arXiv:2603.26428v1 [math.MG] 27 Mar 2026

# 经典与连续的 Gromov–Hausdorff 距离

K. V. Semenov，A. A. Tuzhilin

2026年3月30日

**摘要**

从通过对应的畸变定义 Gromov–Hausdorff 距离出发，我们增加了每个对应及其逆的半连续性要求。结果表明，在下半连续的情况下，我们得到的距离与经典 Gromov–Hausdorff 距离相同；而在上半连续的情况下，只有当空间是全有界或有界紧时，我们才能证明所得距离与经典距离一致。

**关键词**：度量空间、豪斯多夫距离、Gromov–Hausdorff 距离、集值映射、下半连续和上半连续集值映射。

## 引言

著名的 Gromov–Hausdorff 距离 [1, 2] 衡量度量空间之间偏离等距同构的程度：对于等距同构的空间，距离为零；空间越“不相似”，距离就越大。在 Gromov–Hausdorff 距离的经典定义中，不考虑度量空间可能具有的其他结构。该距离甚至忽略了由度量诱导的拓扑。在 [3], 中，有人提出了 Gromov–Hausdorff 距离的一种修正形式，将连续性纳入考虑。研究者指出，使用经典 Gromov–Hausdorff 距离比较配备标准内蕴度量的欧几里得空间中的球面时，所得结果与使用该距离的连续类比形式进行比较的结果不同。在 [4], 中，另有人提出了连续 Gromov–Hausdorff 距离的另一种版本，用于比较动力系统和偏微分方程的解。然而，这些作者的方法使相关技术变得显著复杂，因为他们定义的距离不满足三角不等式。

我们考察经典 Gromov–Hausdorff 距离的若干种变体，以不同方式将连续性纳入考量。具体而言，在通过对应的畸变定义 Gromov–Hausdorff 距离时，我们还要求这些对应及其逆（它们是本质满射集值映射）为下半连续或上半连续。我们将证明，在附加假设下，所得结果仍是同一个 Gromov–Hausdorff 距离。因此，我们缩小了对应的范围；我们希望，这在某些情况下能够简化特定类别度量空间之间经典 Gromov–Hausdorff 距离的计算。

# 1 基本定义与预备结果

我们给出后续内容所需的定义和结果；详情见 [5], 另请参阅 [6]。为方便起见，度量空间 $X$ 中点 $x$ 与 $y$ 之间的距离记作 $|xy|$。

设 $X$ 是任意度量空间，$x \in X$，且 $r > 0$ 和 $s \geq 0$ 是实数。记 $U_r(x) = \{y \in X : |xy| < r\}$ 和 $B_s(x) = \{y \in X : |xy| \leq s\}$ 分别为以 $x$ 为中心、半径分别为 $r$ 和 $s$ 的开球和闭球。若 $A$ 和 $B$ 是 $X$ 的非空子集，则令 $|xA| = |Ax| = \inf\{|xa| : a \in A\}$ 和 $|AB| = |BA| = \inf\{|ab| : a \in A,\ b \in B\}$。接下来，分别定义集合 $A$ 的开 $r$-邻域和闭 $s$-邻域如下：

$$U_r(A) = \{x \in X : |xA| < r\} \text{ and } B_s(A) = \{x \in X : |xA| \leq s\}.$$

**定义 1.1**。对于度量空间 $X$ 中的非空子集 $A$ 和 $B$，从 $A$ 到 $B$ 的豪斯多夫距离是如下量

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}|aB|, \sup_{b\in B}|Ab|\} = \\ = \inf\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ and } U_r(A) \supset B\} = \\ = \inf\{s \geq 0 : A \subset B_s(B) \text{ and } B_s(A) \supset B\}.$$

若 $X$ 和 $Y$ 是等距度量空间，我们用 $X \approx Y$ 表示这一事实。

**定义 1.2**。非空度量空间 $X$ 和 $Y$ 之间的***Gromov–Hausdorff*** 距离 为

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\{d_H(X',Y') : X', Y' \subset Z,\ X' \approx X,\ Y' \approx Y\},$$

其中，下确界取遍所有度量空间 $Z$，以及将 $X$ 和 $Y$ 等距嵌入到$Z$中的所有等距嵌入。

定义 1.2 不适用于具体计算。还有一个以对应表述的等价定义。下面给出所需的概念和结果。

对于任意集合 $Z$，用 $\mathcal{P}_0(Z)$ 表示 $Z$的所有非空子集构成的族。特别地，$\mathcal{P}_0(X \times Y)$ 是 $X$ 和 $Y$之间所有非空关系组成的集合。

**定义 1.3**。对于任意非空度量空间 $X$、$Y$以及一个（非空）关系 $\sigma \in \mathcal{P}_0(X \times Y)$，其畸变 $\operatorname{dis}\sigma$ 为

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y), (x',y') \in \sigma\Big\}.$$

以下结果可直接由畸变的定义推出。

**命题 1.4**。若 $\sigma$，$\tau \in \mathcal{P}_0$（$X \times Y$）且 $\tau \subset \sigma$，则 畸变$\tau \leq$畸变 $\sigma$。

**命题 1.5**。若 $\sigma \in \mathcal{P}_0(X \times Y)$，$\tau \in \mathcal{P}_0(Y \times Z)$ 且 $\tau \circ \sigma \neq \emptyset$，则 畸变$(\tau \circ \sigma) \leq$畸变 $\sigma +$畸变 $\tau$。

