arXiv:2603.27436v1 [math-ph] 28 Mar 2026

阿贝尔 Kitaev 模型的 KMS态全集

Danilo Polo Ojito 和 Emil Prodan

摘要。我们首先证明，由阿贝尔 Kitaev 模型的顶点和面算子生成的子代数 $\mathcal{C}$ 是准局域可观测量 UHF 代数 $\mathcal{A}$的一个 C*-对角子代数。这使我们能够使用与 C*-包含$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{A}$相关联的 Weyl 群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$；该群胚为我们提供了 $\mathcal{A}$ 的一种重要表示，将其表示为群胚 C*-代数，其中模型的动力学由群胚 1-余循环 c_H生成。借助该群胚的 (c_H, β)-KMS测度概念，我们确定了模型的全部 KMS态，并证明其在 $\beta \in [0, \infty)$时的唯一性。此外，我们证明其在 $\beta \to \infty$ 处的极限存在，且与模型唯一的无挫折基态重合。

2020年数学主题分类：主要分类：46L55, 82B10；次要分类：37A55, 22A22, 46L05。**关键词**：量子双模型、*Weyl* 群胚、*KMS*态、 C*-对角子代数

目录

1. 引言1 2. C*-阿贝尔Kitaev模型生成的对角子代数3 2.1. 阿贝尔Kitaev模型3 2.2. 局域相互作用的交换代数5 2.3. C*-阿贝尔Kitaev模型的对角子代数10 3. 阿贝尔Kitaev模型的 Weyl 群胚11 4. KMS态全集13 4.1. KMS态13 4.2. KMS测度14 4.3. KMS态集合15 声明21 参考文献21

1. 引言

在其颇具影响力的论文中，A. Kitaev 提出了量子双模型，这是一类定义在二维曲面三角剖分上的拓扑有序量子自旋系统 [11]。这些模型的输入数据仅为一个有限群 G，Kitaev 基于此构造了一个由对易投影组成的局域哈密顿量，其基态

日期：2026年3月31日。

呈现长程纠缠，并支持具有编织（任意子）统计、由量子双代数的表示范畴描述的（准）粒子激发 $\mathscr{D}(\mathsf{G})$ [4, 12, 24, 18, 9]。另一个重要特征是其拓扑性质：基态空间简并取决于底层曲面的拓扑 [11]。

当曲面与二维平面重合时，人们在理解这些模型低温下的平衡态方面已取得显著进展。在这种情况下，局部使能量最小化的基态是非简并的，因此存在一个唯一的无挫折基态，它与其余谱之间由谱隙隔开 [11, 18, 7]。然而，在无限体积极限下，可能会出现其他基态，此时无挫折条件不再成立。阿贝尔情形已得到完整理解：无限体积基态流形分解为 $|\mathsf{G}|^2$ 个不同的扇区，分别对应不同类型的阿贝尔任意子（即超选择扇区） [6]。最近，这一结果在博士论文[10] 中被推广到非阿贝尔情形，其中构造了一族由量子双 $\mathscr{D}(\mathsf{G})$ 的表示标记的基态。对于这族基态是否穷尽了非阿贝尔情形下的全部基态，目前仍是一个未解决的问题。

关于正温度下的平衡态，也就是 KMS态，目前所知甚少。在 [1], 作者分析了最简单的情形 $\mathsf{G} = \mathbb{Z}_2$，并为任意逆温度 β下存在唯一 KMS态提供了有力证据。他们的形式化论证依赖于将问题约化到由环面码的星算子和面算子生成的交换子-C^*-代数 $\mathcal{C}$，由此揭示了它与自由伊辛模型之间的联系。后者模型的已知结果意味着，环面码在有限 β下的 KMS态是唯一的。据我们所知，除$\mathsf{G} = \mathbb{Z}_2$ 情形外，尚无相关结果。

参考文献 [1]使我们认识到 C^*-包含对于分析 Kitaev 模型的重要性，尤其是将 $\mathcal{C}$嵌入准局域可观测量的 C^*-代数 $\mathcal{A}$。在 [21], 中，我们指出，已有成熟的理论框架 [16, 22] 可用于研究这类 C^*-包含：如果 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$的一个 C^*-对角子代数，那么后者可以表示为某个群胚的 C^*-代数，其单位空间与 $\mathcal{C}$的盖尔范德谱重合。在本研究中，我们证明，对于一般的阿贝尔Kitaev模型，确实如此。此外，我们结合 Komura 的一项结果 [13] 以及阿贝尔 Kitaev 模型所生成的动力学逐点保持 $\mathcal{C}$ 不变这一事实，证明该动力学是由群胚 1-余循环诱导的。这一发现进而使我们能够将 [1] 中的论证置于恰当且更一般的背景之下。事实上，所提及群胚的特征以及 J. Renault 的一项结果 [23] 确保了，$\mathcal{A}$ 上的任意 KMS态均由 $\mathcal{C}$上的 KMS测度诱导。我们设计了一种算法来计算这些测度，并最终证明，对于一般有限阿贝尔群 G，在任意逆温度 $\beta \in [0, \infty)$下，KMS态的存在性和唯一性均成立。我们结果的一个重要推论是，在零温极限 $\beta \to \infty$下，KMS态族 $(\mathfrak{s}_\beta)_{\beta \in [0,\infty)}$ 收敛到唯一的无挫折基态。

最后我们指出，利用佐恩引理，任何阿贝尔子代数 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$都可以嵌入某个极大˜阿贝尔子代数 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 。这表明，原则上，本研究中发展的技术或许可以推广到由对易投影生成的任意模型。然而在实践中，确定这样的极大阿贝尔子代数并非易事，因为这需要构造一个极大的对易可观测量族。目前正在研究的一个特别有趣的方向是非阿贝尔基泰夫模型，其对易关系更为复杂。

致谢：本研究由美国国家科学基金会通过资助项目 CMMI-2131760 提供支持，并由美国陆军研究办公室通过合同 W911NF-23-1-0127 提供支持。作者感谢 Nigel Higson 和 Jaime Gomez 富有成效的讨论。

2. C^*-对角子代数由阿贝尔Kitaev模型生成

本节第一部分介绍阿贝尔 Kitaev 模型的几何与代数结构，以及基本算子，例如顶点局域算子、面局域算子和哈密顿量本身。本节第二部分聚焦于由顶点算子和面算子生成的交换子-C^*-代数，并详细分析其纯态空间。本节最后一部分将证明，这个交换子-C^*-代数是准局域可观测量代数的 C^*-对角子代数。

2.1. 阿贝尔 Kitaev 模型。我们考虑正方格点 $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^2$上的阿贝尔Kitaev模型 [11] ，其边集 e 和顶点集 v 分别记为 E 和 V，并赋予离散拓扑。我们用 $e \ni v$ 表示边 e 从顶点 v 出发。在 E 上固定一种自然定向：所有竖直边均指向上方，水平边均指向右方，见图 2.1。对偶图 $\mathcal{L}$同样发挥着重要作用，并赋予自然的对偶定向。$\mathcal{L}$ 的面将按逆时针方向定向，并与 $\mathcal{L}$的顶点˜相对应。记号 $e \in \tilde{v}$ 表示边 $e \in E$ 属于面 $\tilde{v}$的˜边界。此外， $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$ 将绘制在同一平面上，以便讨论诸如 $\rho \cap \tilde{\rho} \neq \emptyset$ 这类涉及直接格与对偶格路径的命题。我们用 $\mathcal{K}(X)$表示拓扑空间 X的紧子集族，并用 1_S 表示子集 $S \subseteq X$的示性函数。

