arXiv:2603.27242v1 [math.CO] 28 Mar 2026

PHOEG：极值图论探索与教育在线工具

S´ebastien Bonte、Gauvain Devillez、Valentin Dusollier、Hadrien M´elot[1]

计算机科学系 - 算法实验室 蒙斯大学，蒙斯，比
利时[1]通讯作者：hadrien.melot@umons.ac.be

2026年3月31日

摘要。
极值图论在很大程度上依赖于探究图不变量之间的界与不等式，而图数量迅速发生组合爆炸，使这项任务复杂化。为帮助研究人员应对这一复杂性，人们开发了各种工具，但这些工具通常依赖启发式、概率性或非穷尽方法，以牺牲精确性换取可扩展性。*PHOEG*采取了不同的立场：它不做近似，而是坚持采用精确方法。

PHOEG 是一款交互式在线工具（*https://phoeg.umons.ac.be*），旨在帮助图论领域的研究人员和教育工作者。*PHOEG* 延续了其前身 *GraPHedron* 的精确几何方法，将图嵌入二维不变量空间并计算其凸包，其中各个面表示不等式，顶点则对应极值图。*PHOEG* 对这一方法进行了现代化改进和扩展，提供功能全面的网页界面和 *API*，并由一个大型数据库提供支持，其中收录了两两非同构图，包括所有 *10* 阶及以下的图。用户可以直观地通过选择一对不变量来定义不变量空间，应用约束和着色，可视化生成的凸多胞体，并轻松查看相应的绘制图。

本文详细介绍 *PHOEG* 的软件架构和新增的网页功能。此外，我们还展示了它在两个主要方面的实用价值：在研究方面，说明它能够快速发现猜想或猜想的反例；在教育方面，详细介绍如何将其融入大学课程，以促进学生探索经典图论原理。最后，本文简要综述了过去二十年来运用这一几何方法建立的极值结果和猜想。

关键词：化学图、基于度的拓扑指标、极值图。

1 引言

极值图论研究图不变量的界。图不变量是在同构下保持不变的值，例如阶、大小、色数或平均距离。这些问题

通常受一些约束，例如固定某些不变量的值。求出这些界以及实现这些界的极值图颇具挑战：图的数量增长极其迅速，仅 12 阶图就超过一千亿个。

为应对这一复杂性，多年来人们开发了多种计算工具。早期的尝试包括 Cvetkovic 等人提出的 Graph [13] 及其后继工具——Brankov 等人提出的 newGRAPH [32]。Fajtlowicz 于 1988年开发的 Graffiti [19], 利用启发式方法和预先计算的数据，自动生成了数千条猜想。Caporossi 和 Hansen 于 2000年推出的 AutoGraphiX [9], 则应用变邻域搜索来识别极值图候选对象。与此同时，House of Graphs [5, 12, 15] 等数据库也应运而生，为有趣的图提供了可搜索的存储库，使研究人员能够查询特定的不变量值，或搜索反例。这些工具已被证明很有价值，但它们有一个共同特点：并不穷尽所有可能性。无论采用启发式方法、抽样还是选择性搜索，它们都以牺牲精确性为代价来换取可扩展性。

M´elot 于 2008年提出的 GraPHedron [29], 采取了截然不同的策略：它不做近似，而是坚持采用精确的方法。它将给定阶数以内的所有图嵌入不变量空间，并计算它们的凸包，将各个面解释为不变量之间的不等式，将顶点解释为极值图。从历史上看，GraPHedron 在 House of Graphs 早期的发展中发挥了重要作用，因为它曾用于计算并将最早的一批图录入该数据库。然而，与某些同期工具不同，GraPHedron 本身从未更新过，这促使人们开发其后继工具 PHOEG（PHOEG Helps to Obtain Extremal Graphs 的递归缩写）。

PHOEG 首次在 2019 [16], 中介绍，秉持着同样的精确性目标。这一取舍是明确且预设的：PHOEG 运行于所有不超过 10 阶的两两非同构图之上，这是组合增长所限定的实际前沿。它将一个支持快速查询和计算的图数据库与名为 TransProof 的证明辅助模块相结合。自最初发布以来，我们大幅扩展了 PHOEG，以推动其普及使用（`https://phoeg.umons.ac.be`）。通过在研究和教育场景中的广泛应用，我们不断完善该工具，并开发了全面的网页界面和 API。

本文介绍了这些现代化改进，并通过对该平台的详细演示加以说明。第 2 节简要回顾 PHOEG 所构建于其上的几何方法。第 3 节详细介绍新的网页界面功能及其开发所采用的技术。第 4 节对多年来利用这一几何方法获得的极值结果进行小型综述，并通过具体示例说明 PHOEG 在研究中的实际应用。第 5 节详细介绍其在教育场景中的使用。最后，我们在第 6 节总结全文并讨论未来方向。

2 几何方法

本节介绍 PHOEG 背后的几何方法，该方法最初见于 GraPHe- dron [29]。我们首先介绍理解这一方法所需的一些基本数学定义。本文中，我们考虑简单无向图 $G = (V, E)$，其中 V 是顶点集， E 是边集。图 G 的阶 是其顶点数，记作 $n = |V|$；其大小 是边数，记作$m = |E|$。顶点 $v \in V$的度 （记作 $d(v)$）是与v关联的边数。对于本文未定义的图论标准符号，请读者参阅

Diestel [18]。

正如 Hansen 等人所述， [20], 极值图论中的许多结果都以图不变量之间的不等式来表示。这一观察指导了 GraPHedron 的设计，也仍然是 PHOEG 的核心原则。

PHOEG 使用的几何方法将简单无向图置于二维空间中，其中每个维度对应一个特定的图不变量。给定阶数的每个图都表示为空间中的一个点，其坐标是对该图计算得到的两个选定不变量的值。需要注意的是，空间中的单个点可能代表多个非同构图，因为这些图所选不变量对的取值完全相同。所有这些点的凸包构成一个凸多胞体。请记住，平面上有限点集的凸包 是包含这些点的最小凸集，其边界由面组成，也就是二维多边形的边。因此，这个凸多胞体的每个面都对应于不变量之间的一个线性不等式（通常形式为 $aX + bY \leq c$），而顶点则表示能够以紧确方式达到这些界的极值图。

图 1 展示了这样一个多胞体的示例。在此示例中，定义该空间的两个不变量分别是 X 轴对应的色数 （对顶点着色时，确保任意两个相邻顶点颜色不同所需的最少颜色数），以及 Y 轴对应的团数 （最大完全子图中的顶点数）。图中绘制的点代表所有 7 阶图。为说明一个点可能代表多个非同构图，请看图中的坐标：(1,1) 唯一对应于一个有 7 个顶点的空图，而 (7,7) 唯一对应于一个有 7 个顶点的完全图。相比之下，点 (2,2) 代表 87 个 7 阶非同构图，其中显著包含所有 11 个有 7 个顶点的非同构树。最后，这个多胞体直观地揭示了一个重要的不等式：图 G 的色数 $\chi(G)$ 总是大于或等于其团数 $\omega(G)$，即著名的关系 $\chi(G) \geq \omega(G)$。