回顾一下，集值映射 $f\colon X \rightrightarrows Y$从集合 $X$ 到集合 $Y$是任意映射 $f\colon X \to \mathcal{P}_0(Y)$，详情见 [7]。换言之，这种映射将每个点 $x \in X$ 映射到一个非空子集$f(x) \subset Y$。请注意，有些作者不要求对每个 $x$，$f(x)$ 都非空。**在接下来的内容中**

**我们将把集值映射** $f\colon X \to \mathcal{P}_0(Y)$ **与子集** $\cup_{x\in X}\big(\{x\}\times f(x)\big)$**在** $X\times Y$**。等同起来。**

集值映射 $f$称为满射，如果 $\cup_{x\in X} f(x) = Y$。集合 $X$与 $Y$之间的关系 $R \subset X\times Y$若是一个满射集值映射 $R\colon X \to \mathcal{P}_0(Y)$，$R\colon x \mapsto R(x) = \{y \in Y\colon (x,y) \in R\}$，则称为对应。$X$ 与 $Y$之间所有对应构成的集合记为 $\mathcal{R}(X,Y)$。

**定理 1.6** ([5])**.** 对于任意非空度量空间 $X$ 和 $Y$，

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

**命题 1.7**。非空度量空间 $X$ 和 $Y$ 等距同构，当且仅当存在 $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ 使得 $\operatorname{dis} R = 0$。所有这样的 $R$恰好是 $X$与 $Y$之间的所有等距映射（我们将映射与其图等同)。

**命题 1.8**。设 $X$和 $Y$为非空度量空间，$R \in \mathcal{R}(X,Y)$ 且 $R \subset X\times Y$为 $R$的闭包。那么 $\operatorname{dis} R = \operatorname{dis} R$。

证明。若 $\operatorname{dis} R = \infty$，则 $\operatorname{dis}$ 也成立 $\bar{R} = \infty$，因为 $R \subset \bar{R}$，在这种情况下，等式得证。

现在假设 $\operatorname{dis} R < \infty$。任取 $(x,\ y)$，$(x',\ y') \in R$，则对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $(x_1,\ y_1)$，$(x_1',\ y_1') \in R$，使得 $|xx_1| < \varepsilon$, $|yy_1| < \varepsilon$, $|x'x_1'| < \varepsilon$, $|y'y_1'| < \varepsilon$，但于是 $|x_1x_1'| - 2\varepsilon < |xx'| < |x_1x_1'| + 2\varepsilon$ 且 $|y_1y_1'| - 2\varepsilon < |yy'| < |y_1y_1'| + 2\varepsilon$，因此

$$\big||xx'| - |yy'|\big| < \big||x_1x_1'| - |y_1y_1'|\big| + 4\varepsilon,$$

由此

$$\operatorname{dis}\bar{R} = \sup_{(x,y),\,(x',y')\in\bar{R}}\big||xx'| - |yy'|\big| \le \sup_{(x_1,y_1),\,(x_1',y_1')\in R}\big||x_1x_1'| - |y_1y_1'|\big| + 4\varepsilon = \operatorname{dis} R + 4\varepsilon,$$

且由于 $\varepsilon$ 是任意的，$\operatorname{dis} R \le \operatorname{dis} R$。但是 $R \subset \bar{R}$，所以反向不等式也成立，从而得到所需的等式。 □

用 $\mathcal{R}(X,\ \overline{Y})$ 表示所有闭对应 $R \in \mathcal{R}(X,\ Y)$ 构成的集合。由命题 1.8 和定理 1.6，我们立即得到以下结果。

**推论 1.9.** 对于任意非空度量空间 $X$ 和 $Y$，

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \overline{\mathcal{R}}(X,Y)\big\}.$$

**命题 1.10.** 设 $X$和 $Y$为非空度量空间，$\varepsilon > 0$，$R \in \mathcal{R}(X,Y)$ 且 $R_\varepsilon = U_\varepsilon(R) \subset X\times Y$。那么 $\operatorname{dis} R = \inf_{\varepsilon>0}\operatorname{dis} R_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{dis} R_\varepsilon$。

证明。若 $\operatorname{dis} R = \infty$，则对于所有 $\varepsilon$，也有 $\operatorname{dis} R_\varepsilon = \infty$，因为 $R \subset R_\varepsilon$，此时等式得证。若 $\operatorname{dis} R < \infty$，则 $\operatorname{dis} R_\varepsilon$ 是 $\varepsilon$的单调递增函数，因此 $\inf_{\varepsilon>0}\operatorname{dis} R_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{dis} R_\varepsilon$。其余部分与命题 1.8 的证明完全相同。 □