设 G 是一个非对偶、有限阿贝尔群，并记为 G 是一个非对偶、有限阿贝尔群，并记为 $\widetilde{G}$。其是加法非对偶。每条边 $e \in E$，都带有有限维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_e = \ell^2(G)$ 和矩阵代数$\mathcal{A}_e = \mathbb{B}(\ell^2(G)) \simeq M_n(\mathbb{C}), n = |G|$。对于任意 $\Lambda \in \mathcal{K}(E)$，我们可以定义有限希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\Lambda := \bigotimes_{e\in\Lambda} \mathcal{H}_e$ 以及作用于 $\mathcal{H}_\Lambda$上的线性算子 C^*-代数 $\mathcal{A}_\Lambda = \mathbb{B}(\mathcal{H}_\Lambda)$ 。局域可观测量代数由 $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} := \bigcup_{\Lambda\in\mathcal{K}(E)} \mathcal{A}_\Lambda$ 给出，并具有自然嵌入 $a \mapsto a \otimes \mathbf{1}_{\Lambda\setminus\Lambda'}$ （对于 $\Lambda' \subset \Lambda$）。该代数的 C^*-闭包称为可观测量的拟局域代数，记作 $\mathcal{A}$。显然，它同构于 UHF 代数 M_{n^∞}。

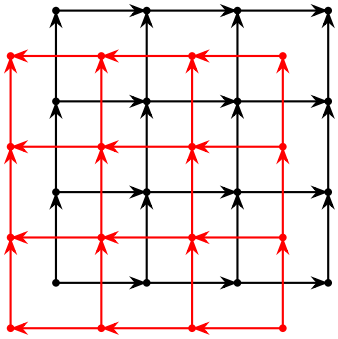


图 2.1。黑色箭头表示格 $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^2$ 及其选定的˜取向，而对偶格 $\mathcal{L}$ 则由红色箭头表示。

对于任意元素 $g \in G$，我们用 $\bar{g}$表示其逆元。考虑作用于 $\ell^2(G)$上的酉算子：

$$T_g|h\rangle = |gh\rangle, \qquad M_\chi|h\rangle = \chi(h)|h\rangle, \qquad h, g \in G,\ \chi \in \widetilde{G}$$

它们满足以下关系

$$T_g^n = \mathbf{1} = M_\chi^n, \qquad T_g M_\chi = \chi(\bar{g}) M_\chi T_g \tag{2.1}$$

它们以标准方式定义了 $\mathcal{A}$ 中的局部元素 $T_g^{(e)}$和 $M_\chi^{(e)}$，对任意 $e \in E.$ 均成立。对于 $\Lambda \in \mathcal{K}(E)$，$\Lambda$ 上的 G-连接是一个映射 $c\colon \Lambda \to G.$。我们用 $\mathfrak{C}_G(\Lambda)$ 表示 Λ上所有G-连接的集合，并令

$$\mathfrak{C}_G(E) := \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{K}(E)} \mathfrak{C}_G(\Lambda)$$

˜通过如下定义，可以为Λ上的 G-连接 c 和 G-连接 $\tilde{c}$ 定义酉算子 T_c、$M_{\tilde{c}} \in \mathcal{A}_\Lambda$：

$$T_c = \prod_{e \in \Lambda} T^{(e)}_{c(e)}, \quad M_{\tilde{c}} = \prod_{e \in \Lambda} M^{(e)}_{\tilde{c}(e)} \tag{2.2}$$

一个重要的观察是，这些算子给出了 $\mathcal{A}$的一个表示：

命题 2.1。有

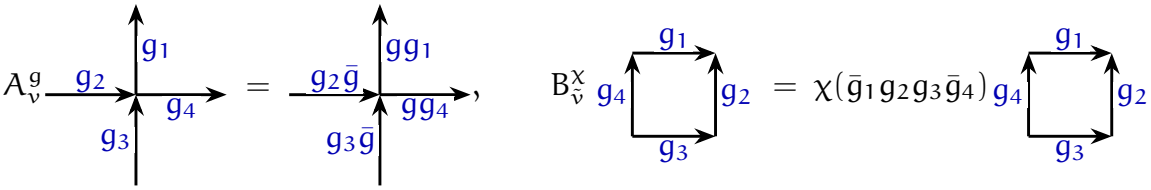
$$\mathcal{A} = C^*\{T_c, M_{\tilde{c}} \mid c \in \mathfrak{C}_G(E),\ \tilde{c} \in \mathfrak{C}_{\widetilde{G}}(E)\}.$$

˜与顶点 $v \in V$ 和面 $\tilde{v} \in V$ 相关的模型相互作用，分别是来自局部代数 $\otimes_{e \ni v} \mathcal{A}_e$ 和 $\otimes_{e \in \tilde{v}} A_e$ 的酉算子，定义为

$$A_v^g = \prod_{e \ni v} T^{(e)}_{g^{\zeta(e,v)}}, \quad B_{\tilde{v}}^\chi = \prod_{e \in \tilde{v}} M^{(e)}_{\chi^{\zeta(e,\tilde{v})}}, \qquad g \in G,\ \chi \in \widetilde{G} \tag{2.3}$$

其中，若 e的方向背离 v，则为 $\zeta(e,v) = 1$；否则为 -1。类似地，若 e与 $\tilde{v}$ 的方向一致，则为 $\zeta(e,\tilde{v}) = 1$；否则为 -1。算子 A_v^g 和 $B_{\tilde{v}}^\chi$ 分别称为顶点算子和面算子，其作用可用图示表示

如下



.....的对易性 G以及（2.3）中的方向相关约定意味着

$$[A_v^g, A_{v'}^h] = [A_v^g, B_{\tilde{v}}^{\chi}] = [B_{\tilde{v}}^{\chi}, B_{\tilde{v}'}^{\mu}] = 0, \quad (A_v^g)^n = (B_{\tilde{v}}^{\chi})^n = \mathbf{1} \tag{2.4}$$

由算子 A_v^g 和 $B_{\tilde{v}}^{\chi}$ 可构造出对易投影

$$P_v := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} A_v^g, \qquad P_{\tilde{v}} := \frac{1}{|\widetilde{G}|}\sum_{\chi\in\widetilde{G}} B_{\tilde{v}}^{\chi} \tag{2.5}$$

以及 Kitaev 哈密顿量构成的网

$$\mathcal{K}(E) \ni \Lambda \mapsto H_\Lambda = \sum_{v\dot{\in}V_\Lambda}(\mathbf{1}-P_v) + \sum_{\tilde{v}\dot{\in}\tilde{V}_\Lambda}(\mathbf{1}-P_{\tilde{v}}) \in \mathcal{A}_\Lambda, \tag{2.6}$$

其中，$v\dot{\in}V_\Lambda$ 表示从顶点 v 发出的边均包含于 Λ 中；类似地，$\tilde{}\,\tilde{v}\dot{\in}V_\Lambda$ 表示面 $\tilde{v}$ 的边均包含于 Λ中。

这些模型的基态流形众所周知 [6]，，而激发态和谱则可借助所谓的带状算子进行研究。格 $\mathcal{L}$上的带状路径 ρ是由 $\mathcal{L}$ 构成的一条有限定向路径，且没有自交。若一条带状路径的起点和终点不同，则称其为开放的；若两者重合，则称其为闭合的。类似地，我们用$\tilde{\rho}$ 表示对偶图 $\mathcal{L}$中的带状路径。带状路径与其边之间存在一种自然的 $\mathbb{Z}_2$ 值配对，由方向决定。具体而言，对于任意边 $e\in\rho$，若带状路径 ρ 沿与格 $\mathcal{L}$相同的方向经过 e，则定义 $\beta(e,\rho)$为 1；否则，$\beta(e,\rho)=-1$。类似地，对于对偶格 $\tilde{\rho}$中的带状路径，我们定义 $\beta(e,\tilde{\rho})=\beta(\tilde{e},\tilde{\rho})$，其中$\tilde{e}$ 是与 e. 相交的 $\mathcal{L}$ 中的唯一一条边。因此，可以定义带状算子如下：

$$F_{\tilde{\rho}}^g := \prod_{e\cap\tilde{\rho}\neq\emptyset} T_{g^{\beta(e,\tilde{\rho})}}^{(e)}, \qquad F_\rho^{\chi} := \prod_{e\in\rho} M_{\chi^{\beta(e,\rho)}}^{(e)}, \tag{2.7}$$