除了观察特定阶下的不等式之外，这种几何方法的最终目标是获得适用于任意图的阶 n 的完整参数化多面体描述。当能够构造并在数学上证明这样一种一般描述时，便可得到一组最优线性不等式，用以刻画这两个不变量之间的关系。事实上，根据凸包的定义，其各个面构成了完整描述这种关系所需的最小边界线性不等式集合。对于若干对不变量，这种完整刻画已成功实现。例如，在 [29], 中，直径（所有顶点中最大的离心率）与图的边数之间的关系已得到刻画；在 [8] 中，斐波那契指标（稳定集的总数，其中稳定集是由两两不相邻的顶点组成的子集）与独立数（或稳定数，即最大稳定集的大小）之间的关系，也已分别针对一般图和连通图得到刻画。同样，连通图的独立数与图的边数之间的完整多面体描述也已在 [11]中得到证明。值得注意的是，后一结果正式解决了 Ore 在 1962 [31], 中提出的一个开放问题，该问题对应于经典 Tur´an 定理 [35] 的连通图版本。

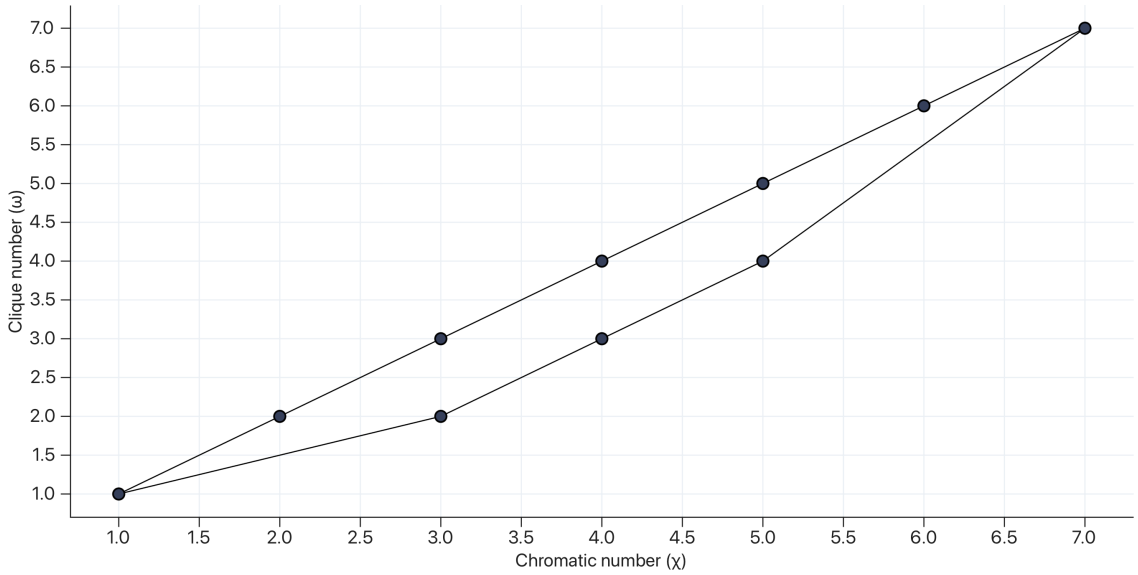


图 1：由所有 7 阶图构成的凸多胞体，以色数和团数作为维度

3 网页界面与 API

本节详细介绍 PHOEG 平台当前的架构和功能。第 3.1 节介绍底层软件栈。第 3.2 节全面概述网页界面的功能，而第 3.3 节则介绍可用于直接访问数据库的独立 API。

3.1 技术

多年来，我们的研究团队一直使用 PHOEG 核心数据库，但我们意识到，需要让更广泛的群体也能访问这一资源，尤其是那些不熟悉如何编写复杂 SQL 查询的研究人员。为此，我们着手开发专用的网页界面。

该平台采用现代化的三层架构，以确保各部分职责清晰分离：用于用户交互的前端、负责业务逻辑和查询处理的后端应用程序编程接口（API），以及用于可靠存储的关系数据库。

前端采用 TypeScript 和 React [30]，构建，利用其基于组件的架构，高效管理状态并动态更新 UI。为确保设计简洁、响应迅速且易于访问，界面大量使用 Chakra UI [2]，这一强大的组件库。

后端由使用 Rust [34] 和*rocket* 框架 [3]开发的 RESTful API 组成。该 API 充当中介，将用户在前端的操作转换为经过优化的数据库查询。值得注意的是，该 API 也可独立于网页界面供程序访问，详情见第 3.3 节。

数据层由 PostgreSQL 关系数据库 [33] 提供支持。它存储了约 3,400 万个两两非同构图的不变量值，包括所有阶数不超过

10 的图，以及其他较稀疏的图族，例如树或化学图（请注意，界面目前尚未提供阶数高于 10 的图）。为确保每个图都有唯一表示，数据库依赖 McKay 的 Nauty [28] 计算出的规范形式。目前，数据库包含约 50 个数值不变量和十余个布尔不变量。随着新的研究需求不断出现，我们会持续扩充这一集合，并诚邀用户建议添加新的相关不变量。

3.2 网站功能

本节详细介绍网页界面的核心功能，该界面可通过 `https://phoeg.umons.ac.be` 公开访问。用户工作流程在逻辑上分为两个主要阶段：定义不变量空间（第 3.2.1 节），以及直观地探索由此生成的多胞体和图（第 3.2.2 节）。

3.2.1 问题定义

访问主页后，用户首先需要配置数学问题，如图 2 所示。唯一的必做步骤是通过选择用于 X 和 Y 坐标轴的不变量来定义二维不变量空间。输入字段提供自动补全功能，帮助用户从大量可用不变量中进行选择（见图 3a）。定义好坐标轴后，系统会动态生成并显示相应的多胞体（见第 3.2.2 节）。

