arXiv:2603.26492v1 [math.AG] 27 Mar 2026

实二次型的动机张量三角几何

JEAN PAUL SCHEMEIL

摘要。我们研究由实二次型生成的 Voevodsky 动机范畴的张量三角几何。在素数 2 处，我们确定了其 Balmer 谱，并发现它是一个可数无限的非诺特空间，Krull 维数为 2。我们详细阐述了这一空间、Balmer–Gallauer 计算的实 Artin–Tate 谱以及 Vishik 的各向同性点之间的关系。最后，我们将本次计算与 Balmer–Gallauer 关于 Artin–Tate 动机的结果相结合，从而完整描述实代数数域上二次型整系数动机的谱。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 5 3. 二次型的混合动机 8 4. 若干细胞动机范畴的 Balmer 谱 13 5. 素 tt-理想 23 6. 拓扑 28 7. 应用 参考文献 33

1. 引言

张量三角几何（简称 *tt*-几何 ）已在许多领域取得了丰硕的应用[巴尔10]。其中一个尤为活跃的方向是动机张量三角几何，其长远目标是根据环境范畴的张量三角结构对动机进行分类

$$\mathrm{DM}(k) := \mathrm{DM}(k;\mathbb{Z}),$$

由 Voevodsky [Voe00] 引入。对于几何动机（即 DM(*k*) 中的紧对象），这相当于描述三角张量范畴 $\mathrm{DM}^{\mathrm{gm}}(k)$ 的 Balmer 谱 [Bal05]。尽管目前这一问题在很大程度上仍未解决，Vishik [Vis24; Vis 25] 的近期工作已让我们深入了解了这一空间的复杂性。当基域 k 的特征为零时，Vishik 针对任意素数 p，通过将 DM($k;\mathbb{F}_p$) 在 p-各向异性簇（其闭点的次数均可被p整除）对应的动机处局部化，定义了各向同性动机范畴 DM($k/k;\mathbb{F}_p$)。利用这一框架，Vishik 构造了一族各向同性实现函子

$$\psi_{E,p} : \mathrm{DM}(k) \to \mathrm{DM}(E(\mathbb{P}^\infty)/E(\mathbb{P}^\infty);\mathbb{F}_p)$$

以所有素数 p 和域扩张 E/k为指标。当限制到几何动机时，这些函子的核能够检测到目前已知的 DM 谱中最大的一族闭点

日期：2026年3月30日。

(gm)。一个引人注目的推论是，在实数域 $k = \mathbb{R}$上，这些实现使 Vishik 得以证明 Spc(DMgm(ℝ)) 的基数为 $2^{\mathfrak{c}}$。这个界限初步衡量了该空间的复杂性，也预示着实现完整拓扑分类所面临的挑战。

应对这种复杂性的一个合理方法，是“自下而上”地研究动机范畴的谱：与其一次性处理$\mathrm{DM}^{\mathrm{gm}}(k)$，不如考察动机范畴中经过精心挑选的全 tt-子范畴的 tt-几何。这一策略的重要性源于巴尔默的一般定理 [Bal18]，他证明了全 tt-子范畴的包含

$$\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{K}$$

会在谱上诱导一个连续的满射限制映射

$$\mathrm{Spc}(\mathcal{K}) \twoheadrightarrow \mathrm{Spc}(\mathcal{L}).$$

这一满射实际上为环境谱的复杂性提供了一个下界。在动机理论中，这一思想的具体体现包括：彼得 [Pet13] 和 Gallauer [Gal19] 开创了 Tate 动机 DTMgm(k) 的谱的研究；巴尔默-加劳尔[BG22; BG25] 开创了 Artin 动机 DAMgm(k) 和 Artin–Tate 动机 DATMgm(k) 的谱的研究；以及 Sparks [Spa25] 对各向同性情形下这些范畴的 tt-几何进行了研究。限制到这类全 tt-子范畴之所以重要，是因为它们的 tt-几何往往可以用基域的特定代数不变量明确描述。例如，在代数闭域和实闭域上，Gallauer [Gal19] 与巴尔默-加劳尔 [BG22] 证明，Tate 动机的谱可以用基域的动机上同调来描述；对于 Artin 动机，巴尔默-加劳尔 [BG25]近期取得突破性进展，证明了在任意域上，其谱均可用基域的绝对伽罗瓦群来表示。此外，对于实闭域上的 Artin–Tate 动机，巴尔默-加劳尔 [BG22] 获得了相应的描述，其中结合了上述不变量。最后，在各向同性情形下，Sparks [Spa25] 证明，在素数 2 处，柔性域上各向同性（Artin-）Tate 动机的 tt-几何可以用基域的各向同性动机上同调来描述。

沿着上述主题，本文拟开启对由光滑射影二次型的动机生成的全 tt-子范畴的 Balmer 谱的研究。

$$\mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(k; R).$$

该子范畴最初由巴赫曼 [Bac17]引入，用于研究动机范畴的皮卡群。它为将高维簇的动机纳入动机张量三角几何的版图，提供了一个自然的首要候选。为作铺垫，我们简要讨论基域 k 为代数闭域的情形。由于此类域上的所有二次型都是各向同性的，二次型的动机完全分解为 Tate 动机；因此，DQMgm(k, R) = DTMgm(k, R)。得益于彼得 [Pet13] 和 Gallauer [Gal19], 的工作，这一范畴的 tt-几何已得到充分理解。然而，若 k 不是代数闭域，则 DTMgm(k; R) 是 DQMgm(k; R) 的真 tt-子范畴。一般而言，人们预期 DQMgm(k; R) 的 tt-几何会反映 k上二次型理论的复杂性：这是因为 DQMgm(k; R) 由 Tate 动机和各向异性二次型的动机构成，而后者对应于 k上的各向异性二次型。这自然使得情形 $k = \mathbb{R}$ （或更一般地，任意实闭域）成为超越代数闭域情形的第一步，也将是本文的主要研究对象。事实上，我们对 $\mathbb{R}$上的二次型理论已有很好的掌握；此外，若 $R = \mathbb{F}_p$对 p 是奇素数（或更一般地，2 在 R中可逆），则二次型的动机分解为 Tate 动机和二次扩张的动机（即 M(ℂ)），特别地，我们有一个等价

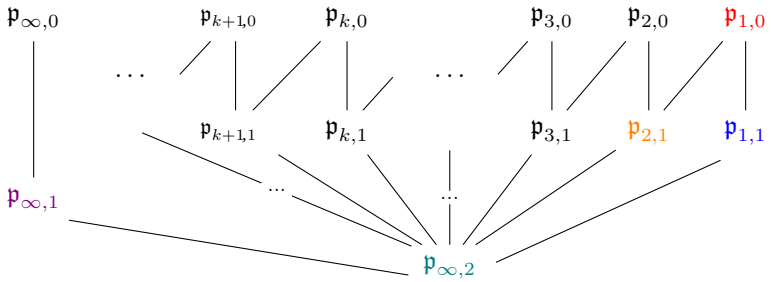
$$\mathrm{DATM}_{\mathrm{gm}}(\mathbb{R}; \mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(\mathbb{R}; \mathbb{F}_p).$$

由 [BG22，推论 11。2], 该谱已得到完全理解。然而，对于 $R = \mathbb{F}_2$ （或更一般地，2 不是 R的单位对象），包含

$$\mathrm{DATM}_{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2) \hookrightarrow \mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2)$$

远非等价，因为任意维数的 2-各向异性二次曲面之动机都会进入图示，使得三角张量范畴 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2)$ 丰富得多。本文的主要结果是计算该三角张量范畴的 Balmer 谱。

主定理。 设 F 是一个实闭域。三角张量范畴 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 的 ***Balmer*** 谱是如下这个可数无限的、***Krull*** 维数为 *2* 的非诺特空间，

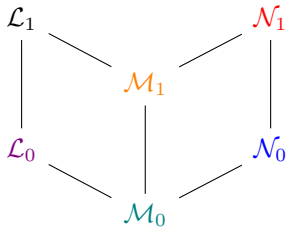


其中，线条表示向上的特化关系。闭子集是特化闭子集 Z，满足：若 $\mathfrak{p}_{\infty,\,0} \notin Z$，则 Z 是有限的。

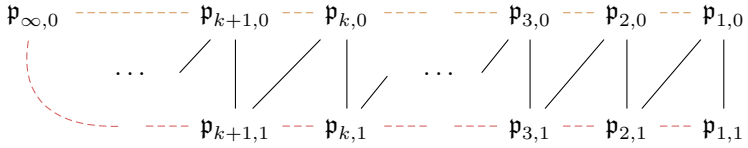
上图中用于标示的颜色描绘了点在限制下如何映射

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)) \twoheadrightarrow \mathrm{Spc}(\mathrm{DATM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)),$$

其中，（带装饰的）像由以下六点空间构成 [BG22，定理 10。1]。



从拓扑的描述中，我们观察到，$\mathfrak{p}_{k,0}$ 对应的上方水平闭点序列（针对 $k \in \mathbb{N}$），以及$\mathfrak{p}_{k,1}$ 对应的下方水平点序列（针对 $k \in \mathbb{N}$），都收敛于无穷远点$\mathfrak{p}_{\infty,0}$。



这一现象说明了我们选择用非对称布局绘制 $\mathrm{Spc}(\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2))$ 的合理性。

计算 $\mathrm{Spc}(\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2))$ 主要基于以下三个思路。

约化到细胞动机范畴。 我们构造了一族几何函子，将大张量三角范畴 $\mathrm{DQM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 映射到更易处理的胞腔动机三角张量范畴中

$$\{\pi_n\colon\ \mathrm{DQM}(F;\mathbb{F}_2) \to \mathcal{K}_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}.$$

这些范畴 $\mathcal{K}_n$ 是通过沿着特定的、定义在 F上的各向异性二次型的函数域作基变换而得到的，随后施加一个 smashing 局部化，将这些二次型的动机消去

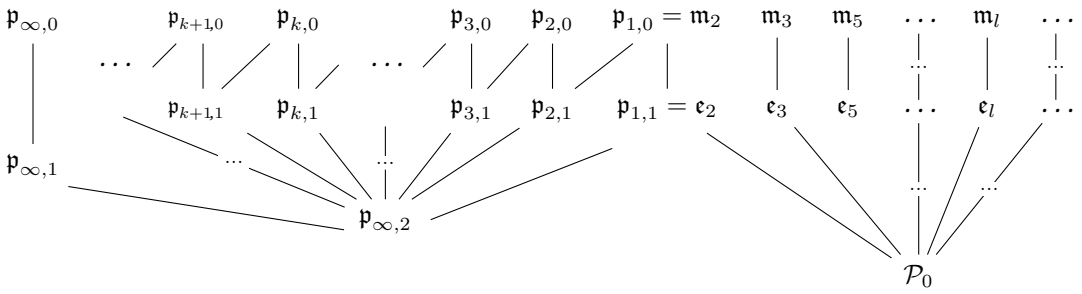
仍保持各向异性。这种分层技术可追溯至 [Bac17; Vis19], 在其中，该技术被用于研究$\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(k;\ R)$的皮卡群。将其转用于 tt-几何，我们证明这些 π_n 构成一个联合保守族；利用 [Bar+24]的一般定理，这将$\mathrm{Spc}(\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2))$ 的计算归约为谱$\mathrm{Spc}(\mathcal{K}_n^c)$，其中 $\mathcal{K}_n^c$ 表示 $\mathcal{K}_n$的紧对象构成的全 tt-子范畴。

计算 $\mathrm{Spc}(\mathcal{K}_n^c)$ ： 利用权结构。 我们证明，胞腔范畴的 tt-几何$\mathcal{K}_n^c$ 由单位对象的 双重分次 自同态环决定。关键在于构造合适的权结构，将谱的计算归结为证明：在指定对象上有足够多的态射是张量幂零的。这一技巧受到 Sparks [Spa25],的启发；他证明，在适当假设下，足够多张量幂零态射的存在会迫使三角张量范畴的谱成为单点。在我们的情形中，我们调整这一思路，以控制特定对象上的张量幂零性，从而提供一种有效的计算工具。

Chow 权结构与素 *tt*-理想的生成元。 确定 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 的巴尔默谱的所有点后，还需确定特化关系和拓扑。我们通过描述所有三角张量素理想的生成元来完成这一工作。关键工具是限制到 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 上的经典 Chow 权结构，它将使我们能够研究沿函子 π_n 对 $\mathrm{Spc}(\mathcal{K}_n^c)$ 中各点的拉回。

在确立主定理及其与实 Artin-Tate 动机的谱之间的关系后，我们分析 Vishik 所检测到的各向同性点如何限制到 2^c $\mathrm{DQM}\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2)$。最后，由于在实闭域上，除了素理想 2之外，二次型的动机与 Artin-Tate 动机相同，我们说明当 F 的代数闭包满足 *Peter-Gallauer* 消失条件 (参见 [Gal19，假设 6。6]) 以及 [Pet13，第 4 节。3]) 时，如何通过调整 F BG22 的策略，获得完整的整系数谱——例如，当 F 是实代数数域 $\mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$时——BG22，定理 11。。

推论. *L et $F=\mathbb{R}^{alg}=\overline{\mathbb{Q}}\cap\mathbb{R}$，那么 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{Z})$ 的巴尔默谱是以下空间，*



其中 l 遍历所有素数，线条表示向上的特化关系。闭子集是满足以下条件的特化闭子集 Z

- *if $\mathfrak{p}_{\infty,0}\notin Z$, then $Z\cap\overline{\{\mathfrak{p}_{\infty,2}\}}$ is finite;*
- *if $\mathcal{P}_0\notin Z$, then $Z\cap\overline{\{\mathcal{P}_0\}}$ is finite.*

致谢。 我由衷感谢我的导师 Alexander Vishik，感谢他与我进行了许多宝贵的讨论，始终给予我支持和指导，并对本文档的初稿提出了深刻的意见。我还要感谢 Fraser Sparks 与我进行了许多富有成效的交流，并在相关成果发表于 [Spa25] 之前，慷慨地与我分享了他关于柔性域上各向同性 Tate 动机的 Balmer 谱的研究成果。我也要感谢 Martin Gallauer 对本文档初稿提出的宝贵意见。

2. 预备知识

本节将简要回顾本文中用到的 tt-几何和动机背景，并确定本文所采用的记号和术语。

2.1. **tt-几何回顾**。 在全文中，设 $\mathcal{K}$是一个 刚性紧生成大 *tt*-范畴，并令 $\mathcal{K}^c$ 表示其由紧对象组成的本质小刚性 tt-子范畴。遵循 [巴尔默05],的*Balmer* 谱 $\mathcal{K}^c$ 是拓扑空间

$$\mathrm{Spc}(\mathcal{K}^c),$$

其底层集合由 $\mathcal{K}^c$的素 tt-理想组成，并赋予这样的拓扑：闭集基由支撑给出

$$\mathrm{supp}(X) := \{\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spc}(\mathcal{K}^c) \mid X \notin \mathfrak{p} \,\},$$

其中， X 遍历 $\mathcal{K}^c$的所有对象。

在这些条件下，映射

$$\mathcal{J} \longmapsto \bigcup_{X \in \mathcal{J}} \mathrm{supp}(X)$$

在（根）tt-理想 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}^c$ 与 Spc($\mathcal{K}^c$) 的 Thomason 子集之间诱导出一个保持包含关系的双射。

几何函子的联合保守族。设 $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ 是刚性紧生成的大型张量三角范畴之间的 tt-函子。若 F 保持余积，我们称其为几何的。任何几何 tt-函子都保持紧对象，因此限制为一个 tt-函子

$$F^c : \mathcal{K}^c \to \mathcal{L}^c.$$

根据巴尔默谱的函子性， F^c 诱导出一个连续谱映射

$$\mathrm{Spc}(F^c)\colon \mathrm{Spc}(\mathcal{L}^c) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{K}^c),$$

它由素 tt-理想的拉回给出。

若几何函子族 $\{F_i\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}_i\}_{i\in I}$ 满足：对所有 $i \in I$， $F_i(X) = 0$ 蕴含 $X = 0$，则称该族为联合保守的。

这一概念的重要性在于张量三角几何中的以下基本结果。

定理 2.1 ([Bar+24])。若上述几何函子族是联合保守的，则诱导的谱映射

$$\bigsqcup_{i\in I} \mathrm{Spc}(F_i^c) : \bigsqcup_{i\in I} \mathrm{Spc}(\mathcal{K}_i^c) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{K}^c)$$

是满射。

爆破局部化。 ([BF11]) 称一个满三角子范畴 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$ 为 局部化张量理想，如果它在任意余积下封闭并满足 $\mathcal{K} \otimes \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}$。对于对象集 $S \subseteq \mathcal{K}$，我们记 $\mathrm{Loc}_{\otimes}(S)$ 为包含 S 的最小局部化张量理想。

注 2.2. ([Gre19, 定理 8.1], [Ste13]) 若 S 是一组紧对象，则三角张量理想$\langle S\rangle \subseteq \mathcal{K}^c$ 可识别为

$$\langle S\rangle \;=\; \mathrm{Loc}_{\otimes}(S) \cap \mathcal{K}^c.$$

$\mathcal{K}$ 的局部化 是一个二元组（L, λ），其中 $L: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 是一个正合函子，而 λ 是一个自然变换 $\lambda: \mathrm{Id}_{\mathcal{K}} \to L$，满足 $L\lambda = \lambda L$，且 $L\lambda: L \to L^2$ 是一个同构。$\mathcal{K}$ 的余局部化是一个二元组（Γ, γ），满足（Γ^{op}, γ^{op}）是 $\mathcal{K}^{op}$ 的一个局部化。

L, λ $\mathcal{K}$ 的局部化称为*smashing*，如果 L 保留余积。局部化张量理想$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}$ 称为*smashing*，如果存在 $\mathcal{K}$ 的一个 smashing 局部化 ($L_{\mathcal{S}}$, λ)，使得 $\ker(L_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$。在这种情况下，存在一个相应的余局部化函子 ($\Gamma_{\mathcal{S}}$, γ)，使得 $\mathrm{im}(\Gamma_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$。此外，还存在一个幂等三角

$$\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathbb{1}) \longrightarrow \mathbb{1} \longrightarrow L_{\mathcal{S}}(\mathbb{1}) \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{S}}(\mathbb{1})[1].$$

