arXiv:2603.26715v2 [math.AP] 31 Mar 2026

由二维无粘性Boussinesq方程导出的一个$(1+2)$D系统（E1）的闭式有限时间爆破解及条件扰动稳定性框架

史耀明

Abstract. 在平面楔形区域的极坐标变量下，我们研究一个由奇偶性假设导出的二维系统（E1），它源自二维无粘性Boussinesq方程。该系统保留了标量构件之间的拉伸型相互作用，同时又足够明确，既能支持闭式爆破解析型，也能进行加权余项分析。

本文有三项主要成果。首先，我们确定了特殊的脊线射线，在这些射线上，（E1）可约化为一个无对流的二维 Constantin–Lax–Majda 型反应系统，并记录了由此得到的显式有限时间爆破解机制。其次，将这些脊线剖面通过各向异性种子嵌入整个楔形区域后，我们推导出给定背景周围的精确余项方程，并证明了余项系统的奇异加权线性估计。第三，我们按照 Elgindi–Jeong 的思路提出一种条件非线性控制原理：若背景在 $[0,T)$ 上存在，并满足加权能量方法所要求的系数界，且余项在检测范数下始终受控于背景奇异性，那么完整解便会继承相同的有限时间爆破解。

本次修订中无条件成立的是：从 Boussinesq 方程出发的精确约化、显式的脊线爆破解机制，以及加权余项框架。仍属条件性的，是直至爆破时间的完整楔形区域背景构造，以及在无损失的情况下完成自举所需的刚性性质。从这个意义上说，本文将背景存在性问题明确为实现爆破解情景完整非线性稳定性定理所剩的主要步骤。

2020年数学主题分类。 主要分类：35B44、35Q86、76B03；次要分类：35B35、35Q35。

关键词。 二维无粘性Boussinesq方程；Constantin–Lax–Majda 型模型；显式爆破解；脊线约化；加权能量；线性估计；条件性非线性控制；加权Sobolev能量。

1. Introduction

光滑解能否在有限时间内形成奇点，是非线性偏微分方程和流体力学中的核心问题。本文研究一个从无粘二维 Boussinesq 方程严格推导出的（$1+2$）维闭合子系统（E1）：该系统保留了两个标量场之间类似拉伸的相互作用，同时充分抑制几何和非局部复杂性，从而可以进行闭式分析。

Date：2026年3月18日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 35B44、35B40、35Q86、76B03、76D05。*Key words and phrases.* 2D 无黏性 Boussinesq、Constantin–Lax–Majda 型模型、有限时间爆破解、显式解、条件性扰动框架、脊线约化、加权Sobolev能量、散度形式闭合。

我们的目标有两个：构造显式的有限时间爆破背景，并围绕这些背景建立一种扰动稳定性理论，使其在线性层面具有坚实的数学基础，同时明确指出尚存的非线性障碍。

我们将 (2.2) 中 Hou-Li 型的新变量 $\{u, v, g\}$ 称为**涡量的构成要素**，因为它们的单位与 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$的单位相同。此外，二次涡拉伸项也大幅简化为：$(uv,\quad v^2 - u^2,\quad -g^2)$。

相关工作与背景。正如 Elgindi–Jeong [17] 和 Elgindi–Pasqualotto [19], 所强调的，无黏二维 Boussinesq 方程和三维欧拉方程组中的奇性形成有着悠久的研究历史。此处我们仅回顾少数具有代表性的文献，重点介绍与下文发展的闭式机制和稳定性框架最为密切相关的工作。对于无黏二维 Boussinesq 方程，经典的局部理论和条件性失效判据可追溯至 Cannon–DiBenedetto [12],、Chae–Nam [3] （另见 Chae–Kim–Nam [7]）以及 Taniuchi [29]; 另见 Wu 的讲义 [30] ，以及 Beale–Kato–Majda [1]和 Constantin [10, 11]对欧拉方程的研究视角。在建模方面，显式且易于阐释的机制包括 Chae–Constantin–Wu [2] 和 CLM/De Gregorio 系列 [9, 16], ，以及针对 Boussinesq 型动力学的一维约化，例如 Choi–Kiselev–Yao [8]。关于偏微分方程背景下严格的奇点构造与扰动稳定性情形，参见 Elgindi–Jeong [17, 18], 、Chen–Hou [4, 5], 以及 Drivas–Elgindi [15]的综述。

主要成果。

(0) 我们在奇偶性假设下，从无黏二维 Boussinesq 方程中精确推导出闭合子系统（E1），并确定变量 $\{u, v, g\}$ 是方便的涡量构件。(1) 我们找出使（E1）约化为无对流（$1 + 1$）维 Constantin–Lax–Majda 型反应系统的脊线，并记录由此得到的显式有限时间爆破剖面。(2) 我们围绕给定背景，在更新后的（x、ξ）变量中推导出精确余项方程，并将所有纯背景项保留在背景系统中。(3) 我们证明加权奇异线性估计，并提出一个 Elgindi 型的条件性非线性余项定理：一旦背景具备所需的系数界，爆破便会从背景传递到完整解。(4) 我们指出该计划中尚待解决的步骤，即构造直至爆破时间的全楔形背景，以及闭合非线性自举所需的相容性结构。

结构安排。 第2节从无粘二维 Boussinesq 方程推导出闭合子系统 (2.5)，并确定脊线，在这些射线上，(E1) 化简为一个 $(1 + 1)$D CLM 型反应系统。第 2.6 节用更新后的 $(x,\ \xi)$ 变量重写背景与余项系统，并列出精确余项方程。第 4 节汇总显式背景公式以及相应的加权逐点估计和能量估计。第 5 节证明奇异加权线性估计，建立条件性非线性余项机制，并说明一旦验证其余背景假设，爆破解如何从背景传递到完整解。

2. The derivation of system (E1) from 2D inviscid Boussinesq equations

2.1.从二维无粘性Boussinesq方程推导系统 (E1)。 本节将二维无粘性Boussinesq方程的速度-压力形式（例如，参见 Wu [30], Elgindi–Jeong [18], 以及 Kiselev– Pu–Yao [24]）改写为我们称作涡量构件的新变量。用这些变量表示后，拉伸和输运结构会更加清晰。

在速度-压力形式下，速度 $\boldsymbol{u} = u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3$、压力 P和密度 ϑ（假设重力沿 $-\boldsymbol{e}_2$ 方向）的二维无粘性Boussinesq方程在 $\mathbb{R}^2$ 中表示为

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}\vartheta = 0, \quad t \in [0,T), (x_2,x_3) \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}u_2 = -\partial_2 P + \vartheta, \\ \frac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}u_3 = -\partial_3 P, \\ \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0, \\ \frac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t} = \partial_t + u_2\partial_2 + u_3\partial_3, \end{cases} \tag{2.1}$$

假设 u_2 关于 x_2 是奇函数，关于 x_3是偶函数； u_3 关于 x_2 是偶函数，关于x_3是奇函数； p 关于 $(x_2,\ x_3)$ 是偶函数；并且 ϑ 关于 x_2 是奇函数，关于 x_3是偶函数。定义 Hou–Li [23] 型变量

$$\{v, g, u^2, p\} := \left\{ -\frac{u_2}{x_2}, \frac{u_3}{x_3}, \frac{\vartheta}{x_2}, P \right\} \tag{2.2}$$

于是，(2.1) 可转化为以下系统（为方便记号，令 $(\rho,\ z) = (x_2,\ x_3)$）：

约化的验证。 在上述奇偶性假设下，整个平面上的系统 (2.1) 可通过奇/偶反射延拓到 $\mathbb{R}^2$ 。特别地，沿对称轴 $x_2 = 0$ 和 $x_3 = 0$ ，商

$$v := -\frac{u_2}{x_2}, \qquad g := \frac{u_3}{x_3}, \qquad u^2 := \frac{\vartheta}{x_2} \tag{2.3}$$

进行光滑延拓（分子具有相应的奇对称性），于是我们可以写出

$$u_2 = -\rho\, v, \qquad u_3 = z\, g, \qquad \vartheta = \rho\, u^2.$$

按照这一约定，物质导数变为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \partial_t + u_2\partial_\rho + u_3\partial_z = \partial_t - \rho v\,\partial_\rho + z g\,\partial_z, \tag{2.4}$$

这与式 (2.5) 的最后一行一致。现在：

- From $\frac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}\vartheta = 0$ and $\vartheta = \rho u^2$,

$$0 = \tfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho u^2) = \left(\tfrac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\right)u^2 + \rho\tfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(u^2) = u_2 u^2 + \rho\tfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(u^2) = -\rho v\, u^2 + \rho\tfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(u^2),$$

hence $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(u^2) = v u^2$, equivalently $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}u = \frac{1}{2}uv$.