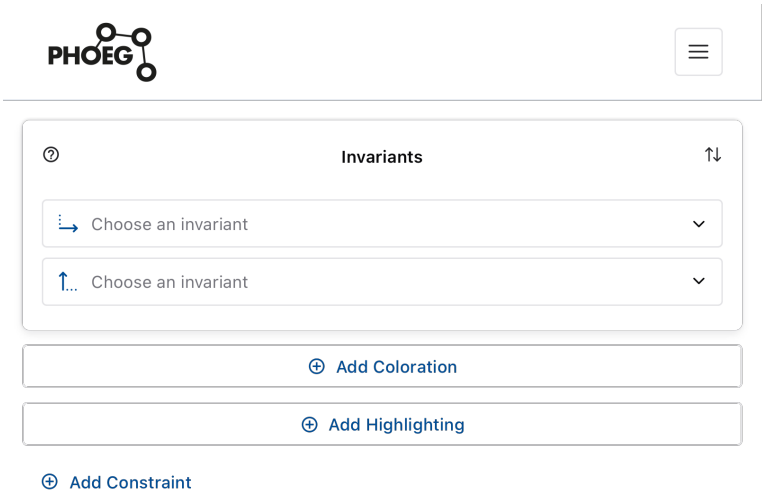
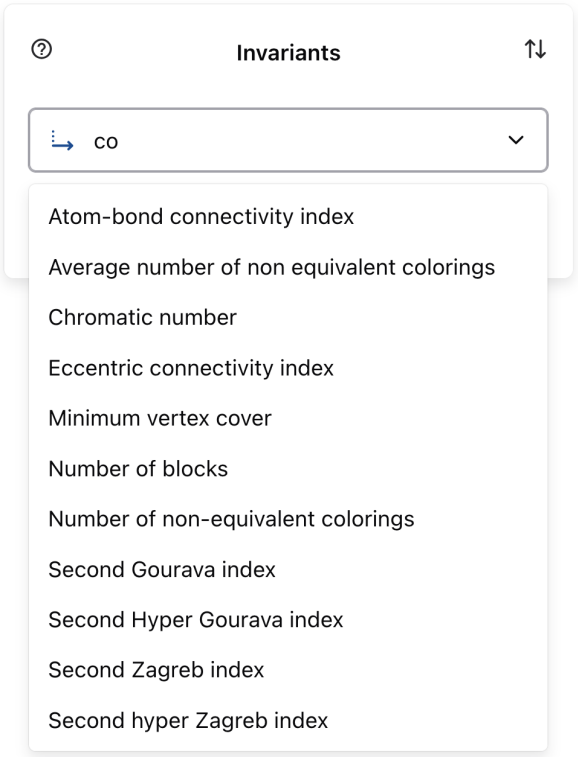


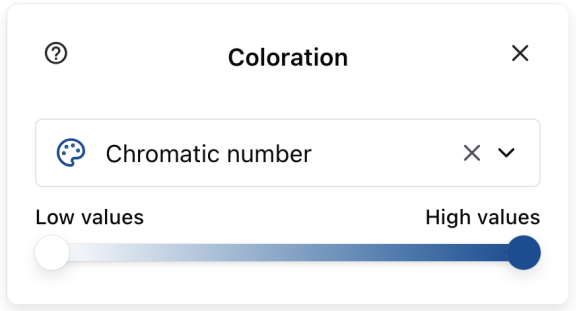
图 2：基本问题定义

为进一步细化探索，用户可以逐步添加三类可选参数：

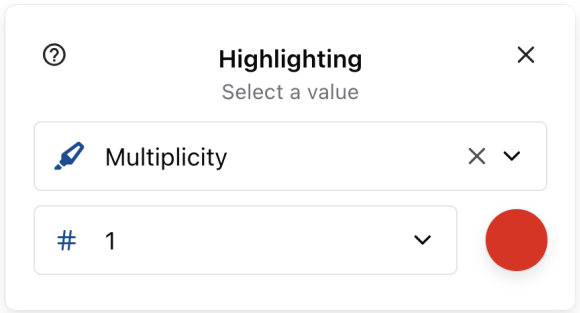
- **着色：**根据第三个所选不变量的取值，对多胞体顶点应用连续的颜色渐变。用户定义一种双色渐变，分别表示该不变量的最小值和最大值（图 3b）。



(a) X 轴的不变量输入字段



(b) 定义着色

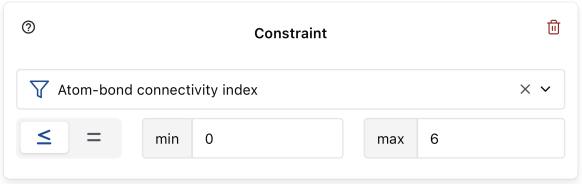


(c) 定义高亮

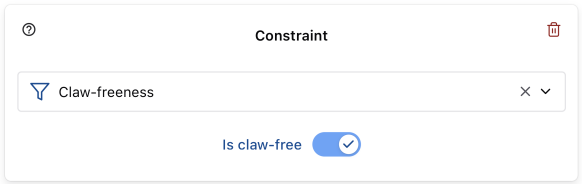
图 3 ：问题定义面板中的参数输入框概览 l.

- **高亮：** 隔离并以不同颜色标记严格符合所选不变量特定目标值的点（及其对应的绘制图）（例如，参见图 3c，其中表示非等价着色的平均数量为 2 的图的点（以及符合相同条件的绘制图）将标为红色）。

- **约束：** 用作数据集筛选器，将可视化的图限制为满足特定布尔条件（真/假）或数值界限（大于、小于或等于目标值）的图。图 4a 和图 4b 展示了这些约束定义框。



(a) 数值约束



(b) 布尔约束

图 4：约束定义框示例。

着色和高亮在实际应用中的示例将在下一节中提供。最后，值得注意的是，着色和高亮菜单中有一个特殊选项：重数。虽然重数本身并非数学图不变量，

但它是一种强大的可视化工具，可将颜色刻度（或高亮）映射到点的密度上——具体来说，就是位于同一个 $(x,\ y)$ 坐标上的两两非同构图的确切数量。这样，用户便能立即通过视觉区分稀疏区域（例如重数为 1 的点）和大量图重叠形成的密集枢纽。

3.2.2 问题显示

定义问题后，探索界面便会填充内容（图 5）。用户可以通过左上角的切换按钮，按关联图的阶筛选并重新排列多胞体的可视化内容（图 6）。可选择阶为 2 至 10 的多胞体，默认显示阶为 6 的多胞体。

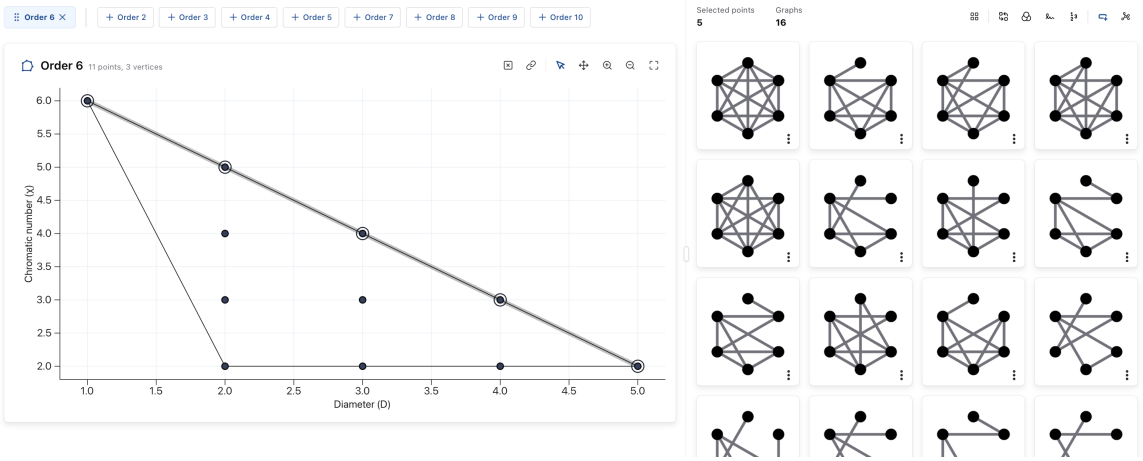


图 5：问题显示界面



图 6：阶选择

界面分为两个高度交互的面板。为确保在任何屏幕尺寸下都能获得最佳可用性，用户可以手动调整左右面板的相对宽度，所有多胞体和图形绘制都会自动缩放，以适应可用空间：

多胞体探索（左侧面板）：此部分显示由第 2 节所述方法构造、对应选定的阶的多胞体，并支持滚动浏览。坐标轴反映所选的不变量，同时提供元数据（例如点和顶点的数量）。用户可以通过缩放、平移，或同步不同阶的坐标轴来浏览空间，以便直接进行比例比较。交互是其核心功能：点击某个点即可选中该点，点击某个面则会自动选中其所有关联点。

