arXiv:2603.26652v1 [math.MG] 27 Mar 2026

# 没有拟等距单纯形三角剖分的曲面

James Davies*

莱比锡大学，德国

**摘要**

我们构造了一个完备黎曼曲面 $\Sigma$，它不具有任何满足如下条件的三角剖分 $G \subset \Sigma$：包含映射 $G^{(1)} \hookrightarrow \Sigma$ 是拟等距，其中 $G^{(1)}$ 是 $G$的单纯形 1-骨架。我们的构造没有边界，塞尔长可以任意大；此外，不存在任何满足 $G^{(1)} \hookrightarrow \Sigma$ 是拟等距的嵌入图 $G \subset \Sigma$。这回答了 Georgakopoulos 提出的问题。

## 1 引言

众所周知，对于每个完备黎曼曲面 $\Sigma$，都存在一个局部有限度量图 $G \subset \Sigma$，其度量由 $\Sigma$诱导，并且包含映射 $G \hookrightarrow \Sigma$ 是一个拟等距 [1, 4, 5, 9, 17, 19]。事实上，Ntalampekos 和 Romney [17] 证明了，$G \subset \Sigma$ 甚至可以选取 $G \hookrightarrow \Sigma$ 使得$(1, \epsilon)$-拟等距对任意 $\epsilon > 0$ 均成立；而 Georgakopoulos 和 Vigolo [9] 最近进一步证明，$G \subset \Sigma$ 还可以取为 $\Sigma$的一个三角剖分。换言之，黎曼曲面的粗几何可以通过对该曲面进行三角剖分的度量图，以任意精度加以逼近。

这类结果或类似结果已有诸多应用。例如，Bonamy、Bousquet、Esperet、Groenland、Liu、Pirot 和 Scott [1] 利用这一结果证明，有界亏格的完备黎曼曲面的渐近维数至多为 2。Maillot [15] 在证明虚曲面群恰好是与完备单连通黎曼曲面拟等距的群时，使用了一个类似的结果。Ntalampekos 和 Romney [17] 在证明任意长度曲面都是具有受控几何的多面体曲面的 Gromov–Hausdorff 极限时，将长度曲面的一个相关版本作为证明中的一步。他们还给出了这一结果的其他应用，包括一个关于 Bonk-Kleiner定理 [2] 的新证明。该定理刻画了 Ahlfors 2-正则拟球面。

度量图的粗几何往往比单纯图（其中所有边的长度均为 1）复杂得多，也更难处理。例如，可以比较无小图（单纯）图 [1]和无小图度量图 [13] 的证明：它们的渐近维数至多为 2。因此，确定具有特定性质的度量图何时与具有类似性质的单纯图拟等距，是很有意义的。对于平面度量图 [6]，以及最近对于无小图度量图 [7]，此类定理已经得到证明。

*作者 获得了亚历山大·冯·洪堡基金会的资助，该资助属于亚历山大·冯·洪堡教授职位项目，由联邦教育与研究部资助设立，Daniel Král'担任该职位。

Georgakopoulos [11] 曾提出疑问：关于黎曼曲面到拟等距嵌入度量图的这些结果 [1, 4, 5, 9, 17, 19] 能否得到改进，使得存在某个嵌入图，甚至三角剖分 $G \subset \Sigma$，使得 $G^{(1)} \hookrightarrow \Sigma$ 是一个拟等距映射，其中 $G^{(1)}$ 是 $G$的单纯 1-骨架。最近，Georgakopoulos 和 Vigolo [9]证明了，具有一致网的完备黎曼曲面都存在这样的拟等距单纯形三角剖分，从而改进了 Maillot [15]的一些类似结果。针对 Georgakopoulos 和 Papasoglu [10], 提出的问题，作者最近证明了具有有界亏格的完备黎曼曲面都存在这样的单纯形三角剖分 [6]。Bowditch [3]还证明了，具有有界几何的完备光滑$n$维黎曼流形都存在拟等距单纯形三角剖分。本文对 Georgakopoulos 的 [11] 问题给出了否定回答。

**定理 1.** 存在一个完备黎曼曲面 $\Sigma$，它没有任何三角剖分 $G \subset \Sigma$，使得$G^{(1)} \hookrightarrow \Sigma$ 是一个拟等距。

我们构造的曲面没有边界，且塞尔长（即非可缩环路的最小长度）可以任意大。换言之，这些曲面可以是任意局部平面的。这一点或许令人意外，因为它与这样一个事实形成对照：完备黎曼平面确实存在拟等距的单纯形三角剖分 [6]。此外，我们的构造表明，不仅不存在这样的三角剖分，甚至不存在这样的嵌入图 $G \subset \Sigma$。因此，我们结果的最强版本如下。

