之间更明确的对应关系留待以后讨论 $M^{(2)}$。这里只需指出，给定一个抽象楔形 $W = (h,\ \tau)$，存在 g_1 和 g_2 属于 G，使得 $g_2 W = W'$，且 $g_1 g_2 W = g_1 W' = W^{\alpha}$，其中 $W^{\alpha} = (h,\ \alpha\tau)$。$g_1 g_2$ 在 $M^{(2)}$ 上的几何作用对应于 [GL96]中的“螺旋位移”。我们将在即将发表的论文 [MN25]中更一般地描述共形理论。

与 W_R 和 相对应的欧拉元 $h = h_1$ 和 h_2

$$W_2 = \{x \in \mathbb{R}^{1,2} : |x_0| < x_2\},$$

分别（参见 (2.21)），彼此正交，而由 h_1 和 h_2 生成的李代数为 $\mathsf{L}(\mathcal{L}_+^{\uparrow}) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$。对于限制 $U|_{\mathcal{L}_+^{\uparrow}}$，算子 $i\partial U([h_1, h_2])$ 根据 [GL95，命题 1.6] 并非半有界。因此，$[h_1, h_2] \notin -C \cup C$，且欧拉元的正交对 (h_1, h_2) 是类空的（参见第 2.4 节）。事实上，正交类空对 $(h, \pm h_2)$ 与附录 A.3 中的类空对 $(h_{-1}, 2, \pm h_{-1}, 1)$ 是 G-共轭的。

我们将嵌入 $\mathsf{M\ddot{o}b} \hookrightarrow \mathsf{SO}_{2,3}(\mathbb{R})$ 视为固定“时间圆”T 的子群。相应的李子代数 $\mathfrak{mob} \subseteq \mathfrak{so}_{2,3}(\mathbb{R})$ 同构于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$。沿用示例 2.3 中的记号，单参数群 $\exp(th_0)$（对应于附录 A.3 中的 $\exp(th_{-1,\ 3})$）在 $\mathbb{R}^{1,\ 2}$ 上通过伸缩变换作用：

$$\delta(t)x := \exp(th_0)x = e^t x \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{1,2}.$$

这里 $h_0 \in \mathcal{O}_h$ 是 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 中的一个欧拉元，其正性域为

$$V_+ = \{x \in \mathbb{R}^{1,2} : x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 > 0, x_0 > 0\}.$$

欧拉元 $k_0 \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 对应于具有如下正性域的共形向量场

$$O = \left\{x \in \mathbb{R}^{1,2} : |x_0| + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\right\}.$$

按照 [HL82]，可以描述 $\exp(tk_0)$ 的几何作用（对应于附录 A.3 中的 $\exp(th_0,3)$）：子群 $\mathsf{M\ddot{o}b} \subseteq \mathsf{SO}_{2,3}(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^{2,3}$ 上的作用固定 e_1 和 $\mathsf{e}_{2,}$，并在 e_{-1}、e_0 和 e_3，张成的空间上有效作用，因此与 e_1-e_2 平面内的空间旋转对易（见 [BDL07，第 8.2] 节）。特别地，$\exp(\mathbb{R}k_0)$ 与空间旋转对易，因此只需描述它在 $\mathbb{R}^{1,2} \cong \iota^{(2)}(\mathbb{R}^{1,}2)$ 中的 x_0-x_1 平面上的作用，该平面映射

经由 $\iota^{(2)}$ 映到由方程 $x_2 = 0$ 指定的环面 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$。在坐标 $u_\pm = x_0 \pm x_1$ 中，我们有

$$\begin{aligned}\exp(tk_0)(u_+, u_-) &= \left(\frac{e^t(1+u_+)+u_+-1}{e^t(1+u_+)+1-u_+}, \frac{e^t(1+u_-)+u_--1}{e^t(1+u_-)+1-u_-}\right), \\ &= \left(\frac{\cosh(t/2)u_+ + \sinh(t/2)}{\sinh(t/2)u_+ + \cosh(t/2)}, \frac{\cosh(t/2)u_- + \sinh(t/2)}{\sinh(t/2)u_- + \cosh(t/2)}\right), \qquad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

手征坐标的公式也出现在 [LM24]。元素 h_0 和 k_0 生成$\mathfrak{mob} \subset \mathfrak{so}_{2,\,3}(\mathbb{R})$，且它们是正交欧拉元素。注意，限制 $U|_{\mathsf{M\ddot{o}b}^{(2)}}$ 具有正能量，并且这一对 $(h_0,\ k_0)$ 是正类时的，即 $[h_0, k_0] \in C$ 对应于一个正算子。同样，$(-h_0,\ k_0)$ 是负类时的。

4.2 关于二维共形网

本节将自旋–统计结果应用于二维共形模型。关于欧拉楔与实数直线的可容许区间之间的对应关系，我们参见示例 2.7 ，其中圆的万有覆盖为 $\mathbb{S}^1$。

设 $H = \mathcal{P}_+^\uparrow = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SO}^{1,1}(\mathbb{R})_e$ 为 $2d$-庞加莱群的单位连通分支，其 $\mathbb{Z}_2$-扩张为 $H_{\tau_h} \cong \mathcal{P}_+$。欧拉楔 $(h,\ \tau_h)$ 确定右楔形区域 W_R，如示例2.6所示。

考虑群嵌入 $H \hookrightarrow G$，其中 $G = \mathrm{M\ddot{o}b} \times \mathrm{M\ddot{o}b}$ 是 $G = \mathrm{M\ddot{o}b} \times \mathrm{M\ddot{o}b}$ 的万有覆盖，因此 $Z(G) = \widetilde{\rho}(2\pi\mathbb{Z}) \times \widetilde{\rho}(2\pi\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$，其中 $\widetilde{\rho}\colon\ \mathbb{R} \to G$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 中旋转群的提升。我们分别将中心元 $(\widetilde{\rho}(2\pi)\ e)$ 和 $(e, \widetilde{\rho}(2\pi))$ 与 $\mathbb{Z}^2$ 中的 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 对应起来。在方便时，我们将使用这一对应来描述 $Z(G)$ 的中心中的元素。$\mathfrak{h}$ 中的欧拉元对应于欧拉元 $h = (h_0, -h_0) \in \mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})^{\oplus 2}$（参见 (1.6)）。相应的对合在 $\widetilde{G}$ 上为 $\tau_h = \tau_{h_0} \times \tau_{h_0}$。

群 G 通过共形微分同胚作用于紧化的 $2d$-闵可夫斯基空间，其光线坐标 $u_\pm = x_0 \pm x_1$ 为

$$M^{1,1} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1,$$

其中 G的两个因子通过莫比乌斯变换作用。因此，群 G 自然作用于爱因斯坦宇宙

$$\widetilde{M}^{1,1} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

它也称为超世界（参见 [BGL93、LM75]）。我们用 $(\widetilde{u}_+,\ \widetilde{u}_-)$ 表示 $\widetilde{\ }$ 的自然手征坐标 M。我们将 H 与 G 的可积分子群相识别，其李代数为

$$\mathfrak{h} = (\mathbb{R}(e_0, 0) + \mathbb{R}(0, e_0)) \rtimes \mathbb{R}h,$$

其中 $[h_0, e_0] = e_0$，且 $\exp(te_0)$ 通过平移作用于 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}_\infty \cong \mathbb{S}^1$。然后，闵可夫斯基空间嵌入为开子集

$$M_0 := H.(0,0) = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \subseteq \widetilde{M}^{1,1} \tag{4.3}$$

~（参见示例（2.7）（a））。我们还有一个包含 $H_{\tau_h} \hookrightarrow G_{\tau_h}$，由此得到抽象楔形空间之间的自然包含

$$\mathcal{W}_+^H \hookrightarrow \mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}.$$

在 $\widetilde{M}^{1,1}$ 中，对应于欧拉元 $h=(h_0,-h_0)$ 的楔形区域在 $\widetilde{M}^{1,1}$ 中具有如下形式

$$\widetilde{I}_{2n} \times \widetilde{I}_{2m+1}, \quad n,m \in \mathbb{Z}$$

（参见示例（2.24）中的（2.7）（b））。相应地，$\widetilde{M}^{1,1}$ 中的楔形区域可与 $\widetilde{J}_1 \times \widetilde{J}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ 等同，其中两个区间的长度都小于 2π。

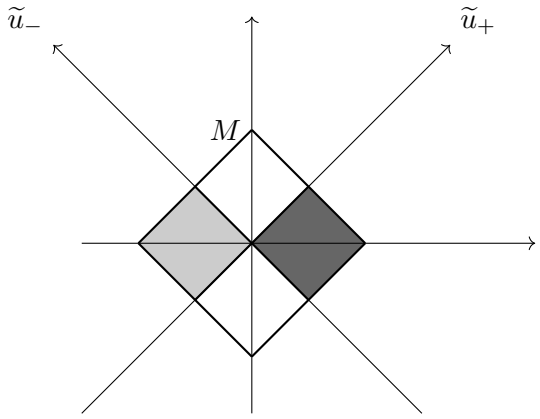


图 1：$\widetilde{M}^{1,1} = \mathbb{R}^2$ 中的闵可夫斯基空间 M_0。深灰色区域是林德勒楔区 W_R，浅灰色区域是左楔形区 W_L。

中心 $Z(\widetilde{G}) \cong \mathbb{Z}^2$ 由两个元素 (ζ_0, e) 和 (e, ζ_0) 生成，其中 $\zeta_0 = \exp(2\pi z_0) = \widetilde{\rho}(2\pi)$，而 (2.14) 中的 z_0 对应于手征坐标中的 2π-旋转。根据将 $\mathbb{R}^{1,1}$ 嵌入到 $\widetilde{M}_{1,1}$ 的（4.3），右林德勒楔区 $W_R \subseteq \mathbb{R}^{1,1}$ 对应于正方形

$$W_R = (0,\pi) \times (-\pi, 0),$$

及其因果对偶 $W_L = -W_R$ 对应于正方形

$$W_L = (-\pi, 0) \times (0,\pi).$$

因此，我们可以将齐性空间 $\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}$ 与 W_R 在 $\widetilde{G}$ 对 $\widetilde{M}^{1,\ 1} \cong \mathbb{R}^2$ 的作用下的轨道等同起来。类空旋转

$$r_s(\theta) := (\widetilde{\rho}(\theta), \widetilde{\rho}(-\theta)) = (\exp(\theta z_0), \exp(-\theta z_0)) \tag{4.4}$$

则满足

$$r_s(-\pi) W_R = W_L. \tag{4.5}$$

在抽象楔形层面上，

$$r_s(-\pi).(h,\tau_h) = (-h, r_s(-\pi)\tau_h r_s(\pi)) = (-h, r_s(-2\pi)\tau_h) = (-h, (\zeta_0^{-1}, \zeta_0)\tau_h). \tag{4.6}$$

$\widetilde{\ }$ W_R 的其他任一中心补 $z.W_L$ 均具有如下形式： $z \in Z$，其中某个G；而在抽象楔形层面上

$$(h,\tau_h)'^{\alpha} = (-h, \alpha(\zeta_0^{-1},\zeta_0)\tau_h), \quad \alpha \in Z_2(\widetilde{G}) = 2Z(\widetilde{G}).$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$设 U 是G_{τ_h}的反幺正正能量表示，且具有离散核。设$\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}} = \widetilde{G}.(h,\tau_h)$ 为欧拉楔形区域轨道，且 H 是 $\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}$上的标准子空间网，满足 (HK1)-(HK4)。由定理 3.11 和 (BW) 可得 (Reg)，由定理 3.10可得 (CTHD)。此外，根据定理 3.13，(HK5)-(HK8) 和 (SS) 成立；这尤其意味着，在 $\widetilde{\ }$中，$\mathsf{H} = \mathsf{H}_{\tilde{U}}$是 U的 BGL 网。因此得到以下结果：

命题 4.1。 设 $(\mathsf{H}(W))^{W\in\mathcal{W}_+^H}$是一个定义在$\sim 1+1$ 维时空上的庞加莱协变标准子空间网，满足 (HK1)-(HK3)，并可扩张为一个满足 (HK1)-(HK4) 的 G-协变标准子空间网。那么，扩张 $(\mathsf{H}(W))^{W\in\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}}$是表示 U *of* G_{τ_h} 的标准$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$子空间 *BGL* 网。