图可视化（右侧面板）：此部分会动态绘制与左侧面板中所选点对应的图。为处理大型数据集，图会在滚动浏览时按需加载。图绘制模块提供丰富的自定义选项：

- **布局与渲染：**用户可以手动拖动顶点，也可以应用 8 种自动布局算法之一（例如图 5 所示的圆形布局，或图 7 所示的$cose$）。如有需要，用户可以拖动顶点来调整其位置。

- **图数据：**默认情况下，只显示图形绘制，但用户可以切换显示内容，以查看图签名、不变量值（图 8），或渲染补图（其中边与非边互换，并以绿色显示，见图 9）。

- **视觉提示：**可以根据顶点各自的度为其着色，以便立即了解图的结构。例如，图 7 中绘制的图会根据顶点的度为顶点着色（度为 1 的顶点为黄色，度为 2 的顶点为红色，依此类推）。

这些视觉设置可以全局应用于所有显示的图，也可以通过每个图下方的上下文菜单单独设置。

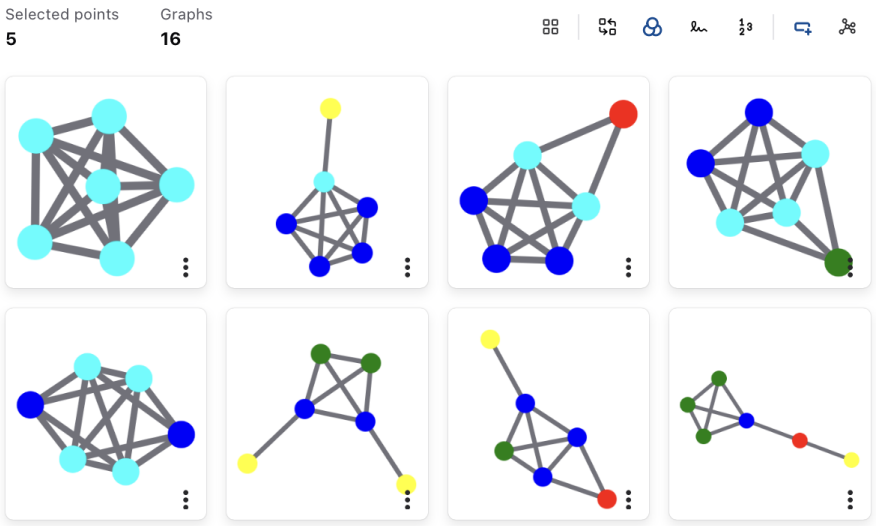


图 7：使用 $cose$ 算法进行布局，并根据顶点的度进行着色

此外，如果在前一步中定义了着色或高亮，两侧面板都会以可视化方式应用该设置。例如，图 10 展示了基于最大度的着色（即图中任一顶点所关联的边数的最大值），并在多胞体的各点上应用从白色到蓝色的渐变。如第 2 节所述，一个几何坐标可以代表多个非同构图。如果这些底层图在用于着色的不变量上取值不同，工具便无法指定单一颜色；相反，它会将该点绘制为菱形，以提醒用户存在这种差异，这一特征在同一图中清晰可见。为了正确理解图 11，我们先介绍两个概念。顶点 v 的离心率 $\varepsilon(v)$定义为图中 v 与任意其他顶点之间的最大距离。图 G 的离心连通指数（ECI）记作

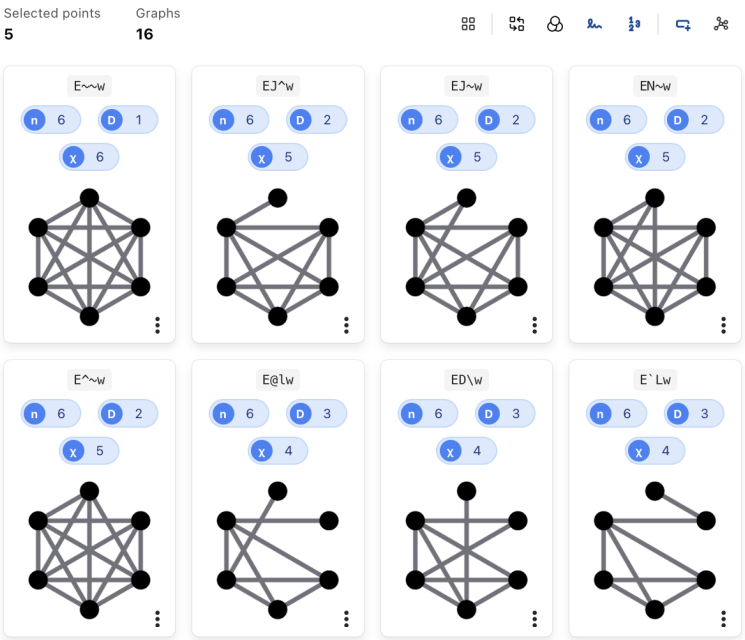


图 8：带有签名和不变量标注的图形渲染

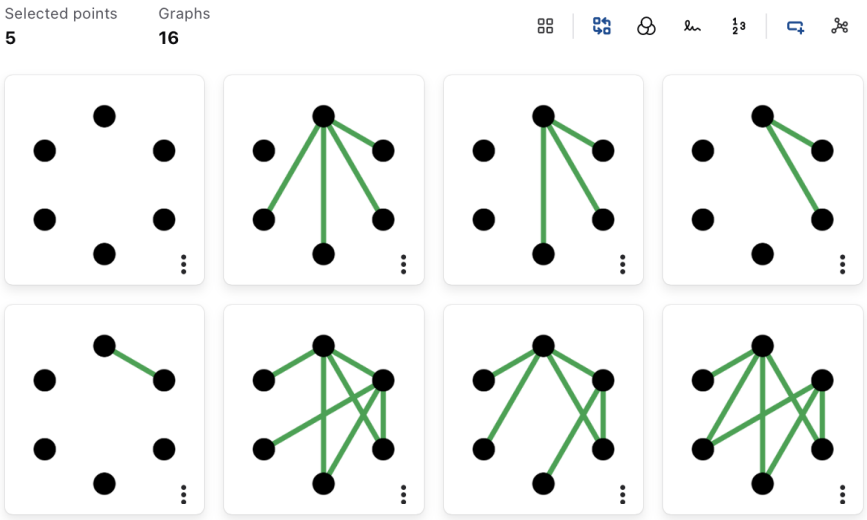


图 9：补图渲染

记为 $\xi^{c}(G)$，它是对所有顶点的度与其离心率的乘积求和，即 $\xi^{c}(G) = \sum_{v \in V\ (G)} d(v)\ \varepsilon(v)$。图 11 展示了一条应用于 8 阶图多面体的高亮规则，其中横轴为大小。具体而言，直径为 2 的图所对应的点以红色标记。借助这一功能，可以立即看出直径为 2 的图聚集在多胞体的上部区域。右侧面板也应用了此高亮规则，其中对应的