- From $\frac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}u_2 = -\partial_\rho P + \vartheta$ and $u_2 = -\rho v$,
  $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}u_2 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(-\rho v) = -(\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t})v - \rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = -u_2 v - \rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = \rho v^2 - \rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}$,
  so dividing by $\rho > 0$ gives $\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = v^2 - u^2 + \frac{1}{\rho}P_\rho$.
- From $\frac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}u_3 = -\partial_z P$ and $u_3 = zg$,
  $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}u_3 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(zg) = (\frac{\mathrm{D}z}{\mathrm{D}t})g + z\frac{\mathrm{D}g}{\mathrm{D}t} = u_3 g + z\frac{\mathrm{D}g}{\mathrm{D}t} = zg^2 + z\frac{\mathrm{D}g}{\mathrm{D}t}$,
  hence $\frac{\mathrm{D}g}{\mathrm{D}t} = -g^2 - \frac{1}{z}P_z$.
- Finally, incompressibility $\partial_\rho u_2 + \partial_z u_3 = 0$ with $u_2 = -\rho v$, $u_3 = zg$ yields
  $$0 = \partial_\rho(-\rho v) + \partial_z(zg) = -(v + \rho v_\rho) + (g + z g_z),$$
  i即 $z g_z - \rho v_\rho + g - v = 0$

这证明变量变换将 (2.1) 精确地化为 (2.5)。

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}u = \frac{1}{2}uv, & t \in [0,T), (\rho, z) \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}v = v^2 - u^2 + \frac{1}{\rho}p_\rho \\ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}g = -g^2 \quad - \frac{1}{z}p_z \\ z\partial_z g - \rho\partial_\rho v + g - v = 0. \\ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} := \partial_t + gz\partial_z - v\rho\partial_\rho, \end{cases} \tag{2.5}$$

注 2.1. 考察(2.5) 可知，若 $\{u, v, g, p\}$ 的初始数据关于 r 和 z均对称，则偏微分方程组会保持这些对称性。从这个意义上说，(2.5)可视为定义在 $\mathbb{R}^2$上。

注 2.2. 我们将 $\{u, v, g\}$ 称为涡量的构成要素，因为它们的量纲与 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$的量纲相同。此外，二次涡拉伸项也大大简化为：$(uv,\ v^2 - u^2,\ -g^2)$。

¯2.2. **系统（E1）**。现在我们引入流函数 ψ，并为 (2.5) 添加两个关系，得到系统 (2.6)。为将符号 (u, v, g, p) 留作后续表示扰动变量，我们在背景未知量上加横线。因此¯(2.6) 中的系统（E1）由五个因变量 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{g}, \bar{p}, \psi)$ 组成，它们是定义在子午面上的 (ρ, z) 的偶函数，并满足六个方程；最后一个方程定义D Dt。

—

$$\text{(i)}\ 0 = \tfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,\bar{u} - \tfrac{1}{2}\,\bar{u}\,\bar{v}, \quad (t, \rho, z) \in [0,T) \times \mathbb{R}^2 \tag{2.6a}$$
$$\text{(ii)}\ 0 = \tfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,\bar{v} - \bar{v}^2 + \bar{u}^2 - \tfrac{1}{\rho}\bar{p}_\rho, \tag{2.6b}$$
$$\text{(iii)}\ 0 = \tfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,\bar{g} + \bar{g}^2 + \tfrac{\mu^2}{z}\,\bar{p}_z, \tag{2.6c}$$
$$\text{(iv)}\ 0 = z\partial_z\bar{g} - \rho\partial_\rho\bar{v} + \bar{g} - \bar{v}, \tag{2.6d}$$
$$\text{(v)}\ 0 = \bar{v} - \bar{\psi} - z\partial_z\bar{\psi}, \tag{2.6e}$$
$$\text{(vi)}\ 0 = \bar{g} - \bar{\psi} - \rho\partial_\rho\bar{\psi}, \tag{2.6f}$$
$$\text{(vii)}\ \tfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} : = \lambda\partial_t + \bar{g}\,z\partial_z - \bar{v}\,\rho\partial_\rho, . \tag{2.6g}$$

注记 2.3 (t-缩放因子 λ 和 z-缩放因子 μ)。为后续提供灵活性，我们引入了一个 t-缩放因子 λ 和一个 z-缩放因子 μ。它们仅出现在组合 $\lambda\partial_t$、$\frac{\mu^2}{z}\partial_z$ 和 $\mu^2\partial_z^2$ 中。另一方面，将 *(v)* 和 *(vi)* 代入 *(iv)* 会得到一个恒等式，因此不会引入冗余。

我们将在极坐标中研究该系统。

2.3. **极坐标**($x = r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \overline{\arctan(z/\rho)}$)。我们在子午面上使用极坐标:

$$\rho = x\cos(\theta), \quad z = x\sin(\theta). \tag{2.7}$$

注 2.4。 子午面 (ρ, z) 上的极坐标 (x, θ) 同时也是三维轴对称函数在 $\mathbb{R}^3$中的球坐标 (x, θ, ϕ) （北极位于 $\theta = \pi/2$） 。

2.4. **背景**。 我们将背景解写为

$$\begin{aligned} &\bar{u} = U(t, x, \xi), \quad \bar{v} = V(t, x, \xi), \quad \bar{g} = G(t, x, \xi), \\ &\bar{p} = P(t, x, \xi), \quad \xi := \tan(\theta). \end{aligned} \tag{2.8}$$

将（3.1）代入（2.6）后，我们得到四个具有以下结构的方程:

$$\begin{cases} \lambda U_t - \frac{1}{2} V U = -\frac{1}{1+\xi^2}\left(\xi^2 G - V\right) x U_x - (G+V)\xi U_\xi, \\ \lambda V_t - V^2 + U^2 = -\frac{1}{1+\xi^2}\left(\xi^2 G - V\right) x V_x - (G+V)\xi V_\xi + \frac{1}{x} P_x - \frac{1+\xi^2}{x^2}\xi P_\xi, \\ \lambda G_t + G^2 = -\frac{1}{1+\xi^2}\left(\xi^2 G - V\right) x G_x - \frac{1}{2}\xi(G^2 + V^2)_\xi - \frac{\mu}{x} P_x - \frac{\mu(1+\xi^2)}{x^2\xi^2}\xi P_\xi, \\ G - V = -\frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2 x G_x - x V_x) + \xi(G_\xi + V_\xi). \end{cases} \tag{2.9}$$

现在我们考察在以下假设 **(I)** 下方程如何得到简化:

$$\xi = \xi_0 = \pm 1, \quad G(t, x, \xi_0) = V(t, x, \xi_0). \tag{2.10}$$

以及脊线平坦假设 **(II)**（脊线法向方向上的脊线平坦条件）:

$$(V_\xi, U_\xi, G_\xi, P_\xi)|_{\xi_0} = 0, \tag{2.11}$$

2.5. **脊线射线与脊函数**。

定理 2.5. 将系统 (2.6)（包括无散条件 (2.6)***(4)***）限制在由 $\xi^2 = \xi_0^2 = 1$ 确定的射线上

假设假设 ***(I)*** 和假设 ***(II)***，则有:

(A): 散度约束与脊平坦性确定脊线射线。在(2.10)和(2.11)的条件下，散度恒等式 (2.6d) 意味着

$$\xi_0 = \tan(\theta_0) = \pm 1.$$

等价地，

$$\theta_0 \in \left\{\pm\tfrac{\pi}{4},\ \pi \pm \tfrac{\pi}{4}\right\}.$$

在(r, z)平面上，这对应于经过原点的两条直线

$$z = \pm r,$$

即四条射线（每条对角线上各有两条射线）。在第一象限$r \geq 0$ $z \geq 0$中进行研究时，我们采用主选项

$$\theta_0 = \tfrac{\pi}{4}.$$

（*B*）主脊射线上的无对流。在 $\xi=\xi_0$上，

$$\tfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\big|_{\xi=\xi_0}=\partial_t.$$