如果网 $(\mathsf{H}(W))^{W\in\mathcal{W}_+^H}$以 $\mathbb{R}^1$ 中的仿射楔形空间为指标，1 满足命题 4.1 的假设，那么扩张 $(\mathsf{H}(W))^{W\in\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}}$就是表示$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$的标准子空间的 BGL 网 U，其中 G_{τ_h}。特别地，根据 (SS) 条件，

$$Z_\alpha^2 = U(\alpha). \tag{4.7}$$

自旋–统计结果给出了对称群表示、互补楔形子空间之间的辛关系以及 Tomita 模算子之间的对应关系。

楔形空间 $\mathcal{W}_+ = \mathrm{Ad}(G)$。$\widetilde{\ }$$(h,\ \tau_h)$，对于 $h = (h_0,\ h_0)$，它是 $\mathcal{G}_E(\widetilde{G}_{\tau_h})$ 中四个轨道之一。对于$\widetilde{\ }$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，有两个轨道，由 $(\pm h_0,\ \tau_{h_0})$ 表示，它们在补集映射下互换。因此，对于 G，我们得到 4 个轨道，由以下对象表示：

$$((h_0,h_0),\tau_h), \quad ((-h_0,-h_0),\tau_h), \quad ((h_0,-h_0),\tau_h), \quad ((-h_0,h_0),\tau_h).$$

$\sim$对于 $h = (h_0,h_0)$， $\mathcal{W}_+^G$ 中各元素的扭曲中心补属于 $\alpha = (1,1)$ 下 $W'^{\alpha} = ((-h_0,-h_0)\ \alpha\tau_h)$ 的轨道。 $\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}$中各元素的所有其他扭曲中心补，均可通过中心 $Z(\widetilde{G}) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 中的元素作用得到，且这些元素包含于陪集中

$$(1,1) + (2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}) = \{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \colon n,m \ \ \text{odd}\}.$$

根据 (SS) 性质，(4.7) 给出了 $U(\alpha)$ 与 Z_α 之间的关系。特别地，给定$\mathsf{H}(W)$ 及其模算子 $J_{\mathsf{H}(W)}$和 $\Delta_{\mathsf{H}(W)}$，中心补 W'^{α}映射到标准子空间 $\mathsf{H}(W'^{\alpha}$，其对应的模算子为

$$J_{\mathsf{H}(W'^{\alpha})} = Z_\alpha J_{\mathsf{H}(W)} \quad \text{and} \quad \Delta_{\mathsf{H}(W'^{\alpha})} = \Delta_{\mathsf{H}(W)}^{-1}.$$

中心生成元 (1，0)、(0，1) 的酉表示可以用模共轭描述如下。考虑楔形区域（见图 2）

$$V_+ = (0,\pi)\times(0,\pi) \quad \text{and} \quad S_+ = (-\pi/2,\pi/2)\times(0,\pi).$$

结合（2.18），我们得到

$$J_{S_+}J_{\mathsf{H}(V_+)}J_{S_+}J_{\mathsf{H}(V_+)} = \widetilde{U}(\tau_{k_0}\tau_{h_0}\tau_{k_0}\tau_{h_0}, e) \overset{(2.18)}{=} \widetilde{U}(1,0).$$

类似地，可以验证，对于 $V_+ = (0,\pi)\times(0,\pi)$ 和 $S_- = (0,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)$，我们有 $J_{S_-}J_{\mathsf{H}(V_+)}J_{S_-}J_{\mathsf{H}(V_+)} = U(0,1)$（参见 [MT19]）。

备注 4.2。在命题 4.1 中，关于网 $(\mathsf{H}(W))^{W\in\mathcal{W}_+^H}$的假设不包括 (CTL)，也就是 (HK4)。这是因为 $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$中不存在对称欧拉元，因此对于任意 $W\in\mathcal{W}_+^H$，W'从不包含在 W的 H轨道中。另一方面，$\mathfrak{g}$ 中的每个欧拉元都是对称的，因此每个楔形 $W\in\mathcal{W}_+^G$ 在 $\widetilde{G}$的轨道中都有中心补。特别地，一旦将 $\mathcal{W}_+^H$识别为 $\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}$的子集，每个楔形 $W\in\mathcal{W}_+^H$在 $\mathcal{W}_+^G$中都有中心补，如 (4.5) 所示。

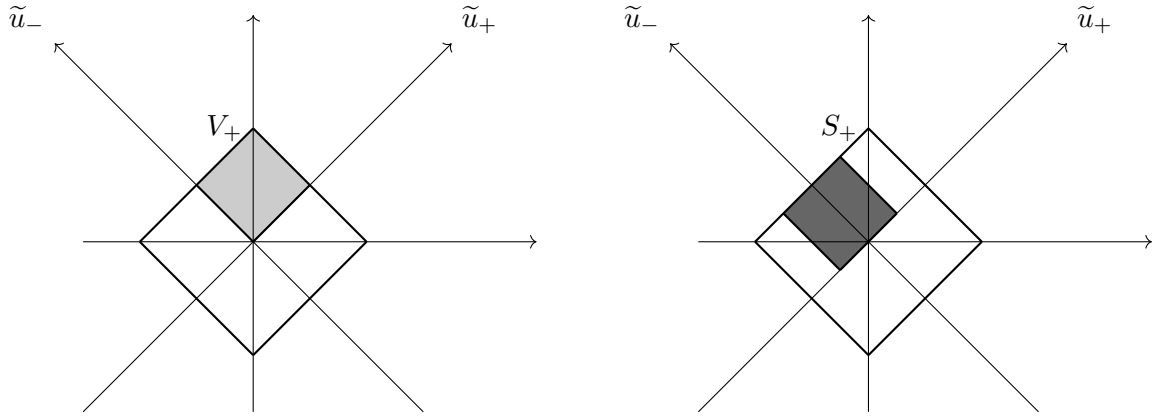


图2：浅灰色区域是未来光锥 V_+，深灰色区域是带状区域 S_+。两个楔形区域都包含在 M_0 中。

备注 4.3。(a) 在圆 $\mathbb{S}^1\cong\mathbb{R}_\infty$ 中，$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 中的欧拉元对应于非稠密开区间 I，这些区间是相关向量场在 $\mathbb{R}_\infty$上的正性区域，参见示例 2.7(a)。我们将 I' 记作 I 的补集的内部。

那么，h_0 和 k_0 对应于区间

$$I_{h_0} = (0,\infty) \quad \text{and} \quad I_{k_0} = (-1,1).$$

它们的补集为

$$I'_{h_0} = (-\infty, 0) \quad \text{and} \quad I'_{k_0} = (1, \infty) \cup \{\infty\} \cup (-\infty, -1).$$

欧拉元的正交对与区间的“正交对”相关联，因此共轭于其中一对

$$(I_{h_0}, I_{k_0}) \quad \text{or} \quad (I_{h_0}, I'_{k_0}).$$

更一般地，区间对应于一个与 h_0 正交的欧拉元，当且仅当它具有如下形式： $I_a := (-a,\ a)$，其中 $a > 0$为某个对象；或者是其补集 I'_a。

(b) 现在我们考虑二维闵可夫斯基空间 $M^{1,\ 1} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 的共形紧化 $\mathbb{R}^{1,\ 1}$，其中乘积结构对应于光线坐标（见第4.1节）。我们将对应于欧拉元$h_{-1,\ 2} = (h_0,\ h_0) \in \mathfrak{so}_{2,\ 2}(\mathbb{R})$ 的正性区域（菱形区域）记为 $\mathcal{D}_h \subseteq M^{1,\ 1}$。那么

$$\mathcal{D}_{(h_0,h_0)} = V_+$$

是正光锥，而

$$\mathcal{D}_{(h_0,-h_0)} = W_R, \quad \mathcal{D}_{(-h_0,h_0)} = W_L$$

是 $\mathbb{R}^{1,\ 1}$中的右/左林德勒楔区。在光线坐标中，这变为

$$\mathcal{D}_{(h_0,h_0)} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = V_+, \qquad \mathcal{D}_{(h_0,-h_0)} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_- = W_R, \quad \mathcal{D}_{(-h_0,h_0)} = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+ = W_L$$

（参见图1和2）。同理

$$\mathcal{D}_{(k_0,k_0)} = I_{k_0} \times I_{k_0}, \quad \mathcal{D}_{(k_0,-k_0)} = I_{k_0} \times I'_{k_0}, \quad \mathcal{D}_{(-k_0,k_0)} = I'_{k_0} \times I_{k_0}, \quad \mathcal{D}_{(-k_0,-k_0)} = I'_{k_0} \times I'_{k_0}$$

（参见图3）。

在手征坐标（$u_+,\ u_-$）下的闵可夫斯基空间中，由上述欧拉元生成的单参数群具有如下几何作用：

- $\exp(t(\ h_0,\ h_0))\ (u_+,\ u_-) = (e^t u_+,\ e^t u_-)$ 是 $\mathbb{R}^{1,1}$中的伸缩变换，1
- $\exp(t(-h_0, h_0))(u_+, u_-) = (e^{-t}u_+, e^t u_-)$ 是以 W_R 为正性区域的推动变换单参数群
- $\exp(t(k_0, k_0))(u_+, u_-) = \left(\frac{\cosh(t/2)u_+ + \sinh(t/2)}{\sinh(t/2)u_+ + \cosh(t/2)}, \frac{\cosh(t/2)u_- + \sinh(t/2)}{\sinh(t/2)u_- + \cosh(t/2)}\right)$ 是固定.....的共形提升

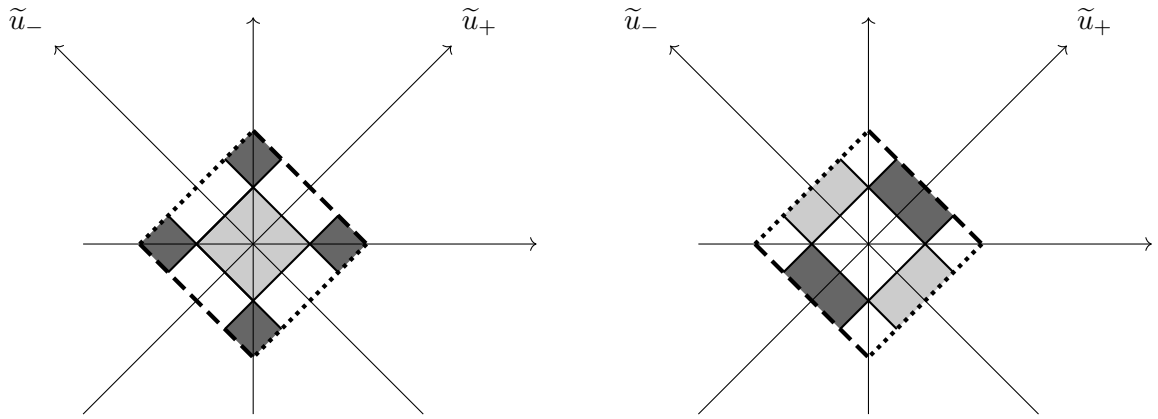
$$O = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^{1,1} : |x_0| + |x_1| < 1\} = \{(u_+, u_-) : |u_+| < 1, |u_-| < 1\}.$$

我们进一步指出，$((h_0, h_0), (k_0, k_0))$ 是一对正类时的欧拉正交对 $\sim$ 元素，生成 $\mathfrak{mob} \subseteq \mathfrak{so}_{2,\ 2}(\mathbb{R})$，且 $U|_{\sim}$ Mob satisfies 谱条件。此外

$$[\pm(h_0, -h_0), (k_0, k_0)] \notin \pm C \quad \text{and} \quad [(-h_0, -h_0), (k_0, k_0)] \in -C.$$

由引理A.2 及其后续讨论可知

$$\zeta_{(h_0,h_0),(k_0,k_0)} = (1, 0) \quad \text{and} \quad \zeta_{(h_0,h_0),(k_0,-k_0)} = (0, 1).$$



与 V_+类时正交　　与 V_+类空正交

图 3：通过分别识别$\backsim M_0 \subset M^{1,1}$的点线边和虚线边，可得到 $M^{1,1}$ 。在第一幅图中，深灰色区域为$\mathcal{D}_{(-k_0,-k_0)}$ ，浅灰色区域为$\mathcal{D}_{(k_0,k_0)}$。在第二幅图中，深灰色区域为$\mathcal{D}_{(-k_0,k_0)}$ ，浅灰色区域为$\mathcal{D}_{(k_0,-k_0)}$。

5 冯·诺伊曼代数网的应用

本节将说明，如何将上一节中推导出的关于标准子空间网的结果转述为冯·诺依曼代数网的结果。

5.1 冯·诺伊曼代数网的结果

我们从楔形空间上的冯·诺依曼代数网的定义出发，并说明它的一些性质。

定义5.1。 设 $G_{\tau_h} = G \rtimes \{e, \tau_h\}$ 和 $\mathcal{W}_+ = G.W_0 = G.(h,\ \tau_h) \subseteq \mathcal{G}_E(G_{\tau_h})$ 如上所述，且 $C \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个闭凸的 $\mathrm{Ad}^\varepsilon(G_{\tau_h})$-不变锥。我们用 $\mathrm{vNA}(\mathcal{H})$ 表示 $B(\mathcal{H})$ 的冯·诺伊曼子代数集合。设 $(U,\ \mathcal{H})$ 是 G 的酉表示，并且

$$\mathcal{A}\colon \mathcal{W}_+ \to \mathrm{vNA}(\mathcal{H}) \tag{5.1}$$

是一个映射，也称为冯·诺伊曼代数网。

我们考虑以下性质：

(HKA1) 等调性： $\mathcal{A}(W_1) \subseteq \mathcal{A}(W_2)$，其中 $W_1 \leq W_2$。

(HKA2) 协变性： $\mathcal{A}(gW) = U(g)\mathcal{A}(W)U(g)^{-1}$，其中 $g \in G$、 $W \in \mathcal{W}_+$。

(HKA3) **谱条件：** $C \subseteq C_U := \{x \in \mathfrak{g}\colon \ -i\partial U(x) \geq 0\}$.