**定理 2.** 对于每个 $K \geqslant 0$，都存在一个没有边界的完备黎曼曲面 $\Sigma$，其塞尔长至少为 $K$，且不存在嵌入图 $G \subset \Sigma$，使得 $G^{(1)} \hookrightarrow \Sigma$ 是一个拟等距。

由于完备黎曼曲面确实可以通过度量图进行拟等距三角剖分 [9]（或者甚至只需存在拟等距嵌入图 [1, 4, 5, 9, 17, 19]），这些结果也很好地展示了度量图的粗结构往往比单纯图的粗结构更为复杂。

为了证明定理 2，我们实际上将证明一个更强的版本：对于任意固定的 $M$， $A$ 都存在有界亏格的紧黎曼曲面，使其不存在这样的（$M$， $A$）-拟等距（见定理 4）。第 3节将讨论定理 4 中所构造曲面的亏格界，并将其与 [6] 关于有界亏格完备黎曼曲面确实存在拟等距单纯形三角剖分的结果进行比较。下一节我们将证明定理 2。

# 2 证明

在证明定理 2 之前，我们先介绍一些必要的预备知识。

对于 $M$， $A \geqslant 0$ 满足 $M \geqslant 1$ 时，从一个度量空间 $X$ 到另一个度量空间 $Y$ 的映射 $f$: $X \to Y$ 若满足以下条件，则称为 ($M$， $A$)-拟等距

1. $M^{-1} d_X(u, v) - A \leqslant d_Y(f(u), f(v)) \leqslant M d_X(u, v) + A$ for every $u, v \in X$, and
2. 对于每个 $y \in Y$，都存在某个 $x \in X$ 满足 $d_Y(y,\ f(x)) \leqslant A$。

我们称 $X$ 与 $Y$ 拟等距（$M, A$），如果存在一个从$X$ 到 $Y$的（$M, A$）-拟等距映射。拟等距映射 就是某个 $M, A$ 的（$M, A$）-拟等距映射，其中 $M, A \geqslant 0$ 满足 $M \geqslant 1$; 如果度量空间 $X$ 和 $Y$ 之间存在拟等距映射，我们就称它们拟等距。

一个 黎曼曲面 是一个曲面 $\Sigma$，并配备一个黎曼度量 $d_\Sigma$，该度量由每一点的切空间上的标量积定义。若一个黎曼曲面 $\Sigma$ 是 完备的，则度量空间 $(\Sigma, d_\Sigma)$ 是完备的。注意，紧致黎曼曲面也是完备的。黎曼曲面的塞尔长 等于其所有不可缩闭环长度的下确界。关于黎曼曲面的更多内容，参见 [20]。

在我们的构造中，我们将先构造一个曲面，然后在该曲面上选择一个合适的（黎曼）度量。我们概述一种标准方法：从一个光滑曲面 $\Sigma$ 及其上的局部有限三角剖分出发，并赋予一个度量图 $H$，使得每个三角面的最长边都短于另外两边的长度之和，从而构造出一个黎曼曲面。通过这种方法，我们将在定理 2 的证明中说明，所选度量还可以进一步选为黎曼度量。这类光滑化论证是标准方法，例如见 [18]。

对于这样的局部有限三角剖分 $H \subset \Sigma$，可以在每个三角面上赋予标准欧几里得度量，即各边长度等于该三角面的对应边长。这就在 $\Sigma$上给出了一个完备的分片欧几里得度量 $d_E$，且只有在 $H$的顶点处才是奇异的。接着，对 $H$的每个顶点 $v$，我们可以选取某个 $0 < \epsilon_v < 1$，使得以 $v$ 为中心、半径为 $\epsilon_v$ 的闭圆盘 $E_v$ 包含在与 $v$ 相邻的欧几里得三角形内，并且 $\epsilon_v$ 小于与 $v$相邻的任意一条边长度的一半。这保证这些圆盘两两不相交。然后，可以将每个这样的圆盘替换为一个欧几里得圆盘 $D_v$，其边界长度与 $E_v$ 相等，并沿着 $E_v$ 的边界等距粘合。最后，对这些边界逐一进行光滑化，便可得到一个拟等距黎曼度量 $d_\Sigma$。对于任意给定的 $\epsilon > 0$，只要将每个 $\epsilon_v$ 选得足够小，就可以使其成为一个 (1，$\epsilon$)-拟等距。

我们需要引入一些图论记号。我们用 $V(G)$ 表示图 $G$ 的顶点集。对于图 $G$ 的顶点 $u$，我们用 $N_G(u)$ 表示 $u$ 在 $G$ 中的邻域（即与 $u$ 相邻的 $G$ 的顶点）。对于图 $G$ 的顶点集 $A$ 和正实数 $t$，我们用 $N_G^t[A]$ 表示在 $G$ 中与 $A$ 的距离至多为 $t$ 的顶点。如果 $A = \{u\}$，则我们直接用 $N_G^t[u]$。我们用 $V(G)$ 表示图 $G$ 的顶点集。