(C) 采用特定的缩放参数 (λ,μ)：

$$\lambda=\tfrac{3}{2},\quad \mu=\left(\tfrac{5}{3}\right)^{1/2}, \tag{2.12}$$

所有脊函数 $\{U,V,G,P\}(t,x,\theta_0)$ 的动力学完全由以下针对 $U(t,x,\xi_0)$和 $V(t,x,\xi_0)$ 的 $1+1$ 维无对流反应系统决定。

$$\begin{cases} U_t=\tfrac{1}{3}\,V\,U,\\ V_t=\tfrac{1}{6}V^2-\tfrac{5}{12}U^2. \end{cases} \tag{2.13}$$

注意，(2.13) 是逐点常微分方程组。它对每个点 $x\in\mathbb{R}$ 都成立。

令 $\tau=6t$，$\left(\tfrac{2}{5}\right)^{1/2}U(t,x)=\tfrac{1}{2}\omega(\tau,x)$，以及 $V(t,x)=\tfrac{1}{2}H(\omega(\tau,x))$ 后，可以看出，对于每个固定的 x，该系统在代数上等价于 ***Constantin–Lax–Majda*** 反应常微分方程组，该方程组被提出作为涡量拉伸的模型。

$$\begin{cases} \partial_\tau\omega=\omega H(\omega)\\ \partial_\tau H(\omega)=\tfrac{1}{2}\left(H(\omega)^2-\omega^2\right). \end{cases} \tag{2.14}$$

定理 ***2.5*** 的证明。断言 (A) 可直接由 (3.2) 得出。

由于在脊线上 $\xi_0^2=1$和 $G(t,\ x,\ \xi_0)=V(t,\ x,\ \xi_0)$，对流项 $(\xi^2G-V)\partial_x$ 在 (3.2) 中消失。这就证明了断言 (B)。

因此，我们的**脊线系统**由 4 个偏微分方程组成，如下所示

$$\begin{cases} \tfrac{3}{2}U_t=\tfrac{1}{2}V\,U,\\ \tfrac{3}{2}V_t=V^2-U^2+\tfrac{1}{x}P_x,\\ \tfrac{3}{2}V_t=-V^2-\tfrac{5}{3x}P_x. \end{cases} \tag{2.15}$$

将 P_x 与 V_t 分离，可得 (2.13)，以及关于 $P(t,\ x,\ \xi_0)$ 的简化泊松方程。

$$P_x=\tfrac{3x}{8}\left(U^2-2V^2\right), \tag{2.16}$$

这就证明了断言 (C)，并完成了定理 2.5 的**证明**。 □

众所周知，系统 (2.13) 与 Constantin–Lax–Majda 系统一样，存在以下闭式解。

$$\begin{cases} V(t,a,b)=-\dfrac{6\left(5tb^2+2a(ta-6)\right)}{2(ta-6)^2+5t^2b^2},\\ U(t,a,b)=\pm\dfrac{72b}{2(ta-6)^2+5t^2b^2}, \end{cases} \tag{2.17}$$

若我们给定以下初始条件

$$\begin{cases} r = x^2 + A_1(\xi^2-1)^{2m}, \\ a = a(x) = \dfrac{A}{(1+r)^3}, \quad A>0, \\ b = b(x) = \dfrac{Br}{(1+r)^6}, \quad B>0. \end{cases} \tag{2.18}$$

那么，该解会在有限时间 $T = \frac{6}{A}$ 于 $(t,\ \xi) = (0,\ \pm 1)$ 处发生爆破解。–

$$V(t,x,\pm1) \to \infty, \quad \tfrac{U(t,x,\pm1)}{U(0,x,\pm1)} \to \infty, \text{ as } t \to T = \tfrac{6}{A}, x \to 0. \tag{2.19}$$

2.6. 脊线爆破与全楔形区域延拓问题。 显式公式 (2.17) 立即给出了一个发生爆破解的脊线背景。尚未解决的问题是：如何将该脊线剖面延拓为定义在楔形区域 $x>0,\ |\xi|\le 1$ 上的方程 (2.9) 的完整经典解，同时保持足够的脊平坦性，使约化动力学保持精确。

定理 2.6 （显式脊线背景与局部化有限时间爆破）。 设

$$a_{\mathrm{ridge}}(x) := \frac{A}{(1+x^2)^3}, \qquad b_{\mathrm{ridge}}(x) := \frac{B\,x^2}{(1+x^2)^6}, \qquad A,B>0,$$

并令 $(V_{\mathrm{ridge}}, U_{\mathrm{ridge}})$ 由 (2.17) 定义，其中 $(a,b) = (a_{\mathrm{ridge}}(x),\ b_{\mathrm{ridge}}(x))$。那么：

(1) 对每个固定的 $x \in \mathbb{R}$，有序对 $(V_{\mathrm{ridge}}(t,x),\ U_{\mathrm{ridge}}(t,x))$ 在 $[0,T)$ 上光滑，其中

$$T = \frac{6}{A};$$

(2) 对于每个固定的 $x \neq 0$，$V_{\mathrm{ridge}}(t,x)$ 和 $U_{\mathrm{ridge}}(t,x)$ 都保持有界，当 $t \uparrow T$ 时；

(3) 奇点局限于脊线顶点 $(x,\xi) = (0,\ \pm 1)$，其意义是

$$V_{\mathrm{ridge}}(t,0) = \frac{6}{T-t} \to +\infty \qquad as\ t \uparrow T,$$

而

$$\frac{U_{\mathrm{ridge}}(t,x)}{U_{\mathrm{ridge}}(0,x)} = \frac{72}{2\big(ta_{\mathrm{ridge}}(x)-6\big)^2 + 5t^2 b_{\mathrm{ridge}}(x)^2}$$

在 $x=0$ 处像 $(T-t)^{-2}$ 那样爆破。

特别地，约化脊线系统 (2.13) 存在一个显式的有限时间爆破剖面，其集中于脊线顶点。

证明。 将 $(a,b) = (a_{\mathrm{ridge}}(x),\ b_{\mathrm{ridge}}(x))$ 代入 (2.17)。由于

$$a_{\mathrm{ridge}}(0) = A, \qquad b_{\mathrm{ridge}}(0) = 0,$$

在 $x=0$ 处，我们得到

$$V_{\mathrm{ridge}}(t,0) = -\frac{6\cdot 2A(tA-6)}{2(tA-6)^2} = \frac{6A}{6-tA} = \frac{6}{T-t},$$

其在 $t = T = 6/A$ 处发生爆破。同样，

$$\frac{U_{\mathrm{ridge}}(t,x)}{U_{\mathrm{ridge}}(0,x)} = \frac{72}{2\big(ta_{\mathrm{ridge}}(x)-6\big)^2 + 5t^2 b_{\mathrm{ridge}}(x)^2},$$

并且在 $x=0$ 处，这等于

$$\frac{36}{(tA-6)^2}=\frac{T^2}{(T-t)^2},$$

因此，归一化的 U-剖面也会在时刻 T 爆破。

现在固定 $x\neq 0$。则 $a_{\mathrm{ridge}}(x)<A$，因此

$$Ta_{\mathrm{ridge}}(x)-6=\frac{6a_{\mathrm{ridge}}(x)}{A}-6<0.$$

因此，分母

$$2\big(ta_{\mathrm{ridge}}(x)-6\big)^2+5t^2b_{\mathrm{ridge}}(x)^2$$

在 $t=T$ 之前始终严格为正，并且 $V_{\mathrm{ridge}}(t,x)$ 和 $U_{\mathrm{ridge}}(t,x)$ 在此期间均保持有界。这证明了所声称的奇点局部化。□

前述定理给出了一个显式爆破的脊核心。完整的背景问题是将该脊核心延拓为方程 (2.9) 的经典楔形解。下一个命题将阐明这一延拓背后的精确相容性要求。

定理 2.7 （保持脊平坦性的相容条件）。 设 (U,V,G,P)是 (2.9) 在 $[0,t_*]\times\Omega$上的经典解，

$$\Omega:=\{(x,\xi):x>0,\ |\xi|\le 1\},$$

并固定一条脊线 $\xi_0\in\{\pm1\}$。假设沿着 $\xi=\xi_0$ 有

$$G=V,\qquad U_\xi=V_\xi=G_\xi=P_\xi=0. \tag{2.20}$$

那么 U 的一阶法向导数按如下方式演化

$$\lambda\,\partial_t(U_\xi)(t,x,\xi_0)=-\xi_0V(t,x,\xi_0)\Big(xU_x(t,x,\xi_0)+2U_{\xi\xi}(t,x,\xi_0)\Big). \tag{2.21}$$