我们回顾集值映射理论中的必要定义。详情请参见 [7]。

设 $X$ 和 $Y$是拓扑空间，则集值映射 $f\colon X \rightrightarrows Y$称为

- 在点 $x \in X$处上半连续，当且仅当对于 $f(x)$ 的任意邻域 $U^{f(x)}$，存在 $x$ 的一个邻域 $V^x$，使得对所有 $x' \in V^x$，都有 $f(x') \subset U^{f(x)}$，即 $f(V^x) \subset U^{f(x)}$；
- 在一点处下半连续 $x \in X$ 是指对于任意开集 $U \subset Y$，只要满足 $f(x_0) \cap U \neq \emptyset$，就存在 $x$ 的一个邻域 $V^x$，满足以下条件：对于所有 $x' \in V^x$，都有 $f(x') \cap U \neq \emptyset$;

- 在一点处连续 $x \in X$ 是指它在 $x$处既上半连续又下半连续。

如果对所有点 $x \in X$都满足相应条件，则称集值映射上半连续、下半连续或连续 。

**注 1.11**。 如果 $f$ 是单值映射，那么刚才给出的三个定义都等价于在一点处通常连续性。因此，每个连续的单值映射都是上半连续、下半连续的，并且在集值映射的意义下是连续的。特别地，恒等映射作为集值映射时是连续的。

**命题 1.12.** 设 $f\colon X \rightrightarrows Y$和 $g\colon Y \rightrightarrows Z$ 是集值映射，且它们要么均为上半连续，要么均为下半连续，要么均为连续。那么它们的复合映射也具有相同的性质。

证明。首先，设 $f$ 和 $g$ 均为上半连续。任取一点 $x \in X$，并考虑邻域 $U := U^{g(f(x))}$，那么对于每个点 $y \in f(x)$，都有 $g(y) \subset g(f(x)) \subset U$，因此 $U$也是 $g(y)$ 的邻域。由于 $g$ 在 $y$ 处上半连续，存在一个邻域$V^y$，使得 $g(V^y) \subset U$。令 $V = \cup_{y \in f(x)} V^y$，则 $g(V) \subset U$，且 $V$是 $f(x)$ 的邻域。因此，根据 $f$ 的上半连续性，存在一个邻域 $W^x$，使得 $f(W^x) \subset V$，由此 $g\big(f(W^x)\big) \subset U$，所以 $g \circ f$在 $x$ 处上半连续；由于 $x$ 是任意的，故它处处上半连续。

现在设 $f$ 和 $g$ 都是下半连续的。取任意一点 $x \in X$，并考虑一个开集 $U \subset Z$，使得 $g\big(f(x)\big) \cap U \neq \emptyset$。由于 $g\big(f(x)\big) = \cup_{y \in f(x)} g(y)$，存在 $y \in f(x)$，使得 $g(y) \cap U \neq \emptyset$。将这类 $y$ 的集合记为 $Y'$。由于 $g$ 是下半连续的，对每个 $y \in Y'$，都存在一个邻域 $V^y$，使得对于所有 $y' \in V^y$，都有 $g(y') \cap U \neq \emptyset$。令 $V = \cup_{y \in Y'} V^y$，则 $V$ 是一个开集，并且对于所有 $y' \in V$，都有 $g(y') \cap U \neq \emptyset$；此外，由于 $\emptyset \neq Y' \subset f(x)$ 且 $Y' \subset V$，我们有 $f(x) \cap V \neq \emptyset$。由于 $f$ 是下半连续的，存在一个邻域 $W^x$，使得对于所有 $x' \in W^x$，都有 $f(x') \cap V \neq \emptyset$。但此时，对于所有 $x' \in W^x$，都有 $g\big(f(x')\big) \cap U \neq \emptyset$，因此 $W^x$ 在 $x$ 处满足关于 $g \circ f$ 的下半连续性条件。又由于 $x$ 是任意的，该映射处处下半连续。

对于连续集值映射，证明可由拼接前面两项得到。

□

**命题 1.13.** 设 $X$ 和 $Y$ 是非空拓扑空间， $Z \subset Y$ 是一个非空子集，且 $f\colon X \rightrightarrows Y$ 是一个上半连续(下半连续、连续) 集值映射。那么限制 $f|_Z$ 也具有相同性质。

证明. 在 $f$ 在点 $x \in X$处半连续性的定义中，断言若某个性质对 $f(x)$成立，则存在一个邻域 $U^x$，使得对所有点 $x' \in U^x$，相同的性质也对 $f(x')$成立。但对于 $f|_Z$，半连续性要求该性质对所有 $x' \in U^x \cap Z$都成立，而这当然也成立。

□

对于度量空间 $X$ 和 $Y$，令

- $\mathcal{R}_{us}(X,Y) = \{R \in \mathcal{R}(X,Y) : \ R, R^{-1}$ 是上半连续的$\}$;
- $\mathcal{R}_{ls}(X, Y) = \{R \in \mathcal{R}(X, Y): \ R, \ R^{-1}$ 是下半连续的$\}$;
- $\mathcal{R}_{rc}(X, Y) = \{R \in \mathcal{R}(X, Y): \ R, \ R^{-1}$ 是连续的$\}$。

以下显然的包含关系成立:

$$\mathcal{R}(X,Y) \supset \mathcal{R}_{us}(X,Y) \cup \mathcal{R}_{ls}(X,Y) \supset \mathcal{R}_{us}(X,Y) \cap \mathcal{R}_{ls}(X,Y) = \mathcal{R}_{rc}(X,Y). \tag{1}$$