为了构造定理 2 中的黎曼曲面，我们需要一些具有良好性质的有限图，它们能够自然地嵌入我们构造的曲面中。图的围长等于其最短圈的长度。如果图 $k$-正则，则图 $G$ 的每个顶点的度均为 $k$。我们需要围长较大的有限 4-正则图，这类图由厄尔多斯和萨克斯通过概率方法构造 [8]。有关显式构造，请参见 [14, 16]。

**定理 3**（厄尔多斯、萨克斯 [8]）。 存在围长任意大的有限 *4*-正则图。

现在，我们可以证明一个定理 2 的版本，其中所考虑的拟等距具有固定常数。在这种情况下，我们实际上构造紧致有界亏格曲面，详见第3节。

**定理 4**。 对于每组三个非负实数 $K$、$M$、$A$，满足 $M \geqslant 1$，存在一个无边界、亏格有界的紧致黎曼曲面 $\Sigma$，其塞尔长至少为 $K$，并且不存在嵌入图 $G \subset \Sigma$ 使得 $G^{(1)} \hookrightarrow \Sigma$ 是一个（$M$、$A$）-拟等距。

证明。 固定 $K \geqslant M \geqslant A \geqslant 1$，并设 $\epsilon = 1/(33M^2)$，以及 $g = 3400M^5K$。

令 $F$ 为定理 3 所给的某个围长至少为 $g$ 的有限连通 4-正则（单纯）图。由于 $F$ 是 4-正则图，因此它是欧拉图，故可表示为若干条边不相交圈 $C_1$、.....、$C_k$的并。注意， $F$ 的每个顶点 $v$ 恰好属于其中两个圈，记为 $C_v$ 和 $C'_v$。现在，将 $F$ 作 2-胞腔嵌入到某个光滑曲面 $\Sigma$中，使得对于 $F$的每个顶点 $v$，圈 $C_v$ 和 $C'_v$ 在嵌入中于 $v$ 处交叉（注意

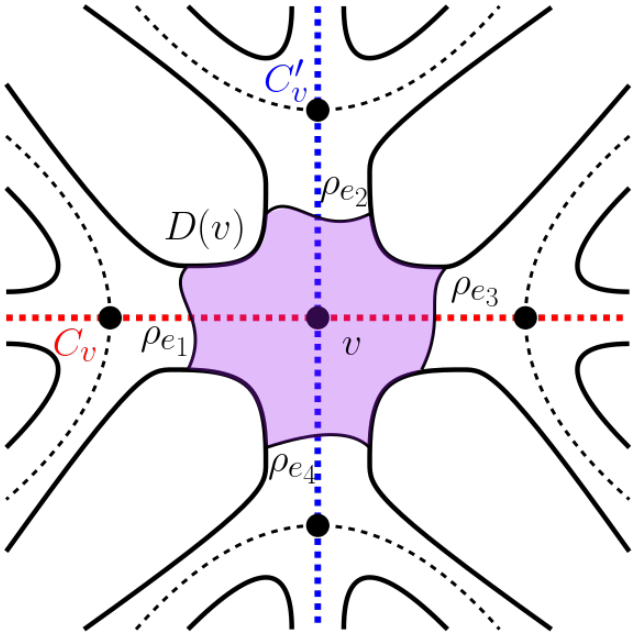


图1：嵌入图 $F$ 由虚线边组成， $D$ 的边界是围绕 $F$的粗黑边。对于中心顶点 $v$，我们用红色和蓝色展示欧拉分解中的两个环 $C_v$ 和 $C'_v$，它们在 $v$ 处相交。图中还展示了曲线$\rho_{e_1}$，$\rho_{e_2}$，$\rho_{e_3}$，$\rho_{e_4}$，它们与各自对应的、关联于 $v$的边相交。它们与 $D$边界的一部分共同围成 $D$的子集 $D(v)$，图中以紫色标出。

可以先为每个顶点固定这样一种关联边的顺时针排序，然后添加二维胞腔以形成各个面，从而找到这样的曲面和嵌入）。注意，由于 $F$ 是一个嵌入到 $\Sigma$中的有限图， $\Sigma$ 具有有界亏格且是紧致的。我们还指出， $\Sigma$ 也是可定向的。我们仍需在 $\Sigma$上选择一个黎曼度量 $d$。

现在，我们在嵌入中取 $F$ 周围的一个小邻域 $D \subset \Sigma$，使得嵌入中 $F$ 的每个面都包含 $D$ 的一个边界分支。对于 $F$的每条边$e$，我们在 $\Sigma$ 中绘制一条曲线 $\rho_e$，使其连接 $D$ 上靠近 $e$ 中点的边界点，并与 $e$ 相交，如图1所示。对于 $F$的每个顶点 $v$，令 $D(v)$为 $D$ 中包含 $v$的子集，其边界由 $D$ 边界的一个子集和$\rho_{e_1} \cup \rho_{e_2} \cup \rho_{e_3} \cup \rho_{e_4}$围成，其中 $e_1$， $e_2$， $e_3$， $e_4$是与 $F$ 关联的 $F$ 的四条边（示意见图1）。更一般地，对于$X \subseteq V(F)$，令 $D(X) = \bigcup_{x \in X} D(x)$。