关键的是，在这些情形下，smashing 局部化与幂等三角一一对应 [BF11，定理 3。5]。特别地，存在自然同构

$$L_{\mathcal{S}} \simeq L_{\mathcal{S}}(\mathbb{1}) \otimes -, \qquad \Gamma_{\mathcal{S}} \simeq \Gamma_{\mathcal{S}}(\mathbb{1}) \otimes -.$$

反过来， $\mathcal{K}$中的任意幂等三角

$$X \to \mathbb{1} \to Y \to X[1]$$

给出一个 smashing 局部化 $L_Y = Y \otimes -: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$。

权结构。 ([Bon10]) 三角范畴 $\mathcal{T}$ 上的权结构 $\mathcal{T}^{\leq 0}$, $\mathcal{T}^{\geq 0} \subseteq \mathcal{T}$ 满足以下公理:

(1) $\mathcal{T}^{\leq 0}$ 和 $\mathcal{T}^{\geq 0}$ 是幂等完备的。

(2) $\mathcal{T}^{\leq 0} \subseteq \mathcal{T}^{\leq 0}[1]$ 和 $\mathcal{T}^{\geq 0}[1] \subseteq \mathcal{T}^{\geq 0}$。

(3) 正交性：对于任意 $X \in \mathcal{T}^{\leq 0}$ 和 $Y \in \mathcal{T}^{\geq 0}$，有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y[1]) = 0$。

(4) 权分解：对于任意对象 $X \in \mathcal{T}$，存在一个可分三角

$$B \to X \to A \to B,$$

其中 $B \in \mathcal{T}^{\leq 0}$ 和 $A \in \mathcal{T}^{\geq 0}[1]$。

我们将平移后的子范畴及其交记为

$$\mathcal{T}^{\leq n} := \mathcal{T}^{\leq 0}[n], \quad \mathcal{T}^{\geq n} := \mathcal{T}^{\geq 0}[n], \quad \mathcal{T}^{=0} := \mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq 0},$$

并将 $\mathcal{T}^{=0}$ 称为该权结构的心 。如果一个权结构穷尽整个范畴，则称其为有界：

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}^{\leq n} = \mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}^{\geq n}.$$

一般而言，如果一个三角范畴 $\mathcal{T}$ 带有有界权结构，那么任意对象$X \in \mathcal{T}$ 都可以表示为有限个分次部分 $X_i = C_i[i]$的迭代扩张，其中$C_i \in \mathcal{T}^{=0}$。这些部分可以排列成 X 的有限权复形，记作如下:

$$t(X) := \quad 0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_{m+2}} C_{m+1} \xrightarrow{\delta_{m+1}} C_m \longrightarrow 0$$

注意，这类权复形通常既不唯一，也不具有函子性。我们构造权结构所用的主要技术将由以下结果给出。

定理 2.3。 ([Bon10，定理 4.3。2]) 设 $\mathcal{T}$ 是幂等完备的，并令 H 为 $\mathcal{T}$ 中满足以下性质的对象集合:

(1) 负性：对于所有 X、$Y \in H$ 和 $n \geq 1$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X$、$Y[n]) = 0$。

(2) 生成： H 的厚闭包是 $\mathcal{T}$的全部。

那么，在 $\mathcal{T}$ 上存在唯一的权结构，其心 $\mathcal{H}$ 是由 H生成的加性子范畴的幂等完备化。

在本文中，我们将考虑张量三角范畴上的有界权结构 $\mathcal{K}^c$，这些范畴具有稳定的对称幺半 ∞-范畴增强。当这样的有界权结构与张量结构相容——也就是说，其心 $\mathcal{H} = (\mathcal{K}^c)^{=0}$ 包含张量单位 $\mathbb{1}$ 且对张量积封闭——那么根据 [Sos19]和 [Aok20], , 我们可以定义一个权复形函子

$$t : \mathcal{K}^c \to \mathrm{K}^b(\mathcal{H})$$

这是一个保守张量三角函子。

注 2.4。 上述结果的一个有用推论是，若 $\mathrm{K}^b(\mathcal{H})$ 是一个局部的 三角张量范畴（即 0 是一个素 tt-理想）——例如，当 $\mathcal{H}$ 是半单时——那么权复形函子的保守性意味着 $\mathcal{K}^c$ 也是局部的。

2.2. **动机理论回顾**。 ([Voe00]) 在全文中，设 k 为指数特征为 e 的完美域，并设 R 为满足条件 $e \in R^\times$ 的交换环。记作

$$\mathrm{DM}(k; R)$$

大范畴 *Voevodsky* 动机的张量三角范畴。回忆一下，$\mathrm{DM}(k; R)$ 具有稳定的对称幺半 ∞-范畴增强 $\mathcal{DM}(k; R)$ 由 [RØ08] 和 [HKA17]构造；此外，它由光滑簇的动机刚性紧生成。我们将张量单位记为$\mathrm{T}:=\mathrm{M}(\mathrm{Spec}(k))$，并将紧对象的刚性全子范畴记为

$$\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k; R).$$

对于任意对象 X，我们将扭曲悬移 $X \otimes \mathrm{T}(n)[m]$ 记作 $X(n)[m]$，并用缩写$X\{n\} := X(n)[2n]$ 表示权重为 n 的纯权移位 。

Čech 单纯形概形的动机。 ([Vis22]) 对于一个定义在 k上的光滑簇 P，我们将其 Čech 单纯形概形$\check{C}(P)$记作。其动机记为 $\mathcal{X}_P$。典范投影 $\check{C}(P) \to \mathrm{Spec}(k)$ 诱导出一个结构态射 $\mathcal{X}_P \to \mathrm{T}$，从而得到以下幂等三角

$$\mathcal{X}_P \to \mathrm{T} \to \tilde{\mathcal{X}}_P \to \mathcal{X}_P[1]$$

在 $\mathrm{DM}(k; R)$ 中。此外，对于定义在 k 上的任意两个光滑簇 P 和 Q，我们有标准的同一认定

$$\mathcal{X}_P \otimes \mathcal{X}_Q \cong \mathcal{X}_{P\times Q}, \quad \tilde{\mathcal{X}}_P \otimes \tilde{\mathcal{X}}_Q \cong \tilde{\mathcal{X}}_{P\sqcup Q}.$$

回顾 [Vis22]，对于任意两个有限生成扩张 E 和 E'（它们是 k的扩张），其光滑模型分别为Q 和 Q'，并且对于任意素数 p，我们记

$$E/k \overset{p}{\geq} E'/k$$

如果 Q'_E 是 p-各向同性的。如果 $E \overset{p}{\geq} E'$ 和 $E' \overset{p}{\geq} E$，我们记作 $E \overset{p}{\sim} E'$。这一偏序自然地扩展到光滑簇的 Čech 单纯形概形的动机：特别地，我们记作

$$\mathcal{X}_P \overset{p}{\geq} \mathcal{X}_Q$$

若以下等价条件之一（因而也包括所有条件）成立：

(1) $\mathcal{X}_P \otimes \mathcal{X}_Q \cong \mathcal{X}_P$.

(2) $\tilde{\mathcal{X}}_P \otimes \tilde{\mathcal{X}}_Q \cong \tilde{\mathcal{X}}_Q$。

(3) Q 在 P每个连通分支的函数域上都是 p-各向同性的。特别地，若P 和 Q 是连通光滑射影簇，则

$$\mathcal{X}_P \overset{p}{\geq} \mathcal{X}_Q \iff k(P) \overset{p}{\geq} k(Q).$$

(4) 结构映射 $\mathcal{X}_P \to \mathrm{T}$ 可经由结构映射 $\mathcal{X}_Q \to \mathrm{T}$ 分解。

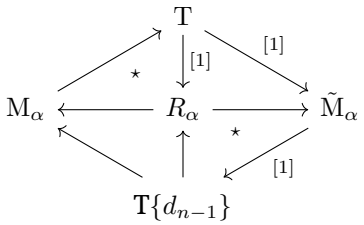
Pfister 二次型与 Rost 动机。（[Vis97]）令 $\mathrm{K}_*^M(k)/2$ 为k 上模 2 的 Milnor K-理论，且 $\alpha \in \mathrm{K}_n^M(k)/2$ 为一个次数为 $n \geq 1$ 的非零纯符号。我们用 q_α 表示其对应的 n 重 Pfister 型，用 Q_α 表示相应的 Pfister 二次曲面。根据 [Ros98]，我们知道

$$\mathrm{M}(Q_\alpha) \cong \mathrm{M}_\alpha \otimes \mathrm{M}(\mathbb{P}^{d_{n-1}}),$$

其中 $d_n = 2^n - 1$。不可分解因子 $\mathrm{M}\alpha$ 称为 *Rost* 动机。在代数闭包上，Rost 动机分解为

$$M_\alpha|_{\bar{k}} \cong \mathrm{T} \oplus \mathrm{T}\{d_{n-1}\}.$$

在基域上，这个分解由自然映射 $\mathrm{T}\{d_{n-1}\} \to M_\alpha \to$T 过滤，这些映射的复合为零，从而得到 DM($k;\mathbb{F}_2$) 中如下由特异三角构成的菱形图，



˜其中 $\mathrm{M}\alpha$ 表示 （完全）约化 *Rost* 动机。

设 $\mathcal{X}_\alpha := \mathcal{X}_{Q_\alpha}$ 为 Pfister 二次曲面 Q_α 的 Čech 单纯形概形的动机，并设 $\tilde{\mathcal{X}_\alpha}$˜ ˜ ˜为其约化动机。回忆一下， $\mathcal{X}_\alpha \otimes \mathrm{M}_\alpha \cong \mathrm{M}\alpha$ 和 $\mathcal{X}_\alpha \otimes \mathrm{M}_\alpha \cong \mathrm{M}_\alpha$。因此，由 $\mathcal{X}_\alpha$ 的幂等三角可推得 $\mathrm{M}_\alpha \otimes \mathrm{M}_\alpha \cong 0$。分别用 $\mathcal{X}_\alpha$ 和 ˜$\mathcal{X}_\alpha$ 张量化上述菱形图，可得到 DM($k;\mathbb{F}_2$) 中以下两个特异三角：

$$\mathcal{X}_\alpha\{d_{n-1}\} \to \mathrm{M}_\alpha \to \mathcal{X}_\alpha \to \mathcal{X}_\alpha(d_{n-1})[2d_{n-1}+1];$$
$$\tilde{\mathcal{X}}_\alpha\{d_{n-1}\} \to \tilde{\mathcal{X}}_\alpha[-1] \to \tilde{\mathrm{M}}_\alpha \to \tilde{\mathcal{X}}_\alpha(d_{n-1})[2d_{n-1}+1].$$

3. 二次型的混合动机

我们介绍本文关注的主要范畴。

定义 3.1。二次型混合动机的大三角张量范畴

$$\mathrm{DQM}(k;R)$$

定义为 DM(k, R) 中由 k 上光滑射影二次型的动机的所有扭曲生成的全局化子范畴。我们将其记作

$$\mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(k;R)$$

其紧对象构成的全 tt-子范畴。

从现在起，我们将注意力限制在最受关注的情形，即 $R = \mathbb{F}_2$。尽管如此，显然以下定义很容易推广到更一般的系数环。

定义 3.2. 对于任意非零纯符号 $\alpha \in \mathrm{K}_*^M(k)/2$，我们将其记为

$$\mathrm{DQM}_{\tilde{\mathcal{X}}_\alpha}(k;\mathbb{F}_2)$$

DQM($k;\mathbb{F}_2$) 中由张量化 $\mathcal{X}_\alpha$ 后被湮灭的对象构成的全局化子范畴。此外，我们定义

$$\mathrm{DTM}_{\tilde{\mathcal{X}}_\alpha}(k;\mathbb{F}_2)$$

˜为由 $\mathcal{X}_\alpha$的扭曲生成的 DQM $\tilde{\mathcal{X}}_\alpha$($k;\mathbb{F}_2$) 的全局化子范畴。

˜注意到 $\mathcal{X}_\alpha$ 是一个右幂等元，出现在幂等三角中

$$\mathcal{X}_\alpha \to \mathrm{T} \to \tilde{\mathcal{X}}_\alpha \to \mathcal{X}_\alpha[1].$$

˜特别地，DQM $\tilde{\mathcal{X}}_\alpha(k;\mathbb{F}_2) = \mathcal{X}_\alpha \otimes \mathrm{DQM}(k;\mathbb{F}_2)$ 是一个 smashing 局部化，其核是由 Rost 动机 M_α 生成的局部化张量理想。这意味着 DQM $\tilde{\mathcal{X}}_\alpha(k;\mathbb{F}_2)$ 是一个˜刚性紧生成的 tt-范畴，其紧生成元是 $\mathcal{X}_\alpha \otimes \mathrm{M}(Q)$ 的扭曲，其中Q 是一个定义在 k上的光滑射影二次曲面。我们记

$$\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}_{\tilde{\mathcal{X}}_\alpha}(k;\mathbb{F}_2)$$

紧对象构成的全 tt-子范畴为

$$\mathrm{DTM}^{\mathrm{gm}}_{\tilde{\mathcal{X}}_\alpha}(k;\mathbb{F}_2)$$

˜由 $\mathcal{X}_\alpha$ 的扭曲生成的全 tt-子范畴为

3.1. **实闭域上的二次型的混合动机**。从现在起，我们用 F 表示一个实闭域。

回忆一下，$\mathrm{K}^M_*(F)/2$ 由次数为 1 的纯符号 $\rho = \{-1\}$ 生成，并且同构于多项式环 $\mathbb{F}_2[\rho]$。

在实闭域上工作的第一个优点是，Tate 动机和 Rost 动机构成了 $\mathrm{DQM}(F;\mathbb{F}_2)$的一组紧生成元：这是因为在实闭域上，各向异性二次型是极好的 [Vis11；Ros90]。

现在开始定义将构成我们的联合保守族的几何 tt-函子。首先，我们将 Q_1 记作零维 Pfister 二次曲面

$$\{x^2 + y^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^2_F,$$

并将 $\mathcal{X}_1$ 记作其 Čech 单纯形概形的动机，将 $\tilde{\mathcal{X}}_1$ 记作其约化动机。由于 F 是实闭的，因此函数域 $F(Q_1) \cong F$。

引理 3.3 （π_1的定义）。 基变换函子 $\mathrm{DM}(F;\ \mathbb{F}_2) \to \mathrm{DM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 到 $\mathrm{DQM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 的限制定义了一个几何 *tt*-函子

$$\pi_1 : \mathrm{DQM}(F;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{DTM}(\overline{F};\mathbb{F}_2)$$

证明。 由于二次型的动机在代数闭包上分解为 Tate 动机的直和， π_1 的本质像包含于 $\mathrm{DTM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 中。由于 $\mathrm{DQM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 中的余积是在环境范畴 $\mathrm{DM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 中计算的，且基变换函子具有右伴随，π_1 是一个几何 tt-函子。□

接下来，我们将用 Q_2 表示由以下方程定义的虚二次曲线

$$\{x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^2_F,$$

and 我们用 $\mathcal{X}_2$ 表示其 Čech 单纯形概形的动机，用 $\tilde{\mathcal{X}}_2$ 表示其约化动机 e.

引理 3.4 (定义 π_2)。 设 $\rho = \{-1\} \in \mathrm{K}^M_1(F(Q_2))/2$，则复合映射的限制

$$\mathrm{DM}(F;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{DM}(F(Q_2);\mathbb{F}_2) \to \tilde{\mathcal{X}}_\rho \otimes \mathrm{DM}(F(Q_2);\mathbb{F}_2),$$

到 $\mathrm{DQM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 定义了一个几何 *tt*-函子

$$\pi_2 : \mathrm{DQM}(F;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{DTM}_{\tilde{\mathcal{X}}_\rho}(F(Q_2);\mathbb{F}_2).$$

证明。首先，显然 π_2 是几何的，因为 DQM(F; $\mathbb{F}_2$) 中的余积是在环境范畴 DM(F; $\mathbb{F}_2$) 中计算的，而定义该函子的函子是若干具有右伴随的函子的复合。此外，由于这个等价

$$\tilde{\mathcal{X}}_\rho \cong \tilde{\mathcal{X}}_1|_{F(Q_2)},$$

我们看到下图可交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DM}(F;\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{(-)|_{F(Q_2)}} & \mathrm{DM}(F(Q_2);\mathbb{F}_2) \\ {\scriptstyle \tilde{\mathcal{X}}_1\otimes -}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\mathcal{X}}_\rho\otimes -} \\ \tilde{\mathcal{X}}_1 \otimes \mathrm{DM}(F;\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{(-)|_{F(Q_2)}} & \tilde{\mathcal{X}}_\rho \otimes \mathrm{DM}(F(Q_2);\mathbb{F}_2) \end{array}$$

由此我们可以观察到

$$\pi_2(\mathrm{M}_n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ \tilde{\mathcal{X}}_\rho \oplus \tilde{\mathcal{X}}_\rho\{d_{n-1}\} & n \geq 2 \end{cases}$$

由此可知， π_2 的本质像包含于 DTM $_{\tilde{\mathcal{X}}_\rho}$($F(Q_2)$; $\mathbb{F}_2$). □

对于满足 $n \geq 3$ 的纯符号 $\alpha = \rho^n$ ，我们将相应的 Pfister 二次曲面记为 Q_n，其 Čech 单纯形概形的动机记为 $\mathcal{X}_n$，其完全约化动机记为 $\tilde{\mathcal{X}}_n$。注意，由于虚二次曲线 Q_2 是 Pfister 二次曲面 Q_{ρ^2}的 Pfister 邻居，因此

$$\mathcal{X}_2 := \mathcal{X}_{Q_2} \cong \mathcal{X}_{\rho^2}, \quad \tilde{\mathcal{X}}_2 := \tilde{\mathcal{X}}_{Q_2} \cong \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^2}.$$

[2]此外，对于任意 $1 \leq n \leq m$，我们有 $\mathcal{X}_n \geq \mathcal{X}_m$。

引理 3.5 （ π_n 的定义，适用于 $n \geq 3$）。 对于 $n \geq 3$，令 $\rho^{n-1} \in \mathrm{K}^M_{n-1}$（$F$（$Q_n$）） /2，则复合映射的限制

$$\mathrm{DM}(F;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{DM}(F(Q_n);\mathbb{F}_2) \to \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{n-1}} \otimes \mathrm{DM}(F(Q_n);\mathbb{F}_2),$$