带状算子与星算子和面算子满足以下关系

$$A_v^g F_\rho^{\chi} = \Big(\prod_{\substack{e\ni v\\ e\in\rho}}\chi(g)^{\mathrm{sign}(e,\rho,v)}\Big)F_\rho^{\chi}A_v^g, \qquad F_{\tilde{\rho}}^g B_{\tilde{v}}^{\chi'} = \Big(\prod_{\substack{e\in\tilde{v}\\ e\cap\tilde{\rho}\neq\emptyset}}\chi(g)^{\mathrm{sign}(e,\tilde{\rho},\tilde{v})}\Big)B_{\tilde{v}}^{\chi'}F_{\tilde{\rho}}^g \tag{2.8}$$

其中 $\mathrm{sign}(e,\rho,v)=-\zeta(e,v)\beta(e,\rho)$，类似地，$\mathrm{sign}(e,\tilde{\rho},\tilde{v})=-\zeta(e,\tilde{v})\beta(e,\tilde{\rho})$。

2.2. **局域相互作用的交换代数**。 由顶点算子和面算子生成的交换代数将发挥核心作用。下面给出对它的第一个刻画：

命题 2.2。 交换 C^*-代数的盖尔范德谱

$$\mathcal{C} := C^*\{A_v^g, B_{\tilde{v}}^\chi \mid g \in G,\ \chi \in \widetilde{G},\ v \in V,\ \tilde{v} \in \tilde{V}\}$$

可以与由下式给出的康托尔空间相识别

$$\Omega = \Omega_V \times \Omega_{\tilde{V}}, \quad \Omega_V = \{f\colon V \to \widetilde{G}\}, \quad \Omega_{\tilde{V}} = \{f\colon \tilde{V} \to G\}.$$

因此， $\mathcal{C} \simeq C(\Omega)$。

证明。 交换性直接由（2.4）中的关系推出。为描述谱，令 ω 是 $\mathcal{C}$的一个特征，并令其对应于映射

$$f_\omega\colon V \to \widetilde{G}, \quad [f_\omega(v)](g) = \omega(A_v^g). \tag{2.9}$$

这是良定义的，因为 $g \mapsto A_v^g$ 是 G的忠实酉表示，因此$g \mapsto \omega(A_v^g)$ 是 G的一个特征。类似地，我们有良定义的映射

$$\tilde{f}_\omega\colon \tilde{V} \to \widetilde{\widetilde{G}} \simeq G, \quad [\tilde{f}_\omega(\tilde{v})](\chi) = \omega(B_{\tilde{v}}^\chi). \tag{2.10}$$

由于 A_v^g 和 $B_{\tilde{v}}^\chi$ 生成 $\mathcal{C}$， $\omega \mapsto (f_\omega, f_\omega)$ 是从 $\mathcal{C}$ 的谱到 Ω的单射。反之， Ω 中的任意元素都可通过线性延拓为 $\mathcal{C}$的一个特征，而这个~给出了 $\omega \mapsto (f_\omega, f_\omega)$的逆映射。最后，由于 G 是非平凡的，带有自然积拓扑的 Ω 是一个康托尔空间。□

命题 2.3. 在如下识别下 $\mathcal{C} \simeq C(\Omega)$:

i) 顶点算子和面算子A_v^g 及 $B_{\tilde{v}}^\chi$ 变为函数

$$A_v^g(\omega) = \langle \omega(v), g\rangle, \quad B_{\tilde{v}}^\chi(\omega) = \langle \chi, \omega(\tilde{v})\rangle$$

其中 $\langle \cdot,\ \cdot\rangle\colon G \times \widetilde{G} \to \mathbb{T}$ 是自然配对。

ii) 由 $T_g^{(e)}$共轭不变的有 $\mathcal{C}$， 且

$$[\mathrm{Ad}_{T_g^{(e)}}(C)](\omega) = C(\delta_g^e \cdot \omega), \quad \forall\, C \in \mathcal{C},$$

其中$\delta_g^e \in \Omega$ 由下式显式给出

$$\delta_g^e(\tilde{v}) = \begin{cases} g^{\zeta(e,\tilde{v})} & \text{if } e \in \tilde{v}, \\ 1_G & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad \delta_g^e(v) = 1_{\widetilde{G}} \ \text{for all } v \in V. \tag{2.11}$$

iii) 由 $M_\chi^{(e)}$共轭不变的有 $\mathcal{C}$， 且

$$[\mathrm{Ad}_{M_\chi^{(e)}}(C)](\omega) = C(\delta_\chi^e \cdot \omega), \quad \forall\, C \in \mathcal{C},$$

其中 $\delta_\chi^e \in \Omega$ 由下式明确给出

$$\delta_\chi^e(v) = \begin{cases} \chi^{\zeta(e,v)} & \text{if } e \ni v, \\ 1_{\widetilde{G}} & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad \delta_\chi^e(\tilde{v}) = 1_G \ \text{for all } \tilde{v} \in \widetilde{V}. \tag{2.12}$$

证明。 i) 该结论可直接由（2.9）和（2.10）得出。ii) 只需在以下对象的生成元上验证该结论： $\mathcal{C}$。在标准表示中，由以下算子进行的共轭

算子 $T_g^{(e)}$给出

$$\mathrm{Ad}_{T_g^{(e)}}(B_{\tilde{v}}^{\chi}) \;=\; \chi(g)^{\zeta(e,\tilde{v})}\, B_{\tilde{v}}^{\chi},$$

对所有满足 $\tilde{v}\ e \in \tilde{v}$ 的情形，共轭在 $\mathcal{C}$ 的其余生成元上作用平凡。因此，将其视为 Ω 上的函数时，

$$[\mathrm{Ad}_{T_g^{(e)}}(B_{\tilde{v}}^{\chi})](\omega) \;=\; \chi(g)^{\zeta(e,\tilde{v})}\,\langle \chi, \omega(\tilde{v})\rangle \;=\; \langle \chi, g^{\zeta(e,\tilde{v})}\omega(\tilde{v})\rangle$$

若 $e \in \tilde{v}$，且对于 $\mathcal{C}$ 的其余生成元有 $[\mathrm{Ad}_{T_g^{(e)}}(X)](\omega) = X(\omega)$ 。由此即可得出该结论。iii) 的情形类似。□

为了进一步研究 $\mathcal{C}$ 的性质，我们引入 Kitaev 模型的推广。为此，注意到算子 A_v^g 和 $B_{\tilde{v}}^{\chi}$ 生成了额外的对易投影

$$P_v^{\chi} \;:=\; \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)A_v^g, \qquad P_{\tilde{v}}^{g} \;:=\; \frac{1}{|\widetilde{G}|}\sum_{\chi\in\widetilde{G}}\chi(g)B_{\tilde{v}}^{\chi}. \tag{2.13}$$

~令 $W := V \cup V$，对于每个 $\omega \in \Omega$，我们得到一族由 $P_w^{\omega} := P_w^{\omega(w)}$ 定义的对易投影 $\{P_w^{\omega}\}_{w\in W}$，以及广义 *Kitaev* 哈密顿量 的网

$$\mathcal{K}(E) \ni \Lambda \mapsto H_\Lambda^{\omega} \;:=\; \sum_{v\dot{\in}V_\Lambda}(\mathbf{1}-P_v^{\omega(v)}) + \sum_{\tilde{v}\dot{\in}\tilde{V}_\Lambda}(\mathbf{1}-P_{\tilde{v}}^{\omega(\tilde{v})}) \in \mathcal{A}_\Lambda. \tag{2.14}$$