下面给出的许多事实对上述所有对应族同时成立，因此为简洁起见，在提及其中一个对应族时，我们用 $\mathcal{R}_{gen}$ 表示它，即 $\mathcal{R}_{gen} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{R}_{us}, \mathcal{R}_{ls}, \mathcal{R}_{rc}\}$。例如，我们证明以下一般性结果。

**命题 1.14**。 每个族 $\mathcal{R}_{gen}$ 都非空。

证明。 注意，对应 $R := X \times Y$ 是连续的，因此 $\mathcal{R}_{rc}(X, Y)$，并且由此结合包含关系 (1)， $\mathcal{R}_{us}(X, Y)$、 $\mathcal{R}_{ls}(X, Y)$ 和 $\mathcal{R}(X, Y)$ 始终非空。 □

此外，备注 1.11 和命题 1.12 意味着

**推论 1.15**。 对于任意非空度量空间 $X$、 $Y$ 和 $Z$,

- 若 $\nu$: $X \to Y$ 是一个同胚(特别地，是一个等距映射)，则

$$\nu \in \mathcal{R}(X,Y) \cap \mathcal{R}_{us}(X,Y) \cap \mathcal{R}_{ls}(X,Y) \cap \mathcal{R}_{rc}(X,Y);$$

- 对于每个 $\mathcal{R}_{gen}$,

$$\mathcal{R}_{gen}(Y,Z) \circ \mathcal{R}_{gen}(X,Y) \subset \mathcal{R}_{gen}(X,Z).$$

我们定义以下 Gromov–Hausdorff 距离的变体，即

- $d_{GH}^{us}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\{\text{dis } R: \ R \in \mathcal{R}_{us}(X, Y)\}$ 称为 上半连续 $GH$-距离;
- $d_{GH}^{ls}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\{\text{dis } R: \ R \in \mathcal{R}_{ls}(X, Y)\}$ 称为下半连续 $GH$-距离;
- $d_{GH}^{rc}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\{\text{dis } R: R \in \mathcal{R}_{rs}(X, Y)\}$ 称为 $R$-连续 $GH$-距离。

例 1.16. 若 $f$: $X \rightrightarrows Y$ 是任意集值映射，则它是连续的。事实上，对于任意点 $x$，我们可以取 $U^x := \{x\}$ 作为 $x$的一个邻域，于是对于每个点 $x' \in U^x$，都有 $f(x') = f(x) \subset f(x)$ 且 $f(x') \cap f(x) = f(x) \neq \emptyset$，因此，对于任意包含 $f(x)$ 或与 $f(x)$ 相交的开集 $V \subset Y$，同一性质对所有 $x' \in U^x$也成立，这证明了 $f$的连续性。由此可得 $\mathcal{R}(X,Y) = \mathcal{R}_{us}(X,Y) = \mathcal{R}_{ls}(X,Y) = \mathcal{R}_{rc}(X,Y)$，因此$d_{GH}(X,Y) = d_{GH}^{us}(X,Y) = d_{GH}^{ls}(X,Y) = d_{GH}^{rc}(X,Y)$。

因此，对于离散的 $X$ 和 $Y$，以上定义的所有 Gromov–豪斯多夫距离都是等 al.

由包含关系 (1) 可立即得到以下结果。

**命题 1.17**。 对于任意度量空间 $X$ 和 $Y$,

- $d_{GH}(X, Y) \leq \min\{d_{GH}^{us}(X, Y) \ d_{GH}^{ls}(X, Y) \ d_{GH}^{rc}(X, Y)\}$;
- $d_{GH}^{rc}(X, Y) \geq$最大值$\{d_{GH}^{us}(X, Y) \ d_{GH}^{ls}(X, Y)\}$。

## 2 修正后的 $GH$-距离的一般性质

根据所讨论距离的定义，我们可以立即得出结论：它们都非负，在每个空间与自身之间取值为零，并且具有对称性。事实证明，所有这些距离也都满足三角不等式。类比于我们对不同类型的对应集的处理方式，我们用 $d_{GH}^{gen}$ 表示上述引入的任意一种 Gromov–Hausdorff 距离变体，即 $d_{GH}^{gen} \in \{d_{GH}, d_{GH}^{us}, d_{GH}^{ls}, d_{GH}^{rc}\}$。

**定理 2.1.** 上述定义的所有 *Gromov–Hausdorff* 距离都是广义伪度量。

证明. 只需验证三角不等式。任取非空度量空间 $X$、$Y$、$Z$，并证明 $d_{GH}^{gen}(X,Z) \le d_{GH}^{gen}(X,Y) + d_{GH}^{gen}(Y,Z)$。若 $d_{GH}^{gen}(X,Y)$ 和 $d_{GH}^{gen}(Y,Z)$ 中有一个为无穷大，则不等式成立。现在假设二者均有限。任取 $\varepsilon > 0$，并找出对应 $R_1 \in \mathcal{R}_{gen}(X,Y)$ 和 $R_2 \in \mathcal{R}_{gen}(Y,Z)$，使得 $2d_{GH}^{gen}(X,Y) \ge \operatorname{dis} R_1 - \varepsilon$ 且 $2d_{GH}^{gen}(Y,Z) \ge \operatorname{dis} R_2 - \varepsilon$，那么根据推论 1.15，$R := R_2 \circ R_1 \in \mathcal{R}_{gen}(X,Z)$，并由命题 1.5 可得，

$$2d_{GH}^{gen}(X,Z) \le \operatorname{dis} R \le \operatorname{dis} R_1 + \operatorname{dis} R_2 \le 2d_{GH}^{gen}(X,Y) + 2d_{GH}^{gen}(Y,Z) + 2\varepsilon,$$