(Vac) **真空性质：** $\mathcal{H}^G$ 的 G-不变向量空间是一维的，并包含一个单位向量 Ω；对于所有代数 $\mathcal{A}(W)$，Ω 都是循环且分离的。于是我们写作

$$\mathsf{H}(W) := \mathsf{H}_{\mathcal{A}(W),\Omega} := \overline{\mathcal{A}(W)_{sa}.\Omega}$$

对于相应的标准子空间，其中，对于一个 $*$-代数 $\mathcal{M}$，我们令

$$\mathcal{M}_{sa} := \{M \in \mathcal{M} \colon M^* = M\}.$$

(HKA4) 中心扭曲局域性： 对于每个满足 $W'^{\alpha} \in \mathcal{W}_+$ 的 $\alpha \in Z(G)^-$，都存在一个酉算子$Z_\alpha \in U(G)'$，满足 $Z_\alpha\Omega = \Omega$，$J_{\mathsf{H}(W)} Z_\alpha J_{\mathsf{H}(W)} = Z_\alpha^{-1}$，且使得

$$\mathcal{A}(W'^{\alpha}) \subseteq Z_\alpha \mathcal{A}(W)' Z_\alpha^*. \tag{5.2}$$

(HKA5)**Bisognano–Wichmann 性质：** $U(\exp(tx)) = \Delta_{\mathcal{A}\,W}^{-it/2\pi}()$. Ω 对于 $W = (x,\ \sigma) \in \mathcal{W}_+$ 且 $t \in \mathbb{R}$。

(HKA6) 中心扭曲 Haag 对偶性：对于每个满足 $W'^{\alpha} \in \mathcal{W}_+$ 的 $\alpha \in Z(G)^-$，我们有

$$\mathcal{A}(W'^{\alpha}) = Z_\alpha \mathcal{A}(W)' Z_\alpha^*$$

对于一个如 (HKA4) 中所述的酉算子 Z_α。

(HKA7) G_{τ_h}-协变性： 对于每个满足 $W'^{\alpha} \in \mathcal{W}_+$ 的 $\alpha \in Z(G)^-$，都存在一个扩张U^α，将 U 从 G 扩张为 G_{τ_h} 的反酉表示，使得

$$\mathcal{A}(g *_\alpha W) = U^\alpha(g)\mathcal{A}(W)U^\alpha(g)^* \quad \text{for} \quad g \in G_{\tau_h}, \tag{5.3}$$

其中 $*_\alpha$ 是 α-扭曲作用，作用对象为 G_{τ_h} 于 $\mathcal{W}_+$，定义见（3.5）。

(HKA8) **模反射：** (HKA7) 成立，并且扩张可以定义为 b y

$$U^\alpha(\tau_h) = Z_\alpha J_{\mathsf{H}(W_0)} \tag{5.4}$$

以及一个酉算子 Z_α，如（HKA4）所示。

(SSA) 自旋–统计： (HKA4) 成立，此外，$Z_\alpha^2 = U(\alpha)$。

还可以为冯·诺依曼代数网指定正则性性质：

(Reg) 正则性： 对于某个 e-邻域 $N \subseteq G$，向量 Ω 对冯·诺伊曼代数仍然是循环的（显然也是分离的）

$$\mathcal{A}(W_0)_N := \bigcap_{g \in N} U(g)\mathcal{A}(W_0)U(g)^{-1}.$$

我们将冯·诺伊曼代数网 记为四元组 $(G,\ \mathcal{W}_+,\ U,\ \mathcal{A})$，它由一个连通李群 G（其李代数 $\mathfrak{g}$ 含有一个欧拉元 h）、抽象欧拉楔 $W_0 = (h,\ \tau_h)$ 的轨道 $\mathcal{W}_+ = G.W_0 \subseteq \mathcal{G}(G_{\tau_h})$、$G$ 的酉表示 U，以及定义在楔集合 $\mathcal{W}_+$ 上、作用于固定希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的冯·诺伊曼代数网 $\mathcal{A}$ 组成。

现在，我们将 Bisognano–Wichmann 定理和自旋统计定理的类似结果应用于冯·诺伊曼代数网。

以下结果将是一个关键工具：

命题 5.2. ([Lo08，命题 3。24]) 设 $\mathcal{M}$ 是一个具有循环且分离向量Ω 及$\mathsf{H}_{\mathcal{M},\Omega} := \mathcal{M}_{\mathrm{sa}}\Omega$的冯·诺伊曼代数。则下列断言成立：

(a) 若 $\mathcal{N}_1$、$\mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{M}$ 是冯·诺伊曼子代数，且$\mathsf{H}_{\mathcal{N}_1,\Omega} \subseteq \mathsf{H}_{\mathcal{N}_2,\Omega}$，则 $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2$。

(b) 若 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}'$ 是冯·诺伊曼子代数，且$\mathsf{H}_{\mathcal{N},\Omega} = \mathsf{H}'_{\mathcal{M},\Omega}$，则 $\mathcal{N} = \mathcal{M}'$。

定理 5.3. (几何 Bisognano–Wichmann 定理) 设 $\mathcal{A}$: $\mathcal{W}_+ \to \mathrm{vNA}(\mathcal{H})$ 是一个满足(HKA1)-(HKA4)和(Vac)的冯·诺伊曼代数网。假设锥$C_\pm = \pm C \cap \mathfrak{g}_{\pm 1}$在 $\mathfrak{g}_{\pm 1}$中有内点，且 $\mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}]$，并且核 U 是离散的。进一步假设，对于某个 $\alpha \in Z(G)^-$，有 $W_0'^{\alpha} \in \mathcal{W}_+$，也就是说，$h$ 是对称的。则 *Bisognano–Wichmann* 性质(HKA5) 和扭曲 *Haag* 对偶性(HKA6) 成立。

证明。 考虑标准子空间网

$$\mathsf{H}_{\mathcal{A}} : \mathcal{W}_+ \to \mathrm{Stand}(\mathcal{H}), \quad \mathsf{H}_{\mathcal{A}}(W) := \mathsf{H}_{\mathcal{A}(W),\Omega} = \overline{\mathcal{A}(W)_{sa}\Omega},$$

因此，对于任意 $W \in \mathcal{W}_+$，我们有 $\Delta_{\mathsf{H}_{\mathcal{A}}(W)} = \Delta_{\mathcal{A}(W),\,\Omega}$ 以及 $J_{\mathsf{H}_{\mathcal{A}}(W)} = J_{\mathcal{A}(W),\,\Omega}$。

标准子空间网（G，$\mathcal{W}_+$，U，$\mathsf{H}_{\mathcal{A}}$）满足定理 3.10的所有假设，因此（HKA5）成立，并且

$$\mathsf{H}_{\mathcal{A}}(W_0'^{\alpha}) = Z_\alpha \mathsf{H}_{\mathcal{A}}(W_0)'.$$

鉴于 $Z_\alpha\Omega = \Omega$，我们还有

$$\mathsf{H}_{Z_\alpha \mathcal{A}(W)' Z_\alpha^*,\Omega} = Z_\alpha \mathsf{H}_{\mathcal{A}(W)',\Omega} = Z_\alpha \mathsf{H}'_{\mathcal{A}(W),\Omega} = Z_\alpha \mathsf{H}_{\mathcal{A}}(W)' = \mathsf{H}_{\mathcal{A}}(W'^{\alpha}) = \mathsf{H}_{\mathcal{A}(W'^{\alpha})}.$$

因此

$$\mathcal{A}(W'^{\alpha}) = Z_\alpha \mathcal{A}(W)' Z_\alpha^*$$

由命题 5.2可得。这就是（HKA6）。 □

可以类比定理3.11，为冯·诺伊曼代数陈述一个正则性定理：

定理 5.4. (冯·诺伊曼代数正则性定理) 设 $\mathcal{A}$: $\mathcal{W}_+ \to \mathrm{vNA}(\mathcal{H})$ 是一个满足 (Vac) 的冯·诺伊曼代数网。假设 $C_\pm = \pm C \cap \mathfrak{g}_{\pm 1}$ 生成 $\mathfrak{g}_{\pm 1}$，且 $\ker U$ 是离散的。那么有以下蕴含关系：

(a) (HKA1)，(HKA2)蕴含(Reg)。(b) (HKA3)，(HKA5) 和 $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}h + [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}]$ 蕴含(Reg)。

证明。(a) 如同正则性定理 3.11的证明中那样， S_{W_0} 有一个内部点 s_0 ，并且存在一个 e邻域 $N \subseteq G$ ，使得 $N^{-1}s_0 \subseteq S_{W_0}$。于是，由 (HKA1) 和 (HKA2)，我们有 $\mathrm{Ad}(U(g^{-1}s_0))(\mathcal{A}(W_0)) \subseteq \mathcal{A}(W_0)$，因此

$$\mathrm{Ad}(U(s_0))(\mathcal{A}(W_0)) \subseteq \bigcap_{s\in N} \mathrm{Ad}(U(s))(\mathcal{A}(W_0)).$$

因此，(Reg) 可由 (Vac) 得出。
(b) 若满足 (HKA3) 和 (HKA5)，则冯·诺依曼代数的 Borchers 定理（[Lo08b，定理 6.3。1]）蕴含

$$\exp(C_+)\exp(\mathbb{R}h)\exp(C_-) \subseteq S_{\mathcal{A}(W_0)} := \{g \in G\colon \mathrm{Ad}(U(g))\mathcal{A}(W_0) \subseteq \mathcal{A}(W_0)\}.$$

于是，如定理 3.11(b) 的证明中那样，$S_{\mathcal{A}(W_0)}$ 有内部点，而 (Reg) 可如 (a) 证明的第二部分那样得出。 □

定理 5.4不能直接由定理 3.11应用于标准子空间网 $\mathsf{H}_{\mathcal{A}}(W) = \mathcal{A}(W)_{sa}\Omega$ 得出。事实上，若 $\mathcal{B}$ 是一般楔形区域集合，则包含

$$\overline{\left(\bigcap_{W\in\mathcal{B}} \mathcal{A}(W)_{sa}\right)\Omega} \subseteq \bigcap_{W\in\mathcal{B}} (\overline{\mathcal{A}(W)_{sa}\Omega}) = \bigcap_{W\in\mathcal{B}} \mathsf{H}_{\mathcal{A}}(W)$$

c可能是严格的（参见 [LM24第 3.1 节和第 6 节中的讨论与例子。1]） .