特别地，当 $\omega = \omega_0$ 时，我们恢复标准基塔耶夫哈密顿量网；其中，ω_0 表示一个特征：对于所有~$v \in V$，它恒等于 G的单位元 1_G，并且在每个对偶顶点 $\tilde{v}$.处等于 G 的单位元 $1_{\widetilde{G}}$

注 2.4. 广义哈密顿量 (2.14) 本身就很有趣，但在本文中，引入这些推广主要是出于技术上的考虑。◀

注 2.5. 注意到 $H_\Lambda^{\omega} \in \mathcal{C}$，因此它可以视为 $C(\Omega)$中的一个经典可观测量。更准确地说，将 Λ 与 W 的一个有限子集对应起来，并利用注 2.3，我们得到

$$H_\Lambda^{\omega}(\omega') \;=\; \sum_{w\in\Lambda}\delta_{\omega(w)}\big(\omega'(w)\big), \qquad \omega' \in \Omega,$$

因为 $P_w^{\omega}(\omega') \;=\; \delta_{\omega(w)}\big(\omega'(w)\big)$。特别地，广义哈密顿量可以看作一个连续函数 $H_\Lambda\colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}_+$. ◀

哈密顿量的基态投影（2.14）可以写作

$$P_\Lambda^{\omega} \;=\; \prod_{v\in V_\Lambda} P_v^{\omega(v)} \prod_{\tilde{v}\in\tilde{V}_\Lambda} P_{\tilde{v}}^{\omega(\tilde{v})} \;=\; \prod_{w\in W} P_w^{\omega(w)}, \qquad \Lambda \in \mathcal{K}(E) \tag{2.15}$$

这定义了一个无挫折投影网 $\{P_\Lambda(\omega)\}_\Lambda$，其含义见 [20, 定义 2。2]。态 $\mathfrak{s}$ 在 $\mathcal{A}$ 上称为无挫折（*FF*）基态，对应于投影无挫折网 $\{Q_\Lambda\}$，如果 $\mathfrak{s}(Q_\Lambda) = 1$ 对所有 $\Lambda \in \mathcal{K}(E)$ [20]均成立。空间 Ω 与广义模型的 FF 基态之间存在直接关系。事实上，由于 Ω

是 $\mathcal{C}$的盖尔范德谱，每个点 $\omega \in \Omega$ 都通过求值定义了 $\mathcal{C}$ 上的一个纯态。因此，今后我们将 Ω 中的点与 $\mathcal{C}$上的态等同起来。我们有：

命题 2.6。 设 $\omega \in \Omega$。那么，态 ω在 $\mathcal{C}$上的任意延拓为态 s_ω 在$\mathcal{A}$ 上，都是网 $\{P_\Lambda^\omega\}$的 *FF* 基态。

证明。 这是以下事实的推论：所有 P_Λ^ω 都位于 $\mathcal{C}$之内，因此 $s_\omega(P_\Lambda^\omega) = \omega(P_\Lambda^\omega)$ 对于态 s_ω 在 ω 上的任意延拓 $\mathcal{C}$。因此， $s_\omega(P_\Lambda^\omega) = P_\Lambda^\omega(\omega) = 1$ （见注 2.5），结论随即得证。 □

定义 2.7([20])。 若投影网 $\{Q_\Lambda\}$ 在 $\mathcal{A}$ 中满足 局部拓扑量子序 (LTQO) 条件，则称其满足该条件：对于每个局部可观测量 $X \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$，均有

$$\lim_\Lambda \|Q_\Lambda X Q_\Lambda - s_\Lambda(X) Q_\Lambda\| = 0,$$

其中

$$s_\Lambda(X) = \frac{\mathrm{Tr}(Q_\Lambda X Q_\Lambda)}{\mathrm{Tr}(Q_\Lambda)} \quad \text{and} \quad X \in \mathcal{A}_\Lambda.$$

定理 2.8 ([20])。 若由真投影构成的无挫折网 $\{Q_\Lambda\}$满足 *LTQO* 性质，则该网在$\mathcal{A}$的双对偶中收敛到一个极小投影。因此，存在唯一的无挫折基态 s，而且它是纯态，并且可明确表示为弱*-极限 $s = \lim_\Lambda s_\Lambda$.

对于标准阿贝尔 Kitaev 模型， [7, 定理 III.4]证明了 LTQO。我们想证明它也适用于投影网（2.15）。为此，我们需要以下概念：

定义 2.9。 如果存在一个由局部可表示自同构构成的网 $\{\alpha_\Lambda\}$，作用于 $\mathcal{A}$，使得对所有 $\Lambda \in \mathcal{K}(\mathbb{E})$.， $\alpha_\Lambda(Q_\Lambda) = Q'_\Lambda$ 和 $\alpha_\Lambda(\mathcal{A}_\Lambda) = \mathcal{A}_\Lambda$，则称两个投影网 $\{Q_\Lambda\}$ 和 $\{Q'_\Lambda\}$ 局部等价。

命题 2.10。 *LTQO* 性质在投影网的局部等价下保持不变。

证明。 假设 $\{Q_\Lambda\}$ 满足 LTQO，且 $\{Q'_\Lambda\}$ 与 $\{Q_\Lambda\}$ 局部等价。因此，对每个 Λ，都存在一个局部可表示自同构 $\alpha_\Lambda \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$，使得

$$\alpha_\Lambda(Q'_\Lambda) = Q_\Lambda \qquad \text{and} \qquad \alpha_\Lambda(\mathcal{A}_\Lambda) = \mathcal{A}_\Lambda.$$

固定 $X \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$。当 Λ 足够大时，我们有 $X \in \mathcal{A}_\Lambda$，并令 $Y := \alpha_\Lambda(X) \in \mathcal{A}_\Lambda$。由于 α_Λ 是一个 *-自同构，它是等距的，因此

$$\left\|Q'_\Lambda X Q'_\Lambda - s'_\Lambda(X)\, Q'_\Lambda\right\| = \left\|Q_\Lambda Y Q_\Lambda - s'_\Lambda(X)\, Q_\Lambda\right\|.$$

接下来需要证明 $s'_\Lambda(X)$ 与 $s_\Lambda(Y_\Lambda)$ 相同。由于 $\alpha_\Lambda(\mathcal{A}_\Lambda) = \mathcal{A}_\Lambda$，限制映射 $\alpha_\Lambda|_{\mathcal{A}_\Lambda}$ 是有限维 C*- 代数 $\mathcal{A}_\Lambda$ 的一个 *- 自同构。因此，$\alpha_\Lambda|_{\mathcal{A}_\Lambda}$ 是内的，所以

它保持 $\mathcal{A}_\Lambda$ 上的迹 Tr。因此,

$$s'_\Lambda(X) = \frac{\mathrm{Tr}(Q'_\Lambda X Q'_\Lambda)}{\mathrm{Tr}(Q'_\Lambda)} = \frac{\mathrm{Tr}\big(\alpha_\Lambda(Q'_\Lambda X Q'_\Lambda)\big)}{\mathrm{Tr}\big(\alpha_\Lambda(Q'_\Lambda)\big)} = \frac{\mathrm{Tr}(Q_\Lambda Y Q_\Lambda)}{\mathrm{Tr}(Q_\Lambda)} = s_\Lambda(Y_\Lambda).$$

结合前面的恒等式可得

$$\big\|Q'_\Lambda X Q'_\Lambda - s'_\Lambda(X)\, Q'_\Lambda\big\| = \big\|Q_\Lambda Y Q_\Lambda - s_\Lambda(Y)\, Q_\Lambda\big\|.$$

由于 $\{Q_\Lambda\}$ 满足 LTQO，右侧在 Λ 增大时趋于 0。因此，$\{Q'_\Lambda\}$满足 LTQO。□

下面的引理表明，(2.13) 中的投影在一族$\widetilde{\ }$的自同构 $\mathcal{A}$之下，按照 G和 G的左作用进行变换。这些自同构此前已用于 [18, 9, 21]。