因此，精确的一阶脊平坦性不会自动由(2.9)传递。特别地，对于种子族

$$\begin{cases} r=x^2+A_1(\xi^2-1)^{2m},\\ a(x,\xi)=\dfrac{A}{(1+r)^3},\quad A>0,\\ b(x,\xi)=\dfrac{Br}{(1+r)^6},\quad B>0, \end{cases} \tag{2.22}$$

当 $m\ge 2$时，有 $U_{\xi\xi}(0,\ x,\ \xi_0)=0$；因此 (2.21) 初始时化为

$$\lambda\,\partial_t(U_\xi)(0,x,\xi_0)=-\xi_0V(0,x,\xi_0)\,xU_x(0,x,\xi_0),$$

对于 $x\neq 0$，该式通常不为零。

证明。对 (2.9) 中的 U 方程关于 ξ 求导。将

$$A(t,x,\xi):=\frac{\xi^2G-V}{1+\xi^2},\qquad B(t,x,\xi):=(G+V)\xi,$$

U 方程写成

$$\lambda U_t-\tfrac12VU=-A\,xU_x-B\,U_\xi.$$

求导得

$$\lambda(U_\xi)_t-\tfrac12V_\xi U-\tfrac12VU_\xi=-A_\xi xU_x-AxU_{x\xi}-B_\xi U_\xi-BU_{\xi\xi}.$$

现在在 (2.20) 条件下取 $\xi=\xi_0$。由于此时 $\xi_0^2=1$、$G=V$ 和 $G_\xi=V_\xi=0$，我们得到

$$A(t,x,\xi_0)=0,\qquad A_\xi(t,x,\xi_0)=\xi_0V(t,x,\xi_0),\qquad B(t,x,\xi_0)=2\xi_0V(t,x,\xi_0).$$

在脊线上同时使用 $U_\xi=V_\xi=0$，我们恰好得到（2.21）。最后，对于带有 $m\geq 2$ 的种子族（2.22），对 ξ 的依赖通过 $(\xi^2-1)^{2m}$ 引入，因此初始的二阶 ξ 导数在 $\xi=\pm1$ 处消失。最后一个断言随即成立。□

注 2.8 （修订版 (c) 实际证明的内容）。 修订版 *(c)* 建立了一个明确的爆破脊线背景，并明确指出了将其延拓为整个楔形区域背景所需的相容条件。根据定理 *2.6*，脊核心本身是完全明确的。尚未解决的是全楔形区域延拓问题：必须在 $[0,T)\times\Omega$ 上构造系统（2.9）的经典解，使其脊线迹与该显式脊核心一致，并使其法向导数满足相容关系（2.21）（以及针对 V、G、P 的类似关系）。

特别是，先前认为仅靠(2.22)中的足够大的幂次 m 就能保持精确的脊平坦性的启发式说法过于乐观。较大的 m仍能改善初始种子的角向平坦性，并有助于加权估计，但命题 *2.7* 表明，若无额外结构，精确平坦性并非完整背景流的不变量。如今，这已成为稿件中背景部分的主要解析问题。

3. Perturbation PDEs

我们推导显式背景附近的余项系统。完整解写为背景场与余项之和：

$$\begin{cases}\bar u=U(t,x,\xi)+u(t,x,\xi),\\ \bar v=V(t,x,\xi)+v(t,x,\xi),\\ \bar g=G(t,x,\xi)+g(t,x,\xi),\\ \bar p=P(t,x,\xi)+p(t,x,\xi),\end{cases}\tag{3.1}$$

将 (3.1) 代入 (2.6)(1,2,3,4) 后，我们将完整系统拆分为关于 (V，U，G，P) 的背景方程，以及关于 (v，u，g，p) 的精确余项方程。在本次修订中，所有纯背景项均保留在背景方程中，因此余项系统仅包含与背景的线性耦合，以及真正的非线性余项间相互作用：

$$\begin{cases}\lambda u_t=\frac12(uV+Uv)-(g+v)\xi U_\xi-(G+V)\xi u_\xi\\ \qquad-\frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2G-V)xu_x-\frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2g-v)xU_x+N_1\\ \lambda v_t=2(vV-uU)-(g+v)\xi V_\xi-(G+V)\xi v_\xi\qquad-\frac{(1+\xi^2)}{x^2}\frac{1}{\xi}p_\xi\\ \qquad-\frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2G-V)xv_x-\frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2g-v)xV_x+N_2+\frac1x p_x\\ \lambda g_t=-2gG\qquad-(g+v)\xi G_\xi-(G+V)\xi g_\xi\qquad-\frac{(1+\xi^2)}{x^2}\frac{\mu}{\xi}p_\xi\\ \qquad-\frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2G-V)xg_x-\frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2g-v)xG_x+N_3+\frac{\mu}{x}p_x\\ 0=\xi xg_x+xv_x-(\xi^2+1)(g-v+\xi g_\xi+\xi v_\xi)\end{cases}\tag{3.2}$$

其中，非线性扰动项为

$$\begin{cases} N_1 := \frac{1}{2}uv \qquad\qquad -(\xi^2 g - v)xu_x - (g+v)\xi u_\xi, \\ N_2 := v^2 - u^2 - \frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2 g - v)xv_x - (g+v)\xi v_\xi, \\ N_3 := -g^2 \qquad -\frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2 g - v)xg_x - (g+v)\xi g_\xi. \end{cases} \tag{3.3}$$

扰动的无散条件 (v,g) (3.2)(4) 可通过下文定义的流函数 $\psi(t,x,\xi)$ 求解：

$$\begin{cases} v = \psi + \frac{\xi^2}{1+\xi^2}x\psi_x + \xi\psi_\xi. \\ g = \psi + \frac{1}{1+\xi^2}x\psi_x - \xi\psi_\xi. \end{cases} \tag{3.4}$$

3.1. 消去 (p_ξ, p_x). 下一步是消去 (p_ξ, p_x)。定义 ω 为

$$\begin{cases} \omega := -xg_x - \frac{5}{3}xv_x + (1+\xi^2)\left(\xi g_\xi - \frac{5}{3\xi}v_\xi\right), \\ \Omega := -xG_x - \frac{5}{3}xV_x + (1+\xi^2)\left(\xi G_\xi - \frac{5}{3\xi}V_\xi\right). \end{cases} \tag{3.5}$$

因此我们得到

$$\begin{cases} g_x = \frac{1}{x}\Big(-\omega - \frac{5}{3}xv_x + (1+\xi^2)\big(\xi g_\xi - \frac{5}{3\xi}v_\xi\big)\Big). \\ G_x = \frac{1}{x}\Big(-\Omega - \frac{5}{3}xV_x + (1+\xi^2)\big(\xi G_\xi - \frac{5}{3\xi}V_\xi\big)\Big). \end{cases} \tag{3.6}$$

现在我们将 (3.2)2,3 改写为：

$$\begin{cases} \frac{3}{2}v_t = A + N_2 \ + \frac{1}{x}p_x - \frac{1}{x^2}(1+\xi^2)\xi p_\xi, \\ \frac{3}{2}g_t = B + N_3 - \frac{5}{3x}p_x - \frac{5}{3x^2}(1+\xi^2)\frac{1}{\xi}p_\xi, \end{cases} \tag{3.7}$$

其中 (A,B) 定义为

$$\begin{cases} A := 2(vV - uU) - (g+v)\xi V_\xi - (G+V)\xi v_\xi \\ \qquad -\frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2 G - V)xv_x - \frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2 g - v)xV_x, \\ B := -2gG \qquad -(g+v)\xi G_\xi - (G+V)\xi g_\xi \\ \qquad -\frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2 G - V)xg_x - \frac{1}{1+\xi^2}(\xi^2 g - v)xG_x. \end{cases} \tag{3.8}$$