由此，利用 $\varepsilon$ 的任意性，我们得到所需结果。 □

此外，推论 1.15 和命题 1.7 推出

**推论 2.2**。设 $X$ 和 $Y$ 是非空的等距度量空间，则 $d_{GH}^{gen}(X,Y) = 0$。

下文中，我们用 $\mathcal{GH}$ 表示冯·诺伊曼–伯奈斯–哥德尔集合论意义下的真类 [8, 9]，其中包含所有按等距关系视为相同的度量空间。由推论 2.2 可知，所讨论的 Gromov–Hausdorff 距离的四种变体在 $\mathcal{GH}$ 上都有定义。真类 $\mathcal{GH}$ 称为***Gromov–Hausdorff*** 类。$\mathcal{GH}$ 中由所有有界度量空间组成的子类记为 $\mathcal{B}$，而 $\mathcal{B}$ 中由所有紧度量空间组成的子类记为 $\mathcal{M}$。注意，类 $\mathcal{B}$ 是真类。然而，类 $\mathcal{M}$ 是一个集合，称为***Gromov–Hausdorff*** 空间。

对于度量空间 $X$，用 diam $X$ 表示其直径：

$$\operatorname{diam} X = \sup\{|xy| : x, y \in X\}.$$

对于单点度量空间，我们用 $\Delta_1$ 表示。如果 $\lambda > 0$，那么 $\lambda X$ 表示将 $X$ 中的所有距离乘以 $\lambda$ 后得到的度量空间。如果 $X$ 有界，则令 $0X = \Delta_1$。注意，$\operatorname{diam}(\lambda X) = \lambda \operatorname{diam} X$。

在下面的命题中，我们证明普通的 Gromov–豪斯多夫距离（见 [5]）的主要性质对于其连续类比也成立。

**命题 2.3**。对于任意 $X$，$Y \in \mathcal{GH}$，

(1) $2d_{GH}^{gen}(\Delta_1, X) =$ 直径 $X$；(2) $2d_{GH}^{gen}(X, Y) \le \max\{$直径 $X$，直径 $Y\}$；

(3) 如果 $X$ 或 $Y$ 的直径有限，则 $\big|$直径 $X -$ 直径 $Y\big| \le 2d_{GH}^{gen}(X, Y)$；

（4）若 $X$ 的直径有限，则对于任意 $\lambda \ge 0$、$\mu \ge 0$、$2d_{GH}^{gen}(\lambda X, \mu X) = |\lambda - \mu|$ 直径 $X$，由此立即可知，曲线 $\gamma(t) := tX$ 上任意两点之间的曲线段都是最短路径，且该曲线段的长度等于其端点之间的距离；

（5）对于任意 $\lambda > 0$、 $d_{GH}^{gen}$（$\lambda X$、 $\lambda Y$） $= \lambda\, d_{GH}^{gen}$（$X$、 $Y$），且若 $X$和 $Y$有界，则等式对 $\lambda = 0$也成立；

(6) 若 $X$ 和 $Y$ 是离散度量空间，则 $d_{GH}^{gen}(X, Y) = d_{GH}(X, Y)$;

(7) 若 $X_1, X_2, \ldots$ 是一个度量空间序列，且相对于 $d_{GH}^{gen}$ 收敛到度量空间$X$，那么它相对于 $d_{GH}$ 也收敛到这个 $X$。

证明。 (1) 注意，集合 $\mathcal{R}(\Delta_1, X)$ 恰好由一个对应 $R := \Delta_1 \times X$ 构成；由于该集合中其余的 $\mathcal{R}_{gen}(\Delta_1, X)$ 根据命题 1.14 总是非空的，因此它们都与 $\{R\}$ 重合。最后只需注意 $\operatorname{dis} R = \operatorname{diam} X$。

(2) 由于每个 $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ 都包含在对应 $X \times Y$ 中，根据命题 1.4，我们有 $\operatorname{dis} R \le \operatorname{dis}(X \times Y)$。最后只需注意 $\operatorname{dis}(X \times Y) = \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$。

(3) 若 $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} Y$，则不等式成立。设 $\operatorname{diam} X > \operatorname{diam} Y$，则 $Y$ 的直径有限。任取 $R \in \mathcal{R}_{gen}(X, Y)$，并考虑序列 $(x_n, y_n), (x_n', y_n') \in R$ 使得$|x_n x_n'| \to \operatorname{diam} X$ as $n \to \infty$。于是，从某个 $n$ 开始，我们有 $|x_n x_n'| > \operatorname{diam} Y \ge |y_n y_n'|$，因此对所有这样的 $n$,

$$\big||x_n x_n'| - |y_n y_n'|\big| = |x_n x_n'| - |y_n y_n'| \ge |x_n x_n'| - \operatorname{diam} Y \to (\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y) \text{ as } n \to \infty,$$