选择一个黎曼度量 $d$on $\Sigma$，使得

- 对于 $F$ 的每条边 $uv$，其在嵌入中的端点 $u$ 和 $v$ 之间的距离介于 $\epsilon/2$ 和 $\epsilon$ 之间，且位于 $\Sigma$ 中，
- $F$（在其嵌入到 $\Sigma$ 中时）与 $D$ 的边界之间的距离大于 $K$ 和 $12M^3$，并且
- 对于每个 $v \in V$（$F$）和 $r \geqslant 0$， $\Sigma$ 中距 $v$ 不超过 $r$ 的 $D$ 中的点都包含在 $D$（$N_F^{1+r/\epsilon}[v]$）中。

这样的黎曼度量 $d$ on $\Sigma$ 可以通过以下方式选取：先取一个合适的三角剖分$\Sigma$，赋予度量 $H$，使得 $F \subset H \subset \Sigma$（其中， $F$ 的边长在 $H$中略小于$\epsilon$），再按照前文所述对所得的分片欧几里得度量进行光滑化。显然，在此黎曼度量的选取下， $\Sigma$的塞尔长至少为 $K$，因为 $F$ 是 $\Sigma$的一个 2-胞腔嵌入，且 $F$的围长至少为 $3400M^5K \geqslant 100M^3K/\epsilon$。

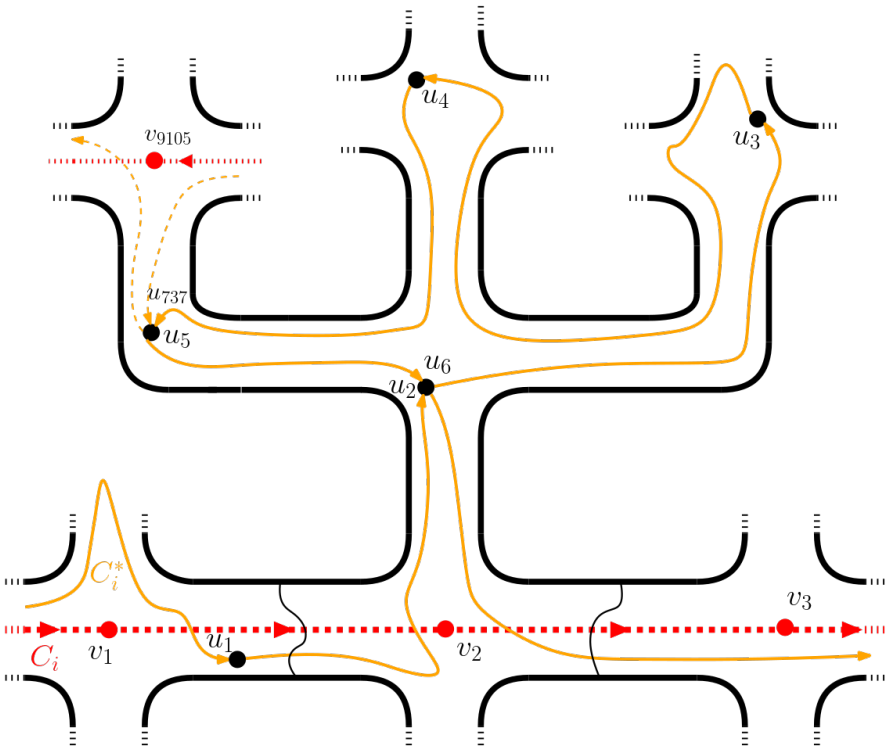


图2：展示了 $F$的欧拉分解中，给定圈 $C_i$ （红色）后， $G^{(1)}$ 的闭合游走 $C_i^*$（橙色）以及 $p_{C_i}$ 的（两个部分）。我们有 $p_{C_i}(u_1) = v_1$， $p_{C_i}(u_2) = p_{C_i}(u_3) = p_{C_i}(u_4) = p_{C_i}(u_5) = p_{C_i}(u_6) = v_2$，以及 $p_{C_i}(u_{737}) = v_{9105}$。