定理 5.5。（冯·诺伊曼代数网的自旋–统计定理）令 t

$$\mathcal{A}\colon \mathcal{W}_+ \to \mathrm{vNA}(\mathcal{H})$$

是一个对应于酉表示$(U,\mathcal{H})$ 的冯·诺伊曼代数网，其中表示作用于 G，且满足(HKA1)-(HKA3)，(Vac),(Reg) 以及(HKA5)。假设 U 具有离散核，且 h 是对称的。那么 $\mathcal{A}$ 也满足(HKA4)、(HKA6)-(HKA8)和(SSA)，并且$\mathsf{H}_{\mathcal{A}}$ 是由 $U(\tau_h) = J_{\mathcal{A}(W_0),\Omega}$所指定的 U 的反酉扩张的 *BGL* 网 ~。

证明。考虑定义在 $\mathcal{W}_+$ 上的标准子空间网，由 $\mathsf{H}(W) := \mathcal{A}(W)_{sa}\Omega$ 给出。则 H 是满足 (BW) 的正则网。因此，定理 3.13 还推出 (CTL)、(HK6)-(HK8)，并且只要 $W'^{\alpha} \in \mathcal{W}_+$，关系 $Z_\alpha^2 = U(\alpha)$ 就由 (SS) 得出。由于 Z_α 与 $U(G)$ 对易，且根据 (Vac)，$\mathcal{H}^G = \mathbb{C}\Omega$ 是一维的，因此对于某个 $c \in \mathbb{T}$，有 $Z_\alpha\Omega = c\Omega$。由于 $U(\alpha)$ 保持 Ω 不变，我们得到 $c^2 = 1$，进而得到 $c \in \{\pm 1\}$。若 $c = 1$，则 Z_α 保持 Ω 不变；否则，我们将Z_α 替换为 $-Z_\alpha$，它保持 Ω 不变。因此我们得到 (HKA4)，从而 (SSA) 由 (SS) 得出。此外，$\mathsf{H}(W)' = Z_\alpha\mathsf{H}(W'^{\alpha})$ 和命题 5.2 推出 (HKA6)。

要看出 (HKA7/8) 由 (HKA2)、(HKA6) 和定理 3.5 推出，请回想定理 3.13 指出， U 可扩张为一个反酉表示 U ，其定义在 G_{τ_h} 上，形式为

$$U(\tau_h) = J_{\mathcal{A}(W_0),\Omega} = J_{\mathsf{H}(W_0)}, \quad \text{and that} \quad Z_\alpha U(\tau_h)\mathsf{H}(W_0) = Z_\alpha \mathsf{H}(W_0)' = \mathsf{H}(W_0'^{\alpha})$$

如下 来自（CTHD）。根据命题5.2， $Z_\alpha\Omega = \Omega$ 和（HKA4），由此可得

$$\mathrm{Ad}(Z_\alpha J_{\mathsf{H}(W_0)})(\mathcal{A}(W_0)) = \mathcal{A}(W_0'^{\alpha}).$$

对于由 $U|_G$ 扩张而得的 U^α

$$U^\alpha(\tau_h) = Z_\alpha J_{\mathcal{A}(W_0),\Omega} = Z_\alpha U(\tau_h),$$

现在根据（HKA2）和 $Z_\alpha \in U\,(G)'$，我们还可得出（HKA7）和（HKA8）成立。 □

5.2 因果时空上的冯·诺依曼代数网

现在，我们将介绍几何自旋–统计定理和比萨诺–维奇曼定理在 1+2 维闵可夫斯基空间、共形圆以及 1+1 维爱因斯坦宇宙上的冯·诺伊曼代数网中的一些应用。这将我们的结果与现有文献联系起来。

5.2.1 关于 1+3 维闵可夫斯基空间

在 [GL95，定理 2.11] 中，作者考察了闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}^{1,\,3}$ 的开子集上的冯·诺依曼代数保序网 $(\mathcal{A}(\mathcal{O}))_{\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^{1,\,3}}$ ，其取值于固定的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$。他们假设存在一个循环向量 $\Omega \in \mathcal{H}$ ，使其对与类空锥相关的代数是循环向量；也就是说，这些锥是类空、凸、因果完备的尖锥。他们要求局域代数满足分次交换关系，其中涉及某个酉对合 Γ。这意味着存在一个分次算子 Γ （酉对合），它在任意局域代数 $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ 上定义对合 $\mathrm{Ad}(\Gamma)$。这将局域代数 $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ 分解为两个子空间

$$\mathcal{A}(\mathcal{O})_\pm = \{a \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) : \Gamma a \Gamma = \pm a\}. \tag{5.5}$$

他们假设对易关系取决于奇偶性，即 $\mathcal{A}(\mathcal{O})_+$ 与 $\mathcal{A}(\mathcal{O}')$ 对易，而 $\mathcal{A}(\mathcal{O})_-$ 与 $\mathcal{A}(\mathcal{O}')_-$ 反对易。这可以用李超括号表述如下：赋予 $B(\mathcal{H})$ 由 $\mathrm{Ad}(\Gamma)$ 定义的分次，并考虑李超括号

$$[a,b]_s := ab - (-1)^{|a|\cdot|b|}ba, \tag{5.6}$$

其中 $|a| \in \{0,1\}$ 由 $\Gamma a \Gamma = (-1)^{|a|}a.$ 定义。于是我们有

$$[\mathcal{A}(\mathcal{O}), \mathcal{A}(\mathcal{O}')]_s = \{0\}. \tag{5.7}$$

Guido 和 Longo 进一步假设该网满足 模协变性，即

$$\mathrm{Ad}(\Delta^{it}_{\mathcal{A}(W),\Omega})\,(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{A}(\Lambda_W(-2\pi t)\mathcal{O}), \tag{5.8}$$

其中 $\mathcal{O}$ 是闵可夫斯基空间的任意开子集， W 是一个楔形区域（参见示例 2.6），而$\Lambda_W(t)$是相应的推进群。该性质弱于 Bisognano–Wichmann 性质，因为它不要求存在一个庞加莱群的酉正能量表示，使得该网具有协变性。´

设 $\widetilde{G} = \widetilde{\mathcal{P}}_+^{\uparrow}$ 是庞加莱群 $G = \mathcal{P}_+^{\uparrow}$, $h \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 的双重（=普适）覆盖，´e；设 τ_h 是 G 上相应的对合，且 U 是 G 的酉表示。那么， $\mathcal{G}_E(G_{\tau_h})$ 中任意一个抽象欧拉对的 ~ ~ ~G-轨道，都与闵可夫斯基时空中楔形区域的 G-轨道同构，其中 G-作用可分解为 G 的作用（参见 [MN21，例 4.21]）。闵可夫斯基空间中楔形区域 W 的因果补 W' 对应于抽象楔形 $W'^{\widetilde{\rho}(2\pi)}$，因为 W 的 $\widetilde{G}$-轨道包含中心补 $W'^{\widetilde{\rho}(2\pi)}$，但不包含 W'（注 2.1(a)）。这里， $\widetilde{\rho}$ 是类空平面内旋转的单参数群在 $\widetilde{G}$ 上的提升。注意， $\widetilde{\rho}(2\pi)$ 不依赖于所选平面。通过这种对应，我们可以将闵可夫斯基时空中定义在楔形区域上的网与定义在抽象欧拉楔形上的网联系起来。

在 [GL95] 中，作者证明了楔形代数 $\mathcal{A}(W)$的模群定义了一个~表示 G ，该表示具有正能量并固定 Ω；他们还验证了 (HKA2)、(HKA3)、(Vac)、(SSA)、(HKA5)-(HKA8)。特别地，由 (SSA) 可得 $Z^2_{\widetilde{\rho}(2\pi)} = \Gamma = U(\widetilde{\rho}(2\pi))$。这个恒等式确定了实现分次的酉算子，以及楔形代数的对易关系。

从我们的角度来看，考虑一个酉表示 U ，使得网$\mathcal{A}$: $\mathcal{W}_+ \to \mathrm{vNA}(\mathcal{H})$在 $\mathcal{H}$ 上的冯·诺依曼代数具有协变性，并满足定理~的假设5.5。由于 $Z(G) = \{\widetilde{\rho}(2\pi)\ e\}$，定理5.5 蕴含

$$Z^2_{\widetilde{\rho}(2\pi)} = U(\widetilde{\rho}(2\pi)), \quad \text{where} \quad U(\widetilde{\rho}(2\pi))^2 = \mathbf{1}. \tag{5.9}$$

设定 $\Gamma := U(\widetilde{\rho}(2\pi))$，楔形代数按（5.5）分解，并满足分次交换关系（5.7）。在我们的框架中，我们不对楔形代数作任何对易关系假设，但要求庞加莱´协变性和 Bisognano–Wichmann 性质。在 [GL95] 中，作者假设模协变条件（5.8），但要求满足分次交换关系。

~我们进一步指出，若 U 可经由 G分解，则商映射 $q:\ G \to G$ 诱导出齐次 $q^{\mathcal{W}}$: $\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}} \to \mathcal{W}_+^{G}$ 空间之间的双射。由定理 5.5 可知， Γ 可取为 $\mathbf{1}$，因此我们可以选取 $Z = \mathbf{1}$，并且可用通常的交换子括号验证对易关系。

5.2.2 圆

令 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 为莫比乌斯群，并令 $h \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$；考虑 G 的万有覆盖和双重覆盖， $\widetilde{G}$ 与 $G^{(2)}$。欧拉对合 $\tau_h^{\mathfrak{g}}$ 积分得到对合 $\widetilde{\tau}_h$ ，作用于 $\widetilde{G}$；对合 $\tau_h^{(2)}$ ，作用于 $G^{(2)}$ ；以及对合 τ_h ，作用于 G。于是覆盖映射

$$q^{(2)} : \widetilde{G}_{\widetilde{\tau}_h} \to G^{(2)}_{\tau_h^{(2)}}, \quad q : \widetilde{G}_{\tau_h} \to G_{\tau_h} \quad \text{and} \quad \underline{q} : G^{(2)}_{\tau_h^{(2)}} \to G_{\tau_h}$$

满足 $q^{(2)}(\widetilde{\tau}_h) = \tau_h^{(2)}$ 和 $q(\widetilde{\tau}_h) = \tau_h$。群 $\widetilde{G}_{\widetilde{\tau}_h}$ 通过 $g.x = q(g)x$ 作用于 $\mathbb{S}^1$，其中 $g \in \widetilde{G}_{\widetilde{\tau}_h}$；类似地，$\widetilde{G}^{(2)}_{\tau_h^{(2)}}$ 通过 q 作用于 $\mathbb{S}^1$。商映射诱导出齐性 $\widetilde{G}$-空间 $\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}} \to \mathcal{W}_+^{G^{(2)}}$ 和 $\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}} \to \mathcal{W}_+^{G}$ 之间的满射。自然投影 $\mathcal{W}_+^{G^{(2)}} \to \mathcal{W}_+^{G}$ 是双射，因此两个齐性空间都同构于 $\mathbb{S}^1$ 上非稠密区间构成的集合，参见示例 2.7、注 3.15 以及 [MN21，例 2.10(e)]。

在 [DLR07，定理 2.1、命题 2.4] 中，作者首先考虑定义在圆上的非稠密开区间集合 $\mathcal{A}(I) \subset B(\mathcal{H}$ 上的冯·诺伊曼代数网 $\mathcal{I}(\mathbb{S}^1)$。根据上一段，可以将 $\mathbb{S}^1$视为与抽象楔形集合 $\mathcal{I}(\mathbb{S}^1$ 相同。作者称该网 $\mathcal{W}_+^{G^{(2)}}$ 为 $\mathcal{A}$ 上的共形网 $\mathbb{S}^1$，如果它满足等调性、 $\widetilde{G}$- 协变性，即

$$U(g)\mathcal{A}(I)U(g)^* = \mathcal{A}(q(g)I), \quad g \in \widetilde{G},$$

~(HKA3)、存在一个由 G 固定的真空向量 $\Omega \in \mathcal{H}$、真空向量对于代数 $\bigvee_{I\in\mathcal{I}} \mathcal{A}(I) := \left(\bigcup_{I\in\mathcal{I}} \mathcal{A}(I)\right)''$ 的循环性，以及真空向量对于$\bigcap_{I\in\mathcal{I}} \mathcal{A}(I)$ 的分离性质。在这一设定下，他们证明 Ω 对所有局域代数 $\mathcal{A}(I)$ 都是循环且分离的（Reeh–Schlieder 性质），并证明了模协变性质、存在一个将 U 扩张到 $G_{\widetilde{\tau}_h}$ 的反酉协变扩张 ~，以及

$$U(\widetilde{\rho}(2\pi))^2 = \mathbf{1},$$

~其中，$\widetilde{\rho}(\theta)$ 是 G 中刚性旋转单参数群的提升。此处，模协变性质的形式为

$$\mathrm{Ad}(\Delta^{it}_{\mathcal{A}(I_1),\Omega})\left(\mathcal{A}(I_2)\right) = \mathcal{A}(\delta_{I_1}(-2\pi t)I_2),$$

其中 I_1，I_2 是 $\mathbb{S}^1$ 中的非稠密区间，且 $\delta_{I_1}(t) = \exp(th_{I_1})$，其中 h_{I_1} 是与区间 I相关联的欧拉元，参见 [MN21，例 2.10(c)]。假设中心扭曲局域性成立，则性质 (HKA5)、(HKA6)、(SSA) 以及分次交换关系 (5.7) 均成立，见[DLR07，命题 23]。