所以 $\operatorname{dis} R \ge \operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y = |\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y|$。由 $R$ 的任意性可得所需结果。

(4) 由第 (3) 项可知 $2d_{GH}^{gen}(\lambda X, \mu X) \ge |\operatorname{diam}(\lambda X) - \operatorname{diam}(\mu X)| = |\lambda - \mu| \operatorname{diam} X$。为证明反向不等式，设 $R$: $\lambda X \to \mu X$ 为恒等映射，则由推论 1.15 可知，该 $R$ 包含于所有四个 $\mathbb{R}_{gen}(X, X)$ 中。只需注意到 $\operatorname{dis} R = |\lambda - \mu| \operatorname{diam} X$。

（5）对于每个 $R \in \mathcal{R}(X, Y)$，记 $R_\lambda$ 为同一个对应，但将其视为 $\mathcal{R}(\lambda X, \lambda Y)$ 的元素。于是 $\operatorname{dis} R_\lambda = \lambda \operatorname{dis} R$，由此可得本条结论。

（6）这是由如下事实得出的： $X$ 和 $Y$之间的所有映射，无论是单值映射还是集合值映射，都是连续的。

（7）这是由不等式 $d_{GH} \le d_{GH}^{gen}$ 得出的。 □

**注 2.4.** 对定理 2.1 和命题 2.3 的证明中所用事实（第 6 条除外）进行分析，可得如下推广。对于每一对度量空间 $(X, Y)$，记 $\mathcal{R}_g(X, Y)$ 为 $\mathcal{R}(X, Y)$ 的一个非空子集，并要求满足以下性质：

- 对于任意度量空间 $X$，恒等映射 id 属于 $\mathcal{R}_g(X, X)$;
- 对于任意度量空间 $X$、 $Y$和 $Z$， $\mathcal{R}_g(Y, Z) \circ \mathcal{R}_g(X, Y) \subset \mathcal{R}_g(X, Z)$;
- 对于任意度量空间 $X, Y, \mathcal{R}_g(Y, X) = \big[\mathcal{R}_g(X, Y)\big]^{-1}$。

请注意，前两个条件定义了一个范畴，其对象为度量空间，而态射为来自 $\mathcal{R}_g(X, Y)$ 的对应。

按以下公式定义 Gromov–Hausdorff $g$距离

$$d_{GH}^{g}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}_g(X, Y)\big\}.$$

那么 $d_{GH}^{g}(X, Y)$ 满足定理 2.1 和命题 2.3（第 6 项除外），其中 $\mathcal{R}_{gen}$ 被 $\mathcal{R}_g$替换。

# 3 半连续 $GH$-距离与经典距离的一致性

我们先讨论下半连续距离的情形。

## 3.1 下半连续 $GH$-距离

设 $f\colon X \rightrightarrows Y$ 是集合之间的集值映射。集合 $D \subset Y$ 的完全原像 为集合

$$f_-^{-1}(D) = \big\{x \in X : f(x) \cap D \neq \emptyset\big\}.$$

**定理 3.1** ([7])**.** 设 $f\colon X \rightrightarrows Y$ 是拓扑空间之间的集值映射。那么，当且仅当对于任意开集 $U \subset Y$，集合 $f_-^{-1}(U)$ 是 $X$ 中的开集时， $f$ 是下半连续的。

回忆一下，拓扑空间之间的映射 $f\colon X \to Y$ 称为开映射，如果每个开集的像都是开集。接下来，我们需要以下引理。

**引理 3.2.** 设 $X$ 和 $Y$ 是拓扑空间，且 $\pi_X\colon X \times Y \to X$ 是标准投影。那么 $\pi_X$ 是开映射。

**定理 3.3.** 设 $X$ 和 $Y$ 是拓扑空间，且 $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ 是 $X \times Y$ 的开子集。那么 $R\colon X \rightrightarrows Y$ 和 $R^{-1}\colon Y \rightrightarrows X$ 是下半连续集值映射。换言之，$R \in \mathcal{R}_{ls}(X,Y)$。

证明. 我们证明 $R$ 的下半连续性（ $R^{-1}$ 的证明类似）。任取一个开 $U \subset Y$，则 $R_-^{-1}(U) = \pi_X\big[(X \times U) \cap R\big]$，且由于 $X \times U$ 是开集、 $R$ 是开集，$(X \times U) \cap R$ 是开集。根据引理 3.2， $\pi_X\big[(X \times U) \cap R\big]$ 是开集，因此由定理 3.1， $R$ 是下半连续的。 □

**推论 3.4.** 设 $X$ 和 $Y$ 是非空度量空间，则 $d_{GH}(X,Y) = d_{GH}^{ls}(X,Y)$。

证明。 根据定理 3.3，对于每个 $R \in \mathcal{R}(X,Y)$， $\varepsilon > 0$ 和 $R_\varepsilon := U_\varepsilon(R)$，我们有 $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_{ls}(X,Y)$。另一方面，根据命题 1.10，$\inf_\varepsilon \operatorname{dis} R_\varepsilon = \operatorname{dis} R$，因此

$$2d_{GH}(X,Y) = \inf_{R \in \mathcal{R}(X,Y)} \operatorname{dis} R = \inf_{R \in \mathcal{R}(X,Y),\, \varepsilon > 0} \operatorname{dis} R_\varepsilon \geq \inf_{R \in \mathcal{R}_{ls}(X,Y)} \operatorname{dis} R = 2d_{GH}^{ls}(X,Y).$$