现在反设存在一个嵌入图 $G \subset \Sigma$，使得 $G^{(1)} \hookrightarrow \Sigma$ 是一个 $(M, A)$-拟等距。因此，$\Sigma$ 中的每一点到嵌入中的某个点的距离至多为$A$；每条边上的点到其在 $\Sigma$中的两个端点的距离都至多为$M + A \leqslant 2M$；并且对于任意顶点 $x, y \in V(G^{(1)}) \subset \Sigma$，有

$$\frac{1}{M} d(x, y) - A \leqslant d_{G^{(1)}}(x, y) \leqslant M d(x, y) + A.$$

此外请注意， $\Sigma$ 中的每个点到嵌入中$G^{(1)}$ 的某个顶点的距离至多为 $2M + A \leqslant 3M$。

考虑欧拉分解 $C_1, \ldots\ldots, C_k$ 中的一个圈 $C_i$。现在我们的目标是找到一个闭合游走 $C_i^*$（它不必是圈），使其在 $\Sigma$ 中紧密跟随 $C_i$，且长度远小于 $C_i$。读者可以参考图2。依次在 $C_i$ 上选择顶点 $c_i, 1, \ldots\ldots, c_{i, \ell_i}$，使得对于每个 $1 \leqslant j \leqslant \ell_i$（取 $c_{i, \ell_i+1} = c_i, 1$），$\frac{1}{2} \leqslant d(c_{i, j}, c_{i, j+1}) \leqslant 1$。注意到这是可以做到的，因为 $C_i$ 的长度至少为 $g = 3400M^5K \geqslant 2 + 1/\epsilon$。由于 $C_i$ 的边的端点在 $\Sigma$ 中的距离至多为 $\epsilon$，我们进一步有 $\ell_i \leqslant 2|C_i|\epsilon$。现在，对于每个 $1 \leqslant j \leqslant \ell_i$，令 $c_{i,j}^*$ 为 $G^{(1)}$ 中的一个顶点，使其与 $c_{i, j}$ 在 $\Sigma$ 中的距离至多为 $M + 2A \leqslant 3M$。对于每个 $1 \leqslant j \leqslant \ell_i$，我们有 $d(c_i^*, j, c_i^*, j+1) \leqslant d(c_i^*, j, c_{i, j}) + d(c_{i, j}, c_{i, j+1}) + d(c_{i, j+1}, c_i^*, j+1) \leqslant 3M + 1 + 3M \leqslant 7M$。因此，$G^{(1)}$ 包含一条路径 $P_{i, j}$，连接 $c_i^*, j$ 与 $c_i^*, j+1$，其长度至多为 $7M^2 + A \leqslant 8M^2$。$P_{i, j}$ 在 $\Sigma$ 中的每个点，与 $c_i^*, j$ 在 $\Sigma$ 中的距离至多为 $8M^3 + A \leqslant 9M^3$，因此与 $c_{i, j}$ 在 $\Sigma$ 中的距离至多为 $9M^3 + 3M \leqslant 12M^3$。注意，这进一步意味着每个这样的点都包含于 $D(N_F^{400M^5}[c_{i,j}])$ 中（特别地，包含于 $D$ 中），因为 $1 + 12M^3/\epsilon \leqslant 1 + 396M^5 \leqslant 400M^5$。令 $C_i^*$ 为在 $G^{(1)}$ 中通过依次连接由路径 $P_i, 1, \ldots\ldots, P_{i, \ell_i}$ 给出的游走而得到的闭合游走。那么， $C_i^*$ 包含于 $D$ 中，并且此外，闭合游走 $C_i^*$ 的长度至多为 $8M^2(2|V(C_i)|\epsilon) = 16M^2|V(C_i)|\epsilon < \frac{1}{2}|V(C_i)|$，因为 $\epsilon = 1/(33M^2)$。

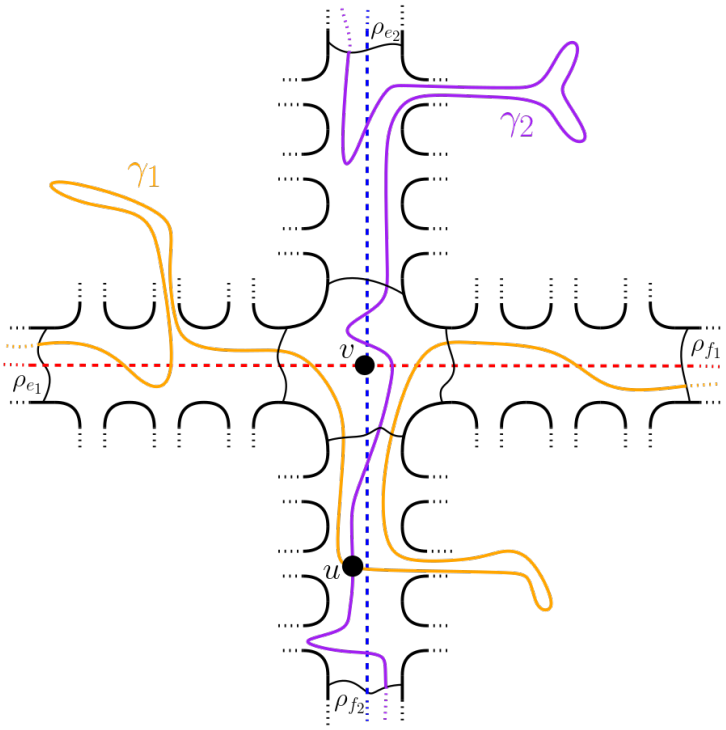


图3：$\gamma_1$（橙色）和 $\gamma_2$（紫色）包含在 $D^*$中。它们相交于一点 $z$，该点与闭合游走 $C_1^*$ 的一个顶点 $u$ 重合，其中 $p_{C_1}(u) = v$。