引理 2.11。存在一族局部可表示自同构

$$\{\alpha^g_w, \alpha^\chi_w \mid g \in G,\ \chi \in \widetilde{G},\ w \in W\}$$

$\mathcal{A}$ 的自同构两两可交换，并满足以下性质

i) $\alpha^g_w(P^h_w) = P^{gh}_w$和 $\alpha^g_w(P^h_{w'}) = P^h_{w'}$，对于来自 W 的任意一对 $w \neq w'$ 和 $g,\ h \in G$。$\widetilde{\ }$ii) 对于所有 $w' \in W$ 和 $\chi \in G$，$\alpha^g_w(P^\chi_{w'}) = P^\chi_{w'}$。

α^χ_w也满足类似性质，这些性质可由上文将 $G\widetilde{\ }$和 G互换而得。

证明。 设 ζ是 $\mathcal{L}$中的一条半无限直水平边路径，从顶点 v出发并向右延伸；设 ζ_n 表示由该路径最前面的 n条边组成的有限子路径。对于每个元素 $X \in \mathcal{A}$，定义

$$\alpha^\chi_v(X) = \lim_n F^\chi_{\zeta_n} X F^{\bar\chi}_{\zeta_n}.$$

由于上述极限在算子范数下收敛，α^χ_v 定义了一个局部可表示的 $\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }$自同构 $\mathcal{A}$.。类似地，设 ζ 是对偶图 $\mathcal{L}$上的一条路径，从顶点 $\tilde v\widetilde{\ }$出发并向右延伸；设 ζ_n 是由其最前面的 n条边组成的有限子路径。于是

$$\alpha^g_{\tilde v}(X) = \lim_n F^g_{\tilde\zeta_n} X F^{\bar g}_{\tilde\zeta_n},$$

再次定义了上的局部可表示对称性 $\mathcal{A}$。那么，所陈述的 α_w在P_w上的作用可由（2.8）推出。事实上，我们有

$$F^\chi_\rho P^{\chi'}_v F^{\bar\chi}_\rho = P^{\chi'\chi^{\mathrm{sign}(e,\rho,v)}}_v, \qquad F^g_{\tilde\rho} P^h_{\tilde v} F^{\bar g}_{\tilde\rho} = P^{hg^{\mathrm{sign}(e,\tilde\rho,\tilde v)}}_{\tilde v}$$

当带状路径 ρ和 $\tilde\rho$ 恰好在边 e处相交于 v 和 $\tilde v$，正如此处的情形。 □

定理 2.12. 无挫折投影网(2.15) 满足 *LTQO* 性质。更准确地说，对于任意 $X \in \mathcal{A}_\Lambda$，存在 $\Delta \supset \Lambda$ 使得

$$P^\omega_\Delta X P^\omega_\Delta = s_\Delta(X) P^\omega_\Delta, \qquad \forall\, \omega \in \Omega$$

证明。 情形 $\omega = \omega_0$ 已在 [7, 定理 III.4]中证明。因此，根据命题 2.10，要完成证明，只需证明投影网 $\{P_\Lambda^\omega\}$ 与网 $\{P_\Lambda^{\omega_0}\}$对所有 $\omega \in \Omega$均成对局部等价。由 (2.15) 和引理 2.11，通过复合引理 α_w中的有限个2.11，可得到一个局部可表示自同构 α_Λ 使得 $\alpha_\Lambda(P_\Lambda^\omega) = P_\Lambda^{\omega_0}$。证明完毕。 □

定义 2.13. 若子 C*-代数 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 满足唯一延拓性质（UEP），则称其具有唯一延拓性质： $\mathcal{B}$ 上的任意纯态都能唯一地延拓为 $\mathcal{A}$ 上的纯态。

推论 2.14. $\mathcal{C}$具有唯一延拓性质。

证明。 命题 2.6 保证了 是纯态 ω 在 $\mathcal{C}$ 上的任意扩张都是网络（2.15）的 FF 基态。此外，定理 2.8和 2.12 进一步保证，这些始终存在的扩张是唯一且为纯态的。□

2.3. **阿贝尔 C*-Kitaev 模型的对角代数**。 阿贝尔 Kitaev 模型中 C*-包含的正规化子集定义为

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}) := \big\{V \in \mathcal{A} \mid VBV^* \in \mathcal{B} \text{ and } V^*BV \in \mathcal{B} \text{ for all } B \in \mathcal{B}\big\}.$$

根据定义显然可得 $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}(\mathcal{B})$。若子代数 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{A}$ 中稠密，则称其为正则，即 $\mathcal{N}(\mathcal{B})$，也就是说， $C^*(\mathcal{N}(\mathcal{B})) = \mathcal{A}$. 此外:

定义 2.15([16])。 一个阿贝尔子C*代数 $\mathcal{B}$属于 $\mathcal{A}$，若其为正则且具有 C*-对角，则称其为 -对角。

定义 2.15 与原始版本略有不同，原始版本见 [16], ，因为它没有明确假设极大阿贝尔性，也没有假设存在唯一的条件期望。然而，由于 $\mathcal{A}$ 是可分的，在我们的情形下，这两个定义实际上是一致的。事实上，唯一扩张性质立即推出 $\mathcal{B}$是C* 的一个极大阿贝尔子代数（masa） $\mathcal{A}$ [3,推论 2。7]。此外，同样可以证明存在唯一的条件期望$E\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，它由以下关系唯一确定

$$E(X)(\omega) = s_\omega(X) \tag{2.16}$$

这里我们使用了如下对应关系 $\mathcal{B} \simeq C(P(\mathcal{B}))$，其中 $P(\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{B}$的纯态拓扑空间，$\omega \in P(\mathcal{B})$，而 s_ω 是将 ω 纯扩张到 $\mathcal{A}$所得的唯一纯态（参见 [2, 定理 3.4]）。

定理 2.16. $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 C*-对角代数。因此， $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的极大阿贝尔子代数，并且具有唯一的条件期望 $E\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$。

证明。 我们已经证明 $\mathcal{C}$具有唯一扩张性质。此外， $\mathcal{C}$ 是正则的，因为算子T_c 和 $M_{\tilde{c}}$ 对于任意连接 $\mathcal{C}$ 和 c ，均正规化 $\tilde{c}$，并且根据命题 $\mathcal{A}$ 2.1，它们生成 。因此， $\mathcal{C}$ 是 C*的一个 $\mathcal{A}$-对角，而证明的其余部分可由本定理之前的讨论得出。 □

3. 阿贝尔Kitaev模型的 Weyl 群胚

我们首先回顾与 C*-包含相关联的 Weyl 群胚的定义，该定义基于 [16, 22]。接着，我们给出阿贝尔 Kitaev 模型所规范关联的 Weyl 群胚的定义，并对其作出明确刻画。

局部紧、豪斯多夫、 ´étale、拓扑主群胚 $\mathcal{G}$的扭曲 $\mathfrak{T}$ 是群胚的一个中心扩张

$$\mathbb{T} \times \mathcal{G}^0 \longrightarrow \mathfrak{T} \to \mathcal{G},$$

其中， $\mathbb{T}$在 $\mathfrak{T}$ 上自由作用，因此 $\mathfrak{T}/\mathbb{T} \cong \mathcal{G}$。若扭曲 $\mathfrak{T}$同构于 $\mathcal{G}\times\mathbb{T}$，则称其为平凡 。给定一个 C*-对角包含，或更一般地，Cartan 包含$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$， [16, 22] 的基本结果表明，存在一个称为该对的 Weyl 群胚的群胚 $\mathcal{G}$，以及 $\mathcal{G}$ 的扭曲 $\mathfrak{T}$，使得

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cong \big(C_r^*(\mathcal{G}, \mathfrak{T}), C_0(\mathcal{G}^0)\big).$$

此外，扭曲 $\mathfrak{T}$ 由 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 唯一确定，且在共轭意义下唯一。换言之，该扭曲是 C*-包含的完全不变量。
定理2.16 促使我们作出如下定义。