接下来只需应用命题 1.17。 □

现在我们考虑上半连续距离的情形。

## 3.2 上半连续 $GH$-距离

设 $f\colon X \rightrightarrows Y$ 是集合之间的一个集值映射。集合 $D \subset Y$ 的小原像 是集合

$$f_+^{-1}(D) = \big\{x \in X : f(x) \subset D\big\}.$$

**定理 3.5** ([7])。 设 $f\colon X \rightrightarrows Y$ 是拓扑空间之间的一个集值映射。那么，当且仅当对于任意闭集 $W \subset Y$，集合 $f_-^{-1}(W)$ 是 $X$ 中的闭集时， $f$ 是上半连续的。

**定理 3.6**。 设 $X$ 和 $Y$ 是非空紧拓扑空间，且 $X$ 还是豪斯多夫空间，并设 $f\colon X \rightrightarrows Y$ 是一个图 $f \subset X \times Y$ 为闭集的集值映射。那么 $f$ 是上半连续的。

证明。 任取一个闭集 $W \subset Y$，并将标准投影记为 $\pi_X$：$X \times Y \to X$。于是

$$f_-^{-1}(W) = \{x \in X : f(x) \cap W \neq \emptyset\} = \{x \in X : \exists y \in W, y \in f(x)\} = \pi_X[(X \times W) \cap f].$$

由于 $X \times W$在 $X \times Y$中是闭集，$(X \times W) \cap f$也是闭集，因此由于 $X \times Y$的紧致性，它是紧集。由于投影 $\pi_X$ 是连续的，且紧集的连续像仍为紧集，因此集合 $f_-^{-1}(W) \subset X$是紧集，进而由于 $X$ 是豪斯多夫的，它是闭集。因此，根据定理 3.5，集值映射 $f$ 是上半连续的。 □

由定理 3.6 可立即得到以下结果。

**推论 3.7**。 设 $X$ 和 $Y$ 是非空紧豪斯多夫拓扑空间。那么，每个闭对应 $R \in \mathcal{R}(X, Y)$及其逆都是上半连续的。换言之，$\mathcal{R}(X, Y) \subset \mathcal{R}_{us}(X, Y)$。

**推论 3.8**。 设 $X$ 和 $Y$ 是非空紧度量空间。那么

$$d_{GH}^{us}(X, Y) = d_{GH}(X, Y).$$

证明。 根据推论 3.7，我们有 $d_{GH}(X, Y) \geq d_{GH}^{us}(X, Y)$。反向不等式包含在命题 1.17 中。 □

我们将需要以下引理。

**引理 3.9**。 设 $A \subset X$ 和 $B \subset Y$ 是度量空间的非空子集，且 $R \subset A \times B$ 在 $A \times B$ 中是闭集。设 $(a_n, b_n) \in R$ 是一个序列，使得 $a_n \to a \in A$ 且 $b_n \to b \in B$。那么$(a, b) \in R$。

证明。 反设不然，即 $(a, b) \notin R$。由于 $R$ 在 $A \times B$ 中是闭集，存在 $\varepsilon > 0$，使得$(U_\varepsilon(a) \cap A) \times (U_\varepsilon(b) \cap B)$ 与 $R$ 不相交。但当 $n$ 充分大时，我们有 $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap A$ 且 $b_n \in U_\varepsilon(b) \cap B$，矛盾。 □

**定理 3.10.** 设 $Y \subset X$ 是紧致度量空间 $X$ 的非空子集。则 $d_{GH}^{us}(X, Y) = d_{GH}(X, Y)$。

证明。 对任意的 $R' \in \mathcal{R}(Y, X)$ 和 $\varepsilon > 0$，按如下方式将 $R'$ 扩展为 $R \in \mathcal{R}(Y, X)$：对每个点 $y' \in Y \setminus Y$，

- 考虑任意序列 $y'_n \in Y, y'_n \to y'$；
- 对每个 $n$，选取满足 $(y'_n, x'_n) \in R'$ 的 $x'_n \in X$；
- 利用 $X$ 的紧致性，从 $x'_n$ 中选取一个收敛到某个 $x' \in X$ 的子序列；
- 不失一般性，假设 $x'_n \to x'$；
- 将所有这样得到的（$y'$，$x'$）加入 $R'$。

接下来，令 $R \subset Y \times X$ 为 $Y \times X$ 中 $R$ 的闭包。根据推论 3.7，集值映射 $R$: $Y \rightrightarrows X$ 是上半连续的。根据命题 1.13，限制 $R|_Y$ 也是上半连续的。