到 $\mathrm{DQM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 定义了一个几何 *tt*-函子

$$\pi_n : \mathrm{DQM}(F;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{DTM}_{\tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{n-1}}}(F(Q_n);\mathbb{F}_2).$$

证明。 π_n 具有几何性这一事实，可由与前一个引理证明中相同的推理得出。同样，由于

$$\tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{n-1}} \cong \tilde{\mathcal{X}}_{n-1}|_{F(Q_n)},$$

那么由下图的交换性

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DM}(F;\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{(-)|_{F(Q_n)}} & \mathrm{DM}(F(Q_n);\mathbb{F}_2) \\ {\scriptstyle \tilde{\mathcal{X}}_{n-1}\otimes -}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{n-1}}\otimes -} \\ \tilde{\mathcal{X}}_{n-1} \otimes \mathrm{DM}(F;\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{(-)|_{F(Q_n)}} & \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{n-1}} \otimes \mathrm{DM}(F(Q_n);\mathbb{F}_2) \end{array}$$

我们可以得出如下结论。

$$\pi_n(\mathrm{M}_k) = \begin{cases} 0 & k \leq n-1 \\ \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{n-1}} \oplus \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{n-1}}\{d_{k-1}\} & k \geq n \end{cases}$$

特别地， π_n的本质像包含于 DTM $_{\tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{n-1}}}$($F(Q_n)$; $\mathbb{F}_2$) 中。 □

3.2. **实各向异性二次型的函数域。** 实闭域上的各向异性二次型的一个关键特征是，其函数域的 Milnor K-理论（模 2）在次数超过其维数时消失。

引理 3.6. 设 Q 是定义在 F 上的一个维数为 m 的各向异性二次型。那么，对所有 $n \geq m+1$，都有 $\mathrm{K}_n^M(F(Q))/2 = 0$ 。

证明。设 $I \subseteq W(F(Q))$ 表示 $F(Q)$的 Witt 环的基本理想。根据关于二次型的 Milnor 猜想 [OVV07], , 只需证明对所有 $n \geq m+1$，都有 $I^n = 0$ 。由于$F(Q)$是 F 的超越次数为 m的扩张，根据 Tsen-Lang 定理 [Lam05, 第 XI 章] , 在 $F(Q)(\sqrt{-1})$ 上，维数严格大于 2^m 的任何二次型都是各向同性的。根据 Elman-Lam-Krüskemper 定理 [BL11, 定理 1.3], , 基本理想各次幂的挠部分受到这一上界约束，从而对所有 $n \geq m+1$，有 $(I^n)^{tor} = 0$。然而， -1 是 $F(Q)$中的平方和。因此， $F(Q)$上的每个二次型在 Witt 环中都是挠元；特别地，对所有 n，都有 $I^n = (I^n)^{tor}$ 。结合这些事实，可得对所有 $n \geq m+1$，都有 $I^n = (I^n)^{tor} = 0$, 证毕。□

3.3. **二次型的实各向同性范畴。** 现在，我们引入实闭域上二次型的混合动机范畴的一个 s mashing 局部化。结合此前定义的函子 π_n , 这将完善我们的几何 tt-函子的联合保守族。

[2]回顾 $\mathcal{X}_n \geq \mathcal{X}_{n+1}$，特别地，这意味着 [Vis22，定义 2。1] 结构映射$\mathcal{X}_n \to \mathrm{T}$ 可分解为经过结构映射 $\mathcal{X}_{n+1} \to \mathrm{T}$。在稳定的 ∞-范畴增强$\mathcal{DM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 中，我们定义序列余极限

$$\mathcal{Y}^{iso} = \mathrm{colim}_n(\mathcal{X}_n), \quad \Upsilon^{iso} = \mathrm{cofib}(\mathcal{Y}^{iso} \to \mathrm{T}) \simeq \mathrm{colim}_n(\mathrm{cofib}(\mathcal{X}_n \to \mathrm{T})).$$

由于 $\mathcal{X}_n \otimes \mathcal{X}_n \simeq \mathcal{X}_n$ 和 $\otimes$ 与余极限交换，我们推得

$$\mathcal{Y}^{iso} \otimes \mathcal{Y}^{iso} \simeq \mathcal{Y}^{iso}, \quad \Upsilon^{iso} \otimes \Upsilon^{iso} \simeq \Upsilon^{iso}.$$

注 3.7。 我们注意到， Υ^{iso} 按定义是在 $\mathrm{SH}(F)$ 中由 Tanania 在 [Tan25] 定义的实各向同性球谱的动机实现，具体为

$$\mathbb{1}^{iso} := \mathrm{colim}_n(\mathrm{cofib}(\check{C}(Q_n) \to \mathbb{1})).$$

特别地，出于 [Tan25，注 3。2], 中所述的原因，该对象不同于 [Vis22]意义下的各向同性投影算子。

在 $\mathcal{DM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 中，纤维序列 $\mathcal{Y}^{iso} \to \mathrm{T} \to \Upsilon^{iso}$ 导出一个幂等三角

$$\mathcal{Y}^{iso} \to \mathrm{T} \to \Upsilon^{iso} \to \mathcal{Y}^{iso}[1]$$

在同伦范畴 $\mathrm{DM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 中。此外， $\mathcal{Y}^{iso}$ 和 Υ^{iso} 是 $\mathrm{DQM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 中对象的同伦余极限；特别地，它们是该范畴中的幂等对象。

定义 3.8。 我们将 $\mathrm{DTM}(F;\ \mathbb{F}_2)^{iso}$ 记作由 $\mathrm{DQM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ $\Upsilon^{iso} \otimes$ 构成的大三角张量范畴。

注 3.9。 正如我们将在下述引理中看到的， Υ^{iso} 是一个右幂等元，它湮灭所有 F 上各向异性二次型的动机；特别地，$\mathrm{DTM}(F;\ \mathbb{F}_2)^{iso}$ 等同于 $\mathrm{DQM}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 中由 Υ^{iso} 的扭曲生成的全局化子范畴。

需要特别指出的是，正如我们在注 3.7 中已经提到的，$\mathrm{DTM}(F;\ \mathbb{F}_2)^{iso}$ 并不等同于 Vishik 的各向同性 Tate 动机三角张量范畴 $\mathrm{DTM}(F/F;\ \mathbb{F}_2)$, 后者的含义见 [Vis22]。

引理 3.10. *:* 的核：*DQM(;) DTM(;)*是

$$\mathrm{Loc}_{\otimes}(\mathrm{M}_n : n \in \mathbb{N}).$$

证明。S $\tilde{}$由于 $\ker(\pi_\infty)$ 是一个局部化张量理想，且对于所有 $m \le n$，$\mathcal{X}_n \otimes \mathrm{M}_m = 0$，包含

$$\mathrm{Loc}_\otimes(\mathrm{M}_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \ker(\pi_\infty)$$

显然。对于反向包含，假设 $\Upsilon^{iso} \otimes A = 0$。那么 $\mathcal{Y}^{iso} \otimes A \cong A$；因此，只需证明 $\mathcal{Y}^{iso} \in \mathrm{Loc}_\otimes(\mathrm{M}_n : n \in \mathbb{N})$。这也显然，因为对于所有 $k \ge 1$，都有 $\mathcal{X}_k \in \mathrm{Loc}_\otimes(\mathrm{M}_n : n \in \mathbb{N})$。□

3.4. 一个联合保守的 tt-函子族。我们定义了一族几何函子

$$\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}.$$

本节中，我们将证明这族函子是联合保守的。首先，为便于日后参考，我们记录这些函子如何映射 Rost 动机、（完全）约化 Rost 动机、cone(ρ) 和 cone(τ)。

π_k	M_n	$\tilde{\mathrm{M}}_n$	cone(ρ)	cone(τ)
$k=1$	$\mathrm{T}\,|_{\overline{F}} \oplus \mathrm{T}\,|_{\overline{F}}\{d_{n-1}\}$	0	$\mathrm{T}\,|_{\overline{F}} \oplus \mathrm{T}\,|_{\overline{F}}(1)[1]$	锥(τ)$|_{\overline{F}}$
$k=2$	$\begin{cases} 0 & n=1 \\ \tilde{\mathcal{X}}_\rho \oplus \tilde{\mathcal{X}}_\rho\{d_{n-1}\} & n \ge 2 \end{cases}$	$\begin{cases} (\tilde{\mathrm{M}}_1)\|_{F(Q_2)} & n=1 \\ 0 & n \ge 2 \end{cases}$	$\tilde{\mathcal{X}}_\rho \oplus \tilde{\mathcal{X}}_\rho(1)[1]$	$\tilde{\mathcal{X}}_\rho \oplus \tilde{\mathcal{X}}_\rho(1)$
$3 \le k < \infty$	$\begin{cases} 0 & n \le k-1 \\ \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{k-1}} \oplus \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{k-1}}\{d_{n-1}\} & n \ge k \end{cases}$	$\begin{cases} \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{k-1}} \otimes (\mathrm{M}_n)\|_{F(Q_k)} \neq 0 & n \le k-2 \\ \tilde{(\mathrm{M}_n)}\|_{F(Q_k)} & n = k-1 \\ 0 & n \ge k \end{cases}$	$\tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{k-1}} \oplus \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{k-1}}(1)[1]$	$\tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{k-1}} \oplus \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{k-1}}(1)$
$k=\infty$	0	$\tilde{\mathrm{M}}_n^{iso} \neq 0$	锥(ρ)$^{iso} \neq 0$	锥(τ)$^{iso} \neq 0$

表 1. 我们记录每个几何 tt-函子如何映射 Rost 动机、（完全）约化 Rost 动机、cone(ρ) 和 cone(τ)。

定理 3.11. 几何 *tt*-函子族 $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ 是联合保守的。

证明. 回顾 [Vis97中的定理 2.3。5] 若 P 是定义在 F 上的光滑射影簇，且 $E = F(P)$，则基变换函子 $(-)_E : \mathrm{DM}(F; \mathbb{F}_2) \to \mathrm{DM}(E; \mathbb{F}_2)$ 的核与 $\mathcal{X}_P \otimes -$的核一致。这使我们能够如下确定这些函子的核：

(1) $\ker(\pi_1) = \ker(\mathcal{X}_1 \otimes -)$;

(2) $\ker(\pi_2) = \ker(\tilde{\mathcal{X}}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \otimes -)$;

(3) $\ker(\pi_n) = \ker(\tilde{\mathcal{X}}_{n-1} \otimes \mathcal{X}_n \otimes -)$ for all $n \ge 3$.

假设 $A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \ker(\pi_n)$。我们首先用归纳法证明，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\mathcal{X}_n \otimes A \cong 0$。对于$\tilde{}$基例 $n = 1$，这由假设可得。对于归纳步骤，若 $\mathcal{X}_n \otimes A \cong 0$，则 $\mathcal{X}_n \otimes A \cong A$,$\tilde{}$，因此 $0 \cong \mathcal{X}_n \otimes \mathcal{X}_{n+1} \otimes A \cong \mathcal{X}_{n+1} \otimes A$。

最后，由于 $\pi_\infty(A) = 0$，因此 $\Upsilon^{iso} \otimes A \cong 0$，这意味着 $\mathcal{Y}^{iso} \otimes A \cong A$。然而，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{X}_n \otimes A \cong 0$，故 $0 \cong \mathcal{Y}^{iso} \otimes A$。□

根据定理 2.1，上述结果将 Spc(DQM$^{\mathrm{gm}}(F; \mathbb{F}_2)$) 中点的计算归结为计算以下细胞 tt-范畴的 Balmer 谱：

(1) $\mathcal{K}_1^c = \mathrm{DTM}^{\mathrm{gm}}(F(Q_1); \mathbb{F}_2) = \mathrm{DTM}^{\mathrm{gm}}(\overline{F}; \mathbb{F}_2)$;
(2) $\mathcal{K}_2^c = \mathrm{DTM}^{\mathrm{gm}}_{\tilde{\mathcal{X}}_\rho}(F(Q_2); \mathbb{F}_2)$; (3) $\mathcal{K}_n^c = \mathrm{DTM}^{\mathrm{gm}}_{\tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{n-1}}}(F(Q_n); \mathbb{F}_2)$，其中 $n \ge 3$; (4) $\mathcal{K}_\infty^c = \mathrm{DTM}^{\mathrm{gm}}(F; \mathbb{F}_2)^{iso}$。

我们回顾一下，$\mathrm{Spc}(\mathcal{K}_1^c)$ 的计算由 Gallauer 得到， [Gal19], 他证明它与以下二点谢尔宾斯基空间同胚:

$$\begin{array}{c} 0 \\ | \\ \langle \mathrm{cone}(\tau)|_{\overline{F}} \rangle \end{array}$$

4. 某些细胞动机范畴的巴尔默谱

本节计算某些细胞动机张量三角范畴的巴尔默谱，随后将据此推导 $n \geq 2$ 的 $\mathrm{Spc}(\mathcal{K}_n^c)$ 的计算。令 k 为任意域（不一定是实闭域），并令 $\alpha \in \mathrm{K}_m^M(k)/2$ 为一个非零纯符号，且 $m \geq 1$。我们首先考察 tt-范畴 DTM $\tilde{\mathcal{X}}_\alpha(k;\mathbb{F}_2)$。

~回顾 [Vis22，定理 3.5] 单位对象的双分次自同态环 $\mathcal{X}_\alpha$ 由下式给出

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{X}}_\alpha) = S_*^\alpha[r_0,\dots,r_{m-1}]/(\{r_i^2 - r_{i+1}\rho\}_{0\leq i\leq m-2}),$$

where S_*^α 表示分次环 $(\mathrm{K}_*^M(k)/2)/\ker(\alpha\cdot)$，而生成元 r_i 是态射

$$r_i : \tilde{\mathcal{X}}_\alpha \to \tilde{\mathcal{X}}_\alpha(-d_i)[-2d_i-1],$$

其中 $d_i = 2^i - 1$。

注 4.1。 将 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{X}}_\alpha)$ 在格 $\mathbb{Z}^2$ 中可视化十分方便：将双次数为 $(a)[b]$ 的齐次元素置于格点 $(a,\ b) \in \mathbb{Z}^2$。按照这一约定，生成元 r_i 的双次数为 $(-d_i,\ -2d_i-1)$，因此每个 r_i 都严格位于 Chow 直线 $y = 2x$ 下方。由于 S_*^α 位于~对角线上（双次数为 $(n)[n]$），由此可知， $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathcal{X}_\alpha)$ 集中在格 $\mathbb{Z}^2$ 的 Chow 直线 $y = 2x$ 下方。

引理 4.2。 范畴 $\mathrm{DTM}^{\mathrm{gm}}_{\tilde{\mathcal{X}}_\alpha}(k;\mathbb{F}_2)$ 具有唯一的有界 *Chow* 权结构，其心 $\mathcal{H}$ 是由单位对象的纯平移生成的加性子范畴，

$$\tilde{\mathcal{X}}_\alpha\{i\}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

特别地，$\mathrm{DTM}^{\mathrm{gm}}_{\tilde{\mathcal{X}}_\alpha}(k;\mathbb{F}_2)$ 是一个局部张量三角范畴。

证明。 由注 4.1 可知，对于任意 $i,j \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{X}}_\alpha\{i\}, \tilde{\mathcal{X}}_\alpha\{j\}) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

由此显然可知， $\mathcal{H}$ 是半单的，因而也是幂等完备的。由于 $\mathcal{H}$ 的厚闭包生成整个范畴 $\mathrm{DTM}^{\mathrm{gm}}_{\tilde{\mathcal{X}}_\alpha}(k;\mathbb{F}_2)$，根据定理 2.3，只需验证负性条件。这归结为检验

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{X}}_\alpha, \tilde{\mathcal{X}}_\alpha(j)[2j+n]) = 0 \quad \text{for } j \in \mathbb{Z} \text{ and } n \geq 1,$$

这同样可由注 4.1 得出。对于第二个断言，注意到 $\mathcal{H}$ 是一个张量半单范畴。此外，

$$\mathrm{DTM}^{\mathrm{gm}}_{\tilde{\mathcal{X}}_\alpha}(k;\mathbb{F}_2)$$

自然地具有稳定对称幺半 ∞-范畴增强，因为它可以建模为稳定对称幺半 ∞-范畴的某个 smashing 局部化的紧对象子范畴。其余部分由注 2.4 推出。□

4.1. Spc() 的计算。令 $\alpha \in \mathrm{K}_1^M(k)/2$ 为一个非零的 1 次纯符号，并考虑

$$\mathcal{L}_2 = \mathrm{DTM}_{\tilde{\mathcal{X}}_\alpha}(k;\mathbb{F}_2).$$

本节中，我们将在以下假设下进行讨论。

˜假设 4.3. $S_l^\alpha = 0$ 对所有 $l \geq 1$。这意味着 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathcal{X}_\alpha) = \mathbb{F}_2[r_0]$.

引理 4.4. </style}三角张量范畴 DTM $\tilde{\mathcal{X}}_\rho(F(Q_2);\,\mathbb{F}_2)$ **</style}**满足假设 4.3.

证明. 由引理 3.6 可知，$\mathrm{K}_l^M(F(Q_2)/2 = 0$ 对 $l \geq 2$。由于 ρ 是一个 1 次元元素，因此立即可得，对所有 $l \geq 1$均有 $S_l^\alpha = 0$ 。□

˜为简化记号，我们将 $\mathcal{L}_2$ 的张量单位 $\mathcal{X}_\alpha$ 记作 $\mathbb{1}$。由前一个引理，$\mathrm{Spc}(\mathcal{K}_2^c)$ 的计算可归结为下面的结果。

定理 *4.5. </style}*在假设 *4.3* 下， $\mathcal{L}_2^c$ 的巴尔默谱同胚于以下两点谢尔宾斯基空间。

$$\begin{array}{c} 0 \\ | \\ \langle \mathrm{cone}(r_0) \rangle \end{array}$$

证明。 我们已在引理 4.2 中证明，0 是素理想。为证明 $\langle \mathrm{cone}(r_0) \rangle$ 是唯一的非零素理想，我们将证明以下结论。

(1) $\mathrm{supp}(\mathrm{cone}(r_0)) = \{0\}$.

(2) $U(\mathrm{cone}(r_0)) = \{\langle \mathrm{cone}(r_0) \rangle\}$.