从我们的角度来看，我们考虑上文所述的 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的覆盖群 $G^{(2)}$，以及它在抽象楔形空间上的作用。令

$$\mathcal{A}\colon \mathcal{W}_+^{G^{(2)}} \to \mathrm{vNA}(\mathcal{H})$$

是一个冯·诺伊曼代数网，相对于 G的~酉正能量表示 U，满足 (HKA1)–(HKA3) 和 (Vac)。我们假设 (HKA4) 以下述意义成立：对于满足 $W_0'^{\alpha} = (-h,\ \alpha\tau_h) \in \mathcal{W}_+^{G^{(2)}}$ 的某个 $\alpha \in Z(G^{(2)})^-$，若 $W_0 = (h,\ \tau_h) \in \mathcal{W}_+^{G^{(2)}}$，则存在一个酉算子 $Z_\alpha \in U(G)'$，满足

$$J_{\mathcal{A}(W_0)} Z_\alpha J_{\mathcal{A}(W_0)} = Z_\alpha^{-1}, \tag{5.10}$$

使得

$$\mathcal{A}(W_0'^{\alpha}) \subseteq Z_\alpha \mathcal{A}(W_0)' Z_\alpha^*. \tag{5.11}$$

我们可以将 $\mathcal{A}$ 提升为 $\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}$ 上的网 $\widetilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \circ q^{(2),\mathcal{W}}$，其中 $q^{(2),\mathcal{W}}$: $\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}} \to \mathcal{W}_+^{G^{(2)}}$ 是自然覆盖映射（命题 3.7）。由于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 是厄米单李代数，根据定理 5.4(a)，(Reg) 对 $\mathcal{A}$ 成立 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$。若网 $\mathcal{A}$ 满足 (HKA5)，则定理 5.5 对 $\mathcal{A}$ 成立。由于 $\mathcal{A}$ 可经由 $\mathcal{W}_+^{(2)}$ 分解，标准子空间网 $\widetilde{\ }$H(W) $= \widetilde{\mathcal{A}}(W)_{sa}\Omega$ 在 $\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}$ 上可经由一个网 H 分解到 $\mathcal{W}_+^{G^{(2)}}$。根据 (HKA5) 和 (HKA8)，$\widetilde{\ }$H 是 BGL 网 H_U，它 U 可经由$\mathcal{W}_+^{G^{(2)}}$ 分解。对于 $G_1 = \widetilde{G}$ 和 $G_2 = G^{(2)}$，由引理 3.9，我们得到 $\partial_h(G_1^{h_1})$ $\cap D \subseteq \ker(U)$ 对 $D = 2\mathbb{Z}$ 成立。这意味着 U 可经由 $G^{(2)}_{\tau_h^{(2)}}$ 分解。特别地，$U(\widetilde{\rho}(2\pi))^2 = \mathbf{1}$。

5.2.3 关于爱因斯坦宇宙

本节使用第4.2节引入的记号。我们在此处的框架下，重新表述以下示例，该示例在 [MT19, 附录 A],中讨论。我们回顾一下，$H_{\tau_h} = \mathcal{P}_+$ 和$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $G_{\tau_h} = (\mathrm{M}\ddot{\mathrm{o}}\mathrm{b} \times \mathrm{M}\ddot{\mathrm{o}}\mathrm{b})_{\tau_h}$，并且 M_0 是爱因斯坦宇宙 $\widetilde{M}^1$中的1维闵可夫斯基空间的一个副本。

令 G-(A(W))$_{W\in\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}}$ 满足 (Vac) 和$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$(HKA1)–(HKA4)，并记 U 为相应的 G表示，假定其满足谱条件。分别令 W_R 和 W_L 为 $M_0 \subset \widetilde{M}^1$,1 中的林德勒楔区及其补集，并令 (h, τ_h) 和 $(-h, \alpha\tau_h)$ 为相应的欧拉对，其中由 (4.6) 可知 $\alpha = r_s(-2\pi)$。在此框架下，定理 5.3、5.4 和 5.5 对 $(\mathcal{A}(W))^{W\in\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}}$成立。我们增加假设 $Z_\alpha = \mathbf{1}$，这意味着

$$\mathcal{A}(W_L) = \mathcal{A}(W_R)'. \tag{5.12}$$

这是 局域性条件，它作用于网在 $\mathcal{A}$ （一份）闵可夫斯基时空 $M_0 \subset \widetilde{M}^1$上的限制1。根据自旋–统计定理 5.5，$\widetilde{U}(\alpha) = Z_\alpha^2 = \mathbf{1}$。

现在，令 $W_1 \in \mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}$ 和 $W_2 = r_s(2k\pi)W_1$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。那么

$$\mathcal{A}(W_2) = \mathrm{Ad}(\widetilde{U}(r_s(2k\pi)))\mathcal{A}(W_1) = \mathcal{A}(W_1).$$

网 $\mathcal{A}(W))_{W\in\mathcal{W}^{\widetilde{G}}_+}$ 可通过定义在楔形空间 $\mathcal{W}_+^G$ 上的网分解，其中

$$\overline{G} = \widetilde{G}/\langle r_s(2\pi)\rangle,$$

而 $\overline{G}_{\tau_h}$ 是其扩张（参见注释3.6）。相应的齐性空间是$\widetilde{M}^{1,1}$的一个商，称为爱因斯坦圆柱面，其描述如下。考虑嵌入共形完备化 $\widetilde{M}^{1,1}$中的闵可夫斯基空间M_0：

$$M_0 = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \subset \widetilde{M}^{1,1}$$

在光线坐标（u_+，u_-）中（参见第4.2节）。定义扩展时空坐标为 $u_+ \pm u_-$。在这些坐标下，爱因斯坦圆柱面为 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \widetilde{M}^{1,1}/\sim$,

其中，$x \sim y$ 当且仅当 $x = r_s(2k\pi)\, y$ 对某个 $k \in \mathbb{Z}$成立。因此，闵可夫斯基空间的空间方向被紧化，而时间方向仍为非紧的，见图4。

最后指出，我们的结果——定理 5.3和 5.5——在考虑更一般的中心扭曲局域性条件 **(HKA4)**（它推广了 (5.12)）时，将推广这一示例。特别地，我们得到以下命题，即冯·诺依曼代数网中命题 4.1 的对应结果：

命题 5.6。 设 $(\mathcal{A}(W))^{W\in\mathcal{W}_+^H}$是一个定义在$\sim$*1+1* 维上的庞加莱协变标准子空间网，满足 (HKA1)–(HKA3), (Vac)，并且可扩张为一个满足(HKA1)–(HKA4),(Vac)的 G协变标准子空间网。假设 G 的酉表示 $\sim$ $\sim U$具有离散核。那么，扩张 $(\mathcal{A}(W))^{W\in\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}}}$也满足 (HKA5)–(HKA8)$\widetilde{\ }$和 (SSA)，并且 $\mathsf{H}_{\mathcal{A}}$ 是由 U 的反酉扩张所确定的 *BGL* 网，该扩张由 $U(\tau_h) = J_{\mathcal{A}(W_0),\Omega}$指定。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$证明。 设 U 是G_{τ_h}的一个具有离散核的反幺正正能量表示。设 $\mathcal{W}_+^{\widetilde{G}} = \widetilde{G}.(h,\tau_h)$ 是欧拉楔形区域轨道，且 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 是定义在 $\mathcal{W}_+^{G}$上的冯·诺伊曼代数网$\sim$，满足 **(HKA1)-(HKA4)**。那么，由定理 5.4**(a)** 可得 **(Reg)**，而 **(HKA5)**（分别为 **(BW)**）和 **(HKA6)**（分别为 **(CTHD)**）均由定理5.3推出。因此，(HKA7)- **(HKA8)** 和 **(SSA)** 是定理 5.5 的推论。特别地，$\mathsf{H}_{\mathcal{A}}$ 是由 $U(\tau_h) = J_{\mathcal{A}(W_0),\Omega}$ 指定的 U 的$\widetilde{\ }$反酉扩张所对应的 BGL 网。 □

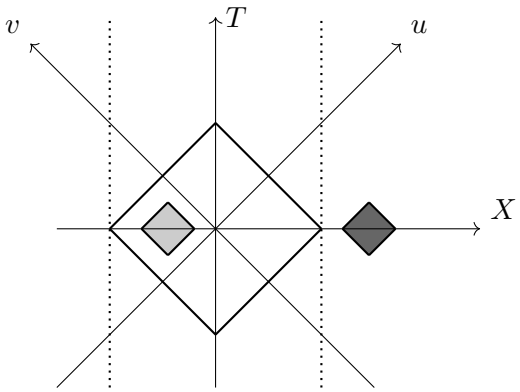


图 4：通过识别 $\widetilde{M}^1$中的1虚线，得到圆柱面。深灰色和浅灰色的楔形区域相互识别，因为它们可通过 $r_s(2\pi)$映射到彼此；参见（4.4）。

6 展望

我们对因果齐性空间上的楔形区域及其与抽象欧拉楔之间关系的研究，已在 [MN´O23，MN´O25] 中展开。这一框架使我们能够对态和代数进行更精细的局域化——

（参见 [FN´O25a，N´O21，MN24]），并且可以在齐性空间上赋予因果独立性（或不相交性）的概念。在即将发表的论文中[MN25],，我们将详细分析这类空间中因果不相交区域的概念。

研究这类模型中 Doplicher–Haag–Roberts（DHR）表示的几何性质以及可能的场重构，是一个自然的下一步（参见 [DHR71, DHR74, DR90]）。在 [Ro04], 的一般框架中，人们考虑定义在偏序指标集 $\mathcal{K}$上的一个等距、局域的冯·诺伊曼代数网 $(\mathcal{A}(\mathcal{O}))_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$，该指标集配备了因果不相交性 $\perp$的概念，并具有一个特定的真空向量。这个网称为真空表示。在洛伦兹流形上，$\mathcal{O}_1\perp\mathcal{O}_2$ 对应于因果独立的区域；而在圆上，它对应于不相交区间。在所有情形下，局域性都由包含关系 $\mathcal{A}(\mathcal{O}^\perp)\subset\mathcal{A}(\mathcal{O})'$来表达。通常还会将这一性质加强为对偶性，即 $\mathcal{A}(\mathcal{O})'=\mathcal{A}(\mathcal{O}^\perp)$.

如果固定一个指标 $\mathcal{O}_0$，且该表示在 $\mathcal{O}_0^\perp$上与真空表示等价，那么这个网的表示就称为 DHR 表示。指标集的不同几何结构可能导致超选择扇区呈现不同结构；例如，可能出现辫群统计或置换群统计（参见 [Do09]，其中有综述及更多参考文献）。

在这一形式体系中，我们的框架提供了一个新颖而灵活的研究空间，其中存在更丰富的几何结构，并可能产生有趣的现象。我们强调，熟悉的例子——例如德西特空间、闵可夫斯基时空或手征圆上的网——都是我们一般性分析的特例。在我们的设定中，这些模型得到了自然推广，因为我们所考虑的因果齐性空间的锥不一定是洛伦兹型的。

本展望中我们希望强调的第二点，是有可能从冯·诺伊曼代数网或标准子空间网的局部几何结构中恢复出更大的协变对称群。量子场论中一个长期存在的问题是，尺度不变性（或膨胀协变性）是否意味着共形协变性。在 3+1维闵可夫斯基时空中，人们普遍认为，任何幺正且在膨胀–庞加莱´群下协变的“非病态”相对论性量子场论，实际上都应当具有共形协变性（见 [Na15]）。然而，这一论断仍缺乏完整的数学证明。在 1+1 维情形下，有强有力的物理学论据支持这一观点 [Po88，Zo86],，而代数框架中的一项数学严谨结果见 [MT19]。

这个问题与研究标度极限理论的对称性性质密切相关 [BV95，BV98]。人们预期这类极限理论会呈现膨胀对称性。然而，尽管膨胀协变性的出现是可以预期的，但它并非自动成立（参见 [BDM10]）。因此，人们也预期共形对称性会在标度极限中出现，但目前仍缺少对这一现象的一般性证明。

在我们的几何框架中，针对共形情形，我们的分析使 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$子代数的作用尤为清晰，而由此产生的代数量子场论与李理论之间的相互作用，或可为处理这一问题提供有用工具。更具体地说，弄清与两个正交标准子空间相关联的模群何时生成 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的一个表示，可视为解决拓展问题的初步步骤

从膨胀–庞加莱群到完整共形群的对称性，适用于 3+1维闵可夫斯基时空。事实上，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$-子群的出现是共形对称性的一个典型特征，而通过网的模结构识别它们，则提供了一种几何机制，能够从较有限的协变性假设出发，检测并构造更大的对称群。这一点在 1+1维代数论证中已经有所体现，见 [MT19]。另一方面， 3+1维情形则需要不同的分析。

我们可以将第一个问题表述如下：设 $(U, \mathcal{H})$ 是 $G := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^{\tau_{h_0}}$ 的一个反酉表示，那么相应的 BGL 网给出满足

$$\mathtt{V}_1 := \mathsf{H}_U(h_0, \tau_{h_0}) \quad \text{and} \quad \mathtt{V}_2 := \mathsf{H}_U(k_0, \tau_{k_0}) = U(\widetilde{\rho}(\pi/2))\mathtt{V}_1$$