我们进一步考察 $C_i$ 和 $C_i^*$。闭合游走 $C_i^*$ 上的每个顶点 $u$ 都属于某个由 $P_i$，$j$ 给出的子游走，并且不同于该子游走的终点。对于闭合游走 $C_i^*$ 上的每个这样的 $u$，令 $c_i$，$u$ 为 $C_i$ 的顶点 $c_i$，$j$，使得 $c_i^*$，$j$ 是 $P_i$，$j$ 的对应起点。由于 $u$ 包含于 $D(N_F^{400M^5}[c_{i,u}])$ 中，因此对于某个 $v$，$u$ 包含于 $D(N_{F-N_{C_i}}^{800M^5}(v)[v])$ 中，其中 $v$ 与 $c_i$，$u$ 在 $C_i$ 中的距离至多为 $840M^5$。这样的顶点 $v$ 是唯一的，因为由 $F$ 诱导且顶点集为 $N_F^{1640M^5}[c_{i,u}]$ 的子图是树；这是由于 $F$ 的围长至少为 $3400M^5$。（我们指出，尽管这里的 $800M^5$ 和 $840M^5$ 显然可以改进为 $400M^5$，但正是这种唯一性使我们将条件放宽为 $800M^5$ 和 $840M^5$。）对于闭合游走 $C_i^*$ 上的每个这样的顶点 $u$，我们按照上述方式定义 $p_{C_i}(u) = v$，其中 $C_i^*$ 属于 $G^{(1)}$（注意，闭合游走可能会重复经过顶点，且当 $u'$ 在闭合游走中位于 $u$ 之后时可能出现 $u = u'$；不过，略微滥用记号，$p_{C_i}(u)$ 和 $p_{C_i}(u')$ 仍然可以不同）。

函数 $p_{C_i}$的示例见图2。直观地说，可以将$p_{C_i}$ 视为一个函数，它把闭合游走 $C_i^*$ 上的顶点映射到 $\Sigma$ 中的 $C_i$的最近顶点，而该顶点也靠近 $C_i$ 中闭合游走$C_i^*$这一段应当沿行的部分（这里必须小心，因为 $C_i$ 上可能有距离给定闭合游走$C_i^*$顶点更近的顶点；按 $\Sigma$ 衡量，这些顶点可能比 $C_i$ 中本应沿行的那一段上的顶点更近）。

对于每个 $C_i$，闭合游走 $C_i^*$ 的长度严格小于 $\frac{1}{2}|V(C)|$，因此由鸽巢原理可知，存在 $F$ 上的某个顶点 $v$，使得对于欧拉分解中包含 $v$ 的两个圈 $C_i$，以及闭合游走 $C_i^*$ 上的每个 $u$，都有 $p_{C_i}(u) \neq v$。不失一般性，我们可以假设欧拉分解中包含 $v$ 的两个圈为 $C_1$ 和 $C_2$。为了得到所需的矛盾，我们将证明，由于 $C_1^*$ 和 $C_2^*$ 在 $\Sigma$ 中只能通过共享顶点或边相交，因此闭合游走 $C_i^*$ 上必定存在某个顶点 $u$，对于某个 $i \in \{1,2\}$，有 $p_{C_i}(u) = v$。顶点 $u$ 将同时属于 $C_1^*$ 和 $C_2^*$（见图3）。