由此可立即得出点的描述；此外，特化关系显而易见，而闭子集正是特化封闭子集。

为证明第一个断言，我们将在命题 4.6 中证明，对于任意非零对象 A，$\mathrm{cone}(r_0) \in \langle A \rangle$，由此立即可得 **(1)**。

对于第二个断言，我们先形式地将态射 r_0 逆化。回忆引理 4.2 的证明， $\mathcal{L}_2$ 具有稳定的对称幺半 ∞-范畴增强 $\mathcal{L}_{2\otimes}$。在 $\mathcal{L}_2$ 中（记 Σ 为悬挂），我们构造序列余极限

$$\tilde{\mathcal{D}}_{r_0} := \mathrm{colim}_n(\mathbb{1} \xrightarrow{r_0} \Sigma^{-1}\mathbb{1} \xrightarrow{\Sigma^{-1}r_0} \Sigma^{-2}\mathbb{1} \to \dots),$$

˜，其典范映射为 $\eta\colon\ \mathbb{1} \to \mathcal{D}_{r_0\otimes}$ 由于 $\otimes$ 保持余极限，因此 $\mathcal{D}_{r_0}$ 是幂等元。令 $\mathcal{D}_{r_0}$:=fib(η)，我们得到一个互补幂等元的纤维序列 $\mathcal{L}_2$

$$\mathcal{D}_{r_0} \to \mathbb{1} \xrightarrow{\eta} \tilde{\mathcal{D}}_{r_0}.$$

转到同伦范畴 $\mathcal{L}_2$ 后，上述纤维序列给出相应的幂等三角

$$\mathcal{D}_{r_0} \to \mathbb{1} \to \tilde{\mathcal{D}}_{r_0} \to \mathcal{D}_{r_0}[1].$$

˜最后，对右幂等元 $\mathcal{D}_{r_0}$ 进行张量化，定义了 $\mathcal{L}_2$ 的一个 smashing 局部化，其核为˜Loc$\otimes$(cone(r_0))：一个包含关系显然成立，因为 $\mathcal{D}_{r_0} \otimes$cone($r_0$) $\cong 0$；对于另一个包含关系，注意到˜$\mathcal{D}_{r_0} \otimes A \cong 0$ 意味着 $\mathcal{D}_{r_0} \otimes A \cong A$，而它属于 Loc$\otimes$(cone($r_0$))，因为

$$\mathcal{D}_{r_0} \cong \mathrm{hocolim}_n\left(\mathrm{cone}(\mathbb{1} \xrightarrow{r_0^n} \mathbb{1}[-n])\right)[-1] \in \mathrm{Loc}_\otimes(\mathrm{cone}(r_0)).$$

这意味着三角张量范畴

$$\mathcal{M}_2 = \tilde{\mathcal{D}}_{r_0} \otimes \mathcal{L}_2$$

与由 cone(r_0) 生成的局部化张量理想处的 $\mathcal{L}_2$ 的局部化相同。因此，只需证明 (2) 中的 Spc($\mathcal{M}_2^c$) $= \{0\}$。为证明这一点，首先注意，由 $\mathcal{D}_{r_0}$ 在 $\mathcal{L}_2$ 中的幂等元˜三角可推得

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{D}}_{r_0}) = \mathrm{colim}_n(\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathbb{1})),$$

其中过渡映射由乘以 r_0给出。特别地，上述环同构于分次域 $\mathbb{F}_2[r_0, r_0^{-1}]$。由于 $\mathcal{M}_2$ 是由 $i \in \mathbb{Z}$ 的 $\tilde{\mathcal{D}}_{r_0}(i)$ 生成的，因此任意对象 $\mathcal{M}_2^c$ 都˜同构于 $i \in \mathbb{Z}$ 的有限直和 $\mathcal{D}_{r_0}(i)$。由此可清楚看出，Spc($\mathcal{M}_2^c$) $= \{0\}$。□

命题 4.6。 对于每个非零对象 $A \in \mathcal{L}_2^c$，锥(r_0) $\in \langle A \rangle$.

证明。 存在一个具有半单心的有界权结构，这保证任意对象都存在一个权过滤，使得其权复形的微分均为零 [Vis24，命题 5。10]。若 A 是一个非零对象，则存在一个可分三角，

$$A_{>m}[-1] \xrightarrow{f} A_m \longrightarrow A \longrightarrow A_{>m}.$$

其中 A_m 是单位对象的扭曲悬移的非空直和。特别地，为了证明该命题，只需证明 f 在 cone(r_0) 上是 $\otimes$-幂零的。由于A 的权复形选取为具有零微分，态射 f 可经由 $(\mathcal{L}_2^c)^{\geq m+1}$中的一个对象分解。因此，由对偶性，只需证明对于任意对象 $Y \in (\mathcal{L}_2^c)^{\geq 1}$，任意态射 $s\colon Y \to \mathbb{1}$ 在 cone(r_0) 上是 $\otimes$-幂零的。我们将通过证明更强的陈述来做到这一点：

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{cone}(r_0)(i)[j], \mathrm{cone}(r_0)) = 0, \quad \text{for } j - 2i \geq 1.$$

这显然足够，因为对于上述范围内的 i 和 j， Y 是 $\mathbb{1}(i)[j]$ 的一个扩张。将 Hom(−,cone(r_0)) 应用于 cone(r_0)(i)[j]的定义三角，我们注意到，只需验证

$$\text{(I) } \mathrm{Hom}(\mathbb{1}(i)[j-1], \mathrm{cone}(r_0)) = 0, \quad \text{(II) } \mathrm{Hom}(\mathbb{1}(i)[j+1], \mathrm{cone}(r_0)) = 0.$$

此外，将 Hom($\mathbb{1}(i)[j']$, –) 应用于 cone(r_0)的定义三角，并利用乘以 r_0 在 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathbb{1})$中是单射这一事实，我们推得

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{1}(i)[j'], \mathrm{cone}(r_0)) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{1}(i)[j'], \mathbb{1}[-1])/(\mathrm{im}(r_0)_*).$$

右边的项可以通过将 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathbb{1})$ 对由 r_0 生成的理想取商来计算，该商同构于集中在双次数 (0,0) 的 $\mathbb{F}_2$。由于条件 $j - 2i \geq 1$ 意味着我们避开了次数 (0,0)，因此可见 (I) 和 (II) 均为零。□

4.2. 计算 Spc($\mathcal{K}_n^c$) 对于 $3 \leq n < \infty$。 设 $\alpha \in \mathrm{K}_m^M(k)/2$ 是一个次数为 $m \geq 2$ 的非零纯符号，并考虑

$$\mathcal{L}_m := \mathrm{DTM}_{\tilde{\mathcal{X}}_\alpha}(k; \mathbb{F}_2)$$

本节中，我们将在以下假设下进行讨论。

假设 4.7。 $S_l^\alpha = 0$ 对于所有次数 $l \geq N$，其中 N 是某个充分大的整数常数。此外，我们还假设 $\rho = 0$ 属于 S_*^α。在这些条件下，单位对象的双分次自同态环可简化如下

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{X}}_\alpha) = S_*^\alpha[r_0, \ldots, r_{m-1}]/(r_i^2)_{0 \leq i \leq m-2}.$$

注 4.8。 回顾注 4.1，我们可以将 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{X}_\alpha})$可视化为格 $\mathbb{Z}^2$中的一部分。假设 4.7 迫使态射 r_i 在 $0 \leq i \leq m-2$ 时为幂零，因此无界性的唯一来源是多项式生成元 r_{m-1}。记 $d := d_{m-1}$，则 r_{m-1} 的幂位于˜直线 $y = (2+1/d)x$ 上，而 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathcal{X}_\alpha)$ 的支撑位于该直线下方（包括该直线）。此外，由于来自 S_*^α 的对角线根据假设是有界的，我们可以找到某个充分大的常数 $K\tilde{}$，使得 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathcal{X}_\alpha)$ 的支撑位于直线 $y = (2+1/d)x - K$上方。

引理 4.9. $\mathcal{K}_n = \mathrm{DTM}^{\tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{n-1}}}(F(Q_n); \mathbb{F}_2)$ 的张量三角范畴满足假设 *4.7*。

证明。 由引理 3.6 可知，$\mathrm{K}_l^M(F(Q_n))/2 = 0$ 对于 $l \geq \dim(Q_n) = 2^n - 2$成立。此外，$\rho^n = 0$ 属于 $\mathrm{K}_n^M(F(Q_n)/2$，这意味着 $\rho \in \ker(\rho^{n-1}\cdot)$。由此，所需的验证便显而易见。 □

˜为方便起见，我们将 $\mathcal{L}_m$ 的张量单位 $\mathcal{X}_\alpha$ 记为 $\mathbb{1}$。根据前一个引理， $3 \leq n < \infty$ 的 $\mathrm{Spc}(\mathcal{K}_n^c)$ 计算可由下一个结果得出。

定理 4.10. 在假设 *4.7* 下， $\mathcal{L}_m^c$ 的 *Balmer* 谱同胚于下面这个由两点构成的谢尔宾斯基空间。

$$\begin{array}{c} 0 \\ | \\ \langle \mathrm{cone}(r_{m-1}) \rangle \end{array}$$

证明。 由于根据引理 4.2，0 是素理想，因此仿照定理 4.5 的证明，只需证明以下结论。

(1) $\mathrm{supp}(\mathrm{cone}(r_{m-1})) = \{0\}$。

(2) $U(\mathrm{cone}(r_{m-1})) = \{\langle \mathrm{cone}(r_{m-1}) \rangle\}$.

第一个断言由命题 4.11 推出。对于第二个断言，我们仿照定理 4.5 的证明，通过考虑对应于下列幂等三角的 smashing 局部化来求逆 r_{m-1} ，

$$\mathcal{D}_{r_{m-1}} \to \mathbb{1} \to \tilde{\mathcal{D}}_{r_{m-1}} \to \mathcal{D}_{r_{m-1}}[1],$$

其中

$$\tilde{\mathcal{D}}_{r_{m-1}} \cong \mathrm{hocolim}_n \left(\mathbb{1} \xrightarrow{r_{m-1}} \mathbb{1}(-d_{m-1})[-2d_{m-1}-1] \xrightarrow{r_{m-1}(-d_{m-1})[-2d_{m-1}-1]} \dots \right).$$

特别地，三角张量范畴

$$\mathcal{M}_m = \tilde{\mathcal{D}}_{r_{m-1}} \otimes \mathcal{L}_m$$

可识别为在由 $\mathrm{cone}(r_{m-1})$ 生成的局部化张量理想处对 $\mathcal{L}_m$ 进行局部化所得的范畴。这将 (2) 归结为证明 $\mathrm{Spc}(\mathcal{M}_m^c) = \{0\}$。我们将在命题 4.15 中证明这一点；在那里，我们将使用适当的权结构。我们将在引理 4.13 中在 $\mathcal{M}_m^c$ 上定义该权结构，以证明由任意非零对象生成的三角张量理想就是整个三角张量范畴 $\mathcal{M}_m^c$。 □

命题 4.11。 对于每个非零对象 $A \in \mathcal{L}_m^c$，锥$(r_{m-1}) \in \langle A \rangle$.

证明。 仿照命题 4.6 的论证，只需证明：对于任意对象 $Y \in (\mathcal{L}_m^c)^{\geq 1}$，任意态射 $s\colon Y \to \mathbb{1}$ is $\otimes$ 在 cone(r_{m-1}) 上都是幂零的。我们将通过证明更强的结论来做到这一点：存在一个足够大的常数 K ，使得

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{cone}(r_{m-1})(i)[j], \mathrm{cone}(r_{m-1})) = 0 \text{ for } j - 2i \geq K.$$

这已经足够，因为 $Y \in (\mathcal{L}_m^c)^{\geq 1}$，特别是对于 $n \geq K$, $Y^{\otimes n}$ ，是 $\mathbb{1}(i)[j]$ 的一个扩张，其中 i 和 j 处于上述范围内。将 $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{cone}(r_{m-1}))$ 应用于 $\mathrm{cone}(r_{m-1})(i)[j]$ 的定义三角，可知只需验证

$$\text{(I) } \mathrm{Hom}(\mathbb{1}(i-d_{m-1})[j-2d_{m-1}-1], \mathrm{cone}(r_{m-1})) = 0, \quad \text{(II) } \mathrm{Hom}(\mathbb{1}(i)[j+1], \mathrm{cone}(r_{m-1})) = 0.$$

此外，对 $\mathrm{cone}(r_{m-1})(i')[j']$, – 应用 Hom 函子到 $\mathrm{cone}(r_{m-1})$ 的定义三角上，并利用乘以 r_{m-1} 在 $\mathbb{E}$ nd(𝟙) 中是单射这一事实，我们可推出

$$\text{(III) } \mathrm{Hom}(\mathbb{1}(i')[j'], \mathrm{cone}(r_{m-1})) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{1}(i')[j'], \mathbb{1}(-d_{m-1})[-2d_{m-1}-1])/(\mathrm{im}(r_{m-1})_*).$$

右侧的项可通过将 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathbb{1})$ 对由 r_{m-1} 生成的理想取商来计算。根据假设 4.7，所得的双分次环在 $\mathbb{Z}^2$ 中集中于一个有界区域（参见注 4.8）。条件 $j-2i \geq K$ 意味着 (I) 和 (II) 的双次数都落在由 $y-2x \geq K-1$ 定义的半平面内，因此显然，由于 (III) 的支撑位于一个有界区域，我们可以选取足够大的 K ，使得 (I) 和 (II) 同时消失。□

还需证明，在定理 4.10 的证明中定义的 $\mathcal{M}_m^c$ 的谱以 0 为其唯一的 tt-素理想。我们首先在这个三角张量范畴上定义一个权结构。

首先，注意到

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{D}}_{r_{m-1}}) \cong \mathrm{colim}_n(\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathbb{1})),$$

其中过渡映射由乘以 r_{m-1} 给出。特别地，上述环同构于 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathbb{1})[r_{m-1}^{-1}]$。

注 4.12。 在格 $\mathbb{Z}^2$ 中直观地观察 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{D}}_{r_{m-1}})$，我们注意到——如注 4.8 中所述——其支撑也位于直线 $y = (2+1/d)x$ 及其下方，其中 $d := d_{m-1}$；并且对于充分大的固定常数，还支撑在直线 $y = (2+1/d)x - K$ 及其上方。

˜ ˜为方便起见，我们将 $\mathcal{M}_m$ 的单位对象 $\mathcal{D}_{r_{m-1}}$ 记作 $\mathbb{1}$。

引理 4.13。 范畴 $\mathcal{M}_m^c$ 具有唯一的有界权结构，其心 $\mathcal{H}$ 是由 $\mathcal{M}_m^c$ 生成的加性子范畴

$$\tilde{\mathbb{1}}\{i\}, \quad i = 0, \ldots, d-1,$$

其中 $d := d_{m-1}$。

证明。 根据单位对象的双分次自同态环的计算，注意到

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathbb{1}}, \tilde{\mathbb{1}}\{n\}) = 0 \quad \text{for } -(d-1) \leq n < 0,$$

由于点 $(n,\ 2n)$ 位于直线 $y = (2+1/d)x$ 上方（ n 在上述范围内），因此相应的群由注 4.12 得知为零。对于 $0 \leq n \leq d-1$，唯一可能非零的群 $\mathrm{Hom}(\tilde{\mathbb{1}},\ \tilde{\mathbb{1}}\{n\})$ 出现在由生成元 r_i 得到的双次数中（ $1 \leq i \leq m-2$），再沿着由 r_{m-1}^{-1} 导致的 $(d)[2d+1]$-周期性平移。更明确地说，

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathbb{1}}, \tilde{\mathbb{1}}\{n\}) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{if } n = 0 \text{ or } n = d - d_i \text{ for some } i = 1, \ldots, m-2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由上可推出 $\mathcal{H}$ 是 $\mathbb{F}_2$-线性的、Hom-有限且满足 Krull–Schmidt 性质，因此是幂等元完备的 [Sha23，定理 6。1]。此外，$(d)[2d+1]$-周期性 $\mathcal{M}_m$ 意味着 $\mathcal{H}$ 的厚闭包是 $\mathcal{M}_m^c$；特别地，根据定理 2.3，只需验证负性条件。这归结为验证

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathbb{1}}, \tilde{\mathbb{1}}(a)[2a+n]) = 0, \quad \text{for } -(d-1) \leq a \leq d-1, \text{ and } n \geq 1$$

但这由相应的点（$a,\ 2a+n$）位于直线$y = (2+1/d)x$上方这一事实立即可得，因此根据注 4.12，相应的群为零。□

我们将 $\mathcal{M}_m^c$ 上定义的权结构称为周期 *Chow* 权结构。注意，与通常的 Chow 权结构不同，其心 $\mathcal{H}$ 既不是张量的，也不是半单的。前一个事实显而易见：例如， $\tilde{\mathbb{1}}\{n\} \notin \mathcal{H}$ 对于 $n \geq d$。此外， $\mathcal{H}$ 并非半单，因为——正如我们在前一个引理的证明中所见——不可分解生成元之间存在非平凡的 $\otimes$幂零态射。

我们将利用这个权结构证明 $\mathcal{M}_m^c$ 含有足够多的 $\otimes$-幂零态射：这样便能证明，由 $\mathcal{M}_m^c$ 中的任意非零对象生成的三角张量理想包含单位对象。我们首先证明以下技术性引理。

引理 4.14. 对于任意 $A \in \mathcal{M}_m^c$，存在 $i \in \{0, \ldots, d-1\}$，使得 $A(-i)[-2i]$ 具有一个支撑在区间 $[s,t]$ 上的权复形，其中最后一个微分 δ_{s+1} 为零。

证明. 我们不妨假设 A 非零。由于周期 Chow 权结构是有界的， A 具有一个权复形 $t(A)$，其支撑在某个区间 $[s,t]$上：

$$t(A) := \quad 0 \longrightarrow C_t \xrightarrow{\delta_t} C_{t-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_{s+1} \xrightarrow{\delta_{s+1}} C_s \longrightarrow 0$$