图形绘制以红色背景显示。在图 11 中，8 个顶点的完全图是唯一未高亮的图，因为其直径为 1。

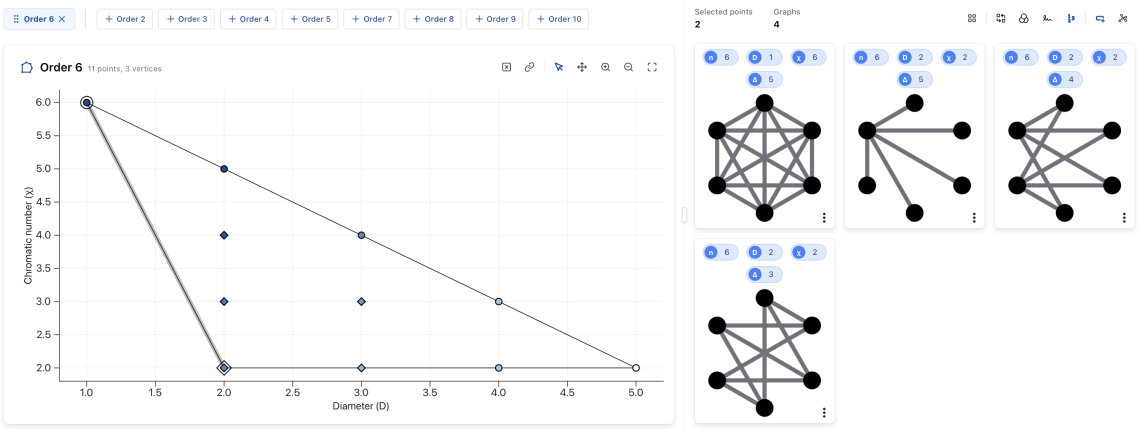


图 10：基于最大度的着色，采用从白色到蓝色的渐变

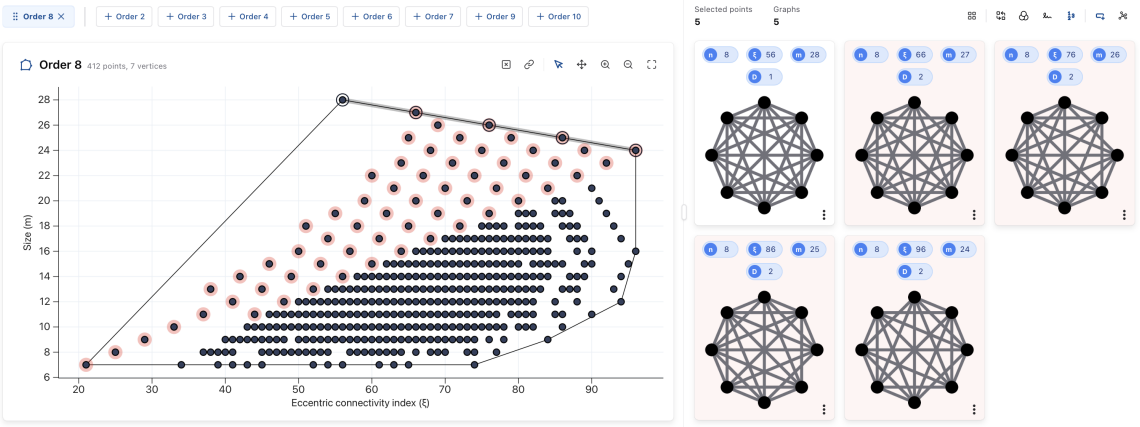


图 11：高亮直径为 2 的图

最后，网页界面的一个显著特点是，大部分会话状态都编码在 URL 中。这不仅包括完整的问题定义（所选不变量、应用的约束、着色和高亮参数），还包括显示的大部分当前状态：所选图的阶、多胞体中选中的点、是否启用了坐标轴同步，以及当前启用的图可视化选项。这带来了若干实际优势：界面天然具备抗刷新能力，重新加载页面即可准确恢复会话的原有状态。此外，分享问题也变得轻而易举。为简化这一过程，问题定义面板中设有专用的 **分享配置**按钮。点击该按钮后，完整的状态编码 URL 会自动复制到用户的剪贴板。任何人打开此链接，都将看到完全相同的分析视图，因此它非常适合用于协作研究、保存进度，或直接链接到学术论文中的特定数据集。例如，访问此链接即可获得图 11 所用的确切配置。

3.3 API

除了网页界面之外，PHOEG 还通过独立的 RESTful API 提供其核心功能。此程序化访问方式专为希望将 PHOEG 丰富的数据库整合到自身计算工作流、脚本或自动化流水线中，而无需手动操作界面的研究人员设计。

API 充当 PostgreSQL 数据库的桥梁，使用户能够通过标准 HTTP 请求执行复杂查询。数据通常以 JSON 格式交换，从而确保与 Python 或 R 等大多数现代编程语言兼容。API 的主要功能包括：

- **数据检索：** 通过图的规范签名获取指定图的不变量值。

- **高级筛选：** 检索位于多胞体特定点上的各个图。给定一对定义两个坐标轴的不变量、图的阶，以及一系列 (x, y) 坐标，系统会返回阶数与这些坐标对应的不变量值相匹配的所有图。还可以通过对任意不变量设置范围约束进一步缩小结果集，并选择添加其他不变量的值。也可以指定一个着色不变量，其值随后会附加到每个返回的图上，以支持界面中的着色功能。

- **导出：** 以 *graph6* 标准格式获取图数据 [27]，以便进行本地分析或用于其他图论软件。

当前 API 的文档见 `https://phoeg.umons.ac.be/phoeg/api/docs`。

4 在研究中使用 PHOEG

PHOEG 可应用于多种研究场景。它是对问题进行初步考察的绝佳起点，有助于研究人员建立直觉。尤为重要的是，它有助于提出新的猜想（详见第 4.1 节），发现已有猜想的反例（如第 4.2 节所示），甚至能为形式证明提供帮助（详见第 4.3 节）。