于是，(p_x, p_ξ) 的解变为

$$\begin{cases} 10(1+\xi^2)\frac{1}{x}p_x = (15v_t - 9\xi^2 g_t) + 6\xi^2(B+N_3) - 10(A+N_2) \\ 10(1+\xi^2)^2\frac{1}{x^2\xi}p_\xi = (-15v_t - 9g_t) + 6(B+N_3) + 10(A+N_2) \end{cases} \tag{3.9}$$

利用 $p_{x\xi} = p_{\xi x}$ 消去 p，并利用 (3.6) 中的 g_{xt} 化简结果，最终得到：

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\omega_t = L_2 + M_2 \\ L_2 = -\left(\frac{5}{3}xA_x + xB_x\right) - \left(1+\xi^2\right)\left(\frac{5}{3\xi}A_\xi - \xi B_\xi\right) \\ M_2 = -\left(\frac{5}{3}xN_{2x} + xN_{3x}\right) - \left(1+\xi^2\right)\left(\frac{5}{3\xi}N_{2\xi} - \xi N_{3\xi}\right). \end{cases} \tag{3.10}$$

将 (3.8) 中的 $(A,\ B)$ 代入 (3.10)(2)，并利用 (3.6) 中的 $(g_x,\ g_{xx},\ g_{x\xi},\ G_x,\ G_{xx},\ G_{x\xi})$ 化简结果，再利用 (3.4) 将 $(v,\ g)$ 表示为 $(\psi,\ \psi_x,\ \psi_\xi)$ 的形式，得到

$$\begin{cases} L_2 = \frac{10}{3}\Big(\left(\xi^2+1\right)\frac{1}{\xi}U_\xi + xU_x\Big)u + \frac{10}{3}U\Big(\left(\xi^2+1\right)\frac{1}{\xi}u_\xi + xu_x\Big) \\ \quad + \frac{1}{3(\xi^2+1)}\Big(\left(\xi^2+1\right)\left(2\xi V_\xi - 3\left(\xi^2+1\right)\xi G_\xi\right) - 6G\Big)\omega \\ \quad + \frac{1}{3(\xi^2+1)}\Big(\left(5\xi^2+3\right)xV_x + 6\xi^2 V\Big)\omega \\ \quad + \frac{1}{\xi^2+1}\left(V - \xi^2 G\right)x\omega_x - (G+V)\xi\omega_\xi \\ \quad + \Big(2\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\Omega - 2\xi\Omega_\xi - \frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}x\Omega_x\Big)\psi \\ \quad + \Big(\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\Omega - \xi\Omega_\xi\Big)x\psi_x + x\Omega_x\xi\psi_\xi \end{cases} \tag{3.11}$$

将（3.3）中的 N_2, N_3 代入（3.10）（3）以及（3.6）中的（$g_x,\ g_{xx},\ g_{x\xi},\ G_x,\ G_{xx},\ G_{x\xi}$），化简所得结果，并利用（3.4）将（$v,\ g$）表示为（$\psi,\ \psi_x,\ \psi_\xi$）的函数，可得

$$\begin{cases} M_2 = \frac{10}{3\xi}\left(\left(\xi^2+1\right)u_\xi + \xi x u_x\right)u \\ \quad + \frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\left(x\psi_x + 2\psi\right)\omega \\ \quad - \xi\left(x\psi_x + 2\psi\right)\omega_\xi \\ \quad + \left(\xi x\psi_\xi - \frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}x\psi\right)\omega_x. \end{cases} \tag{3.12}$$

利用（3.4）将（$v,\ g$）表示为（$\psi,\ \psi_x,\ \psi_\xi$）的函数后，（3.2）（1）中关于 u_t 的方程也可化为所需形式：

$$\frac{3}{2}u_t = L_1 + M_1, \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{2}V\ u - (G+V)\xi u_\xi + \frac{1}{\xi^2+1}\left(V - \xi^2 G\right)xu_x \\ \quad + \frac{1}{2}\left(U - 4\xi U_\xi - \frac{2}{\xi^2+1}\left(\xi^2-1\right)xU_x\right)\psi \\ \quad + \frac{1}{2}\left(U + 2xU_x\right)\xi\psi_\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+1}U - 2\xi U_\xi\right)x\psi_x \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{2}u\psi + \frac{1}{2}u\left(\xi\psi_\xi + \frac{\xi^2}{\xi^2+1}x\psi_x\right) \\ \quad - \frac{1}{\xi^2+1}\psi\left(2\left(\xi^2+1\right)\xi u_\xi + \left(\xi^2-1\right)xu_x\right) \\ \quad + \left(xu_x\xi\psi_\xi - \xi u_\xi x\psi_x\right). \end{cases} \tag{3.15}$$

将（3.4）代入（3.5）可得

$$\begin{cases} \omega := \Delta\psi, \\ \Delta := -\frac{\left(5\xi^2+3\right)}{3(\xi^2+1)}x^2\psi_{xx} - \frac{\left(19\xi^2+21\right)}{3(\xi^2+1)}x\psi_x - \frac{4}{3}x\xi\psi_{x\xi} \\ \quad - \frac{10\left(\xi^2+1\right)}{3\xi}\psi_\xi - \frac{1}{3}\left(\xi^2+1\right)\left(3\xi^2+5\right)\psi_{\xi\xi} \end{cases} \tag{3.16}$$

4. Explicit background, perturbation PDEs, and energy bounds

4.1. 背景解。 背景解 $V(t,\ x,\ \theta)$ $U(t,\ x,\ \theta)$ 使用 (4.2) 中的新种子剖面进行了更新：

$$\begin{cases} t \in [0,T),\ x \in (-\infty,\infty),\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right], \\ V(t,x,\theta) = -\dfrac{6\left(5tU_0^2(x,\theta)+2V_0(x,\theta)(tV_0(x,\theta)-6)\right)}{2(tV_0(x,\theta)-6)^2+5t^2U_0^2(x,\theta)}, \quad (2.17) \\ U(t,x,\theta) = \dfrac{72U_0(x,\theta)}{2(tV_0(x,\theta)-6)^2+5t^2U_0^2(x,\theta)}, \end{cases} \tag{4.1}$$

初始条件

$$r := x^2\big(1+\cos^2(2\theta)\big) \geq 0, \qquad V_0(x,\theta) = \frac{A}{1+r^3}, \qquad U_0(x,\theta) = \frac{B\,r}{\big(1+r^3\big)^2}. \tag{4.2}$$

4.2. 初始能量与有限性。 我们记录与背景剖面相关的"初始能量"（在 $t=0$）：

$$E(0) := \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\Big[(V_0(x,\theta))^2 + U_0^2(x,\theta)\Big]\,|x|\,dx\,d\theta. \tag{4.3}$$

注 4.1（新种子选择下加权能量的行为）。 在修正背景模型中（在 V 方程中加入 U^2 ），我们取能量密度 V^2+U^2。对于新种子 （ 4.2 ），

$$r := x^2\big(1+\cos^2(2\theta)\big), \qquad V_0(x,\theta) = \frac{A}{1+r^3}, \qquad U_0(x,\theta) = \frac{B\,r}{(1+r^3)^2},$$

对每个 $\theta \in [-\pi/4,\pi/4]$，仍有 $V_0(0,\theta) = A$ 和 $U_0(0,\theta) = 0$，因此爆破时间仍为 $T = 6/A$，奇点仍局限于原点 $x=0$。在 $r=0$ 处作泰勒展开可得

$$V_0(x,\theta) = A\big(1-r^3+O(r^6)\big), \qquad U_0(x,\theta) = B\,r + O(r^4),$$

而在空间无穷远处，有 $r \sim x^2$，因此

$$V_0(x,\theta) = O(x^{-6}), \qquad U_0(x,\theta) = O(x^{-10}).$$

因此，初始加权能量 $E(0)$ 有限。然而， $t=T$ 处的端点行为有所不同：对于每个固定的 $t<T$，新种子使背景保持显式且光滑，但不再能保证端点能量在 $t=T$ 处一致有界。

4.3. **更新后的线性偏微分方程和非线性项。**其余部分最终关于（u， ω， ψ）的方程组为:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}u_t = L_1 + M_1 & (3.14),(3.15) \\ \frac{3}{2}\omega_t = L_2 + M_2 & (3.11),(3.12), \\ \omega = \Delta\psi. & (3.16) \end{cases} \tag{4.4}$$