˜其中 C_s 非零，并且对于 $s \leq k \leq t$ ，每个 C_k都是对象 $\mathbb{1}\{i\}$ 的有限直和，且满足 $i \in \{0, \ldots, d-1\}$。首先，若最后一个微分 $\delta_{s+1} = 0$，则无需证明，因此我们可以假设它非零，并按如下方式继续。考虑移位后的对象 $A' := A\{-i_M\}$ ，其中 i_M是满足以下条件的最大指标： $i \in \{0, \ldots, d-1\}$，且 $\tilde{\mathbb{1}}\{i\}$ 是 C_s的一个直和项。由（d）$[2d+1]$-周期性可知， A' 的最低次数分次分量位于次数 s，且仅由 $\tilde{\mathbb{1}}$ 的有限个副本作直和构成。这保证我们可以为 A' 找到一个支撑在 $[s,t']$ 上的权复形，其最低项具有如下形式

$$C'_s = \bigoplus_a \tilde{\mathbb{1}}.$$

如果新的微分 $\delta'_{s+1} = 0$，则结论成立。否则，回想引理 4.13 的证明可知

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathbb{1}}, \tilde{\mathbb{1}}\{j\}) = 0 \quad \text{for } -(d-1) \leq j < 0,$$

因此，根据对偶性，

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathbb{1}}\{i\}, \tilde{\mathbb{1}}) = 0, \text{ for } 0 < i \leq d-1.$$

˜因此， δ'_{s+1} 的非零分量 $C'_{s+1} \to C'_s$ 只可能来自 C'_{s+1} 中的直和项 $\mathbb{1}$ 。我们可以分解

$$C'_{s+1} = (\bigoplus_b \tilde{\mathbb{1}}) \oplus B,$$

˜其中， B 不含任何作为直和项的 $\mathbb{1}$ 。微分 δ'_{s+1} 于是由一个矩阵表示，该矩阵在 B 上为零，并在直和项 $\bigoplus_b \tilde{\mathbb{1}}$ 上作用为一个取值于 $\mathrm{End}(\tilde{\mathbb{1}}) \cong \mathbb{F}_2$ 的矩阵。通过高斯消去法，我们可以找到源和目标的自同构，将该矩阵对角化如下。

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这意味着 δ'_{s+1} 可以认作一个态射 $1_W \oplus 0 : C'_{s+1} \to C'_s$，其中 W 是由若干个˜ $\mathbb{1}$的副本构成的直和。按照 [Vis24，命题 5 的证明10], 中的论证，我们可以从权过滤中分离出 W ，从而得到一个权复形，其 A' 在位置 $s+1$处的微分为零。 □

命题 4.15。 对于任意非零对象 $B \in \mathcal{M}_m^c$，我们有 $\langle B \rangle = \mathcal{M}_m^c$。

证明。 根据前面的引理，存在一个平移 $A = B\{-i\}$，使其权复形支撑在一条线段 $[s,t]$ 上，且微分 δ_{s+1} 为零，最低的非零分次分量 A_s 是若干个 $\tilde{\mathbb{1}}[s]$ 的直和。考虑可分三角

$$A_{>s}[-1] \xrightarrow{f} A_s \longrightarrow A \longrightarrow A_{>s}$$

并注意到，要证明该命题，只需证明 f 是 $\otimes$-幂零的。由于 $\delta_{s+1} = 0$，因此 f 可经由态射 g：$A_{>s+1}[-1] \to A_s$分解。根据刚性，$\otimes$-幂零性 g 等价于其伴随的 $\otimes$-幂零性

$$\bar{g} : \tilde{\mathbb{1}} \to (A_{>s+1})^\vee[1] \otimes A_s =: E.$$

由于 $A_{>s+1}$ 是有限多个带有 $0 \le a \le d-1$ 和 $b - 2a \ge s+2$的$\mathbb{1}(a)[b]$ 的扩张，因此 E是有限多个带有 $-(d-1) \le a \le 0$ 和 $b - 2a \le -1$的$\mathbb{1}(a)[b]$ 的扩张。特别地，这意味着对于任意正整数 n，$E^{\otimes n}$ 是有限多个 $\tilde{\mathbb{1}}(x)[y]$ 的扩张，其中 (x,y) 属于 $\mathbb{Z}^2$ 的以下区域

$$L_n : -n(d-1) \le x \le 0, \quad y - 2x \le -n.$$

由于 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathbb{1})$ 集中在由直线 $l_1 : y = (2+1/d)x$ 从上方界定、由直线 $l_2 : y = (2+1/d)x - K$ 从下方界定的条带内，因此只需证明当 n 足够大时，区域 L_n 位于直线 l_2 下方。这是因为 $E^{\otimes n}$ 是 $\tilde{\mathbb{1}}(x)[y]$ 的一个扩张，其中 $(x,\ y) \in L_n$，所以以上结论意味着任何态射 $\tilde{\mathbb{1}} \to E^{\otimes n}$ 都必为零。我们可以选取 $n > Kd$，并验证对于 $-n(d-1) \le x \le 0$,

$$y - (2+1/d)x \le y - 2x + n(d-1)/d \le -n + n(d-1)/d \le -n/d < -K.$$

□

4.3. 各向同性情形。 还需计算 $\mathrm{Spc}(\mathcal{K}^c_\infty)$。我们先记录其单位对象的双分次自同态环的计算结果。

引理 4.16. $\mathbb{E}$单位对象的双分次自同态环$\mathrm{nd}(\Upsilon^{iso})$ 在 $\mathcal{K}_\infty$ 中同构 *to*

$$\mathbb{F}_2\left[\rho, \{r_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}\right] / (\{r_i^2 - r_{i+1}\rho\}_{i\in\mathbb{N}_0}).$$

证明。 回顾第3.3节，$\Upsilon^{iso} \cong$同伦余极限$_n(\tilde{\mathcal{X}}_n)$，特别是

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\Upsilon^{iso}) \cong \mathrm{colim}_n \mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{X}}_n).$$

证明的其余部分沿用 [Vis22，定理 37] 证明中的相同论证，F 并结合以下事实：当其为实闭域时，乘以 ρ 在 $\mathrm{K}^M_*(F)/2$ 中是单射，并且

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{X}}_n) = \mathbb{F}_2[\rho, r_0, \ldots, r_{n-1}] / (\{r_i^2 - r_{i+1}\rho\}_{0\le i\le n-2}).$$

□

我们首先在 $\mathcal{K}^c_\infty$ 上定义一个权结构，以便据此推导出这个三角张量范畴是局部的。

引理 4.17。 范畴 $\mathcal{K}^c_\infty$ 具有唯一的有界 *Chow* 权结构，其心 $\mathcal{H}$ 是由单位对象的纯移位生成的加性子范畴，

$$\Upsilon^{iso}(i)[2i], \quad i \in \mathbb{Z}.$$

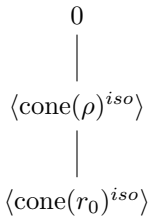
特别地，$\mathcal{K}^c_\infty$ 是一个局部张量三角范畴。

证明。 这可由引理 4.2 的证明中的同一论证，以及双分次自同态环的计算使我们能够验证这一事实得出

$$\mathrm{Hom}(\Upsilon^{iso}, \Upsilon^{iso}(j)[2j+n]) = 0, \text{ for } j \in \mathbb{Z} \text{ and } n \geq 1.$$

在注意到 $\mathcal{H}$ 是张量且半单，并且 $\mathcal{K}^c_\infty$ 具有稳定的对称幺半 ∞-范畴增强之后，第二个断言可由注 2.4 得出。□

T定理 4.18。 $\mathcal{K}^c_\infty$ 的 *Balmer* 谱由以下三点空间构成 ，



其中，闭子集就是特化封闭子集。

在上面的图示中，我们使用上标 iso 来强调这些对象是在各向同性范畴中考虑的。不过，为了简化记号，本节中我们将省略这些上标，因为我们只讨论各向同性范畴。

证明。 我们已在引理 4.17 中证明 0 是素理想。将 Spc($\mathcal{K}^c_\infty$) 分解为

$$\mathrm{supp}(\mathrm{cone}(\rho)) \sqcup U(\mathrm{cone}(\rho)),$$

由此可见，要描述谱中的点，只需证明

(1) $\mathrm{supp}(\mathrm{cone}(\rho)) = \{0\}$,

(2) $U(\mathrm{cone}(\rho)) = \{\langle \mathrm{cone}(\rho)\rangle, \langle \mathrm{cone}(r_0)\rangle\}$.

采用与定理 4.5 和定理 4.10 的证明类似的策略，(1) 将由命题 4.19 得出。对于第二个断言，我们以类似于定理 4.5 证明的方式，并通过反演 ρ ，考虑与下述幂等三角相对应的 smashing 局部化，

$$\mathcal{D}_\rho \to \Upsilon^{iso} \to \tilde{\mathcal{D}}_\rho \to \mathcal{D}_\rho[1],$$

其中

$$\tilde{\mathcal{D}}_\rho \cong \mathrm{hocolim}_n \left(\Upsilon^{iso} \xrightarrow{\rho} \Upsilon^{iso}(1)[1] \xrightarrow{\rho(1)[1]} \dots\right).$$

特别地，tt-范畴

$$\mathcal{M}_\infty = \tilde{\mathcal{D}}_\rho \otimes \mathcal{K}_\infty$$

被识别为在由 cone(ρ) 生成的局部化张量理想处对 $\mathcal{K}_\infty$ 进行局部化所得的范畴。这将 (2) 归结为计算 Spc($\mathcal{M}^c_\infty$)。通过在引理 4.20 中为 $\mathcal{M}^c_\infty$ 定义适当的权结构，我们将推出 0 是 $\mathcal{M}^c_\infty$ 的 tt-素理想；特别地， $\langle$cone(ρ)$\rangle$ 在 $\mathcal{K}^c_\infty$ 中是素理想。这将进一步把 (2) 归结为证明

(3) $\langle \tilde{\mathcal{D}}_\rho \otimes \mathrm{cone}(r_0)\rangle$ is the only non-zero prime tt-ideal of $\mathcal{M}^c_\infty$.

由于局部化所诱导的谱上的拉回

$$\mathrm{Spc}(\mathcal{M}^c_\infty) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{K}^c_\infty)$$

在 $U(\mathrm{cone}(\rho))$上是满射，因此它覆盖了 $U(\mathrm{cone}(r_0)) \subseteq U(\mathrm{cone}(\rho))$，因为 $\mathrm{cone}(\rho) \in \langle \mathrm{cone}(r_0)\rangle$（由命题 4.19）。特别地，假设 (3) 成立，我们可以由 [BG22，命题 2。10] 推得，与.....的拉回对应的素理想

$$\langle \tilde{\mathcal{D}}_\rho \otimes \mathrm{cone}(r_0)\rangle$$

确实由 cone(r_0) 生成。由此，特化关系的描述便直接得出。此外，显然在这种情况下，闭子集恰好是那些在特化关系下封闭的子集。因此，剩下的就是证明 (3)：为此，只需证明

(4) $\mathcal{D}_\rho \otimes$cone(r_0) 的支撑 $= \{0\}$,

(5) $U(\mathcal{D}_\rho \otimes \text{cone}(r_0)) = \{\langle \mathcal{D}_\rho \otimes \text{cone}(r_0)\rangle\}$。

由命题 4.21 可得断言 (4)。最后，为了证明 (5)，我们可以通过考虑与幂等三角对应的 $\mathcal{M}_\infty$ 的 smashing 局部化，形式上将 r_0 取逆

$$\mathcal{D}_{r_0} \to \tilde{\mathcal{D}}_\rho \to \tilde{\mathcal{D}}_{r_0} \to \mathcal{D}_{r_0}[1],$$

其中

$$\tilde{\mathcal{D}}_{r_0} = \operatorname{hocolim}_n \left(\tilde{\mathcal{D}}_\rho \xrightarrow{r_0} \tilde{\mathcal{D}}_\rho[-1] \xrightarrow{r_0[-1]} \dots\right).$$

特别地，三角张量范畴

$$\mathcal{N}_\infty = \tilde{\mathcal{D}}_{r_0} \otimes \mathcal{M}_\infty$$

可识别为 $\mathcal{M}_\infty$ 在由 $\mathcal{D}_\rho \otimes$cone(r_0) 生成的局部化张量理想处的局部化。这将 (5) 化归为证明 Spc($\mathcal{N}_\infty^c$) $= \{0\}$。为此，首先注意到在 $\mathcal{M}_\infty$ 中，

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{D}}_\rho) \cong \operatorname{colim}_n(\mathbb{E}\mathrm{nd}(\Upsilon^{iso})),$$

其中过渡映射由乘以 ρ 给出。特别地，上述环同构于

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\Upsilon^{iso})[\rho^{-1}].$$

此外，由引理 4.16，我们可以描述上述环；对其生成元之间的关系使用归纳法可得，对于每个 $i \geq 1$, $r_i = \rho^{-(2^i-1)} r_0^{2^i}$。这告诉我们

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{D}}_\rho) \cong \mathbb{F}_2[\rho, \rho^{-1}][r_0].$$

由此，我们可以推出，由于在 $\mathcal{N}_\infty$

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{D}}_{r_0}) \cong \operatorname{colim}_n(\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{D}}_\rho)),$$

其中过渡映射由乘以 r_0 给出，于是

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\tilde{\mathcal{D}}_{r_0}) \cong \mathbb{F}_2[\rho, \rho^{-1}, r_0, r_0^{-1}].$$

由于 $\mathcal{D}_{r_0}$ 的厚闭包是整个范畴 $\mathcal{N}_\infty^c$，因此单位对象的双分次自同态环的描述表明，该范畴中的每个非零对象都同构于 $\mathcal{D}_{r_0}$的直和。特别地， $\mathcal{N}_\infty^c$ 等价于有限维 $\mathbb{F}_2$-向量空间范畴，因此显然 Spc($\mathcal{N}_\infty^c$) $= \{0\}$。□

命题 4.19。 对于 $\mathcal{K}_\infty^c$ 中的每个非零对象 A，都有 $\operatorname{cone}(\rho) \in \langle A\rangle$.

证明。 按照命题 4.6 的论证，利用引理 4.17 中定义的权结构，我们可以将该陈述归结为验证：对于任意对象 $Y \in (\mathcal{K}_\infty^c)^{\geq 1}$，任意态射 $s : Y \to \Upsilon^{iso}$ is$\otimes$ 在 cone(ρ) 上都是幂零的。我们将通过证明更强的陈述来完成这一点：对于任意固定的 $K \geq 0$，存在一个足够大的整数 n，使得

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{cone}(\rho)(i)[j], \operatorname{cone}(\rho)) = 0, \quad \text{for } j - 2i \geq n \text{ and } -nK \leq i \leq nK.$$

这就得到了我们想要的结论，因为我们知道 Y 是有限多个 $\Upsilon^{iso}(i)[j]$ 的扩张；特别地，我们可以找到一个足够大的常数 K，使得 $-K \leq i \leq K$。因此，$Y^{\otimes n} \otimes$ cone(ρ)(i)[j] 是 cone(ρ)(i)[j] 的扩张，适用于 $j - 2i \geq n$ 和 $-nK \leq i \leq nK$，由此结论显而易见。

将 Hom(−，cone(ρ)) 应用于 cone(ρ)(i)[j]的定义三角，我们注意到，只需验证

$$\mathrm{Hom}(\Upsilon^{iso}(i+1)[j+1],\mathrm{cone}(\rho))=0,\quad \mathrm{Hom}(\Upsilon^{iso}(i)[j+1],\mathrm{cone}(\rho))=0.$$

此外，将 Hom(cone(ρ)(i′)[j′], –) 应用于 cone(ρ) 的定义三角，并利用 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\Upsilon^{iso})$ 中乘以 ρ 是单射这一事实，我们可推得

$$\mathrm{Hom}(\Upsilon^{iso}(i')[j'],\mathrm{cone}(\rho))\cong \mathrm{Hom}(\Upsilon^{iso}(i')[j'],\Upsilon^{iso}(1)[1])/(\mathrm{im}(\rho_*)).$$

综合以上所有内容，我们只需验证：对于任意固定的 $K\geq 0$，存在一个足够大的整数 n，使得

$$\text{(I) } \mathrm{Hom}(\Upsilon^{iso}(i)[j],\Upsilon^{iso})\big/\mathrm{im}(\rho(-1)[-1]_*),\quad \text{(II) } \mathrm{Hom}(\Upsilon^{iso}(i-1)[j],\Upsilon^{iso})\big/\mathrm{im}(\rho(-1)[-1]_*),$$

二者均为零，当 $j-2i\geq n$ 且 $-nK\leq i\leq nK$时。根据对偶性，这些群可通过将 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\Upsilon^{iso})$ 除以由 ρ生成的理想来计算。所得的双分次环同构于外代数 $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(r_i, i\in\mathbb{N}_0)$。最后，完全依照证明 [Spa25 定理 3.5] 中的同一论证，我们推得 (I) 和 (II) 在所需范围内为零。□

现在我们转而考察在定理 4.18 的证明中定义的三角张量范畴 $\mathcal{M}^c_\infty$ 的谱。˜为简化记号，我们将其 $\otimes$-单位对象记为 $\mathbb{1}$ $\mathcal{D}_\rho$。回顾一下，在定理 4.18 的证明中我们已经看到

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathbb{1})\cong \mathrm{colim}_n(\mathbb{E}\mathrm{nd}(\Upsilon^{iso}))\cong \mathbb{F}_2[\rho,\rho^{-1}][r_0].$$

我们接下来在 $\mathcal{M}^c_\infty$ 上定义一个权结构。

引理 4.20. 范畴 $\mathcal{M}^c_\infty$ 上存在唯一的有界权结构，其心 $\mathcal{H}$ 是由单位对象生成的加性子范畴。特别地，$\mathcal{M}^c_\infty$ 是一个局部张量三角范畴。

证明。 显然， $\mathcal{H}$ 是 $\mathbb{F}_2$-线性的且为半单范畴，因而是幂等完备的。此外，根据 (1) 的 [1]-周期性，$\mathcal{H}$ 的厚闭包就是整个 $\mathcal{M}^c_\infty$。最后，由定理 2.3，只需验证

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{1},\mathbb{1}[n])=0,\quad \text{for } n\geq 1,$$

这可由单位对象的双分次自同态环的描述推出 .

观察到 $\mathcal{H}$ 是张量且半单的，并且 $\mathcal{M}^c_\infty$ 具有稳定的对称幺半 ∞-范畴增强后，第二个断言可按惯例由注 2.4 得出。□

利用上文定义的权结构，我们讨论证明定理 4.18 所依赖的剩余结果。

˜**命题 4.21.** 对于每个非零对象 A *in* $\mathcal{M}^c_\infty$，我们有 $\mathcal{D}_\rho\otimes$锥(r0) $\in\langle A\rangle$.