4.1 寻找猜想

PHOEG 的可视化和几何特性是提出新数学假设的强大催化剂。通过将不变量空间可视化，并明确识别位于边界面上的图，研究人员即使只能考察阶较小的图，也能获得关键见解。这种经验观察往往让人意外地容易推导出任意阶n极值图的结构性质，进而推广相应的不等式。在实践中，计算并显示阶数依次递增的图所对应的多胞体时，人们常常会发现，它们的整体几何形状在结构上保持一致。这些反复出现的多面体模式会立即吸引观察者的注意力，大大 erleichtert 顶点坐标的外推以及一般化参数猜想的提出。

图12 展示了这一现象：其中显示了阶为 6、7 和 8 的图所对应的多胞体，并将独立数 α 与大小 m相对应。连续这些阶数下，多胞体的几何形状显然保持一致。通过与这些多胞体的下边界交互——这对应于在给定独立数时最小化边数的问题——用户可以轻松查看相应的极值图。仔细考察后很快便会发现，这些顶点始终对应 Tur´án 图（由大小均衡的团的不相交并构成），与 Tur´án [35]确立的著名结果完全吻合。

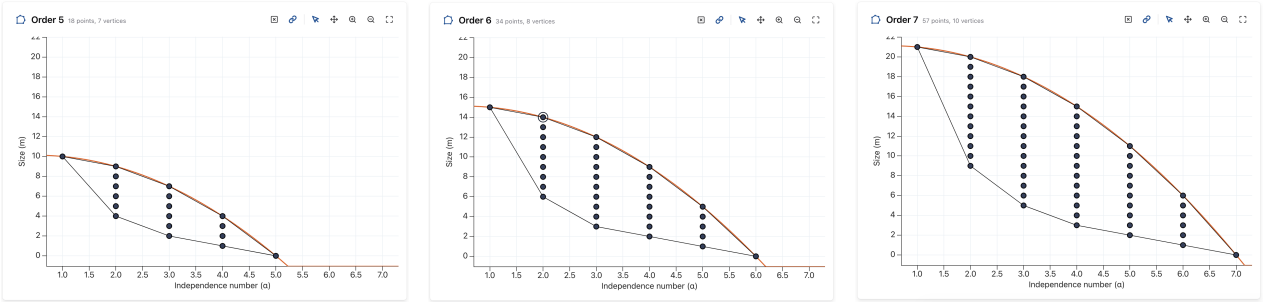


图12：阶为6、7和8的图中，独立数与边数的关系。

为进一步支持猜想的提出与检验，PHOEG 添加了绘图函数功能。用户可以通过定义关联 X 轴和 Y 轴不变量的公式，将自定义代数曲线叠加到二维空间中，并可选择纳入图的阶 n。例如，图12中的多胞体下边界由 Tur´an 图构成，而上边界则表示在独立数 α 固定时对大小 m 的最大化。利用这一绘图功能，我们叠加了函数 $m = \frac{1}{2}(n^2 - n - \alpha^2 + \alpha)$（在图12中以红色显示）。这条曲线与上侧的极值顶点完美吻合，这些顶点对应于完全分裂图——其顶点集可划分为一个团和一个独立集，且团中的每个顶点都与独立集中的每个顶点相邻。

这种核心方法论在推动研究方面有着长期而卓有成效的实践记录。其前身 GraPHedron 自 2005 年起由我们的研究团队内部使用，随后在 2010 年代中期逐步被 PHOEG 取代。当这些通过几何方法推导出的猜想成功得到证明时，它们会直接推动极值图论这一更广泛领域的发展。具体而言，通过 GraPHedron 和 PHOEG 生成并加以完善的假设，已经促成了数篇同行评审出版物。值得注意的例子包括关于独立数 $[7, 8, 11]$, 非等价着色的数量 $[1, 24]$, 离心连通指数 $[17, 21]$, 对极大匹配启发式算法近似比的分析 $[10]$,化学图论中的极值性质 $[4, 22]$, 以及涉及平均着色数和平均匹配数的不变量的研究 $[23, 25, 26]$。所有相关出版物的完整且持续更新的列表均维护在 PHOEG网站上。

4.2 寻找反例

除了原创发现之外，PHOEG 还是验证现有数学论断的高效平台。如果一个已知猜想的表述方式与我们的二维几何方法相兼容——通常涉及界或不变量之间的关系——就可以在界面中对其进行系统测试。通过生成相关多胞体，研究人员可以迅速为该猜想收集实证支持、完善其提出的界，或通过发现违反假设不等式的意外点而直接反驳该猜想。

举一个具体例子：2014年，Zhang 等人 [36] 提出了一个关于离心连通指数（ECI）的猜想。在此背景下，对于给定的值（n，m），他们定义

$$d = \left\lfloor \frac{2n + 1 - \sqrt{17 + 8(m - n)}}{2} \right\rfloor$$

并将 $E_{n,\ m}$ 定义为由一个团 K_{n-d-1} 和一条路 $P_{d+1} = v_0 v_1 \dots v_d$ 构成的图：将团中的每个顶点分别与 v_d 和 v_{d-1} 相连，并将团中的 $m - n + 1 - \binom{n-d}{2}$ 个顶点与 v_{d-2} 相连。该猜想如下：

猜想 1 (Zhang、Liu 和 Zhou，[36])。设 $d_{n,\ m} \geq 3$。那么，在所有具有 n 个顶点和 m 条边的连通图中，$E_{n,\ m}$ 是离心连通指数最大的唯一图。

作者证明，对于某些 n 和 m，该猜想成立。然而，借助 PHOEG，我们可以轻松找到一个反例。图 13 展示了这个反例。所选点对应于 $n = 7$ 和 $m = 15$，得到 $d_{7,\ 15} = 3$。该点对应两张 ECI 为 65 的图。右侧的图是 $E_{7,\ 15}$，但另一张图与 $E_{7,\ 15}$ 不同构，这表明 $E_{7,\ 15}$ 并非所有具有 7 个顶点和 15 条边的连通图中离心连通指数最大的唯一图。

4.3 证明帮助

除了提出猜想之外，直观地观察极值点及其对应的图结构，还能为形式证明提供关键直觉，尤其是对于变换证明而言。在这种数学方法中，通过逐步修改图，使其达到极值构形，同时严格增加或减少给定的不变量。

为支持这一方法，Devillez 在其博士论文 [14] 中开发了一个名为 TransProof 的专用计算模块。尽管 TransProof 目前尚未在 PHOEG 公共网页界面中提供，但其运行机制与该项目的生态系统密切相关。TransProof 的主要功能是针对指定的一组图和结构变换，计算一个元图 。在这个元图中，顶点表示图本身，而有向弧表示所应用的变换。

计算完成后，这个元图会存储在数据库中，使研究人员能够运行复杂查询，以检验和完善其证明策略。例如，用户可以通过确保不存在非改进弧，查询数据库以检查某个拟议证明思路是否存在反例。此外，数据库查询语言的灵活性还支持更高级的