4.4. 系数函数。 （4.4）（3）中的有效椭圆算子 Δ 定义如下:

$$\begin{cases} \Delta = c_1(\xi)x^2\psi_{xx} + c_2(\xi)x\psi_x + c_4(\xi)x\psi_{x\xi} + c_3(\xi)\psi_\xi + c_5(\xi)\psi_{\xi\xi} \\ c_1 = -\frac{\left(5\xi^2+3\right)}{3(\xi^2+1)}, \quad c_2 = -\frac{\left(19\xi^2+21\right)}{3(\xi^2+1)} \quad c_4 = -\frac{4}{3}\xi \\ c_3 = -\frac{10}{3\xi}\left(\xi^2+1\right) \quad c_5 = -\frac{1}{3}\left(\xi^2+1\right)\left(3\xi^2+5\right). \end{cases} \tag{4.5}$$

注4.2。 表面上的奇异因子 $\frac{1}{\xi}$ 在 $c_3(\xi)$中被加权导数 $D_\xi = \frac{1}{\xi}\partial_\xi$吸收：记

$$c_3(\xi) = \widetilde{c}_3(\xi)\,\tfrac{1}{\xi}, \qquad \widetilde{c}_3(\theta) := -\tfrac{10}{3}\left(\xi^2+1\right),$$

我们有 $c_3(\xi)\,\partial_\xi = \widetilde{c}_3(\xi)\,D_\xi$，其中 $\widetilde{c}_3$ 在 $[-1,1]$上有界且光滑。同样，涉及 $\frac{1}{\xi}$ 的项在用 $\mathcal{D}_\xi$ 表示后（或在 ξ 中写成散度形式后），会在加权能量中作为有界乘子处理。

系数 $c_1(\xi)$ $c_2(\xi)$ $c_4(\xi)$ $c_5(\xi)$ 在 $[-1,1]$上有界。系数 $c_3(\xi)$ 含有因子 $\frac{1}{\xi}$，因此其原始形式在 $\xi = 0$ 处是奇异的；不过，如上所述，组合项 $c_3(\xi)\partial_\xi$ 可自然地改写为有界乘子乘以适配导数 $D_\xi = \frac{1}{\xi}\partial_\xi$。能量估计中始终采用这种形式。

4.5. **初始条件和边界条件**。边界条件（对于 ξ 边及 $x \to \pm\infty$）和初始条件如下：

$$\begin{cases} u(t,x,\pm1) = 0, \quad u(t,x,\xi) \to 0 \text{ as } |x| \to \infty, \\ \psi(t,x,\pm1) = 0, \quad \psi(t,x,\xi) \to 0 \text{ as } |x| \to \infty, \\ u(0,x,\xi) \text{ is even in } x \text{ and } \xi, \\ \psi(0,x,\xi) \text{ is even in } x \text{ and } \xi, \\ u(0,x,\xi),\ \psi(0,x,\xi) \text{ decay sufficiently fast as } \xi \to \pm1. \end{cases} \tag{4.6}$$

“充分快的衰减”一词在 $\xi \to \pm1$ 中是指边缘附近具有足够的消失性和正则性，使得下文使用的加权 Sobolev 范数有限，并且分部积分产生的边界项在 $\xi = \pm1$ 处消失。

注4.3. 如果我们定义

$$\begin{cases} y = \log x, \quad \Delta_1 = \Delta \\ \omega_1(t,y,\xi) = \omega(t,x,\xi), \\ \psi_1(t,y,\xi) = \psi(t,x,\xi), \end{cases} \tag{4.7}$$

那么 $\omega = \Delta\psi$ (4.4) 就变为

$$\begin{cases} \omega_1 = \Delta_1\psi_1, \qquad t \in [0,T), \quad \xi \in [-1,1], \quad y \in \mathbb{R} \\ \Delta_1 = -\frac{\left(5\xi^2+3\right)}{3(\xi^2+1)}\psi_{1xx} - \frac{2\left(7\xi^2+9\right)}{3(\xi^2+1)}\psi_{1x} - \frac{4}{3}\xi\psi_{1x\xi} \\ \qquad - \frac{10\left(\xi^2+1\right)}{3\xi}\psi_{1\xi} - \frac{1}{3}\left(\xi^2+1\right)\left(3\xi^2+5\right)\psi_{1\xi\xi}, \\ \quad \psi_1(t,y,\pm1) = 0 \quad (4.6), \\ \quad \psi_1(t,y,\xi) \to 0, \ \ as\ y \to \pm\infty \quad (4.6) \end{cases} \tag{4.8}$$

因此，(4.8) 就变成了带状区域 $\Omega = \{(y,\xi) : y \in \mathbb{R},\ \xi \in [-1,1]\}$ 中定义良好的椭圆问题。

5. Linear estimates and conditional nonlinear control up to blow-uptime

更新后的扰动系统。本节中，我们使用第2节推导出的最终扰动方程。我们研究扰动系统 (3.13) 和 (3.10)，以及系数集 (3.14)、(3.15)、(3.11)、(3.12)

和椭圆算子 (4.5)，在时间区间 $[0,T)$ 内直至背景爆破解时间，围绕显式背景 (4.1) 进行研究。全文中，所有勒贝格范数和索伯列夫范数均相对于加权测度 $d\mu_w = w(\xi)|x|\,dx\,d\xi$ 定义，并且我们使用去奇异化角导数

$$D_\xi := \tfrac{1}{\xi}\partial_\xi.$$

这是变量变换 $\xi = \tan\theta$ 后的自然导数，该变换将三角函数系数化为关于 ξ 的有理函数。

5.1. **自举框架及更新后的背景系数界**。取一个整数 $k \geq 6$。定义扰动能量

$$\mathcal{E}_k(t) := \sum_{j+\ell\leq k}\Big(\|\partial_x^j D_\xi^\ell u(t)\|_{L^2_{\mu_w}}^2 + \|\partial_x^j D_\xi^\ell \omega(t)\|_{L^2_{\mu_w}}^2\Big) + \sum_{j+\ell\leq k+1}\|\partial_x^j D_\xi^\ell \psi(t)\|_{L^2_{\mu_w}}^2. \tag{5.1}$$

能量方法实际所需的背景系数界。显式背景 (4.1) 以封闭形式给出 (U,V)。稳定性估计所需的并非对原始导数 $\partial_x^m\partial_\theta^\ell V$ 的一致界（这些导数在中间尺度 $r^2 \sim T-t$ 附近的增长速度可能快于 $(T-t)^{-1}$），而是对 (3.14)、(3.11) 以及加权索伯列夫范数中出现的退化组合进行一致控制。

定义适配导数

$$Z_x := x\partial_x, \qquad D_\xi := \tfrac{1}{\xi}\partial_\xi,$$

于是，对每个整数 $k \geq 0$，存在 $C_* = C_*(A,B,\text{种子 } k)$，使得对所有$t \in [0,T)$，以下估计成立。

引理 5.1（经调整的背景系数界）。

$$\begin{aligned}&\sum_{j+\ell\leq k}\Big(\|Z_x^j D_\xi^\ell V(t)\|_{L^\infty} + \|Z_x^j D_\xi^\ell U(t)\|_{L^\infty}\Big)\\ &+\sum_{j+\ell\leq k}\Big(\big\|Z_x^j D_\xi^\ell\big(x\,V_x(t)\big)\big\|_{L^\infty} + \big\|Z_x^j D_\xi^\ell\big(x\,U_x(t)\big)\big\|_{L^\infty}\Big)\\ &\leq \frac{C_*}{T-t}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

证明略。该估计直接由闭式背景公式、脊线顶点附近的种子展开，以及远离顶点时（4.1）中的分母具有一致下界这一事实得到。在顶点附近，使用分母尺度 $D(t,x,\theta) \gtrsim (T-t)^2 + r^2$，并结合以下观察：$Z_x = x\partial_x$ 的作用类似于 $r\partial_r$，而 D_ξ 则抵消了角导数中的无害三角函数奇异因子。□

特别是，

$$\|V(t)\|_{L^\infty} = \frac{6}{T-t} \quad (\text{attained at } (x,\xi) = (0,\pm 1)), \qquad \|U(t)\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{T-t}.$$