下文正交条件（6.1）的标准子空间。更具体地说，对于不可约表示， [MNÓ25] 中的构造给出一个实子空间 $\mathtt{E} \subseteq \mathcal{H}^{-\infty}$，其在单连通覆盖 $\widetilde{\mathrm{dS}}_2$ 上的开子集所定义的网 [2] 扩展了 BGL 网 H_U，后者是通过限制到楔形区域得到的。

设 $\mathtt{V}_1$ 和 $\mathtt{V}_2$ 是复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的两个标准子空间。假设相应的模算子和共轭满足

$$J_2\Delta_1 J_2 = \Delta_1 \quad \text{and} \quad J_1\Delta_2 J_1 = \Delta_2. \tag{6.1}$$

这是否意味着两个模群 $\Delta_1^{i\mathbb{R}}$和 $\Delta_2^{i\mathbb{R}}$生成一个酉表示，其表示对象为 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的万有覆盖群 $\widetilde{\mathrm{PSL}}_2(\mathbb{R})$？若此构型来自有限维李群 G_{τ_h} 的一个反酉表示 U 所对应的 BGL 网，其中 $\mathtt{V}_j = \mathsf{H}_U(h_j, \sigma_j)$，那么

$$-h_2 = \mathrm{Ad}(\sigma_1)h_2 = \tau_{h_1}(h_2) \quad \text{and} \quad -h_1 = \mathrm{Ad}(\sigma_2)h_1 = \tau_{h_2}(h_1),$$

使得（h_1， h_2）构成一个对称正交欧拉对，因而生成一个 $\mathfrak{sl}_2$（$\mathbb{R}$）-子代数。这个观察的雏形已经见于 [Lo08，定理 5.1。1], 其中，共形旋转通过 H_U 的 Bisognano–Wichmann 性质，与正交楔形子空间的模群相关联；这里 U 是 $\widetilde{G}_{\tau_h}$ =PSL_2（$\mathbb{R}$）$_{\tau_h}$ 的反酉正能量表示。

如下这一类反例表明，一般而言，这个问题的答案是否定的，因此必须加入一些额外假设。我们从实希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 上的一个正算子$A = e^H$ 出发，并考虑复希尔伯特空间 $\mathcal{H} := \mathcal{K}_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$。那么，这一对

$$\Delta_1 := A \oplus A^{-1} \quad \text{and} \quad J_1(\xi, \eta) = (\overline{\eta}, \overline{\xi})$$

确定了一个标准子空间 $\mathtt{V}_1$。

借助酉算子

$$U := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_2(\mathcal{H})$$

我们得到

$$\Delta_2 := U\Delta_1 U^{-1} \quad \text{and} \quad J_2 := UJ_1U^{-1}$$

使得 $J_2(\xi,\eta) = (\bar{\xi},\bar{\eta})$ 并且

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A+A^{-1} & -i(A-A^{-1}) \\ i(A-A^{-1}) & A+A^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(H) & -i\sinh(H) \\ i\sinh(H) & \cosh(H)\end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -iH \\ iH & 0\end{pmatrix}.$$

这两个标准子空间 $\mathtt{V}_1$ 和 $\mathtt{V}_2 = U\mathtt{V}_1$ 满足上述正交条件（6.1）。

更抽象地说，我们在 $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R},\mathcal{E})$ 上的表示中得到了这样的例子，其中 $\mathcal{E}$ 带有 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\tau_{h_0}}$ 的反酉表示。由此我们得到 $\widetilde{\ }$ 可测映射群 $\mathbb{R}\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的酉表示；对于 $f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$，我们在 $C^\infty(\mathbb{R},\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ 中得到元素

$$h := f\otimes h_0 \quad \text{and} \quad k := f\otimes k_0.$$

With

$$\tau_{h_0}(h) = h, \quad \tau_{h_0}(k) = -k, \quad \tau_{k_0}(h) = -h, \quad \tau_{k_0}(k) = k.$$

这在相应的 BGL 网中产生一对正交标准子空间，但由 h 和 k 生成的李代数通常是无限维的。

要得出模群 $\Delta_1^{i\mathbb{R}}$ 和 $\Delta_2^{i\mathbb{R}}$ 生成了一个 $\widetilde{\ }$
$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的表示，因此还需要额外的正则性。

问题 m 6.1. 假设除了（6.1）之外，对所有 $t\in\mathbb{R}$，实子空间

$$\Delta_2^{it}\mathtt{V}_1\cap\mathtt{V}_2 \quad \text{and} \quad \Delta_1^{it}\mathtt{V}_2\cap\mathtt{V}_2 \tag{6.2}$$

都是标准的。这是否意味着 $\mathtt{V}_{1,2}$ 来自某个 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\tau_h}$ 的反酉表示的 BGL 网 $\widetilde{\ }$？

根据 [FN´O25a]，我们知道 [MN21，命题 427] 适用于 $\widetilde{\ }\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的所有酉表示，因此条件（6.2）是必要的。

A 附录

A.1 简单三重分次李代数列表

下表列出了实单李代数中的所有欧拉元，参见 [MN21]。

	$\mathfrak{g}$	$\Sigma(\mathfrak{g},\ \mathfrak{a})$	h	$\mathfrak{g}_1(h)$
1	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$	A_{n-1}	$h_j,\ 1 \le j \le n-1$	$M_{j,\ n-j}(\mathbb{R})$
2	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$	A_{n-1}	$h_j, 1 \le j \le n-1$	$M_{j,\ n-j}\ (\mathbb{H})$
3	$\mathfrak{su}_{n,\ n}\ (\mathbb{C})$	C_n	h_n	厄米$_n(\mathbb{C})$
4	$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$	C_n	h_n	对称$_n(\mathbb{R})$
5	$\mathfrak{u}_{n,\ n}(\mathbb{H})$	C_n	h_n	Aherm$_n(\mathbb{H})$
6	$\mathfrak{so}_{p,\ q}(\mathbb{R})$	$B_p, 1 \le p < q$ $D_p, 1 \le p = q$	h_1	$\mathbb{R}^{p+q-2}$
7	$\mathfrak{so}^*(4n)$	C_n	h_n	Herm$_n(\mathbb{H})$
8	$\mathfrak{so}_{n,\ n}(\mathbb{R})$	C_n	h_n	Alt$_n(\mathbb{R})$
9	$\mathfrak{e}_6(\mathbb{R})$	E_6	$h_1 = h_6'$	$M_{1,\ 2}(\mathbb{O}_{\text{split}})$
10	$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	A_2	h_1	$M_{1,2}(\mathbb{O})$
11	$\mathfrak{e}_7(\mathbb{R})$	E_7	h_7	Herm$_3(\mathbb{O}_{\text{split}})$
12	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	C_3	h_3	Herm$_3(\mathbb{O})$
13	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$	A_{n-1}	$h_j,\ 1 \le j \le n-1$	$M_{j,\ n-j}(\mathbb{C})$
14	$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$	C_n	h_n	Sym$_n(\mathbb{C})$
15a	$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$	B_n	h_1	$\mathbb{C}^n$
15b	$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$	D_n	h_1	$\mathbb{C}^n$
16	$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$	D_n	h_{n-1}, h_n	Alt$_n(\mathbb{C})$
17	$\mathfrak{e}_6(\mathbb{C})$	E_6	$h_1 = h_6'$	$M_{1,2}(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$
18	$\mathfrak{e}_7(\mathbb{C})$	E_7	h_7	Herm$_3(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$

表 1：单的三阶分次李代数。我们遵循 [Bo90a] 中表格的惯例；关于分类，参见 [MN21]。

$\mathfrak{g}^\circ$ (厄米型)	$\Sigma(\mathfrak{g}^\circ,\ \mathfrak{a}^\circ)$	$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}^\circ)_{\mathbb{C}}$	$\Sigma(\mathfrak{g},\ \mathfrak{a})$	对称欧拉元 h
$\mathfrak{su}_{n,\ n}(\mathbb{C})$	C_n	$\mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C})$	A_{2n-1}	h_n
$\mathfrak{so}_{2,\ 2n-1}(\mathbb{R})\ n > 1$	C_2	$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$	B_n	h_1
$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$	C_n	$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$	C_n	h_n
$\mathfrak{so}_{2,2n-2}(\mathbb{R})\ n > 2$	C_2	$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$	D_n	h_1
$\mathfrak{so}^*(4n)$	C_n	$\mathfrak{so}_{4n}(\mathbb{C})$	D_{2n}	h_{2n-1}, h_{2n}
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	C_3	$\mathfrak{e}_7$	E_7	h_7

表 2：管型的简单厄米李代数 $\mathfrak{g}^\circ$，即包含欧拉元的李代数。

注意，$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}_{2,\ 1}(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}_{1,\ 1}(\mathbb{C})$ 是实厄米李代数。更多同构关系在 [HN12、§17]中有较详细的讨论。

A.2 正交欧拉对的分类

定理 A.1.（正交欧拉元素对的分类定理）（[MN´O25，定理 2.9]）设 $\mathfrak{g}$ 是一个简单实李代数，且 $h \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 是一个对称欧拉元。设θ 是一个满足 $\theta(h) = -h$ 的嘉当对合，并且 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} := \mathfrak{g}^{-\theta}$ 是一个极大阿贝尔子空间

包含 h，使得 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$。在

$$\Sigma_1 := \{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \colon \alpha(h) = 1\}$$

我们选取一个极大集合 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$，其中的长根两两正交，即它们的差 $\gamma_j - \gamma_k$ 不是根。于是存在元素 $e_j \in \mathfrak{g}_{\gamma_j}$，使得李子代数

$$\mathfrak{s}_j := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e_j, \theta(e_j), [e_j, \theta(e_j)]\}, \quad j = 1, \dots, r,$$

同构于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$。于是

$$\mathfrak{c} := \operatorname{span}\{k_1, \dots, k_r\} \quad \textit{for} \quad k_j := e_j - \theta(e_j) \tag{A.1}$$

是 $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} := \mathfrak{q} \cap \mathfrak{p}$ 中的极大阿贝尔子代数，并且包含于子代数

$$\mathfrak{g}^* := \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Fix}(\theta\tau_h^{\mathfrak{g}}),$$

因此，我们得到限制根系的包含 $\Sigma(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{c}) \subseteq \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{c})$。我们考虑欧拉元

$$k^j := k_1 + \cdots + k_j - k_{j+1} - \cdots - k_r \in \mathfrak{c}, \quad j = 0, \dots, r. \tag{A.2}$$

那么 $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{c})$ 属于类型 C_r，而 $\Sigma(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{c})$ 属于类型 A_{r-1}、C_r 或 D_r，如 [MN´O25]中的表 2 所列。$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$中的所有 G_e^h-轨道都是 G^h-不变的，一组代表元如下：

(A) $k^0, \dots, k^r$，若 $\Sigma(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{c})$ 属于类型 A_{r-1} 和 $r \geq 1$。

(C) k^r，如果 $\Sigma(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{c})$ 属于类型 $C_r, r \geq 2$。

(D) k^{r-1}, k^r，如果 $\Sigma(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{c})$ 属于类型 $D_r, r \geq 2$。

因此，数对 (h, k^j) 表示正交欧拉元素数对的 $\operatorname{Inn}(\mathfrak{g})$-共轭类。

A.3 共形群与共形李代数的欧拉元

我们考虑连通共形群 $\mathrm{PSO}_{2,d}(\mathbb{R})_e$ 在 $\mathbb{R}^{1,d-1}$上的覆盖群 G，它存在一个忠实酉表示 $(U, \mathcal{H})$，该表示作用于 G，并扩展了希尔伯特空间 $\mathcal{H} = L^2(\partial V_+)$ 上的无质量标量表示（其中 V_+ 是开正光锥）；其存在性见 [N´O21, §4.4] 。在 $\mathfrak{so}_{2,d}(\mathbb{R})$ 中，我们考虑包含于$\mathfrak{so}_{1,d-1}(\mathbb{R})$ 的欧拉元 h，它生成洛伦兹推动 $h_{0,1}$，作用于 $\mathbb{R}\mathsf{e}_0 + \mathbb{R}\mathsf{e}_1 \subseteq \mathbb{R}^{1,d-1}$，对应于林德勒楔区 W_R （参见示例 2.6）。

W我们有三种本质不同的情形（参见 [MN25，命题 8。5] 和 [Ne26，§5.6。2] ）：

(a) d**奇**：于是 $\mathrm{Ad}(G)$ 是无中心群 $\mathrm{SO}_{2,\,d}(\mathbb{R})_e$，其

$$\pi_1(\mathrm{SO}_{2,d}(\mathbb{R})) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$$