定义 3.1. 阿贝尔 Kitaev 模型的*Weyl* 群胚是包含 C^* 的 $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. 对应的 Weyl 群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$

我们当前的任务是明确描述 $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$。注意， Ω 具有自然的群结构，我们将 Ω 中所有有限支撑构型组成的阿贝尔子群记为 Σ，即 Ω 中所有与中性构型 $1_{\widetilde{G}}$ 和 1_G 仅在有限多个位置上不同的元素。我们赋予 Σ 终拓扑，此时它成为一个局部紧拓扑群。考虑相应的变换群胚$\mathcal{G}_\Sigma := \Omega \rtimes_\eta \Sigma$，其中 η 表示平移作用，即

$$\Omega \times \Sigma \ni (\omega, \sigma) \mapsto \eta_\sigma(\omega) := \sigma \cdot \omega.$$

~存在一个自然的满同态 $\hat{\pi}\colon \Sigma \to G \times G$，其定义如下：

$$\hat{\pi}(\sigma) = \Big(\prod_{v \in V \cap \mathrm{supp}(\sigma)} \sigma(v), \prod_{\tilde{v} \in \tilde{V} \cap \mathrm{supp}(\sigma)} \sigma(\tilde{v}) \Big).$$

上述乘积是良定义的，因为 Σ 中的任意元素都具有有限支撑。此外， $\hat{\pi}$ 可以通过令 $\pi(\omega, \sigma) = \hat{\pi}(\sigma)$ 提升为 $\mathcal{G}_\Sigma$ 上的群胚态射。记 $\Gamma := \mathrm{Ker}(\hat{\pi})$ 和 $\mathcal{G}_\Gamma := \Omega \rtimes_\eta \Gamma = \mathrm{Ker}(\pi)$。由此得到群胚正合列

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}_\Gamma \to \mathcal{G}_\Sigma \xrightarrow{\pi} \widetilde{G} \times G \longrightarrow 1 \tag{3.1}$$

命题 3.2. Γ 在 Ω 上的作用是自由且极小的。此外， $\eta(\Gamma)$ 与$\mathrm{Homeo}(\Omega)$中由带状算子的共轭生成的子群重合。

证明。 Γ 在 Ω上的作用是自由的，因为它由群 Ω中的右平移给出。此外，该作用也是极小的，因为子群 Γ 在 Ω中稠密： Ω 中的每个非空柱状子集都与 Γ有非平凡交集。

记 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{A}$ 中所有带状算子的集合，并考虑由共轭 $\mathrm{Ad}\colon \mathcal{R} \to \mathrm{Homeo}(\Omega)$ 给出的相应作用。对于 $g \in G$，我们已在命题 2.3 中看到，基本带状算子 $T_g^{(e)}$ 的共轭是由 (2.11) 中所述的 Ω 上平移 $\delta_g^e \in \Gamma$ 所诱导的。由于边 e 总是恰好属于两个面，且 (2.11) 中这两个面的系数 ζ 互为相反数，因此这个 δ_g^e 属于 π 的核。对于与 M_χ^e 的共轭，也可作类似论证。在这种情况下，它是由 (2.12) 中的平移 δ_χ^e 所诱导的。后者也属于 π 的核，因为边 e 总是恰好由两个顶点共享，且 (2.12) 中这两个顶点的系数 ζ 互为相反数。因此，基本带状算子属于 $\eta(\Gamma)$。一般的带状算子是带有某种定向的基本带的乘积，在这种定向下，该作用仅在路径的起点和终点处非平凡。因此，分析过程类似，并可得到 $\mathrm{Ad}(\mathcal{R}) \subset \eta(\Gamma)$。

反过来，令 $\gamma \in \Gamma$并设 $F = \mathrm{supp}(\gamma) \cap V$，它是有限的。假设 $|F| > 1$，因此属于情形 $|F| \neq 1$。固定一个基顶点 $v_* \in F$，并对每个 $v \in F \setminus \{v_*\}$ 选取一条连接 v 与 v_* 的定向带状路径 $\rho = (e_1, \ldots, e_m)$，使得 $\beta(e_1, \rho) = 1$。定义

$$\gamma_v := \prod_{e \in \rho} \delta^e_{\gamma(v)^{\beta(e,\rho)}}$$

根据构造， $\gamma_v(v) = \gamma(v)$，它在不同于 v 和 v_*的每个顶点处都是平凡的，而在基顶点处，我们有 $\gamma_v(v_*) = \gamma(v)^{-1}$。对所有 $v \in F \setminus \{v_*\}$取乘积，得到 $\gamma|_V = \prod_{v \in F \setminus \{v_*\}} \gamma_v$；这里用到了条件 $\prod_{v \in F} \gamma(v) = 1_{\tilde{G}}$，它确保了基顶点 v_*处的抵消。再固定一个满足 $(\gamma) \cap V$ 的面 $\tilde{v}_* \in F =$，并重复类似的构造，可得

$$\gamma = \prod_{v \in F \setminus \{v_*\}} \gamma_v \prod_{\tilde{v} \in \tilde{F} \setminus \{\tilde{v}_*\}} \gamma_{\tilde{v}}$$

因此， Γ 由元素δ^e_χ 和δ^e_g生成，由此可得 $\mathrm{Ad}(\mathcal{R}) = \eta(\Gamma)$。□

注记 3.3。 空间 Ω 由标准 Kitaev 哈密顿量的唯一无挫折基态 ω_0 及其所有激发组成，其中包括含有无限多个违例的构型。命题 3.2 表明，若两个纯态 ω_1 和 ω_2 在Ω 相差一个元素，则可通过有限个带状算子的乘积将它们相连Γ。特别地， ω_0 在 Γ作用下的轨道，恰好描述了 Kitaev 哈密顿量平凡扇区中的各态。所有这些信息都由群胚$\mathcal{G}_\Gamma$编码，其元素是由带状算子共轭关联的成对对象 (ω_1, ω_2) 的等价类。 ◀

注记 3.4。 序列（3.1）表明， $\mathcal{G}_\Sigma$ 可分解为一个“规范”部分 $\mathcal{G}_\Gamma$ 和一个~全局对称部分 $G \times G$。群胚 $\mathcal{G}_\Gamma$ 编码了~上的局域荷-磁通构型 Ω，其总任意子含量为平凡，而 $G \times G$ 则记录单个激发。等价地，子群 Γ 生成局域任意子激发，其净拓扑荷为零，也就是说，这些任意子集合彼此湮灭。◀

定理3.5。 $\mathcal{G}_\Gamma$ 与 *Cartan*对 $(\mathcal{A}, \mathcal{C}$的 *Weyl* 群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{C}$ 同构).

证明。注意到 Γ是一个局部有限群。因此，由 [8, 定理3.8] 和命题 3.2可知， $\mathcal{G}_\Gamma$ 是 AF-关系（按 [8, 定义3.7]的意义）。因此，$C_r^*(\mathcal{G}_\Gamma)$ 是一个 AF-代数。由于扭曲在 AF-关系上是平凡的，根据 [22, 命题 4.13]和命题 3.2， [21, 命题 4.6],要完成证明，只需证明 $C_r^*(\mathcal{G}_\Gamma) \simeq \mathcal{A}$。根据 Krieger的结果 [14] （另见 [17, 定理 4. 10]），后者等价于计算有序维数群 $(H_0(\mathcal{G}_\Gamma), H_0(\mathcal{G}_\Gamma)^+, [1_\Omega])$（定义见 [17, 定义 3.1],），并验证

$$(H_0(\mathcal{G}_\Gamma), H_0(\mathcal{G}_\Gamma)^+, [1_\Omega]) \simeq (\mathbb{Z}[1/n], \mathbb{Z}_+[1/n], 1)$$