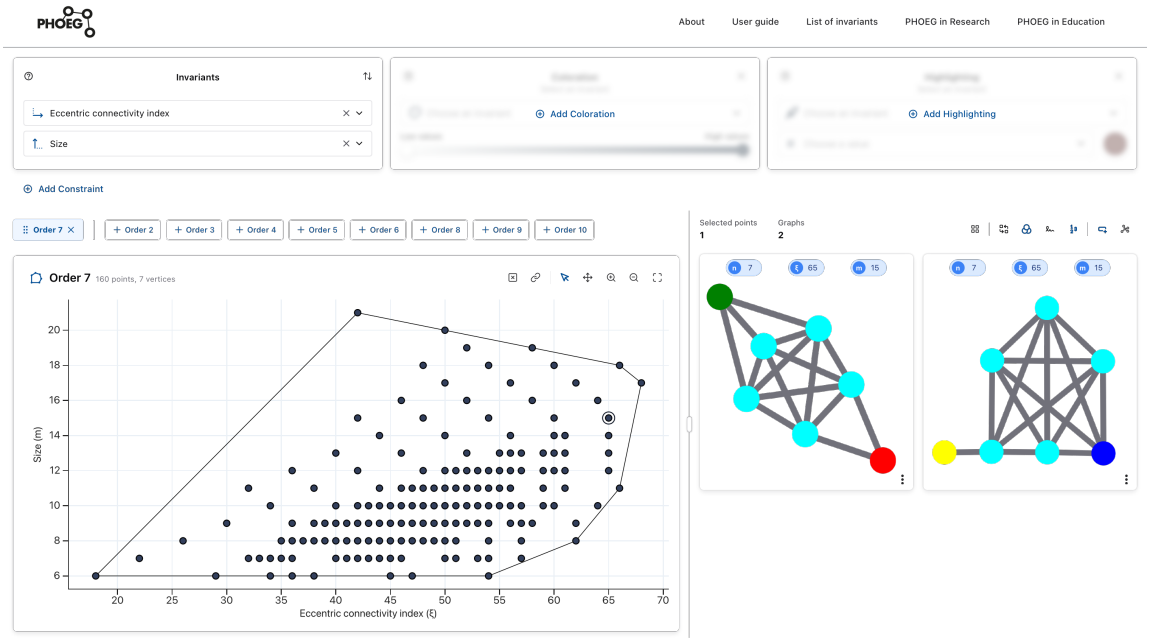


图 13：张氏猜想的反例： $n = 7$， $m = 15$， $d = 3$

拓扑检查，例如验证每个非极值图是否至少拥有一条严格改进弧，或确定某些非极值图是否无法通过所考虑的变换得到改进。

5 在教育中使用 PHOEG

除了在研究中的应用外，PHOEG 也积极用于蒙斯大学（UMONS）和蒙特利尔理工学院的教学，尤其是在高阶图论课程中。

为帮助学生和新研究人员顺利入门，该平台提供了一套全面的内置交互式教程。用户可直接在界面的帮助部分访问这些分步指南，并按照自己的节奏熟悉工具。通过亲自动手操作的引导式沙盒，用户可以学习核心几何概念、如何应用数据集约束和着色，以及如何有效使用多胞体面板和图面板，然后再着手完成更复杂的无指导任务。

例如，在 UMONS 的《图与人工智能》课程中，学生完成这些入门教程后，会通过一场实践课进一步探索该工具，使用 PHOEG 的网页界面探索并解决极值图论中的经典问题。

布置给学生的第一个问题基于一场虚构的警方调查，涉及阿尔·卡彭，并作为课程中较早介绍的问题的直接延续。在那个较早的问题中，一名督察遇到了七名黑手党成员：约翰·戈蒂、乔·阿多尼斯、阿尔伯特·阿纳斯塔西娅、利博里奥·贝洛莫、托马索·布谢塔、朱塞佩·卡利基奥和阿尔

·卡彭。他们每个人都说出了自己有生意往来的对象人数，只有阿尔·卡彭故意含糊其辞，只承认有“超过 3 个”这样的对象。学生此前运用握手引理证明，所有度的总和必须是偶数，因此阿尔·卡彭恰好有 5 个生意往来对象，由此得到完整的度序列 2，3，3，3，4，4，5。

调查此后取得了进展：警方几乎已经证明阿尔·卡彭犯有谋杀罪，但他声称案发时自己和阿尔伯特·阿纳斯塔西娅在一起，以此为自己提供不在场证明。另有一条新证据浮出水面：彼此没有商业关系的人数最多的一组，其大小为 2。用图论术语来说，这条线索旨在告知他们，表示这一情形的图的独立数为 2。这个谜题的目标是确定阿尔·卡彭（度为 5 的顶点）是否可能与阿尔伯特·阿纳斯塔西娅（度为 2 的顶点）存在商业关系。

将这些约束应用于 PHOEG 后，学生发现，只有一张图符合完整描述。由于这张唯一的图恰好包含一个度为 5 的顶点和一个度为 2 的顶点，他们可以直接查看其结构，判断是否有一条边连接这两个特定顶点，从而确定阿尔·卡彭和阿尔伯特·阿纳斯塔西娅是否确实存在商业关系。

在后续练习中，学生需要使用 PHOEG，根据最大度 对连通图的色数 提出一个上界猜想。教学目标是引导他们通过实验重新发现布鲁克斯定理 [6], ，或至少得出与之非常接近的结果。这条基础定理指出，对于任何既不是完全图 也不是奇圈的连通图，其色数至多为其最大度。

最后一项练习要求学生探索给定大小 m 的一般图，找出其中非等价着色数量最少的图——也就是说，找出有效的顶点着色中真正彼此不同、无法仅通过置换颜色标签相互转换的着色。与前面的题目不同，要准确表述关于这些推定的极值图的猜想要复杂得多，主要是因为其形式化描述涉及三角数。学生会了解到，关于这些特定图的猜想最初是在 2014年借助 PHOEG 发现的。然而，尽管人们持续努力试图证明或推翻该猜想，它至今仍是一个未解决的问题。从教学角度来看，这项练习极具价值。它向学生展示了科学研究开放探索的特性，也完美体现了极值图论中的一个基本事实：像 PHOEG 这样的计算工具能让人出乎意料地轻松地通过实验发现猜想，但要给出严格的数学证明，仍可能是一项艰巨的挑战。

6 结论

本文介绍了 PHOEG，这是一款交互式在线工具，旨在支持极值图论领域的研究与教学。PHOEG 采用精确的几何方法，将图嵌入二维不变量空间并计算其凸包，帮助用户直观地探索图不变量之间的关系、识别极值图，并提出猜想不等式。

我们详细介绍了该平台的现代架构，包括功能全面的网页界面——提供问题定义、交互式多面体可视化和高度可定制的

图形渲染——以及用于以编程方式访问数据库的独立 RESTful API。此外，我们展示了 PHOEG 在两个主要领域的实际影响。在研究方面，我们说明了它在促进新猜想的发现、迅速识别反例，以及为形式化数学证明提供结构性直觉方面的能力；这实际上也简要综述了几项借助这种几何方法取得的成果。在教育方面，我们重点介绍了该工具在蒙斯大学和蒙特利尔理工学院的高级图论课程中的成功应用；学生们积极使用该工具，通过实证重新发现经典定理，并深入探讨未解决的数学问题。