对于每个 $1 \leqslant j \leqslant \ell_1$，由于在 $\Sigma$ 中，沿 $C_1$ 的 $c_{1.j}$ 与 $c_{1,j+1}$ 之间的距离至多为 1，因此在图 $C_1$（以及 $G^{(1)}$）中，$c_{1.j}$ 与 $c_{1,j+1}$ 之间的距离至多为 $1/\epsilon = 33M^2$。因此，我们可以选择顶点 $c_{1,s_1}, c_{1,t_1}$，使其到 $v$ 在 $C_1$ 中的距离介于 $400M^5$+(400$M^5$+1) =800$M^5 + 1$ 和 $800M^5 + 1 + 33M^2 \leqslant 840M^5$ 之间，并且 $C_1$ 中 $c_{1,s_1}$ 与 $c_{1,t_1}$ 之间的距离至少为 $1600M^5$。由于 $F$ 的围长至少为 $3400M^5$，不失一般性，我们可以假设 $s_1 = 1$ 和 $t_1 \leqslant 1700M^5$。令 $Q_1$ 为 $C_1$ 中连接 $c_{1,1}$ 与 $c_{1,t_1}$ 且包含 $v$ 的子路径。令 $P_1^*$ 为 $C_1^*$ 的子游走，它由依次连接路径 $P_{1,1}, \ldots, P_{1,t_1-1}$ 所给出的游走构成。因此，$P_1^*$ 是 $G^{(1)}$ 中连接 $c^*_{1,1}$ 与 $c^*_{1,t_1}$ 的游走，并且也包含于 $D(N_F^{400M^5}[V(Q_1)])$ 中。令 $e_1$ 为 $Q_1$ 中连接 $v$ 与 $c_{1,1}$ 且在 $C_1$ 中距 $v$ 为 $\lfloor 400M^5 \rfloor$ 的边；类似地，令 $f_1$ 为 $Q_1$ 中连接 $v$ 与 $c_{1,t_1}$ 且在 $C_1$ 中距 $v$ 为 $\lfloor 400M^5 \rfloor$ 的边。令 $Q_1'$ 为 $Q_1$ 中连接 $e_1$ 与 $f_1$ 的子路径。由于 $c^*_{1,1}$ 包含于 $D(N_F^{400M^5}[c_{1,1}])$ 中，且 $c^*_{1,t_1}$ 包含于 $D(N_F^{400M^5}[c_{1,t_1}])$ 中，因此 $P_1^*$ 在 $\Sigma$ 中的嵌入包含一条曲线 $\gamma_1$，该曲线包含于 $D(N_{F-\{e_1,f_1\}}^{400M^5}[Q_1'])$ 中，起于 $\rho_{e_1}$（它是一条包含于 $D(N_{F-\{e_1,f_1\}}^{400M^5}[Q_1'])$ 边界中的曲线），止于 $\rho_{f_1}$（它同样是一条包含于 $D(N_{F-\{e_1,f_1\}}^{400M^5}[Q_1'])$ 边界中的曲线）。对于 $C_2$，同理可找到一条曲线 $\gamma_2$，它包含于 $D(N_{F-\{e_2,f_2\}}^{400M^5}[Q_2'])$ 中，起于 $\rho_{e_2}$ 并止于 $\rho_{f_2}$。$\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 的示意见图3。

设 $D^* = D(N_{F-\{e_1,f_1,e_2,f_2\}}^{800M^5}[v])$。那么，由于 $F$的围长大于 $1600M^5 + 1$，$D^*$同胚于一个圆盘；此外，$\rho_{e_1}$、$\rho_{f_1}$、$\rho_{e_2}$、$\rho_{f_2}$ 是包含在 $D^*$ 边界中的互不相交的曲线（按此顺序出现），并且对于 $i \in \{1, 2\}$，$\gamma_i$ 是包含在 $D^*$ 中、位于 $\rho_{e_i}$ 和 $\rho_{f_i}$之间的一条曲线。根据若尔当曲线定理，$\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 在某点 $z$相交，该点是游走 $P_1^*$和 $P_2^*$上的一个公共顶点。不失一般性，由于 $D^* \subseteq D(N_{F-N_{C_1(v)}}^{800M^5}[v]) \cup D(N_{F-N_{C_1(v)}}^{800M^5}[v])$，我们可以假设 $z \in D(N_{F-N_{C_1(v)}}^{800M^5}[v])$。设 $u$是 $C_1^*$的子游走 $P_1^*$上的一个顶点，它在 $\Sigma$ 中的嵌入与图3中的点 $z$ 重合。那么 $c_{1,u} \in V(Q_1)$，因此在 $C_1$ 中，$c_{1,u}$ 和 $v$ 之间的距离至多为 $840M^5$。因此，$p_{C_1}(u) = v$，矛盾。

□

定理 2 现在可由定理 4 推出：对每一对正整数 $M, A$，取一个如定理 4 中所述、塞尔长至少为 $K$ 的黎曼曲面 $\Sigma_{M,A}$，并用足够粗的管道将它们连接起来（管道可像定理 2 的证明中那样，连接在远离 $D$ 的某处，从而所得完备黎曼曲面的这一部分仍不存在这样的 $(M, A)$-拟等距），且使塞尔长仍至少为 $K$。与之前一样，可以通过对所得曲面取一个由局部有限度量图 $H$构成的合适三角剖分，并调整所得分片欧几里得度量，使其成为一个 $(1, \epsilon)$-拟等距的完备黎曼度量。

# 3 结论

在 [6] 中，我们证明了亏格至多为 $g$ 的完备黎曼曲面 $\Sigma$ 存在三角剖分，使得 $G^{(1)} \hookrightarrow \Sigma$ 是一个 $(10_6, O(g))$-拟等距。定理 4 表明，对 $g$ 的依赖是必要的。