˜证明. 为简化记号，在整个证明中我们将 $u:=\mathcal{D}_\rho\otimes$cone(r0) 记为。仿照命题 4.6 的论证，利用前一个引理中定义的权结构可知，该命题归结为验证：对于任意对象 $Y\in(\mathcal{M}^c_\infty)^{\geq 1}$，任意态射 $s: Y\to\mathbb{1}$ is$\otimes$- 幂零作用于 u。我们将证明更强的结论来完成这一验证：对于任意这样的 Y，

$$\mathrm{Hom}(Y\otimes u,u)=0.$$

这可由以下断言推出

$$\mathrm{Hom}(u[l],u)=0,\quad \text{for all } l\geq 1.$$

注意，显然该断言蕴含我们所需的结论，因为对于 $l\geq 1$， Y 是有限多个 $\mathbb{1}[l]$ 的扩张。为证明这一点，我们可以仿照命题 4.6 的证明，考虑

在 $\mathcal{M}_\infty^c$ 中定义 u 的三角，以及相应诱导的长正合列，从而将该断言归结为验证：对于所有 $l \geq 1$,

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{1}(i)[l-1], u) = 0, \quad \mathrm{Hom}(\mathbb{1}(i)[l+1], u) = 0.$$

此外，乘以 r_0 在 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(\mathbb{1})$中是单射，因此上述问题归结为验证

$$\text{(I) } \mathrm{Hom}(\mathbb{1}[l], \mathbb{1}) / \mathrm{im}((r_0[1])_*) = 0, \quad \text{(II) } \mathrm{Hom}(\mathbb{1}[l+2], \mathbb{1}) / \mathrm{im}((r_0[1])_*) = 0,$$

对所有 $l \geq 1$ 都成立。根据对偶性，我们可以将单位对象的双分次自同态环模去由 r_0 生成的理想，从而计算这些群：所得环同构于 $\mathbb{F}_2[\rho, \rho^{-1}]$，由此可立即得出 (I) 和 (II) 的消失。□

5. The prime tt-ideals

回顾定理 2.1 和定理 3.11，我们知道下面的映射

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \mathrm{Spc}(\pi_n) : \bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \mathrm{Spc}(\mathcal{K}_n^c) \to \mathrm{Spc}(\mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F; \mathbb{F}_2)),$$

是满射。现在我们将验证此映射也是单射，从而完整描述 $\mathrm{Spc}(\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F; \mathbb{F}_2))$ 的所有素 tt-理想。我们首先证明，对每个 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，$\mathrm{Spc}(\pi_n)$ 本身都是单射。这些验证将通过直接检查完成，读者可参见表 1 回顾这些函子的性质。

的单射性 $\mathrm{Spc}(\pi_1)$。设

$$\mathfrak{p}_{1,0} = \pi_1^{-1}(0), \quad \mathfrak{p}_{1,1} = \pi_1^{-1}(\langle \mathrm{cone}(\tau)|_{\overline{F}} \rangle).$$

No注 $\mathfrak{p}_{1,\,0} \subset \mathfrak{p}_{1,\,1}$，且该包含是严格的，因为 $\mathrm{cone}(\tau) \in \mathfrak{p}_{1,\,1}$，但 $\mathrm{cone}(\tau) \notin \mathfrak{p}_{1,\,0}$。

˜注 5.1。 注意 $\langle \mathrm{M}_1 \rangle \subseteq \mathfrak{p}_{1,\,0}$，我们稍后将证明这实际上是一个等式。此外，$\langle \mathrm{cone}(\tau) \rangle = \mathfrak{p}_{1,\,1}$ 因为这对应于 étale 实现限制在 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F; \mathbb{F}_2)$[Vis25，例 2。1]。

的单射性 $\mathrm{Spc}(\pi_2)$。设

$$\mathfrak{p}_{2,0} = \pi_2^{-1}(0), \quad \mathfrak{p}_{2,1} = \pi_2^{-1}(\langle \mathrm{cone}(r_0)|_{F(Q_2)} \rangle) = \pi_2^{-1}(\langle \tilde{\mathrm{M}}_1|_{F(Q_2)} \rangle).$$

˜ ˜注意 $\mathfrak{p}_{2,\,0} \subset \mathfrak{p}_{2,\,1}$，且该包含是严格的，因为 $\mathrm{M}_1 \in \mathfrak{p}_{2,\,1}$，但 $\mathrm{M}_1 \notin \mathfrak{p}_{2,\,0}$。

˜ ˜注 5.2。 注意 $\langle \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2 \rangle \subseteq \mathfrak{p}_{2,\,0}$ 以及 $\langle \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_1 \rangle \subseteq \mathfrak{p}_{2,\,1}$，我们稍后将看到它们实际上都是等式。

对 $3 \leq n < \infty$，$\mathrm{Spc}(\pi_n)$ **是单射**。设

$$\mathfrak{p}_{n,0} = \pi_n^{-1}(0), \quad \mathfrak{p}_{n,1} = \pi_n^{-1}(\langle \mathrm{cone}(r_{n-2})|_{F(Q_n)} \rangle) = \pi_n^{-1}(\langle \tilde{\mathrm{M}}_{n-1}|_{F(Q_n)} \rangle).$$

˜ ˜注意，$\mathfrak{p}_{n,\,0} \subset \mathfrak{p}_{n,\,1}$，且该包含是严格的，因为 $\mathrm{M}_{n-1} \in \mathfrak{p}_{n,\,1}$，但 $\mathrm{M}_{n-1} \notin \mathfrak{p}_{n,\,0}$。

˜ ˜注 5.3。 注意到 $\langle \mathrm{M}_{n-1}, \mathrm{M}_n \rangle \subseteq \mathfrak{p}_{n,0}$ 和 $\langle \mathrm{M}_{n-1}, \mathrm{M}_{n-1} \rangle \subseteq \mathfrak{p}_{n,1}$，稍后我们将看到，它们实际上是等式。

Spc 的单射性 Spc(π_∞)。 单射性可直接由 π_∞ 是局部化在紧对象上的限制这一事实得出。我们也可以通过类似于前面情形的策略直接证明：设

$\mathfrak{p}_{\infty,0} = \pi_\infty^{-1}(0)$ $\mathfrak{p}_{\infty,1} = \pi_\infty^{-1}(\langle 锥(\rho)^{iso}\rangle)$ $\mathfrak{p}_{\infty,2} = \pi_\infty^{-1}(\langle 锥(r_0)^{iso}\rangle) = \pi_\infty^{-1}(\langle 锥(\rho)^{iso}, 锥(\tau)^{iso}\rangle)$。我们有包含$\mathfrak{p}_{\infty,0} \subset \mathfrak{p}_{\infty,1} \subset \mathfrak{p}_{\infty,2}$，且它们都是真包含，因为锥($\rho$) $\notin \mathfrak{p}_{\infty,0}$，而锥($\rho$) $\in \mathfrak{p}_{\infty,1}$；同理，锥($\tau$) $\in \mathfrak{p}_{\infty,2}$，而锥($\tau$) $\notin \mathfrak{p}_{\infty,1}$。

注 5.4。 注意，$\langle \mathrm{M}_n \,|n \in \mathbb{N}\rangle = \mathfrak{p}_{\infty,0}$ 这是因为，正如我们已经看到的，π_∞ 是相应局部化张量理想的 smashing 局部化在紧对象上的限制。此外，$\langle 锥(\rho)\rangle \subseteq \mathfrak{p}_{\infty,1}$ 以及 $\langle 锥(\rho)、 锥(\tau)\rangle \subseteq \mathfrak{p}_{\infty,2}$，稍后我们将看到它们确实是等式。

Spc() 的单射性。 为了验证 $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ Spc(π_n) 的单射性，我们需要证明 $\mathfrak{p}_{i,j} = \mathfrak{p}_{i',j'}$ 当且仅当 $i = i'$ 且 $j = j'$。对所有 $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$，Spc($\pi_n$) 都是单射，这意味着若 $i = i'$，则 $j = j'$；因此我们必须证明，若 $i \neq i'$，则 $\mathfrak{p}_{i,j} \neq \mathfrak{p}_{i',j'}$。

首先，注意到

$$\mathfrak{p}_{1,0}, \mathfrak{p}_{1,1} \neq \mathfrak{p}_{i,j} \text{ for } i \neq 1.$$

这是因为

$$\pi_1(\mathrm{M}_1) = \mathrm{T}\,|_{\overline{F}} \oplus \mathrm{T}\,|_{\overline{F}},$$

不被包含于任何实数域 $\mathcal{K}_1^c$ 的素 tt-理想中，因此 $\mathrm{M}_1 \notin \mathfrak{p}_{1,0}, \mathfrak{p}_{1,1}$。然而，当 $i \neq 1$ 时，$\mathrm{M}_1 \in \mathfrak{p}_{i,j}$.

接下来，对于每个 $2 \leq k < \infty$，我们可以递归地验证以下结论。

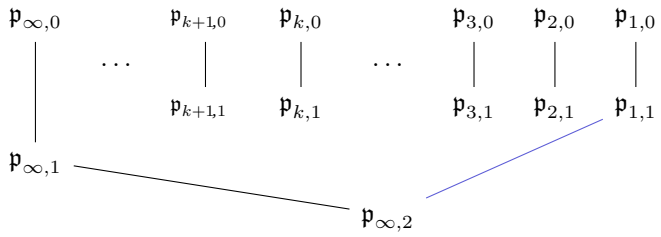
$$\mathfrak{p}_{k,0}, \mathfrak{p}_{k,1} \neq \mathfrak{p}_{i,j} \text{ for all } k+1 \leq i \leq \infty.$$

这是因为

$$\pi_k(\mathrm{M}_k) = \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{k-1}} \oplus \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{k-1}}\{d_{k-1}\}$$

不包含在 $\mathcal{K}_k^c$ 的任何素 tt-理想中，因此 $\mathrm{M}_k \notin \mathfrak{p}_{k,0}, \mathfrak{p}_{k,1}$。然而，对于指定范围内的所有 i 和 j，$\mathrm{M}_k \in \mathfrak{p}_{i,j}$。

5.1. **生成元与特化关系**。 根据我们目前的认识，可以得到 DQM$^{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)$ 的 Balmer 谱如下图所示。



黑色特化很清楚，而蓝色特化则由以下事实得出：根据注 5.1 和注 5.4

$$\mathfrak{p}_{1,1} = \langle \mathrm{cone}(\tau)\rangle \subset \mathfrak{p}_{\infty,2}\,.$$

为了理解所有特化关系，我们将首先描述所有素 tt-理想的生成元。回顾一下，根据注 5.1 和注 5.4，我们目前知道

$$\mathfrak{p}_{1,1} = \langle \mathrm{cone}(\tau)\rangle, \quad \mathfrak{p}_{\infty,0} = \langle \mathrm{M}_n \,|n \in \mathbb{N}\rangle.$$

我们也可以轻易找到 $\mathfrak{p}_{\infty,1}$ 和$\mathfrak{p}_{\infty,2}$的生成元。

引理 5.5。 素 *tt*-理想 $\mathfrak{p}_{\infty,1}$ 和 $\mathfrak{p}_{\infty,2}$ 由以下对象生成

$$\mathfrak{p}_{\infty,1} = \langle \mathrm{cone}(\rho)\rangle, \quad \mathfrak{p}_{\infty,2} = \langle \mathrm{cone}(\rho), \mathrm{cone}(\tau)\rangle.$$

证明。 由于 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)$ 是一个刚性三角张量范畴，特别是任何三角张量理想都是根理想。这意味着，对任意对象集合 S，由 S 生成的三角张量理想等于所有包含 S 的素 tt-理想的交集。

- 设 $S=\{\mathrm{cone}(\rho),\ \mathrm{cone}(\tau)\}$。包含 S 的唯一素理想是 $\mathfrak{p}_{\infty,\,2}$，由此即可得出结论。

- 设 $S=\{\mathrm{cone}(\rho)\}$。包含 S 的素理想为 $\mathfrak{p}_{\infty,\,1}$ 和 $\mathfrak{p}_{\infty,\,2}$。由于 $\mathfrak{p}_{\infty,\,1}\subset\mathfrak{p}_{\infty,\,2}$，它们的交为 $\mathfrak{p}_{\infty,\,1}$。这就证明了该结论。

□

5.2. **的生成元$\mathfrak{p}_{j,\,0}$ 对于** $1\le j<\infty$。 我们先讨论 $j=1$ 的情形。

推论 5.6。 ([Vis25，命题 2。18])素三角张量理想 $\mathfrak{p}_{1,\,0}$ 由以下元素生成

$$\mathfrak{p}_{1,0}=\langle\tilde{\mathrm{M}}_1\rangle.$$

˜证明。 如注 5.1 所述，包含关系 $\langle\mathrm{M}_1\rangle\subseteq\mathfrak{p}_{1,\,0}$ 显然。对于另一个包含关系，假设˜that $U\in\mathfrak{p}_{1,\,0}$，则 $\mathcal{X}_1\otimes U\cong 0$。这意味着 $\mathcal{X}_1\otimes U\cong U$。考虑以下复合映射

$$f:U\cong\tilde{\mathcal{X}}_1\otimes U\xrightarrow{r_0\otimes id_U}\tilde{\mathcal{X}}_1\otimes U[-1]\cong U[-1].$$

由于 U 是一个在 étale 实现下消失的紧对象，因此根据 [Vis25，命题 2。18],f是 $\otimes$-幂零的。此外，$\mathrm{cone}(f)\cong U\otimes\mathrm{cone}(r_0)$，这意味着当 n充分大时， $U^{\otimes n}$（相差一个移位后）是$\mathrm{cone}(f^{\otimes n})$的一个直和项。最后，由于每个三角张量理想都是根理想，我们推得

$$U\in\langle\mathrm{cone}(f^{\otimes n})\rangle\subseteq\langle\mathrm{cone}(f)\rangle\subseteq\langle\mathrm{cone}(r_0)\rangle=\langle\tilde{\mathrm{M}}_1\rangle.$$

□

在下面的命题中，我们描述谱顶层中其余素理想的生成元。

命题 5.7。 对于 $2\le j<\infty$，素 *tt*-理想 $\mathfrak{p}_{j,\,0}$ 由以下对象生成

$$\mathfrak{p}_{j,0}=\langle\mathrm{M}_{j-1},\tilde{\mathrm{M}}_j\rangle.$$

˜证明。 由注记 5.2 和注记 5.3 可知，包含关系 $\langle\mathrm{M}_{j-1},\ \mathrm{M}_j\rangle\subseteq\mathfrak{p}_{j,\,0}$ 显然。对于另一˜包含关系，若 $A\in\mathfrak{p}_{j,\,0}$，则我们知道 $\mathcal{X}_{j-1}\otimes\mathcal{X}_j\otimes A\cong 0$，这意味着 $\mathcal{X}_{j-1}\otimes A\cong\mathcal{X}_j\otimes A$、˜ ˜和 $\mathcal{X}_{j-1}\otimes A\cong\mathcal{X}_j\otimes A$。由于 $\mathcal{X}_{j-1}\otimes A\in\mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathrm{M}_{j-1})$，因此由下面的三角可得

$$\mathcal{X}_j\otimes A\longrightarrow A\longrightarrow\tilde{\mathcal{X}}_j\otimes A\longrightarrow\mathcal{X}_j\otimes A[1]$$

$$\mathcal{X}_{j-1}\otimes A\qquad\qquad\tilde{\mathcal{X}}_{j-1}\otimes A$$

˜ ˜ ˜由此我们推得，只需证明 $\mathcal{X}_j\otimes A\in\mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathrm{M}_j)$。回忆一下，$\mathrm{M}_j$ 在平移意义下同构于 $\mathrm{cone}(\tilde{\mathcal{X}}_j\xrightarrow{r_{j-1}}\tilde{\mathcal{X}}_j(-d_{j-1})[-2d_{j-1}-1])$；特别地，只需证明 r_{j-1} 在 A上是$\otimes$-幂零的。在上述讨论的等价下，我们将通过证明更强的命题来做到这一点：存在一个充分大的正整数 K，使得

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{X}}_{j-1}\otimes A,\tilde{\mathcal{X}}_{j-1}\otimes A(-Kd_{j-1})[-2Kd_{j-1}-K])=0.$$

此外，取 $C=A^{\vee}\otimes A$，根据对偶性，上述问题等价于证明

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{X}}_{j-1},\tilde{\mathcal{X}}_{j-1}\otimes C(-Kd_{j-1})[-2Kd_{j-1}-K])=0$$

对充分大的 K 成立。我们先回顾一下：$\mathrm{DM}^{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)$ 上的 Chow 权结构限制到 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)$ [Bac17],，其心由纯 Tate 动机和纯 Rost 动机的直和组成。因此，由于 $C\in\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)^{\geq m}$ 对某个整数 m 成立，故 $\tilde{\mathcal{X}}_{j-1}\otimes C\tilde{}$ 是有限个形如 $\mathcal{X}_{j-1}(x)[y]$ 和 $\mathcal{X}_{j-1}\otimes\mathrm{M}_l(x)[y]$ 的对象的扩张，其中 $l\geq j$ 且 $y-2x\geq m$；这意味着只需证明，对于上述每个位移 $(x)[y]$，都存在某个充分大的 k，使得

$$(1)\quad \mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{X}}_{j-1},\tilde{\mathcal{X}}_{j-1}(x-kd_{j-1})[y-2kd_{j-1}-k])=0$$

and

$$(2)\quad \mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{X}}_{j-1},\tilde{\mathcal{X}}_{j-1}\otimes\mathrm{M}_l(x-kd_{j-1})[y-2kd_{j-1}-k])=0.$$

情形 (1). 若 $j-1=1$，我们知道，只要 $(x-kd_{j-1})$ 变为负数，该群就会消失。˜对于 $j-1\geq 2$，我们采用斜率论证。我们知道， $\mathbb{E}nd(\mathcal{X}_{j-1})$ 的支撑位于 $\mathbb{Z}^2$ 的一个区域内，该区域由斜率为 $2+1/d_{j-2}$ 的直线界定。然而，随着 k 增大，目标的双次数沿着斜率为 $2+1/d_{j-1}$ 的轨迹移动。由于 $d_{j-1}>d_{j-2}$，目标的双次数最终将˜离开 $\mathbb{E}nd(\mathcal{X}_{j-1})$ 的支撑区域，从而确保当 k 足够大时该群消失。

情形(2). 只需考虑以下对象的消失：

$$(2')\quad \mathrm{Hom}(\mathrm{T},\tilde{\mathcal{X}}_{j-1}\otimes\mathrm{M}_l(x-kd_{j-1})[y-2kd_{j-1}-k]).$$

˜将三角 $\mathcal{X}_{j-1}\to\mathrm{T}\to\mathcal{X}_{j-1}\to\mathcal{X}_{j-1}[1]$ 与 M_l 张量化，并考虑由 $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}\ -)$ 诱导的长正合列，只需研究以下各群的消失。

(I) $\mathrm{Hom}(\mathrm{T},\mathrm{M}_l(x-kd_{j-1})[y-2kd_{j-1}-k])$.