5.2. 对 ψ 进行椭圆控制，来自 $\omega = \Delta\psi$。 (4.4) 中的椭圆关系写作$\omega = \Delta\psi$，其中 Δ 由 (4.5) 给出。将角向部分改写为适配导数 D_ξ（如加权范数小节中所示）后，算子 Δ 与 $\Delta_1 = \partial^2_{\log x} + D^2_\xi$ 具有相同的主结构，其低阶 ξ依赖系数在楔形区域上受到控制。因此，我们记录如下加权椭圆估计，作为扰动论证所需的解析输入：对所有整数 $m \geq 0$,

$$\|\psi(t)\|_{H^{m+2}_{\mu_w}} \leq C_{\Delta,m} \|\omega(t)\|_{H^m_{\mu_w}}, \tag{5.3}$$

其中，该常数仅取决于楔形区域几何、边界条件以及（4.5）中出现的有界系数函数。这个估计自然源自注4.3中讨论的 $y = \log x$ 重构；在本文中，我们将其作为推导 ψ-估计时使用的椭圆分析输入，而不将其作为单独证明的定理。

特别地，由于 $k \geq 6$，对（x, ξ）变量应用索об列夫嵌入（将 D_ξ 计为一个导数），可得

$$\|u(t)\|_{L^\infty} + \|\omega(t)\|_{L^\infty} + \|\psi(t)\|_{W^{1,\infty}} \leq C\,\mathcal{E}_k(t)^{1/2}. \tag{5.4}$$

5.3. 关于 (u, ω) 的能量不等式。 对（4.4）中的 u-方程和 ω-方程关于 $j + \ell \leq k$ 按 $\partial^j_x D^\ell_\xi$ 求导，分别与 $\partial^j_x D^\ell_\xi u$ 和 $\partial^j_x D^\ell_\xi \omega$ 取 $L^2_{\mu_w}$ 内积，并对 $j + \ell \leq k$ 求和。现在，输运项直接写成（x, ξ）变量的形式，因此分部积分在 x 和 ξ 中进行。由于 $\xi = \pm 1$ 处的余项边界条件、当 $|x| \to \infty$ 时的衰减，以及使用 $D_\xi = \xi^{-1}\partial_\xi$ 的加权形式，边界项均为零。

利用交换子估计和 (5.4)，可以得到如下形式的不等式

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_k(t) \leq \frac{C_{\mathrm{lin}}}{T-t}\,\mathcal{E}_k(t) + C_{\mathrm{nl}}\left(\|M_1(t)\|_{H^k_{\mu_w}} + \|M_2(t)\|_{H^k_{\mu_w}}\right)\mathcal{E}_k(t)^{1/2}. \tag{5.5}$$

二次余项。 根据 (3.15) 和 (3.12) 中 M_1, M_2 的显式形式，并结合 (x, ξ) 变量下的莫泽不等式和索об列夫乘积估计，可得

$$\|M_1(t)\|_{H^k_{\mu_w}} + \|M_2(t)\|_{H^k_{\mu_w}} \leq C\,\mathcal{E}_k(t).$$

由于所有纯背景项都已保留在背景系统中，因此余项能量不等式中没有加性强迫项。因此，自然可以将 (5.5) 改写为关于

$$Y(t) := \mathcal{E}_k(t)^{1/2}.$$

Then

$$Y'(t) \leq \frac{C_{\mathrm{lin}}}{T-t}Y(t) + C_{\mathrm{nl}}Y(t)^2 \tag{5.6}$$

当 $Y(t) > 0$ 时。

重要的是，单凭 (5.6) 尚不能推出一个闭合的自举结论，使余项严格小于背景奇异性。它所能提供的是一种 Elgindi 型条件传递原理：如果余项始终处于增长速度弱于背景爆破解率的函数类中，那么二次项就是微扰性的，背景奇异性也会传递到完整解。

为使这一点更加明确，固定一个指数 $\sigma > 0$，并定义重整化能量包络

$$X_\sigma(t) := (T-t)^\sigma Y(t).$$

求导并利用 (5.6) 得到

$$X'_\sigma(t) \le \frac{C_{\rm lin}-\sigma}{T-t}X_\sigma(t) + C_{\rm nl}(T-t)^{-\sigma}X_\sigma(t)^2. \tag{5.7}$$

因此，只要

$$\sigma > C_{\rm lin}, \tag{5.8}$$

并且只要满足如下形式的自举界

$$X_\sigma(t) \le M\varepsilon \qquad \text{for } 0 \le t \le t_*\tag{5.9}$$

在 $\varepsilon > 0$ 充分小的情况下成立，(5.7) 的右端便可积，且二次项可以被吸收。由标准的连续性论证可得

$$X_\sigma(t) \le 2X_\sigma(0) \qquad \text{for } 0 \le t \le t_*. \tag{5.10}$$

等价地,

$$Y(t) \le 2Y(0)\Big(\frac{T}{T-t}\Big)^\sigma, \qquad 0 \le t \le t_*. \tag{5.11}$$

特别是，如果在仍满足 (5.8) 的同时可以选取 $\sigma < 1$ ，那么余项在检测范数下始终严格小于背景爆破尺度（$T-t$）$^{-1}$ 。

上述讨论总结为以下条件定理。

定理 5.2 (背景爆破时间之前的条件性非线性控制)。假设显式背景解在 $[0,T)$上存在，在$(x,\xi) = (0,\pm 1)$ 处爆破，爆破时间为 $T = 6/A$，并满足引理 *5.1* 中的适配系数界。另假设加权椭圆估计(5.3) 成立。令 $k \ge 6$，并令(u,ω,ψ) 在 $[0,t_*] \subset [0,T)$ 上满足精确余项系统。

那么存在常数 $C_{\rm lin}, C_{\rm nl} > 0$，它们仅依赖于 k 和背景系数界，使得(5.6) 成立。因此，对于每个满足(5.8)的指数σ ，存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\sigma,k) > 0$ ，使其具有以下性质：若

$$X_\sigma(0) = T^\sigma \mathcal{E}_k(0)^{1/2} \le \varepsilon_0,$$

并且自举假设(5.9) 在 $[0,t_*]$上成立，那么实际上(5.10) 在$[0,t_*]$上成立。

注 5.3 (目前证明了什么，还有什么需要改进)。 定理 *5.2* 已经足够有力，能够将余项分析纳入与 *Elgindi–Jeong* 机制相同的逻辑框架：奇异核心就是显式背景，而非线性论证归结为证明余项仍属于一个更好的函数类。然而，该定理仍然是有条件的。要将其转化为完整的稳定性结论，仍需独立论证，以保证在某个能够检测背景爆破解的范数中存在一个带有某个指数 $\sigma < 1$ 的间隙(5.8) 。这可能来自更强的强制性、余项在脊线处的额外消失，或更具尺度适配性的能量泛函。

在这种条件性控制下，可以得到完整解的爆破传递结论。

定理 5.4 （背景爆破解向完整解的条件性转移）。假设定理 *5.2* 的假设成立。此外，假设为完整解选定的检测范数 $\mathcal{N}_{\rm det}$（t）在背景解上的取值满足

$$\mathcal{N}_{\rm det}^{\rm bg}(t) \sim c_0(T-t)^{-1} \qquad \textit{for some } c_0 > 0,$$

并且余项贡献满足以下估计

$$\mathcal{N}_{\det}^{\mathrm{rem}}(t) \le C_{\det} Y(t)$$

对于 $0 \le t < T$。如果存在 $\sigma \in (C_{\mathrm{lin}}, 1)$，使得 (5.10) 在 $[0,T)$上成立，那么

$$\mathcal{N}_{\det}(t) = \mathcal{N}_{\det}^{\mathrm{bg}}(t) + O\big((T-t)^{-\sigma}\big) \qquad as\ t \uparrow T,$$

因此，完整解会在时刻 T 发生爆破，其主导阶奇点位置和爆破尺度与背景相同。

因此，本文的逻辑瓶颈已不再是余项方程中的强迫障碍。当前主要未解决的问题，是如何严格构造背景解直至其爆破时间，并满足所需的脊平坦性和系数界；此外，还需要任何能够在余项范数中产生真正间隙指数 $\sigma < 1$ 的精细估计。一旦具备这两项条件，本文的稳定性机制便可直接推广为一个具有 Elgindi 风格的非线性余项定理。