且 $\pi_1(G) = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ 是一个指数 2 子群，因此 G 是中心无挠群 $\mathrm{SO}_{2,d}(\mathbb{R})_e$ 的二重覆盖，我们有一个自然的提升 $\iota\colon \mathrm{SO}_d(\mathbb{R}) \hookrightarrow G$。在这种情况下，$Z(G) = Z(G)^- \cong \mathbb{Z}_2$,

$$Z(\widetilde{G})_1 = 2\mathbb{Z} \times \{1\} \subseteq \pi_1(G),$$

~因此 $Z_1(G) = \{e\}$，且 $Z_2(G) \not\subseteq \pi_1(G)$，因为

$$Z_2(\widetilde{G}) = \{(n, \overline{n})\colon n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 = \pi_1(\mathrm{SO}_{2,d}(\mathbb{R})). \tag{A.3}$$

我们得出

$$\{e\} = Z_1(G) \neq Z_2(G) = Z_3(G) = Z(G),$$

这结合（2.8）表明 $W_0' \in \mathcal{W}_+$。非平凡元 $\alpha \in Z(G)$ 确定了一个扭曲补 $W_0'^{\alpha} = (h, \alpha\tau_h)$。

(b) $d \equiv 2$ 模 4：则 $G = \mathrm{PSO}_{2,d}(\mathbb{R})_e$ 是中心无挠的，因此

$$Z_1(G) = Z_2(G) = Z_3(G) = \{e\}.$$

特别是，$W_0' \in \mathcal{W}_+$，且 $\mathcal{W}_+$ 中的 W_0 没有其他扭曲补。

(c) $d \in 4\mathbb{Z}$：于是 $G = \mathrm{SO}_{2,\,d}(\mathbb{R})_e$ 其中

$$Z(G) = \{\pm\mathbf{1}\} = Z(G)^-.$$

由于 τ_h 在该群上平凡作用，$Z_1(G) = \{e\}$。由于 $\mathrm{Ad}(G)^h$ 是连通的（[MN´O23，定理 7.8]），我们也有 $Z_2(G) = Z_1(G) = \{e\}$。此外，π-旋转 $r_{-1,\,0}(\pi)$ 在 $(\mathbf{e}_{-1},\ \mathbf{e}_0)$ 平面内是一个由 τ_h 固定的对合，因此 $\partial_h(r_{-1,\,0}(\pi)) = e$。我们得出

$$Z_1(G) = Z_2(G) = Z_3(G) = \{e\}.$$

特别地，$W_0' \in \mathcal{W}_+$ 在此情形下也成立，并且在 $\mathcal{W}_+$ 中不存在其他 W_0 的扭曲补集。

现在我们讨论共形李代数的欧拉元。对于 $d \geq 3$，我们考虑自然嵌入

$$\mathfrak{so}_{2,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{so}_{2,2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{so}_{2,d}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & D \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{so}_2(\mathbb{R}), D \in \mathfrak{so}_d(\mathbb{R}), B \in M_{2,d}(\mathbb{R}) \right\}.$$

我们用$\mathbf{e}_{-1}, \ldots, \mathbf{e}_d$表示 $\mathbb{R}^{2,d}$ 的标准基。洛伦兹李代数 $\mathfrak{so}_{1,d-1}(\mathbb{R})$ 嵌入在 $\mathfrak{so}_{2,d}(\mathbb{R})$ 中，作为湮灭 $\mathbf{e}_{-1}$ 和$\mathbf{e}_d$ 的那些矩阵（参见 [HN12]）。boost 欧拉元素 $h_{j,k}$ 定义为

$$h_{j,i}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j,\ h_{j,i}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i,\ h_{j,i}\mathbf{e}_\ell = 0, \quad \text{for} \quad j = -1, 0,\ i \geq 1,\ \ell \neq j, i.$$

在 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 中，欧拉元素正交对的轨道由这些对 $(h_0, \pm k_0)$ 表示（示例 2.3）。我们称 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})^{\oplus 2}$ 中的欧拉元为正则的，如果它是正则元，即其中心化子是阿贝尔的。那么，$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})^{\oplus 2}$ 中只有一个正则欧拉元的轨道，由 $h := (h_0, h_0)$ 表示；正则正交对则有 4 个轨道，分别由以下各对表示

$$((h_0, h_0), (k_0, k_0)), \quad ((h_0, h_0), (k_0, -k_0)), \quad ((h_0, h_0), (-k_0, k_0)), \quad ((h_0, h_0), (-k_0, -k_0)). \tag{A.4}$$

以下引理阐明了 [MN´O25] 中的引理 C.1，该引理指出 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})^{\oplus}$ 只包含欧拉元素正交对的 3 个共轭类。

引理 A.2。 在 $\mathfrak{so}_{2,2}(\mathbb{R})$ 中，正则欧拉元只有一个共轭类。它尤其包含 *boost* 元 $h_{-1,1}$,$h_{-1,2}$,$h_{0,1}$,$h_{0,2}$。正则欧拉元正交对的轨道由下列元素代表

$$(h_{-1,2}, \pm h_{0,2}) \quad \textit{and} \quad (h_{-1,2}, \pm h_{-1,1})$$

with

$$[h_{-1,2}, h_{0,2}] = (2z_0, 0) \in \mathfrak{so}_2(\mathbb{R})^{\oplus 2}, \qquad [h_{-1,2}, h_{-1,1}] = (0, -2z_0). \tag{A.5}$$

$\widetilde{\ }$相应的 $\mathrm{SO}_{2,2}(\mathbb{R})_e$ 中心元为

$$\zeta_{h_{-1,2}, -h_{0,2}} = (1, 0) \quad \textit{and} \quad \zeta_{h_{-1,2}, h_{-1,1}} = (0, 1) \tag{A.6}$$

in

$$\mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})) \times \pi_1(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_{2,2}(\mathbb{R})) \subseteq Z(\widetilde{\mathrm{SO}}_{2,2}(\mathbb{R})_e).$$

证明。 这可由 [MN´O25 中证明 1]，引理 C.1。 □

对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2,d}(\mathbb{R})$，$d \geq 3$，[MN´O25] 中的分类结果表明，(A.4) 中的四个正交对也代表 $\mathfrak{so}_{2,d}(\mathbb{R})$ 中欧拉元素正交对的全部 3 个共轭类。因此，这些正交对中有两个彼此共轭。为确定具体是哪两个，我们考虑 $\mathfrak{so}_{2,d}(\mathbb{R})$ 中由元素 $C_{\mathfrak{g}}$ 生成的不变锥

$$z_{\mathfrak{k}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \{0\} = (2z_0, 0) \in \mathfrak{so}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}_d(\mathbb{R}).$$

括号关系（A.5）表明，相对于这个锥 $C_{\mathfrak{g}}$,

- 对 $(h_{-1,\ 2},\ -h_{0,\ 2})$ 是类时正的,
- 对 $(h_{-1,\ 2},\ h_{0,\ 2})$ 是类时负的,
- 对 $(h_{-1,2}, \pm h_{-1,1})$ 是类空的。

由于我们从 [MN´O25] 中的分类得知，只有 3-轨道，而类时正/负或类空的性质是不变的，因此这两个类空的对 $(h_{-1,2}, \pm h_{-1,1})$ 是共轭的。

为从几何上解释这一事实，我们注意到，洛伦兹李代数 $\mathfrak{so}_{1,d-1}(\mathbb{R})$ 包含欧拉元 $h_{0,1}$ 和 $h_{0,2}$，它们表示作用于 $\mathrm{span}\{e_0, e_1, e_2\} \cong \mathbb{R}^{1,2}$ 中的 $\mathfrak{so}_{1,2}(\mathbb{R})$ 的推动生成元。由于 $\tau_{h_0}(h_{0,1}) = -h_{0,2}$ 以及 $\tau_{h_0}(h_{0,2}) = -h_{0,1}$，二元组 $(h_{0,1}, h_{0,2})$ 是对称正交的。在空间旋转 $r_{2,3}(\pi)$ 下，二元组 $(h_{0,1}, h_{0,2})$ 在 $\mathfrak{so}_{1,d-1}(\mathbb{R})$ 中与 $(h_{0,1}, -h_{0,2})$ 共轭。这尤其意味着，这两个类空二元组 $(h_{-1,2}, \pm h_{-1,1})$ 在 $\mathfrak{so}_{2,d}(\mathbb{R})$ 中是共轭的，$d \geq 3$。

现在我们确定 $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})^{\oplus 2}$中的各对，其中不变锥 $C_{\mathfrak{s}} = C_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{s}$ 包含 (z_0, z_0)（记号见示例 2.3）：

- 类时正对 $(h_{-1,2}, -h_{0,2})$ 在 $((h_0, h_0), (k_0, k_0))$ 中对应于 $\mathfrak{s}$.
- 类空对 $(h_{-1,2}, \pm h_{-1,1})$ 在 $((h_0, h_0) \pm (k_0, -k_0))$ 中对应于 $\mathfrak{s}$。

A.4 标准子空间

我们称复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的闭实子空间 H 是循环的，如果 $\mathsf{H} + i\mathsf{H}$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密；如果 $\mathsf{H} \cap i\mathsf{H} = \{0\}$，则称其分离；如果它既循环且分离，则称其为标准。我们用 $\mathrm{Stand}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 的标准子空间集合。实子空间 H 的辛正交补通过 $\mathcal{H}$ 上的辛形式 $\mathrm{Im}\langle\cdot,\cdot\rangle$ 定义为

$$\mathsf{H}' = \{\xi \in \mathcal{H} : (\forall \eta \in \mathsf{H})\ \mathrm{Im}\langle \xi, \eta\rangle = 0\} = (i\mathsf{H})^{\perp_{\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle}}, \tag{A.7}$$

其中 $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathcal{H}$ 的标量积的实部。H 是分离的，当且仅当 H' 是循环的，因此 H 是标准的，当且仅当 H' 是标准子空间。对于标准子空间 H，可以将*Tomita* 算子 S_{H} 定义为闭反线性对合

$$S_{\mathsf{H}} : \mathsf{H} + i\mathsf{H} \to \mathsf{H} + i\mathsf{H}, \quad \xi + i\eta \mapsto \xi - i\eta.$$

[1]极分解 $S_{\mathsf{H}} = J_{\mathsf{H}}\Delta_{\mathsf{H}}^{\frac{1}{2}}$ 定义了一个反酉对合 J_{H}，称为 H 的模共轭，以及一个正自伴算子 Δ_{H}，称为 H 的模算子。于是

$$J_{\mathsf{H}}\mathsf{H} = \mathsf{H}', \quad \Delta_{\mathsf{H}}^{it}\mathsf{H} = \mathsf{H} \qquad \text{for every} \quad t \in \mathbb{R}$$

并且 J_{H} 与模群对易：

$$J_{\mathsf{H}}\Delta_{\mathsf{H}}^{it}J_{\mathsf{H}} = \Delta_{\mathsf{H}}^{it} \qquad \text{for every} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{A.8}$$

命题 A.3。([Lo08，命题 3。2]) 映射 $\mathsf{H} \mapsto (\Delta_{\mathsf{H}}, J_{\mathsf{H}})$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准子空间集合与由以下各对构成的集合之间的双射：(Δ, J)，其中 J 是一个共轭，$\Delta > 0$ 是满足 $J\Delta J = \Delta^{-1}$ 的自伴算子，这等价于 J 与 $\Delta^{i\mathbb{R}}$ 对易。

若 $\mathsf{H} \subset \mathcal{H}$ 是一个标准子空间，且 (Δ, J) 是与之关联的算子，则式（H' 的辛正交补 A.7）与这对算子 (Δ^{-1}, J) 相关联（[Lo08，命题 2。13]）。

下面的观察可由命题 A.3 轻易推出。

引理 A.4. ([Mo18，引理 2。2]) 设 $\mathsf{H} \subset \mathcal{H}$ 是一个标准子空间，且 U 是作用在 $\mathcal{H}$上的酉算子或反酉算子。那么 $U\mathsf{H}$也是标准的，并且 $U\Delta_{\mathsf{H}}U^* = \Delta_U^{\epsilon(U)}{}_{\mathsf{H}}$和 $UJ_{\mathsf{H}}U^* = J_{U\mathsf{H}}$，其中 $\epsilon(U) = 1$若 U 是酉算子，且 $\epsilon(U) = -1$若其是反酉算子。