当 k 足够大时，该项为零，因为 $(x-kd_{j-1})$ 变为负数。

(II) $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}\ \mathcal{X}_{j-1}\otimes\mathrm{M}_l(x-kd_{j-1})[y-2kd_{j-1}-k+1])$.

由于 $l\geq j$，我们有 $\mathcal{X}_{j-1}\otimes\mathcal{X}_l\cong\mathcal{X}_{j-1}$。因此，将 M_l 的定义三角与 $\mathcal{X}_{j-1}$ 张量化，可知 $\mathcal{X}_{j-1}\otimes\mathrm{M}_l$ 是以下对象的一个扩张：

$$\mathcal{X}_{j-1}(d_{l-1}+\alpha_k)[2d_{l-1}+\beta_k]\ \text{ and }\ \mathcal{X}_{j-1}(\alpha_k)[\beta_k].$$

其中 $\alpha_k=x-kd_{j-1}$ 和 $\beta_k=y-2kd_{j-1}-k+1$。通过对 $\mathcal{X}_{j-1}$ 的幂等三角作适当平移，并考虑由 $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}\ -)$ 诱导的长正合列，我们还可以将 (II) 的消失归约为以下群的消失。

- $\mathrm{Hom}(\mathrm{T},\ \mathrm{T}(d_{l-1}+\alpha_k)[2d_{l-1}+\beta_k])$ 和 $\mathrm{Hom}(\mathrm{T},\ \mathrm{T}(\alpha_k)[\beta_k])$。

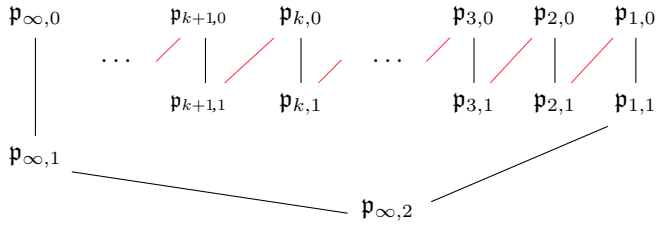
  当 k 足够大时，这两者都为零，因为 $d_{l-1}+\alpha_k$ （从而 α_k）变为负数。

- $\mathrm{Hom}(\mathrm{T},\tilde{\mathcal{X}}_{j-1}(d_{l-1}+\alpha_k)[2d_{l-1}+\beta_k+1])$ and $\mathrm{Hom}(\mathrm{T},\tilde{\mathcal{X}}_{j-1}(\alpha_k)[\beta_k+1])$.

  根据情形（1）中的相同论证，这两者都为零。

证明至此结束。 □

利用谱的顶层中各点对应的生成元，我们可以更新 $\mathrm{Spc}(\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2))$ 的图示，



其中 t 红线表示通过观察即可轻易推导出的特化关系 .

5.3. **的生成元**$_{,1}$ **当** $2 \le j < \infty$ **时。** 对于 $2 \le j < \infty$，我们记作

$$\tilde{\mathcal{D}}^{F(Q_j)}_{r_{j-2}} = \mathrm{hocolim}_{n\in\mathbb{N}}\left(\tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{j-1}} \xrightarrow{r_{j-2}} \tilde{\mathcal{X}}_{\rho^{j-1}}(-d_{j-2})[-2d_{j-2}-1] \xrightarrow{r_{j-2}(-d_{j-2})[-2d_{j-2}-1]} \dots\right)$$

取自 $\mathrm{DQM}(F(Q_j);\mathbb{F}_2)$。回顾第4.1节和第4.2节，对于 $2 \le j < \infty$

$$\mathfrak{p}_{j,1} = \ker(\tilde{\mathcal{D}}^{F(Q_j)}_{r_{j-2}} \otimes (\tilde{\mathcal{X}}_{j-1} \otimes -)|_{F(Q_j)}) \cap \mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2).$$

现在，我们可以在 $\mathrm{DQM}(F;\mathbb{F}_2)$ 中定义

$$\tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}} = \mathrm{hocolim}_{n\in\mathbb{N}}\left(\tilde{\mathcal{X}}_{j-1} \xrightarrow{r_{j-2}} \tilde{\mathcal{X}}_{j-1}(-d_{j-2})[-2d_{j-2}-1] \xrightarrow{r_{j-2}(-d_{j-2})[-2d_{j-2}-1]} \dots\right),$$

并且显然，在基变换下，$\mathrm{DQM}(F;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{DQM}(F(Q_j);\mathbb{F}_2)$，$\tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}} \mapsto \tilde{\mathcal{D}}^{F(Q_j)}_{r_{j-2}}$。特别地，这给出

$$\mathfrak{p}_{j,1} = \ker(\tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}} \otimes \mathcal{X}_j \otimes -) \cap \mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2).$$

命题 5.8. 对于 $2 \le j < \infty$，素 *tt*-理想 $\mathfrak{p}_{j,1}$ 由以下元素生成

$$\mathfrak{p}_{j,1} = \langle \mathrm{M}_{j-1}, \tilde{\mathrm{M}}_{j-1}\rangle$$

证明。 如注记 5.2 和注记 5.3 中所述，包含 $\langle \mathrm{M}_{j-1}, \mathrm{M}_{j-1}\rangle \subseteq \mathfrak{p}_{j,1}$ 显然成立。对于另一个包含，设 $A \in \mathfrak{p}_{j,1}$，我们将证明 $\mathcal{X}_{j-1} \otimes A \in \mathrm{Loc}_{\otimes}(\mathrm{M}_{j-1})$；这就足够了，因为我们已经知道 $\mathcal{X}_{j-1} \otimes A \in \mathrm{Loc}_{\otimes}(\mathrm{M}_{j-1})$，其余部分则由熟知的三角推出

$$\mathcal{X}_{j-1} \otimes A \to A \to \tilde{\mathcal{X}}_{j-1} \otimes A \to \mathcal{X}_{j-1} \otimes A[1].$$

为证明这一结论，我们首先利用假设 $\mathcal{D}_{r_{j-2}} \otimes \mathcal{X}_j \otimes A \cong 0$；使用针对 $\mathcal{X}_j$ 的幂等元三角形，可推出 $\mathcal{D}_{r_{j-2}} \otimes A \cong \mathcal{D}_{r_{j-2}} \otimes \mathcal{X}_j \otimes A$。接下来，我们有一个三角形

$$\mathcal{D}_{r_{j-2}} \to \tilde{\mathcal{X}}_{j-1} \to \tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}} \to \mathcal{D}_{r_{j-2}}[1],$$

其中可以验证 $\mathcal{D}_{r_{j-2}} \in \mathrm{Loc}_{\otimes}(\mathrm{M}_{j-1})$。将上述三角形张量化 A 后可知，要证明这一结论，只需证明

$$\tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}} \otimes A \cong \tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}} \otimes \tilde{\mathcal{X}}_j \otimes A \in \mathrm{Loc}_{\otimes}(\tilde{\mathrm{M}}_j) \subseteq \mathrm{Loc}_{\otimes}(\tilde{\mathrm{M}}_{j-1}).$$

考虑 $r_{j-1}\colon \mathcal{X}_j \to \mathcal{X}_j(-d_{j-1})[-2d_{j-1}-1]$，并注意到由于 $\mathrm{Loc}_{\otimes}(\mathrm{M}_j) = \mathrm{Loc}_{\otimes}(\mathrm{cone}(r_{j-1}))$，因此只需证明 r_{j-1} 在 $\mathcal{D}_{r_{j-2}} \otimes A$ 上是 $\otimes$-幂零的。在上文讨论的等价关系下，我们将通过证明更强的命题来做到这一点：存在一个充分大的 K，使得

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}} \otimes A, \tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}} \otimes A(-Kd_{j-1})[-2Kd_{j-1}-K]) = 0.$$

此外，取 $C = A^{\vee} \otimes A$，根据对偶性，上述问题等价于证明

$$\mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}}, \tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}} \otimes C(-Kd_{j-1})[-2Kd_{j-1}-K]) = 0.$$

˜对于充分大的 K。现在，按照命题 5.7 中的论证，我们知道 $\mathcal{D}_{r_{j-2}} \otimes C$ 是由有限个形如 $\mathcal{D}_{r_{j-2}}(x)[y]$ 和 $\mathcal{D}_{r_{j-2}} \otimes \mathrm{M}_l(x)[y]$ 的对象扩张而成的，其中˜ ˜，且 $l \geq j$ 和 $y - 2x \geq m$，而 m 是某个固定整数；这意味着，只需证明对于上述每个移位 $(x)[y]$，都存在某个充分大的 k，使得

$$(1) \quad \mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}}, \tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}}(x - kd_{j-1})[y - 2kd_{j-1} - k]) = 0$$

and

$$(2) \quad \mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}}, \tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}} \otimes \mathrm{M}_l(x - kd_{j-1})[y - 2kd_{j-1} - k]) = 0.$$

为了研究这些群的消失，回忆一下我们可以计算

$$\mathbb{E}nd(\tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}}) = \mathrm{colim}_n \mathbb{E}nd(\tilde{\mathcal{X}}_{j-1}),$$

其中过渡映射由乘以 r_{j-2} 给出，即

$$\mathbb{E}nd(\tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}}) = \mathbb{E}nd(\tilde{\mathcal{X}}_{j-1})[r_{j-2}^{-1}].$$

特别地，(1) 的消失可由与命题 5.7 的证明中基本相同的验证推出。对于 (2)，注意到只需研究以下对象的消失

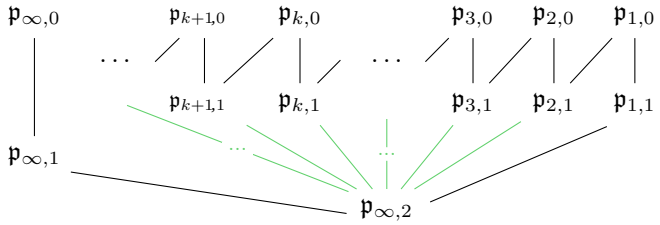
$$(2') \quad \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \tilde{\mathcal{D}}_{r_{j-2}} \otimes \mathrm{M}_l(x - kd_{j-1})[y - 2kd_{j-1} - k]),$$

而后者可改写为如下余极限

$$\mathrm{colim}_n \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \tilde{\mathcal{X}}_{j-1} \otimes \mathrm{M}_l(x - kd_{j-1} - nd_{j-2})[y - 2kd_{j-1} - k - 2nd_{j-2} - n])).$$

根据命题 5.7 证明中的类似验证，我们总能找到足够大的 k，使得上述余极限中的群最终为零。□

利用所有三角张量素理想的生成元描述，我们可以更新先前的 Spc(DQM$^{\mathrm{gm}}(F; \mathbb{F}_2)$) 图示。



此外，经过检查，现在很容易验证这些点之间不存在其他特化关系。

6. The topology

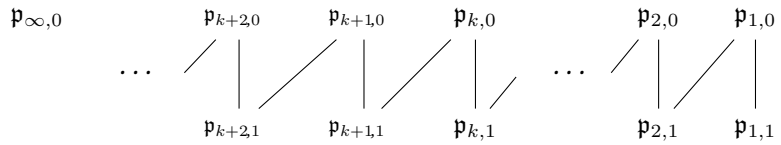
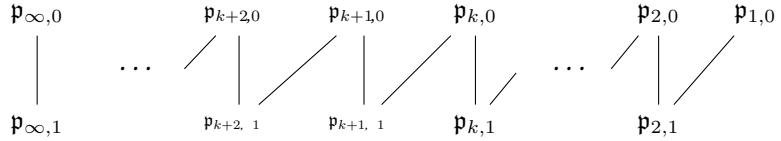
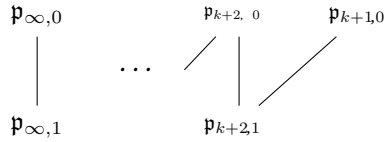
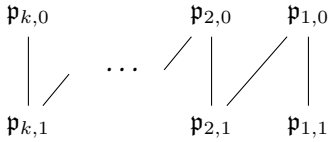
至此，我们已将 Spc(DQM$^{\mathrm{gm}}(F; \mathbb{F}_2)$) 描述为一个集合，知道了所有素 tt-理想的生成元，也知道了它们之间的特化关系。现在我们来描述其拓扑。一般而言，Spc($\mathcal{K}$) 有一个由以下闭子集构成的基

$$\{\mathrm{supp}(A) | A \in \mathcal{K}\}$$

并且它们的补集 $U(A)$ 是拟紧的。我们将通过证明以下命题来明确描述这个基。

定理 6.1。 Spc$(\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F; \mathbb{F}_2)$ 的闭子集构成的一个基由满足以下条件的特化闭子集 Z 给出

(1) 若 $\mathfrak{p}_{\infty,0} \in Z$，则 Z 是余有限；
(2) 若 $\mathfrak{p}_{\infty,0} \notin Z$，则 Z 是有限的。

支撑	图示
1. supp(锥(ρ))	
2. supp(锥(τ))	
3. supp($\tilde{\mathrm{M}}_k$)	
4. supp(M_k)	

TAB不超过 2。记录 Spc(DQM$^{\mathrm{gm}}$(F; $\mathbb{F}_2$ 中一些熟悉对象的支撑很有用)).

证明。 只需证明，特化闭子集具有形式 (1) 或 (2)，当且仅当 Z =supp(A) 对某个对象 $A \in$DQ M$^{\mathrm{gm}}$(F; $\mathbb{F}_2$) 成立。我们先证明，对于任意对象 A，supp(A) 都具有所需的形式。

情形 1： $\mathfrak{p}_{\infty,\ 0} \in$supp($A$)。在这种情况下，

$$U(A) \subseteq \mathrm{Spc}(\mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)) \setminus \{\mathfrak{p}_{\infty,0}\} = U(\mathrm{cone}(\rho)) \cup U(\tilde{\mathrm{M}}_1) \cup \bigcup_{j\geq 2} U(\mathrm{M}_{j-1} \oplus \tilde{\mathrm{M}}_j).$$

由于 U(A) 是拟紧的，且右侧的每个开子集都只包含有限个点，因此 U(A) = supp(A)^c 是有限的，这证明 supp(A) 满足 (1)。

情形 2： $\mathfrak{p}_{\infty,\ 0} \notin$ supp(A)。假设表明 $A \in \mathfrak{p}_{\infty,\ 0} = \langle \mathrm{M}_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$。由于 A 是紧的，因此它实际上由有限个 Rost 动机构成，即

$$A \in \langle \mathrm{M}_{t_1}, \ldots, \mathrm{M}_{t_s} \rangle \subseteq \langle \mathrm{M}_n \rangle,$$

对某个充分大的 n。因此 supp(A) $\subseteq$supp(M$_n$)，又因为 supp(M$_n$) 是有限的（参见表 2），我们推得 supp(A) 满足 (2)。

这证明了一个方向；现在我们必须证明，任意形如 (1) 或 (2) 的特化封闭子集 Z 都可以写成某个对象的支撑。

情况 1： $\mathfrak{p}_{\infty,\ 0} \in Z$ **且** Z **是余有限的**。首先，如果 $\mathfrak{p}_{\infty,\ 2} \in Z$，那么 Z = Spc(DQM$^{\mathrm{gm}}$(F; $\mathbb{F}_2$)) = supp(T)。如果 $\mathfrak{p}_{\infty,\ 2} \notin Z$，那么它必定包含于

$$\mathrm{supp}(\mathrm{cone}(\rho) \oplus \mathrm{cone}(\tau)) = \{\mathfrak{p}_{\infty,2}\}^c.$$

根据假设，有限补集 Z^c 至多包含有限多个闭点$\mathfrak{p}_{k,\ 0}$。由于Z 是特化封闭的，缺失$\mathfrak{p}_{k,\ 0}$ 意味着缺失 $\mathfrak{p}_{k,\ 1}$ 和 $\mathfrak{p}_{k+1,\ 1}$；特别地， Z 包含于

有限个如下形式的子集的交中

$$\operatorname{supp}(\tilde{\mathrm{M}}_1) = \{\mathfrak{p}_{1,0}, \mathfrak{p}_{1,1}, \mathfrak{p}_{\infty,2}\}^c, \quad \operatorname{supp}(\mathrm{M}_{k-1} \oplus \tilde{\mathrm{M}}_k) = \{\mathfrak{p}_{k,0}, \mathfrak{p}_{k,1}, \mathfrak{p}_{k+1,1}, \mathfrak{p}_{\infty,2}\}^c \text{ for } k \geq 2.$$

这意味着，对于某个对象 Y（它是上述有限交中所涉及对象的张量积），有 $Z \subseteq \operatorname{supp}(Y)$。若包含关系为等式，则结论成立；否则，我们注意到，$\operatorname{supp}(Y)$ 中不属于 Z 的点只能是形如 $\mathfrak{p}_{k,1}$ 的点，其中 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 如此，而且这类点至多只有有限个。通过将 $\operatorname{supp}(Y)$ 与有限个形如.....的子集取交，可以移除这些点

$$\operatorname{supp}(\operatorname{cone}(\rho)) = \{\mathfrak{p}_{\infty,1}, \mathfrak{p}_{\infty,2}\}^c, \quad \operatorname{supp}(\operatorname{cone}(\tau)) = \{\mathfrak{p}_{1,1}, \mathfrak{p}_{\infty,2}\}^c, \quad \operatorname{supp}(\mathrm{M}_k \oplus \tilde{\mathrm{M}}_k) = \{\mathfrak{p}_{k+1,1}, \mathfrak{p}_{\infty,2}\}^c.$$

由此构造出的子集将等于 Z，并且可以写成 Y 与上述有限交中所涉及对象的张量积的支撑。

情形 2：$\mathfrak{p}_{\infty,0} \notin Z$ 和 Z 是有限的。由于它是特化封闭的，Z 不能包含 $\mathfrak{p}_{\infty,1}$ 或$\mathfrak{p}_{\infty,2}$。由于 Z 有限，对于足够大的 k，有 $Z \subseteq \operatorname{supp}(\mathrm{M}_k)$。$\operatorname{supp}(\mathrm{M}_k)$ 的任何有限特化封闭子集都可以构造成以下集合的有限并：

- $\{\mathfrak{p}_{k,0}\} = \operatorname{supp}(\tilde{\mathrm{M}}_{k-1} \otimes \mathrm{M}_k)$ for $1 \leq k < \infty$, and $\tilde{\mathrm{M}}_0 := \operatorname{cone}(\tau)$.
- $\overline{\{\mathfrak{p}_{1,1}\}} = \operatorname{supp}(\mathrm{M}_1)$;
- $\overline{\{\mathfrak{p}_{k,1}\}} = \operatorname{supp}(\tilde{\mathrm{M}}_{k-2} \otimes \mathrm{M}_k)$ for $2 \leq k < \infty$, and $\tilde{\mathrm{M}}_0 := \operatorname{cone}(\tau)$.