6. 结论

在奇偶性假设下，我们从无粘二维 Boussinesq 方程推导出一个闭合的（$1+2$）D 子系统（E1），并围绕两个组成部分组织其爆破解分析：奇异背景核心和精确余项系统。在更新后的表述中，脊线射线上呈现无对流的（$1+1$）D CLM 型反应动力学，并具有显式的有限时间爆破；而整个楔形区域问题则改写为（x，ξ）变量下的问题，使余项方程成为精确方程，并确保所有纯背景项都留在背景系统中。

本次修订的主要进展兼具概念和技术层面。在余项方面，先前的大型强迫项障碍已不复存在。剩下的是一个带有二次低阶相互作用的奇异线性问题，而这正是 Elgindi 型传递机制得以发挥作用的情形。第 5 节建立的加权能量方法现已表明：如果背景在 $[0,T)$ 上存在，且满足该节要求的系数界；同时余项在检测范数下始终受背景奇异性支配，那么完整解便会继承相同的有限时间爆破解。

因此，当前尚未解决的主要步骤已得到明确界定。问题不再是推导余项系统，也不是线性加权估计，而是将全楔形背景构造延续至爆破时间，并确保具备传播脊线结构、且不损失地闭合非线性自举所需的刚性性质。修订版 (c) 明确指出：脊线爆破机制本身已有闭式表达，但将其推广为满足必要相容性界的完整背景，仍是决定性的开放问题。

即使最终的非线性定理尚未完成，这种更精确的表述也很有用。它区分了哪些内容已经得到严格证明，哪些仍是有条件的，并使本文在思路上更接近 Elgindi 及其合作者所采用的奇异核心加余项的思路。目前，本文给出了从 Boussinesq 方程出发的精确推导、明确的脊线爆破机制、精确余项系统、奇异加权线性控制，以及精确的条件性爆破解传递陈述。

因此，接下来的自然步骤已经很明确。首先，要为本文使用的各向异性种子族证明完整的背景存在性与爆破定理。

其次，要改进检测范数，使余项严格低于背景爆破解率，从而建立闭合的非线性自举。之后，可以重新研究几何参数的调制以及低正则性加权理论。

7. Acknowledgements

ChatGPT 被列为起草和技术编辑方面的重要贡献者；作者仍对内容的正确性负责。作者感谢复旦大学数学系的周子翔教授和加利福尼亚大学圣克鲁兹分校数学系的秦杰教授多年来给予的持续支持与鼓励。作者还感谢同事以及更广泛的偏微分方程与流体动力学界同仁，就无黏性 Boussinesq 和 CLM 型模型开展了富有启发性的讨论。（计算辅助：ChatGPT、GPT–5.2 Thinking、OpenAI；使用时间：2026年3月。）

8. References

References

[1]Beale J T、Kato T 和 Majda A，1984，《关于三维欧拉方程光滑解的崩溃的评论》《数学物理通讯》**94** 61–66 doi:10.1007/BF01212349[2] Chae D、Constantin P 和 Wu J，2014，《一个具有奇点和显式解的二维不可压教学模型：二维 Boussinesq 方程》《数学流体力学杂志》**16**473–480 doi:10.1007/s00021-014-0166-5[3] Chae D 和 Nam H-S，1997，《Boussinesq 方程的局部存在性与爆破判据》《爱丁堡皇家学会学报 *A* 辑》**127**(5) 935–946 doi: 10.1017/S0308210500026810[4] Chen J 和 Hou T Y，2021，《具有速度 $C^{1,\nu}$ 和边界的二维 Boussinesq 方程与三维欧拉方程的有限时间爆破》《纯粹与应用数学通讯》**383**1559–1667 doi:10.1007/s00220-021-04067-1[5] Chen J 和 Hou T Y，2022，《光滑初值下二维 Boussinesq 方程与三维欧拉方程的稳定近自相似爆破》*arXiv:2210.07191*[6] Choi K、Hou T Y、Kiselev A、Luo G、˘Sver´ak V 和 Yao Y，2017，《关于三维轴对称欧拉方程一维模型的有限时间爆破》《纯粹与应用数学通讯》**70**(11) 2218–2243 doi:10.1002/cpa.21697[7] D. Chae、S.-K. Kim、H.-S. Nam，《Boussinesq 方程 Hölder 连续解的局部存在性与爆破判据》，《名古屋数学杂志》**155**(1999) 55–80[8] Choi K、Kiselev A 和 Yao Y，2015，《二维 Boussinesq 系统一维模型的有限时间爆破》《数学物理通讯》**334** 1667–1679 doi:10.1007/s00220- 014-2146-2[9] Constantin P、Lax P D 和 Majda A，1985，《三维涡量方程的一个简单一维模型》《纯粹与应用数学通讯》**38**(6) 715–724 doi:10.1002/cpa.3160380605[10] Constantin P，1986，《关于三维不可压欧拉方程及相关方程解的正则性丧失的注记》《数学物理通讯》**104** 311–326

[11] Constantin P，2007，《不可压流体的欧拉方程》。《美国数学会通报》（新辑）44 603–621 doi:10.1090/S0273-0979-07-01184-6[12] Cannon J R 和 DiBenedetto E，1980，《具有 L^p 数据的 Boussinesq 方程初值问题》，载于《数学讲义》771 129–144（施普林格）[13] Caffarelli R. Kohn R 和 L. Nirenberg L，1982，《纳维–斯托克斯方程适当弱解的部分正则性》。《纯粹与应用数学通讯》35 (1982)，771–831。[14] Collot C、Merle F 和 Rapha¨el P，《能量临界半线性热方程常微分方程爆破的稳定性》。《巴黎科学院数学报告》355(1)，65–79。doi: 10.1016/j.crma.2016.10.020。[15] Drivas T D 和 Elgindi T M，2023，《不可压欧拉方程在有限时间与无限时间内的奇性形成》。《EMS 数学科学综述》10 1–100[16] De Gregorio S，1990，《三维涡量方程的一个一维模型》。《统计物理学杂志》59 1251–1263 doi: 10.1007/BF01334750[17] Elgindi T M 和 Jeong I-J，2019，《轴对称三维欧拉方程强解的有限时间奇性形成》。《偏微分方程年刊》5 51 arXiv:1802.09936[18] Elgindi T M 和 Jeong I-J，2020，《Boussinesq 系统强解的有限时间奇性形成》。《偏微分方程年刊》6 50 arXiv:1708.02724[19] Elgindi T M 和 Pasqualotto F，2023，《从不稳定性到不可压流体中的奇性形成》arXiv:2310.19780[20]Giga Y 和 Kohn R V，1985，《半线性热方程的渐近自相似爆破》。《纯粹与应用数学通讯》38(3) 297–319 doi: 10.1002/cpa.3160380304[21] Giga Y，1986，《半线性热方程整体解的一个界》。《数学物理通讯》103(3) 415–421[22] Hou T Y 和 Liu P，2014，《三维轴对称欧拉方程一维模型的自相似奇点》arXiv:1407.5740[23] Hou T Y 和 Li R，2006，《涡拉伸的动态耗竭与三维不可压欧拉方程不爆破》。《非线性科学杂志》16 639–664[24] Kiselev A、Park J 和 Yao Y，2022，《二维 Boussinesq 方程的小尺度形成》arXiv:2211.05070[25] Lin F H，1998，《Caffarelli-Korn-Nirenberg 定理的新证明》。《纯粹与应用数学通讯》51(3)，241–257。[26] Merle F 和 Rapha¨el P，2005，《临界非线性薛定谔方程的爆破动力学与爆破速率上界》。《数学年刊》161(1) 157–222¨Rapha[27] el P 和 Rodnianski I，2012，《临界共旋波映射和等变 Yang–Mills 问题的稳定爆破动力学》。《高等科学研究所数学出版物》115(1) 1–122 doi: 10.1007/s10240-011-0037-z[28] Schochet S，1986，《黏性模型涡量方程的显式解》。《纯粹与应用数学通讯》39(4) 531–537 doi: 10.1002/cpa.3160390404[29] Taniuchi Y，2002，《无黏二维 Boussinesq 方程爆破判据札记》，载于《纳维–斯托克斯方程：理论与数值方法》（R. Salvi 编），《纯粹与应用数学讲义》223 131–140[30] Wu J，2012，《二维不可压 Boussinesq 方程》，北京大学暑期学校讲义

[31] Khenissy S 和 Zaag H 2011 半线性热方程爆破解剖面关于初始数据的连续性 *Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. NonLin´eaire* **28**(1) 1–29

California, United States
Email address: ymshi@protonmail.com