考虑 μ 在 Ω上的伯努利概率测度，即， $\mu = \left(\bigotimes_V \delta\right) \otimes \left(\bigotimes_{\tilde{V}} \delta\right)$ 满足 ~ ~δ，并且 δ 分别为 G 和 G上的 Haar测度。它是 Γ-不变的，因此映射

$$\varphi \colon H_0(\mathcal{G}_\Gamma) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi([Q]) = \int_\Omega Q \, d\mu,$$

是一个群同态 [17, 第 6] 节。仿照 [21] 中引理4.4的证明，可以验证 φ 是单射，且其像与 $\mathbb{Z}[1/n]$一致。此外， φ 保持序维数不变，由此完成证明。□

4. KMS态的完整集合

本节旨在明确计算阿贝尔 Kitaev 模型的 KMS态。我们先回顾 KMS态的定义，以及抽象群胚背景下 KMS测度的概念。

4.1. KMS态。 记 α_ω^H 为由广义Kitaev哈密顿量（2.14）在 $\mathcal{A}$ 上生成的动力学。我们将重点讨论 $\omega = \omega_0$的情形，因为一般情形也可用同样的方法处理，并将相应的动力学简记为 α^H。为描述动力系统 $(\mathcal{A}, \alpha^H, \mathbb{R})$ 上的KMS态集合，我们回顾其标准定义 [5]。我们称一个 α^H-不变态 s （相对于 $\mathcal{A}$ ）为逆温度为 $\beta \in [0, \infty)$ 的 (α^H, β)-KMS态，若对于所有 X 和 Y （属于 $\mathcal{A}$ ），都存在一个函数 F，它在带状区域 $0 \leqslant \mathrm{Im} z \leqslant \beta$ 上连续且有界，并在 $0 < \mathrm{Im} z < \beta$ 上解析，且对所有 $t \in \mathbb{R}$满足以下条件

i. $F(t) = s(X\alpha_t^H(Y))$;
ii. $F(t + i\beta) = s(\alpha_t^H(Y)X)$

形式上，后者等价于说，对于 α^{H} 的整解析元稠密集中的任意 X和 Y，均有以下等式成立

$$s\big(X\alpha^{H}_{i\beta}(Y)\big) = s\big(YX\big) \tag{4.1}$$

当表达式 $\alpha^{H}_{i\beta}(b)$ 有意义时。本节的目的是找出所有满足方程（s）的态，4.1该方程对应于由 Kitaev 哈密顿量（2.6）所诱导的动力学。我们将看到，通过 Weyl 群胚，此类方程完全由 Ω上的适当测度所确定。

4.2. **KMS 测度**。 考虑一个抽象的可 amenable 局部紧群胚 $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^0)$，其 Haar 系统为 $\lambda := \{\lambda_u\}_{u\in\mathcal{G}^0}$。我们用 $\lambda^{-1} := \{\lambda^u\}_{u\in\mathcal{G}^0}$ 表示由 $\mathcal{G}$上的取逆映射所诱导的推前 Haar 系统。 $\mathcal{G}^0$ 上的博雷尔测度 μ 通过如下定义在 $\mathcal{G}$ 上诱导出一个测度

$$\lambda_\mu(f) := \int_{\mathcal{G}} f(\zeta)\, d\mu(u) d\lambda_u(\zeta), \qquad f \in C_c(\mathcal{G})$$

类似地，也可以定义与 Haar 系统 λ^{-1} :=$\{\lambda^u\}_{u\in\mathcal{G}^0}$相关联的 $\mathcal{G}$ 上的测度 λ^{-1}_μ。

定义 4.1。 若 $\mathcal{G}^0$ 上的博雷尔测度 μ 满足 $\lambda_\mu \sim \lambda^{-1}_\mu$，则称其为准不变测度；即二者相互绝对连续。若此条件成立，则存在一个拉东–尼科迪姆 导数 $\Delta_\mu := d\lambda_\mu/d\lambda^{-1}_\mu$，称为模函数，它定义了一个群胚同态 $\Delta_\mu\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}^\times_+$，其中 $\mathbb{R}^\times_+$ 表示正实数的乘法群。

注 4.2. 请注意，$\mathcal{G}^0$ 上的不变测度就是满足以下条件的准不变测度：对所有 $\zeta \in \mathcal{G}$. ◀, $\Delta_\mu(\zeta) = 1$

众所周知，任意准不变测度 μ 都会在群胚C*代数$C^*_r(\mathcal{G})$ 上诱导一个态 s_μ，如下所示

$$s_\mu(f) := \int_{\mathcal{G}^0} E(f)(u) d\mu(u) \tag{4.2}$$

其中请回忆， $E\colon C^*_r(\mathcal{G}) \to C_0(\mathcal{G}^0)$ 是标准条件期望，由限制给出。

取值于阿贝尔拓扑群 A 的（连续）1-余循环是一个（连续）映射 $c\colon \mathcal{G} \to A$，满足

$$c(\zeta_1\zeta_2) = c(\zeta_1) + c(\zeta_2) \qquad \text{for all } (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathcal{G}^{(2)}.$$

我们用 $Z^1(\mathcal{G}, A)$ 表示连续 1-余循环 $\mathcal{G} \to A$ 构成的阿贝尔群。如果 $c \in Z^1(\mathcal{G}, A)$ 且 $\widetilde{A}$ 是 A 的 Pontryagin 对偶，那么

$$\tilde{a} \mapsto [\alpha^c_{\tilde{a}}(f)](\zeta) := \langle \tilde{a}, c(\zeta)\rangle f(\zeta), \quad f \in C_c(\mathcal{G}),$$

~可延拓为一个 C*-动力系统 $(C_r^*(\mathcal{G}), A, \alpha^c)$ [23, 命题 5。1]。特别地，如果 $A = \mathbb{R}$，映射

$$(\alpha_t^c f)(\zeta) := e^{itc(\zeta)} f(\zeta), \qquad t \in \mathbb{R},\ f \in C_c(\mathcal{G})$$

定义了一个 $*$ 自同构的强连续族 $t \mapsto \alpha_t^c$，作用于 $C_r^*(\mathcal{G})$。此外，$C_c(\mathcal{G})$ 由关于 α^c 的整解析元构成。 α^c 的（预）生成元是 $*$- 导子 $\delta^c(f)(\zeta) := i\, c(\zeta) f(\zeta)$。对于 $c \in Z^1(\mathcal{G}, \mathbb{T})$，我们还可以通过如下设定定义 $\mathcal{A}$ 的一个自同构α^c

$$(\alpha^c f)(\zeta) := c(\zeta) f(\zeta), \qquad f \in C_c(\mathcal{G}).$$

定义 4.3. [23] 设 $c \in Z^1(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$。若定义在 $\mathcal{G}^0$ 上的概率测度 μ 满足以下条件，则称其满足 (c, β)-*KMS* 条件： μ 是准不变的，且其模函数满足

$$\Delta_\mu(\zeta) = e^{-\beta\, c(\zeta)} \qquad \text{for } \lambda_\mu\text{-a.e. } \zeta \in \mathcal{G};$$

任意 KMS测度都以标准方式在 C*-代数 $C_r^*(\mathcal{G})$ 上诱导出一个 KMS态。

命题 4.4 (命题 5.4, [23])。 设 $c \in Z^1(\mathcal{G}, \mathbb{R})$， $\beta \in [0, \infty]$，且 μ 一个 (c, β)-KMS测度，定义在 $\mathcal{G}^0$上。则根据 s_μ (4.2) 所诱导的态是 (α^c, β)-*KMS* 态，对应于$C_r^*(\mathcal{G})$.