由此可知，Z 可以表示为上述有限并中所涉及对象的直和的支撑。□

根据上述定理对基的描述，很容易刻画该谱的所有闭子集。

推论 6.2. $\operatorname{Spc}(\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2))$ 的闭子集是特化闭子集，且若 $\mathfrak{p}_{\infty,\ 0} \notin Z$，则 Z 是有限的。

注 6.3。我们注意到 $\operatorname{Spc}(\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2))$ 是一个 Krull 维数为2的可数无限空间。此外，根据闭子集之基的描述，显然闭点$\mathfrak{p}_{\infty,\ 0}$不可见，即无法将其写成某个对象的支撑。特别地，由 [BF11] 可知，$\operatorname{Spc}(\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2))$ 不是诺特空间。当然，后一个事实也可以直接从闭集的显式描述中看出。

7. 应用

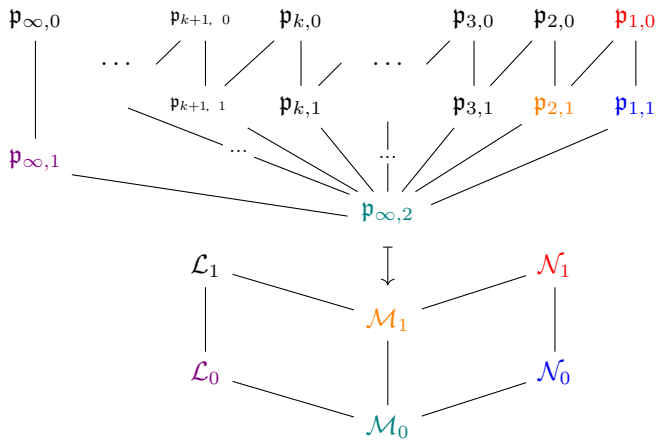
7.1. **限制到 Artin–Tate 动机。**在包含

$$\mathrm{DATM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2) \hookrightarrow \mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)$$

我们可以考察$\mathrm{DATM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 中 [BG22，定理 10.1，注 10 中提到的16] 素理想的生成元，以了解点在诱导的限制下如何映射

$$\operatorname{Spc}(\mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)) \twoheadrightarrow \operatorname{Spc}(\mathrm{DATM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)).$$

所得映射总结于下图中，其中颜色表示 $\operatorname{Spc}(\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2))$ 中的点如何映射到 $\operatorname{Spc}(\mathrm{DATM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2))$.



注记 7.1。根据素 tt-理想生成元的描述，我们看到，按照 [Gal25]，的意义，$\mathfrak{p}_21$ 和 $\mathfrak{p}_\infty 2$ 是谱中仅有的周期点，且周期均为 1。其余所有点的周期均为 0。上文所示限制映射的一个显著特点是，Spc(DQM$^{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)$) 中所有未被 Spc(DATM$^{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)$) 映出的附加点，都来自于纤维 Spc(DATM$^{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2)$) 上方的 $\mathcal{L}_1\in$。我们可以通过考虑素 tt-理想更一般的周期性概念来解释这一现象；我们计划在未来与 Sparks 的合作研究中发展这一概念，届时也将重新讨论当前的例子。

7.2. **Vishik 的各向同性点的限制。** 回顾一下，在 [Vis24; Vis25]Vishik 构造了2^c Spc(DM$^{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2)$) 的闭点，记作 $a_{2,\ E}$ 并由域扩张的 2- 等价类 $E/\mathbb{R}$ 进行索引。我们研究它们沿着包含的限制

$$\mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2)\hookrightarrow \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2).$$

有几种方法可以看出，$a_{2,E}$ 必须限制到 Spc(DQM$^{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2)$) 的一个闭点。一个方便的判据利用了各向同性点的一个重要性质：如果一个各向同性点包含一个 Rost 动机 M_n （分别地，一个约化 Rost 动机 M_n），那么它就不能包含 M_n （分别地，M_n）。这是各向同性点属于边界型这一更强事实的推论（ [Vis25，例 3.13]）。此外，cone(ρ) 和 cone(τ) 不包含于任何各向同性点中，因为 ρ 和 τ 在 Vishik 的各向同性实现下变为零。通过检查 Spc(DQM$^{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2)$) 的素 tt- 理想的生成元可知，这迫使

$$a_{2,E}\cap \mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2)=\mathfrak{p}_{k,0},\quad \text{for some } k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}.$$

现在我们说明如何利用 Vishik 在域扩张上的 2-偏序，从 E 确定 k。对于域扩张 $E/\mathbb{R}$，我们考虑

$$S_E:=\{\,n\in\mathbb{N}\mid E\overset{2}{\geq}\mathbb{R}(Q_n)\,\}.$$

由于

$$\mathbb{R}(Q_1)\overset{2}{>}\mathbb{R}(Q_2)\overset{2}{>}\cdots\overset{2}{>}\mathbb{R}(Q_n)\overset{2}{>}\cdots,$$

显然，S_E 是向上封闭的：也就是说，若 $m\in S_E$ 且 $m'\geq m$，则 $m'\in S_E$。我们定义

$$k(E):=\begin{cases}\infty & \text{if } S_E=\emptyset,\\ \min(S_E) & \text{if } S_E\neq\emptyset.\end{cases}$$

命题 7.2. 对于任意域扩张 $E/\mathbb{R}$，都有

$$a_{2,E}\cap \mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2)=\mathfrak{p}_{k(E),0}\,.$$

证明。 如上所述，$a_{2,\,E}$ 必须限制为某个 $\mathfrak{p}_{k,\,0}$。我们通过检查哪些 Rost 动机在基变换到 E 后变为 2-各向同性，来确定 k 。

2假设 $S_E = \emptyset$，即对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $E \not\geq \mathbb{R}(Q_n)$。那么对所有 n，$(\mathrm{M}_n)_E$ 都是 2-各向异性的，因此对所有 n，$\mathrm{M}_n \in a_{2,\,E}$。这迫使 $a_{2,\,E} \cap \mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(\mathbb{R};\mathbb{F}_2) = \mathfrak{p}_{\infty,\,0}$。

2现在假设 $S_E \neq \emptyset$，并令 $k = \min(S_E)$。那么 $E \geq \mathbb{R}(Q_k)$，所以 $(\mathrm{M}_k)_E$ 是 2-各向同性的，因此 $\mathrm{M}_k \in a_{2,\,E}$。若 $k = 1$，则这迫使 $a_{2,\,E}$ 限制到 $\mathfrak{p}_{1,\,0}$。若 $k \geq 2$，那么我们知道2$E \not\geq \mathbb{R}(Q_{k-1})$：特别地，$(\mathrm{M}_{k-1})_E$ 是 2-各向异性的，因此 $\mathrm{M}_{k-1} \in a_{2,\,E}$。由此可见，$a_{2,\,E}$ 必须限制到$\mathfrak{p}_{k,\,0}$，证明至此完成。□

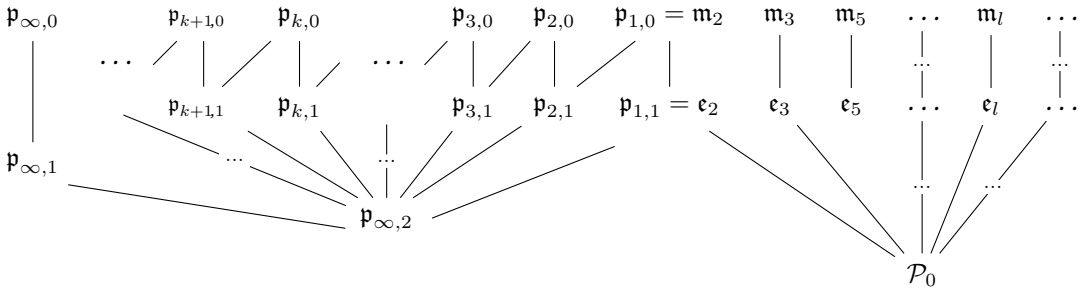
7.3. **二次型的整系数谱（域）** $\mathbb{R}^{alg}$。 若实闭域 F 的代数闭包 F 满足动机上同调中的额外消失条件 [Gal19，假设 66]——例如，已知 $F = \mathbb{R}^{\mathrm{alg}}$ 满足这些条件——那么可以调整 [BG22，定理 113] 中的论证，从而完整描述 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{Z})$ 的 Balmer 谱。第一个观察是，对于任意实闭域 F 以及系数环 R ，若其中 2 可逆，则有如下同一

$$\mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F;R) = \mathrm{DATM}_{\mathrm{gm}}(F;R).$$

事实上，若 2 是 R中的单位对象，则光滑射影二次型的动机分解为 Tate 动机和二次扩张的动机；在实闭域上，这些恰好是 Artin–Tate 动机范畴的生成元。特别地，对于 $R = \mathbb{F}_p$ 且 p 为奇素数时，$\mathrm{DATM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_p)$ 的张量三角谱，以及因此 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_p)$ 的张量三角谱，已在 [BG22] 中计算。对于 $R = \mathbb{Q}$，人们猜想 $\mathrm{Spc}(\mathrm{DATM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{Q}))$ 是单点集，并且已知在满足 Gallauer 消失条件于F时该结论成立。

具备这些输入后，我们描述 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(\mathbb{R}^{\mathrm{alg}};\mathbb{Z})$ 的整系数谱，并猜想对于每个实闭域，这一描述都成立。

推论 7.3。 设 $F = \mathbb{R}^{alg} = \mathbb{Q}\cap\mathbb{R}$ 为实代数数域，则 $\mathrm{Spc}(\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(\mathbb{R}^{alg};\mathbb{Z}))$由以下点及特化关系组成



其中，l 遍历所有素数。此外，闭子集是满足以下条件的特化闭子集 Z

- *if* $\mathfrak{p}_{\infty,0} \notin Z$, *then* $Z \cap \overline{\{\mathfrak{p}_{\infty,2}\}}$ *is finite;*
- *if* $\mathcal{P}_0 \notin Z$, *then* $Z \cap \overline{\{\mathcal{P}_0\}}$ *is finite.*

证明。 证明基本沿用 [BG22定理 113]。首先，由于$\mathrm{M}(F)$ 的欧拉示性数为 2，我们可以将其分解为

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{Z})) = \mathrm{supp}(\mathrm{cone}(2)) \cup \mathrm{supp}(\mathrm{M}(\overline{F})).$$

根据 [Bal18，定理 定理 1.7] supp(cone(2)) 与由……诱导的谱上的拉回的像相同

$$cc_2 : \mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{Z}) \to \mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{F}_2).$$

此外，$\mathrm{Spc}(cc_2)$ 是单射：从除 $\mathfrak{p}_{1,\ 1}$ 和 $\mathfrak{p}_{\infty,\ 2}$之外所有素 tt-理想的生成元即可看出这一点；对于这两个理想，则可用 [BG22 定理 113] 中的相同论证得出。此外，$\mathrm{supp}(\mathrm{M}(F))$ 与像相对应——同样由 [Bal18 定理 17] 得出——该像由基变换所诱导的谱上的单射拉回映射给出

$$p : \mathrm{DQM}_{\mathrm{gm}}(F;\mathbb{Z}) \to \mathrm{DTM}_{\mathrm{gm}}(\overline{F};\mathbb{Z}),$$

其中，单射性可由 [BG22 定理 113] 中的相同论证得出。此外，这两个映射的像发生重合，也可由 同上 中的相同理由得出。

The 拓扑的描述可由以下事实得到： Z 是闭的，当且仅当 if

$$Z_1 := Z \cap \mathrm{supp}(\mathrm{cone}(2)) \text{ and } Z_2 := Z \cap \mathrm{supp}(\mathrm{M}(\overline{F}))$$

是闭的。其余部分可由推论 6.2 中谱 $\mathrm{DQM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{F}_2)$ 的拓扑描述，以及 $\mathrm{DTM}^{\mathrm{gm}}(F;\ \mathbb{Z})$ 的谱（在 [Gal19], 中计算）得出：取这些子集在 $\mathrm{Spc}(cc_2)$ 和 $\mathrm{Spc}(p)$ 下的连续双射拉回。 □

参考文献

[Aok20] Ko Aoki。《权复形函子是对称幺半的》。载于：《数学进展》368（2020），第 107145 页。[Bac17] Tom Bachmann。《仿射二次型的动机的可逆性》。载于：《数学文献》22（2017），第 363–395 页。[Bal05] Paul Balmer。《张量三角范畴中素理想的谱》。载于：纯粹与应用数学杂志 588（2005）。[Bal10] Paul Balmer。《张量三角几何》。载于：国际数学家大会论文集，第 2 卷。2010 年，第 85–112 页。[Bal18] Paul Balmer。《关于与张量三角函子相关的谱映射的满射性》。载于：伦敦数学会通报 50.3（2018），第 487–495 页。[Bar+24] Tobias Barthel、Natalia Castellana、Drew Heard 和 Beren Sanders。《关于张量三角几何中的满射性》。载于：数学杂志 308.4（2024），第 65 页。[BF11] Paul Balmer 和 Giordano Favi。《广义张量幂等元与望远镜猜想》。载于：伦敦数学会会刊 102.6（2011），第 1161–1185 页。[BG22] Paul Balmer 和 Martin Gallauer。《三个实 Artin–Tate 动机》。载于：《数学进展》406（2022），第 108535 页。[BG25] Paul Balmer 和 Martin Gallauer。《Artin 动机的谱》。载于：美国数学会汇刊 378.03（2025），第 1733–1754 页。[BL11] Karim Johannes Becher 和 David B Leep。《Elman-Lam-Krüskemper 定理》。载于：国际学术研究通报 2011.1（2011），第 106823 页。[Bon10] Mikhail V Bondarko。《权结构与 t-结构的比较；权滤过、谱序列与复形（针对动机及一般情形）》。载于：K理论杂志 6.3（2010），第 387–504 页。[Gal19] Martin Gallauer。《代数闭域上 Tate 动机的 tt-几何》。载于：《数学汇编》155.10（2019），第 1888–1923 页。[Gal25] Martin Gallauer。《等变与动机语境中的周期》。载于：arXiv 预印本 arXiv: 2511.14325（2025）。[Gre19] John PC Greenlees。《有理等变上同调理论的 Balmer 谱》。载于：纯粹与应用代数杂志 223.7（2019），第 2845–2871 页。[HKA17] Marc Hoyois、Shane Kelly 和 Paul Arne Østvær。《正特征下的动机 Steenrod 代数》。载于：欧洲数学会杂志（EMS Publishing）19.12（2017）。

[Lam05] Tsit-Yuen Lam。《域上的二次型导论》。第 67 卷。美国数学会，2005 年。[OVV07] Dmitri Orlov、Alexander Vishik 和 Vladimir Voevodsky。《一个关于 K 的正合列及其在二次型中的应用》。载于：《数学年刊》（2007），第 1–13 页。[Pet13] Tobias J Peter。《混合 Artin–Tate 动机的素理想》。载于：K理论杂志 11.2（2013），第 331–349 页。[RØ08] Oliver Röndigs 和 Paul Arne Østvær。《动机上同调上的模》。载于：《数学进展》219.2（2008），第 689–727 页。[Ros90] Markus Rost。《二次型 Chow 群的一些新结果》。载于：预印本，雷根斯堡（1990）。[Ros98] Markus Rost。《Pfister 型的动机》。载于：预印本（1998），第 1–13 页。[Sha23] Amit Shah。《Hom-有限加性范畴中的 Krull–Remak–Schmidt 分解》。载于：《数学论述》41.1（2023），第 220–237 页。[Sos19] Vladimir Sosnilo。《权结构负 K 理论中的心定理》。载于：《数学文献》24（2019），第 2137–2158 页。[Spa25] Fraser Sparks。《各向同性动机的张量三角几何》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2511.05922（2025）。[Ste13] Greg Stevenson。《通过张量三角范畴的作用建立支撑理论》。载于：纯粹与应用数学杂志 681（2013），第 219–254 页。[Tan25] Fabio Tanania。《实各向同性动机谱》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2511.22560（2025）。[Vis11] Alexander Vishik。《二次型动机中的卓越联系》。载于：《高等师范学校科学年刊》，第 44 卷，第 1 期（2011），第 183–195 页。[Vis19] Alexander Vishik。《仿射二次曲面与动机范畴的皮卡群》。载于：《数学汇编》155.8（2019），第 1500–1520 页。[Vis22] Alexander Vishik。《各向同性动机》。载于：朱西厄数学研究所杂志 21.4（2022），第 1271–1330 页。[Vis24] Alexander Vishik。《Chow 群与 Morava K 理论的各向同性等价和数值等价》。载于：《数学新进展》237.2（2024），第 779–808 页。[Vis25] Alexander Vishik。《Voevodsky 动机与纯符号的 Balmer 谱》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2509.00584（2025）。[Vis97] Alexander Vishik。《二次曲面的整系数动机》。哈佛大学，1997 年。[Voe00] Vladimir Voevodsky。《域上的动机三角范畴》。载于：《循环、转移与动机同调理论》143（2000），第 188–238 页。

诺丁汉大学数学科学学院，诺丁汉，NG7 2RD，英国电子邮箱地址：
jeanpaul.schemeil@nottingham.ac.uk