我们证明 $R|_Y = R$。任取一个点 $(y, x) \in R$。根据构造，对于每个 $y_n$，有两种可能：

- 要么 $y_n \in Y$，此时我们保持其不变；
- 或 $y_n \in Y \setminus Y$，但根据构造，存在 $y'_n \in Y$ 使得 $(y'_n,\ x'_n) \in R'$ 且 $|y'_n y_n| < 1/n$；在这种情况下，我们将数对 $(y_n,\ x_n)$ 替换为 $(y'_n,\ x'_n)$。

注意，对于重构得到的序列 $(y_n,\ x_n)$，对所有 $n$, $y_n \to y$, $x_n \to x$，都有 $(y_n,\ x_n) \in R'$。由于 $y \in Y$ 和 $R'$ 是闭集，根据引理 3.9，$(y,\ x) \in R'$。

因此，我们证明了 $\mathcal{R}(Y,\ X) \subset \mathcal{R}_{us}(Y,\ X)$，从而完成了证明。 □

由定理 3.10 可立即得到以下结果。

**推论 3.11.** 设 $Y \subset X$ 是一个非空紧致度量空间的稠密子集。那么 $d_{GH}^{us}(X, Y) = 0$。

**推论 3.12.** 设 $X$ 和 $Y$ 是全有界度量空间。则 $d_{GH}^{us}(X, Y) = d_{GH}(X, Y)$。

证明。设 $X$ 和 $Y$ 分别是 $X$ 和 $Y$ 的完备化。则 $X$ 和 $Y$ 是紧致的，而 $X$ 和 $Y$ 是它们的稠密子集。剩下只需对 $d_{GH}^{us}$ 使用定理 3.8、推论 3.11 和三角不等式。 □

**推论 3.13**。设 $X$ 和 $Y$ 是有界紧度量空间(即其中的所有闭球都是紧致的)，且 $d_{GH}(X, Y) < \infty$。则 $d_{GH}^{us}(X, Y) = d_{GH}(X, Y)$。

证明。只需任取一个闭对应 $R \in \mathcal{R}(X, Y)$，使其 dis $R < \infty$，并证明对任意 $x \in X$，集值映射 $R$ 在 $x$ 处上半连续。

分别考虑任意的开球和闭球 $U := U_r(x)$ 与 $A := B_r(x)$。由于 dis $R < \infty$，集合 $R(A)$ 有界，因此存在一个开球 $V := U_s(y) \subset Y$ 使得 $R(A) \subset V$。令 $B = B_s(y)$。由于 $X$ 和 $Y$ 是有界紧的，$A$ 和 $B$ 是紧的。集值映射 $R|_A$ 将度量紧空间 $A$ 映射到度量紧空间 $B$。由于 $R$ 在 $X \times Y$ 中是闭集，$R|_A = (A \times B) \cap R$ 在 $A \times B$ 中是闭集。由定理 3.6，集值映射 $R|_A$ 是上半连续的。

设 $W \subset Y$ 是 $Y$ 中包含 $R(x)$ 的任意开集。由于 $R(x) \subset R(A) \subset V$，我们有 $R(x) \subset V \cap W \subset B$，且 $V \cap W$ 是 $Y$ 中的开集，因此也是 $B$ 上诱导拓扑中的开集。由于 $R|_A$ 是上半连续的，存在 $A$ 中的一个邻域 $W^x$，使得对所有的 $x' \in W^x$，都有 $R(x') = R|_A(x') \subset V \cap W$。注意到集合 $W^x \cap U$ 在 $X$ 中是开集，因此它也是 $X$ 中 $x$ 的一个开邻域。于是，我们构造出了 $X$ 中 $x$ 的一个邻域，使得其中所有点 $x'$ 对应的集合 $R(x')$ 都包含于 $Y$ 中任意选取的 $R(x)$ 的邻域，这就证明集值映射 $R$ 在 $x$ 处上半连续。 □

# 参考文献


[1] M. Gromov，《黎曼流形的度量结构》。Lafontaine 和 PierrePansu 编，1981 年。

[2] M. Gromov，《黎曼与非黎曼空间的度量结构》。Birkh¨auser，1999 年。

[3] S. Lim、F. Memoli 和 Z. Smith，球面之间的 *Gromov–Hausdorff* 距离。《Geometry & Topology》，2023 年，第 27 卷，第 9 期，第 3733–3800 页。

[4] J. Lee、C. A. Morales，《动力系统的 Gromov-Hausdorff 稳定性及其在偏微分方程中的应用》。Birkh¨auser/Springer，2022 年。[5] D. Yu. Burago、Yu. D. Burago、S. V. Ivanov，《度量几何教程》，数学研究生教材 **33** 美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2001 年。[6] A. A. Tuzhilin，《豪斯多夫距离与 *Gromov-Hausdorff* 距离几何讲义》，2020 年，arXiv 电子预印本，arXiv:2012.00756。[7] Yu. G. Borisovich、B. D. Gel'man、A. D. Myshkis、V. V. Obukhovskii，《多值映射》，《苏联数学杂志》，1984 年，第 24 卷，第 6 期，第 719–791 页。[8] E. Mendelson，《数理逻辑导论》。莫斯科：科学出版社，1984 年。[9]T. Banach，《经典集合论：集合与类理论》，2023 年，arXiv 电子预印本，arXiv:2006.01613[数理逻辑]。