引理 A.5. ([Lo08，推论 2.1。8]) 设 $\mathsf{K} \subset \mathsf{H} \subset \mathcal{H}$ 是标准子空间的包含关系。若$\Delta_{\mathsf{H}}^{it}\mathsf{K} = \mathsf{K}$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$均成立，则 $\mathsf{H} = \mathsf{K}$

关于下述定理的证明，请参见 [Lo08，定理 3.15、3。17] 以及 [BGL02，定理 3。2]。在 [Lo08] 中，(a) 的假设表述为 $\pm P > 0$，但其中给出的证明对 $\pm P \geq 0$同样成立，如 [N´O17，定理 3。18]所示。

定理 A.6。 (Borchers–Wiesbrock 定理) 设$\mathsf{H} \subset \mathcal{H}$ 是一个标准子空间，且 $U(t) = e^{itP}$ 是作用在 $\mathcal{H}$ 上的酉单参数群，其生成元为 P。

(a) 若 $\pm P \geq 0$ 且 $U(t)\mathsf{H} \subset \mathsf{H}$ 对所有 $t \geq 0$均成立，则

$$\Delta_{\mathsf{H}}^{-is/2\pi} U(t) \Delta_{\mathsf{H}}^{is/2\pi} = U(e^{\pm s}t) \quad \textit{and} \quad J_{\mathsf{H}}U(t)J_{\mathsf{H}} = U(-t) \quad \textit{for all} \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{A.9}$$

(b) 若 $\Delta^{-is/2\pi}{}_{\mathsf{H}} U(t) \Delta^{is/2\pi}{}_{\mathsf{H}} = U(e^{\pm s}t)$ 对 s、$t \in \mathbb{R}$ 成立，则以下条件等价 t:

(1) $U(t)\mathsf{H} \subset \mathsf{H}$ 对于 $t \geq 0$; (2) $\pm P \geq 0$。

参考文献

[BN25] Beltiţ˘a, D., 和 K.-H. Neeb, 《冠状李群与实子空间网》, 预印本, arXiv:2506.16422 23, 24[Bo00] Borchers, H.-J., 《利用 Tomita 模理论革新量子场论》, J. Math. Phys. 41 (2000), 3604–3673 6[BGL93] Brunetti, R., D. Guido, 和 R. Longo, 《共形量子场论中的模结构与对偶性》, Comm. Math. Phys. 156:1 (1993), 201–219 5, 23, 29[BGL02] Brunetti, R., D. Guido, 和 R. Longo, 《模局域化与 Wigner 粒子》, 《数学物理评论》14 (2002), 759–785 51[BDL07] Buchholz, D., C. D'Antoni, 和 R. Longo, 《共形场论中的核性与热态》, Comm.. Math. Phys. 270 (2007), 267–293 28

[BDFS00] Buchholz, D., O. Dreyer, M. Florig 和 S.J. Summers, 《几何模作用与时空对称群》, 《数学物理评论》12(4) 475-560 (2000) 1[BDM10] Bostelmann, H., C. D'Antoni, 和 G. Morsella, 《由标度极限产生的膨胀对称性》, 《数学物理通讯》294:1 (2010), 21–60 43[BS05] Buchholz, D., 和 S.J. Summers, 《几何模作用与自发对称性破缺》, 《亨利·庞加莱年刊》6 (2005), 607–624 1[BV95] Buchholz D., 和 R. Verch, 《代数量子场论中的标度代数与重整化群》, 《数学物理评论》07 (1995), no. 08, 1195–1239 43[BV98] Buchholz D., 和 R. Verch, 《代数量子场论中的标度代数与重整化群。II. 说明性示例》, 《数学物理评论》10 (1998), no. 06, 775–800 43[DM+25] Dappiaggi, C., Morinelli, V., Morsella, G. 等, 《与闵可夫斯基时空共形的渐近平坦时空中的模哈密顿量》, Comm. Math. Phys. 406 (2025), Article 268, 33pp 3[Do09] Doplicher, S., 《自旋与统计及第一性原理》, 《基础物理学》40 (2010), 719–732 2, 43[DR89] Doplicher, S., 和 J. E. Roberts, 《C*代数的端同态、交叉积及紧群的对偶性》, Ann. of Math. 130:1 (1989), 75–119 2[DHR71] Doplicher, S., Haag, R., 和 J.E. Roberts, 《局域可观测量与粒子统计 I》, Comm. Math.Phys. 23 (1971), 199–230 43[DHR74] Doplicher, S., Haag, R., 和 J.E. Roberts, 《局域可观测量与粒子统计 II》, 《数学物理通讯》35 (1974), 49–85 43[DR90] Doplicher, S., 和 J. E. Roberts, 《为何存在一个带紧规范群、描述粒子物理学中超选结构的场代数》, Comm. Math. Phys. 131 (1990), 51–107 2, 43[DLR07] D'Antoni, C., R. Longo 和 F. Rˇadulescu, 《共形网、最高温度与自由概率模型》, J. Operator Theory, 45:1 (2001), 195–208 4, 5, 23, 40[FN ´O25a] Frahm, J., K.-H. Neeb, 和 G. ´Olafsson, 《非紧因果对称空间上的标准子空间网》, 《数学进展》358, Birkh¨auser/Springer, Singapore, 2025年；115–195；arXiv:2303.10065 2, 3, 43, 45

[FN´O25b] Frahm, J., K.-H. Neeb, and G. ´Olafsson, 《德西特空间上洛伦兹群酉表示的实现》, 《数学探索》36:1 (2025年), 61–113; arXiv:2401.17140 13[GL95] Guido, D., and R. Longo, 《代数自旋与统计定理》, Comm. Math. Phys. 172:3 (1995年), 517–533 2, 3, 4, 5, 6, 26, 28, 38, 39[GL96] Guido, D., and R. Longo, 《共形自旋与统计定理》, Comm. Math. Phys. 181 (1996年), 11—35 2, 3, 27, 28[GLW98] Guido, D., Longo, R., and H.-W. Wiesbrock, 《共形网的扩张与超选择结构》, Comm. Math. Physics 192 (1998年), 217–244 3, 6[HN12] Hilgert, J., and K.-H. Neeb, 《李群的结构与几何》, Springer, 2012年 22, 46, 48[HN93] Hilgert, J., and K.-H. Neeb, 李半群及其应用。Lecture Notes in Math., 1552 Springer-Verlag, 柏林, 1993年。xii+315 页 23[HL82] Hislop, P. D., and R. Longo, 与自由无质量标量场理论相关的局域代数的模结构, Comm. Math. Phys. 84, (1982年), 71–85 28[HLM26] Hollands, S., R. Longo, and G. Morsella, 波包的贝肯斯坦界, 预印本, arXiv:2602.03606 3[Lo08] Longo, R., 实希尔伯特子空间、模理论、SL(2, R) 与共形场论, 载于《锡比乌的冯·诺依曼代数》, 33-91, Theta Ser. Adv. Math. 10, Theta, 布加勒斯特 5, 6, 23, 36, 44, 50, 51[Lo08b] Longo, R., 《共形网讲义。第二部分：冯·诺依曼代数网》, 未发表讲义, 2008年 37[LM24] Longo, R. and V. Morinelli, 由对称性导出的熵界, 《数学物理评论》2024年, 2461001, 23页；arXiv:2401.02345 29, 37[LMPR19] Longo, R., V. Morinelli, F. Preta, and K.-H. Rehren, 自由有限螺旋度场的分裂性质, Ann. Henri Poincar´e 20:8 (2019年), 2555–2258 3[LMR16] Longo, R., V. Morinelli, and K.-H. Rehren, 无限自旋粒子的可局域化位置。Comm. Math. Phys. 345 (2016年), 587–614 2, 4[Lo69] Loos, O., 《对称空间 I：一般理论》, W. A. Benjamin 公司, 纽约, 阿姆斯特丹, 1969年 11[LM75] L¨uscher, M., and G. Mack, 量子场论中的全局共形不变性。Comm. Math. Phys. 41 (1975年), 203–234 29

[Mo18] Morinelli, V，标准子空间网上的Bisognano–Wichmann 性质：若干充分条件，Ann. Henri Poincar´e 19:3 (2018年), 937–958 23, 51[Mo25] Morinelli, V，代数量子场论的几何视角，J. Lie Theory 35:4 (2025年), 879–908 13, 15[MN21] Morinelli, V., and K.-H. Neeb，标准子空间的协变齐性网，Comm. Math. Phys. 386 (2021年), 305–358 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 25, 39, 40, 45, 46[MN22] Morinelli, V., and K.-H. Neeb，一族非模协变量子场论，Anal. Math. Phys. 12:5(2022), 文章 124 2, 12[MN24] Morinelli, V., and K.-H. Neeb，从局域网到欧拉元，Advances in Mathematics 458 (2024年) 109960; arXiv:2312.12182 2, 3, 4, 13, 20, 23, 24, 43[MN25] Morinelli, V., K.-H. Neeb，Jordan时空上的共形不变网，编写中 26, 27, 28, 43, 47[MN´O23] Morinelli, V., K.-H. Neeb, and G. ´Olafsson，从欧拉元与3-分次到非紧因果对称空间，Journal of Lie Theory 23:1 (2023年), 377–432; arXiv:2207.1403 3, 16, 17, 42, 48[MN´O25] Morinelli, V., K.-H. Neeb, and G. ´Olafsson，欧拉元素正交对 I：分类、基本群与扭曲对偶，Forum Math.，即将出版；arXiv:2508.10960 2, 3, 5, 6, 11, 13, 42, 44, 46, 47, 49, 50[MR20] Morinelli, V., and K.-H. Rehren，类空变形：由标量场导出的高螺旋度场，Lett. in Math. Phys. 110 (2020年), 2019–2038 3[MT19] Morinelli, V., and Y. Tanimoto, Y，二维Haag–Kastler网中的尺度与莫比乌斯协变性，Comm. Math. Phys. 371 (2019年), 619–650 2, 5, 32, 41, 43, 44¨Na[Nakayama, Y，尺度不变性与共形不变性之争，Phys. Rep. 569 (2015年), 1–93, arXiv:1302.0884 4315] Ne[Neeb, K.-H.，3-分次李群中的半群与标准子空间的端同态，Kyoto Math. Journal 62:3 (2022年), 577–613; arXiv:OA:1912.13367 1122] Ne[Neeb, K.-H.，齐性空间上的实子空间网与代数量子场论，2025年3月于亨利·庞加莱研究所“表示论与非交换几何”系列讲座的讲义；arXiv:2511.09360 2, 3, 13, 23, 24, 47

[N´O17] Neeb, K.-H. 和 G. ´Olafsson, 《反酉表示与模理论》, 载于《第50届 Sophus Lie 研讨会》, K. Grabowska 等编, Banach 中心出版物 113（2017年）, 291–362; arXiv:1704.01336 6, 15, 19, 51[N´O21] Neeb, K.-H. 和 G. ´Olafsson, 《李群上的标准子空间网》, 《数学进展》384（2021年）, 107715 2, 43, 47[N´O26] Neeb, K.-H. 和 G. ´Olafsson, 《非紧因果对称空间上的局域性》, 准备中 2[N´OØ21] Neeb, K.-H.、G. ´Olafsson 和 B. Ørsted, 《管域上全纯函数希尔伯特空间的标准子空间》, Comm. Math. Phys. 386（2021年）, 1437–1487; arXiv:2007.14797 23[Po88] J. Polchinski, 《量子场论中的尺度不变性与共形不变性》, Nucl. Phys. B. 303:2（1988年）, 226–236 43[Ro04] Roberts, J. E., 《代数量子场论讲义续篇》, 载于《非交换几何》, S. Doplicher 和 R. Longo 编, Lecture Notes Math. 1831, Springer; 263–342 1, 43[SW00] Streater, R.F. 和 A.S. Wightman, 《PCT、自旋与统计, 以及其他》, 普林斯顿物理学经典著作, 普林斯顿大学出版社, 美国新泽西州普林斯顿, 2000年 1[Vi80] E. B. Vinberg, 《李群中的不变锥与序》, 《泛函分析及其应用》14（1980年）, 1–13 16[W18] E. Witten, 《APS杰出研究成就奖章: 关于量子场论纠缠性质的特邀文章》, 《现代物理评论》90（2018年）, 045003 3[Wi93] H.-W. Wiesbrock, 《冯·诺依曼代数的半侧模包含》, Comm. Math. Phys. 157（1993年）, 83–92 6[Wi97] H.-W. Wiesbrock, 《冯·诺依曼代数的半侧模包含, 勘误》, Comm. Math. Phys. 184（1997年）, 683–685 6[Zo86] A.B. Zamolodchikov, 二维场论中重整化群流的"不可逆性", 《JETP快报》43（1986年）, 730–732, 《实验与理论物理学杂志快报》43:12（1986年）, 565–567 43