展望未来，我们计划通过计算更高阶的图并整合更多不变量，持续扩展底层数据库，并积极听取科学界的建议。特别是，若将范围限定在树或化学图等特定图类，由于这类图的组合爆炸要容易控制得多，我们便能将数据库扩展到更高的阶。最终，我们希望 PHOEG 能持续发展，成为图论领域研究人员和教育工作者均可便捷使用且不可或缺的资源。

参考文献

[1] Absil, R., Camby, E., Hertz, A., and Mélot, H. 关于阶为 n、最大度为 n-3 的图的非等价着色数量的一个紧下界。《离散应用数学》234（2018），3–11.[2] Adebayo, S., and Chakra UI Team. Chakra UI：用于 React 应用的组件库。 https://chakra-ui.com/，2026年。访问日期：2026年3月27日。[3] Benitez, S., and Rocket Contributors. Rocket：用于 Rust 的 Web 框架。 https://rocket.rs/，2026年。访问日期：2026年3月27日。[4] Bonte, S., Devillez, G., Dusollier, V., Hertz, A., and Mélot, H. 最大度不超过 3 的极值化学图及其 33 种基于度的拓扑指数。《MATCH 数学与计算化学通讯》95，1（2026），193–231.
[5] Brinkmann, G., Coolsaet, K., Goedgebeur, J., and Mélot, H. House of Graphs：一个有趣图数据库。《离散应用数学》161，1-2（2013），311–314.
[6] Brooks, R. L. 关于网络节点的着色。《剑桥哲学学会数学学报》（1941），第 37 卷，剑桥大学出版社，第 194–197 页。[7] Bruyère, V., Joret, G., and Mélot, H. 具有给定稳定数且稳定集数量最少的树。《图与组合》28，2（2012），167–187。
[8] Bruyère, V., and Mélot, H. 图的斐波那契指标与稳定数：多面体研究。《组合优化杂志》18，3（2009），207–228。

[9] Caporossi, G., and Hansen, P. 用于极值图的变邻域搜索：1. autographix系统。《离散数学》212，1-2（2000），29–44.[10] Cardinal, J., Labbé, M., Langerman, S., Levy, E., and Mélot, H. 极大匹配启发式算法的紧确分析。《国际计算与组合学会议》（2005），施普林格出版社，第 701–709 页。[11] Christophe, J., Dewez, S., Doignon, J.-P., Fasbender, G., Grégoire, P.,Huygens, D., Labbé, M., Elloumi, S., Mélot, H., and Yaman, H. 图不变量间的线性不等式：利用 graphedron 揭示最优关系。《网络》52，4（2008），287–298.[12] Coolsaet, K., D'hondt, S., and Goedgebeur, J. House of Graphs 2.0：一个有趣图及更多内容的数据库。《离散应用数学》325（2023），97–107.[13] Cvetković, D., Kraus, L., and Simić, S. 用计算机探讨图论 I：图论算法的实现／与计算机探讨图论 I：图论算法的实现。《电气工程学院出版物：数学与物理系列》（1981），100–104.[14] Devillez, G. 极值图论中的变换证明。博士论文，蒙斯大学，2022年。[15] Devillez, G., D'hondt, S., and Goedgebeur, J. House of Graphs 中的知识管理。arXiv 预印本 arXiv:2603.23070（2026）。[16] Devillez, G., Hauweele, P., and Mélot, H. Phoeg 有助于获得极值图。《2018年运筹学研究进展：德国运筹学学会（GOR）年度国际会议精选论文集，比利时布鲁塞尔，2018年9月12日至14日》（2019），施普林格出版社，第 251–257 页。[17] Devillez, G., Hertz, A., Mélot, H., and Hauweele, P. 具有固定阶和固定悬挂顶点数的图的最小离心连通指数。《南斯拉夫运筹学杂志》29，2（2019），193–202.[18] Diestel, R. 《图论》，第 6 版。施普林格出版社，2025年。[19] Fajtlowicz, S. 关于 Graffiti 猜想。《离散数学年刊》第 38 卷。爱思唯尔，1988年，第 113–118 页。[20] Hansen, P., Aouchiche, M., Caporossi, G., Mélot, H., and Stevanovic, D.图论中的有趣猜想有哪些形式？DIMACS离散数学与理论计算机科学丛书 69（2005），231.[21] Hauweele, P., Hertz, A., Mélot, H., Ries, B., and Devillez, G. 具有给定直径的图的最大离心连通指数。《离散应用数学》268（2019），102–111。

[22] Hertz, A., Bonte, S., Devillez, G., Dusollier, V., Mélot, H., and Schindl,D. 算术-几何指数的极值化学图。《MATCH 数学与计算化学通讯》93, 3（2025年），791–818。[23] Hertz, A., Bonte, S., Devillez, G., and Mélot, H. 图中极大匹配的平均大小。《组合优化杂志》47, 3（2024年），46。[24] Hertz, A., and Mélot, H. 统计图的非等价顶点着色数量。《离散应用数学》203（2016年），62–71。[25] Hertz, A., Mélot, H., Bonte, S., and Devillez, G. 图的非等价着色中平均颜色数的下界与性质。《离散应用数学》335（2023年），69–81。[26] Hertz, A., Mélot, H., Bonte, S., Devillez, G., and Hauweele, P. 图的非等价着色中平均颜色数的上界。《图与组合》39, 3（2023年），49。[27] Mc Kay, B. Graph6 格式。http://cs.anu.edu.au/bdm/data/formats.html。[28] McKay, B. D., and Piperno, A. 实用图同构，II。《符号计算杂志》60（2014年），94–112。[29] Mélot, H. 图不变量之间的面定义不等式：GraPHedron 系统。《离散应用数学》156, 10（2008年），1875–1891。
[30] Meta Platforms, Inc. React：用于网络和原生用户界面的库。 https://react.dev/，2026年。访问日期：2026年3月27日。[31] Ore, O. 图论。载于《学术讨论会出版物》（1962年），美国数学会。[32] Stevanovic, D., and Brankov, V. 新图论入门。《墨西拿数学研讨会纪要》第二辑25（2003年），9。
[33] The PostgreSQL Global Development Group. PostgreSQL：开源关系数据库。 https://www.postgresql.org/，2026年。访问日期：2026年3月27日。
[34] The Rust Project Developers. Rust 编程语言。 https://www.rust-lang.org/，2026年。访问日期：2026年3月27日。[35] Turán, P. 图论中的一个极值问题。《数学与物理文摘》48，436-452（1941年），61。[36] Zhang, J.-b., Liu, Z.-z., and Zhou, B. 图的最大离心连通指数。《应用数学——中国高校学报》29, 3（2014年），374–378。