可以对定理 4 中构造的黎曼曲面的亏格给出显式界。为简便起见，取 $K = M = A \geqslant 1$；在定理 4 的证明中，我们从一个围长至少为 $3400M^6$ 的 4-正则图 $F$ 出发，构造一个曲面，使得 $F$ 具有一个 2-胞腔嵌入。根据欧拉公式，很容易证明所得曲面的亏格至多为 $|V(F)|$。由于存在围长至少为 $g$ 且顶点数至多为 $3^g$ 的 4-正则图 [12],，因此该曲面的亏格可以取为至多 $3^{3400M^6}$。

更加仔细地论证可以表明，对于固定的 $K$ $M$，所得黎曼曲面的亏格至多为 $3^{O(A^2)}$。因此，存在亏格至多为$g$的完备黎曼曲面 $\Sigma$，它们不允许进行三角剖分 $G \subset \Sigma$，使得 $G^{(1)} \hookrightarrow \Sigma$ 是一个（$10^6$,$\Omega(\sqrt{\log\ g})$-拟等距。对于这类拟等距所涉及的常数，能否根据亏格 $g$ 得到更好的上下界，将是一个有趣的问题。至于是否存在这类 $(1, f(g))$-拟等距的单纯形三角剖分，目前仍是开放问题。

## 致谢

我们感谢 Matija Bucić、Agelos Georgakopoulos 和 Federico Vigolo 提供有益的讨论和意见。

## 参考文献

[1] Marthe Bonamy、Nicolas Bousquet、Louis Esperet、Carla Groenland、Chun-Hung Liu、François Pirot 和 Alexander Scott，排除子图封闭族的渐近维数与曲面的 *Assouad–Nagata* 维数，《欧洲数学会杂志》**26**（2023），第 10 期，3739–3791。1, 2[2] Mario Bonk 和 Bruce Kleiner，二维度量球面的拟对称参数化，《数学新进展》**150**（2002），第 1 期，127–183。1[3] Brian H Bowditch，黎曼流形的双利普希茨三角剖分，（2020）。2[4] Dmitri Burago、Yuri Burago 和 Sergei Ivanov，度量几何教程，第 33 卷，美国数学会，2001。1, 2[5] Paul Creutz 和 Matthew Romney，度量曲面的三角剖分，《伦敦数学会会刊》**125**（2022），第 6 期，1426–1451。1, 2[6] James Davies，弦图与平面图拟等距，arXiv 预印本 arXiv:2510.19602（2025）。1, 2, 7[7] James Davies、Marc Distel 和 Robert Hickingbotham，无小子图度量的粗结构，（准备中）。1[8] Paul Erdős 和 Horst Sachs，具有给定围长和最少顶点数的正则图，《哈勒-维滕贝格马丁·路德大学数学与自然科学系列学报》**12**（1963），第 251–257 期，22。3[9] Agelos Georgakopoulos 和 Vigolo Federico，曲面的拟等距三角剖分，arXiv 预印本 arXiv:2603.21189（2026）。1, 2[10] Agelos Georgakopoulos 和 Panos Papasoglu，图小子图与度量空间，arXiv 预印本 arXiv:2305.07456（2023）。2[11] Agelos（https://mathoverflow.net/users/69681/agelos），图在非紧黎曼曲面中的拟等距嵌入，MathOverflow，网址：https://mathoverflow.net/q/394166（版本：2021-05-31）。2[12] Felix Lazebnik、Vasiliy A Ustimenko 和 Andrew J Woldar，围笼阶数的上界，《电子组合学期刊》（1997），R13–R13。7[13] Chun-Hung Liu，排除子图封闭度量的 *Assouad–Nagata* 维数，《伦敦数学会会刊》**130**（2025），第 3 期，e70032。1

[14] Alexander Lubotzky、Ralph Phillips 和 Peter Sarnak，*Ramanujan* 图，《Combinatorica》**8**（1988），第 3 期，261–277。3[15] Sylvain Maillot，群、图与曲面的拟等距，《Commentarii Mathematici Helvetici》**76**（2001），第 1 期，29–60。1, 2[16] Grigorii A Margulis，无短圈图与低密度码的显式构造，《Combinatorica》**2**（1982），第 1 期，71–78。3[17] Dimitrios Ntalampekos 和 Matthew Romney，度量曲面的多面体逼近及其在一致化中的应用，《Duke Mathematical Journal》**172**（2023），第 9 期，1673–1734。1, 2[18] Yu G Reshetnyak，有界曲率流形上的等温坐标 *I*，《Reshetnyak 的次调和度量理论》，Springer，2023，第 167–197 页。3[19] Emil Saucan，内蕴微分几何与拟亚纯映射的存在性，arXiv 预印本 arXiv:0901.0125（2008）。1, 2[20] Michael Spivak，微分几何全面导论：出版或消亡，Inc.，伯克利**2**（1979）。3