需要指出的是，KMS态 s在 $C_r^*(\mathcal{G})$ 上也会诱导出一个定义在$\mathcal{G}^0$ 上的 KMS测度，方法是将该态限制到C*-代数 $C_0(\mathcal{G}^0)$ 上 $C_r^*(\mathcal{G})$。对于主群胚，这种对应是一一对应的 [23, 第 2 章，命题 5。4], 即任意 KMS态都来自定义在 $\mathcal{G}^0$上的 KMS测度。对于 ´étale 群胚，可以放宽主群胚这一假设，上述结论仍然成立 [15, 命题 3。2]。然而，对于非主 ´étale 情形，仅凭 KMS 测度不足以描述$C_r^*(\mathcal{G})$上的所有 KMS态。具体而言，可以改用以下方式刻画 KMS态：在与 C*的各向同性群相关联的 $\mathcal{G}$ [19]-代数上取迹场。

4.3. **KMS态的集合**。 回到 $\mathcal{G}_\mathcal{C}$ 这一情形，由于它是一个变换群胚，因此博雷尔测度 μ 在 Ω 上准不变，当且仅当对于所有 $\gamma \in \Gamma$ 都有 $\mu \sim \gamma_* \mu$，其中$\gamma_* \mu(E) = \mu(\eta_\gamma^{-1}(E))$。此处，模函数具有如下形式

$$\Delta_\mu(\omega, \gamma) = \frac{d(\gamma_* \mu)}{d\mu}(\omega), \qquad (\omega, \gamma) \in \Omega \rtimes \Gamma.$$

特别地，准不变测度 μ 按如下方式诱导出 $\mathcal{A}$上的态 s_μ

$$s_\mu(X) := \int_\Omega E(X)(\omega) d\mu(\omega) \tag{4.3}$$

回想一下， $E\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C} \equiv C(\Omega)$ 是唯一的条件期望；在 $\mathcal{A}$ 的群胚表示中，它简化为将 $C_r^*(\mathcal{G}_\mathcal{C})$ 限制到 $C(\mathcal{G}_\mathcal{C}^0)$。

准备好这些要素后，我们现在可以证明，Kitaev 哈密顿量的KMS态与 Ω 上的KMS概率测度一一对应。

定理 4.5。以下结论成立：

i) 存在一个余循环 $c \in Z^1(\mathcal{G}_\mathcal{C}, \mathbb{R})$，使得 $\alpha^H = \alpha^c$。ii) 所有 (α^H, β)-*KMS*态均由 (α^c, β)-KMS 测度导出，且每个 (α^c, β)-KMS 测度都会导出一个 (α^H, β)-*KMS* 态。

证明。 i) 注意，动力学 $t \mapsto \alpha_t^H$在 $\mathcal{C} = C(\mathcal{G}_\mathcal{C}^0)$ 上对所有 $t \in \mathbb{R}$均限制为单位元。$\mathcal{G}_\mathcal{C}$ 是一个主 étal´e 群胚，因此根据 [13, 推论 3.2，6],每个自同构 α_t^H均由唯一的 $\mathbb{T}$-值 1-余循环 $c_t \in Z^1(\mathcal{G}_\mathcal{C}, \mathbb{T})$实现。此外，由于 α^H是 $\mathbb{R}$的强连续作用，映射 $(t, \omega, \gamma) \mapsto c_t(\omega, \gamma)$是联合连续的，因此对每个箭头 $(\omega, \gamma) \in \mathcal{G}_\mathcal{C}$，函数 $t \mapsto c_t(\omega, \gamma)$定义了一个从 $\mathbb{R}$到 $\mathbb{T}$的连续群同态。由此可知，存在唯一的实数 $c(\omega, \gamma) \in \mathbb{R}$ 使得

$$c_t(\omega, \gamma) \;=\; e^{i\,t\,c(\omega,\gamma)}, \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

根据联合连续性，我们得到一个连续的实值余循环 $c \in Z^1(\mathcal{G}_\mathcal{C}, \mathbb{R})$ 满足$\alpha_t^H = \alpha_t^c$，对所有 $t \in \mathbb{R}$均成立。ii) 由于 $\mathcal{G}_\mathcal{C}$ 是拓扑主的， [22, 命题 5.11], 这是 [23,第二章]中命题 5.4 的推论。□

现在，下一步是计算任意有限温度 β.下的所有 KMS 测度。考虑 μ_β 上的测度 Ω，定义为

$$\mu_\beta \;:=\; \Big(\bigotimes_{v \in V} \nu_\beta\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{\tilde{v} \in \tilde{V}} \tilde{\nu}_\beta\Big) \tag{4.4}$$

~其中 ν_β 和 $\tilde{\nu}_\beta$ 分别是 G 和 G上的概率测度，满足以下条件

$$\nu_\beta(\chi) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{e^\beta}{e^\beta + (|G| - 1)}, & \text{if } \chi = 1_{\tilde{G}}, \\ \dfrac{1}{e^\beta + (|G| - 1)}, & \text{if } \chi \neq 1_{\tilde{G}}, \end{cases}$$

$$\tilde{\nu}_\beta(g) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{e^\beta}{e^\beta + (|G| - 1)}, & \text{if } g = 1_G, \\ \dfrac{1}{e^\beta + (|G| - 1)}, & \text{if } g \neq 1_G, \end{cases}$$

~由于上述测度具有满支撑，因此可知 ν_β 和 $\tilde{\nu}_\beta$ 是 G-G-准不变的，其 Radon-Nikodym 导数可明确写为

$$\frac{d(\nu_\beta \circ \tau_\chi^{-1})}{d\nu_\beta}(\chi') \;=\; \frac{\nu_\beta(\chi'\chi^{-1})}{\nu_\beta(\chi')}, \qquad \frac{d(\tilde{\nu}_\beta \circ \tilde{\tau}_h^{-1})}{d\tilde{\nu}_\beta}(g) \;=\; \frac{\tilde{\nu}_\beta(gh^{-1})}{\tilde{\nu}_\beta(g)}.$$

~其中 τ 和 $\tilde{\tau}$ 分别是 G和 G的平移作用。因此， μ_β 也是准不变的，其 Radon-Nikodym 导数可写为

$$\begin{aligned}\frac{d(\gamma_*\mu_\beta)}{d\mu_\beta}(\omega) &= \prod_{v\in \mathrm{supp}(\gamma)\cap V} \frac{\nu_\beta\big(\omega(v)\gamma(v)^{-1}\big)}{\nu_\beta\big(\omega(v)\big)} \cdot \prod_{\tilde{v}\in \mathrm{supp}(\gamma)\cap \tilde{V}} \frac{\tilde{\nu}_\beta\big(\omega(\tilde{v})\gamma(\tilde{v})^{-1}\big)}{\tilde{\nu}_\beta\big(\omega(\tilde{v})\big)} \\ &= e^{-\beta c_H(\omega,\gamma)}\end{aligned}$$

其中 $c_H\colon \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \to \mathbb{R}$ 是如下函数

$$\begin{aligned}c_H(\omega,\gamma) = &\sum_{v\in \mathrm{supp}(\gamma)\cap V} \delta_{1_{\tilde{G}}}\big(\omega(v)\big) - \delta_{1_{\tilde{G}}}\big(\omega(v)\gamma(v)^{-1}\big) \\ &+ \sum_{\tilde{v}\in \mathrm{supp}(\gamma)\cap \tilde{V}} \delta_{1_G}\big(\omega(\tilde{v})\big) - \delta_{1_G}\big(\omega(\tilde{v})\gamma(\tilde{v})^{-1}\big)\end{aligned} \tag{4.5}$$

直接计算可得 $c_H(\omega,\gamma_1\gamma_2) = c_H(\omega,\gamma_1) + c_H(\eta_{\gamma_1^{-1}}(\omega),\gamma_2)$ ，因此 $c_H \in Z^1(\mathcal{G}_{\mathcal{C}},\mathbb{R})$。特别地，这个余循环实现了 Kitaev 模型的动力学。

命题4.6。 *Kitaev*动力学 α_t^H与由余循环c_H, 生成的动力学相同，即 $\alpha_t^H = \alpha_t^{c_H}$.

证明。 回顾一下， $\mathcal{A} \simeq C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{C}}) \simeq C(\Omega) \rtimes \Gamma$。对于交叉积结构，任意 $X \in \mathcal{A}$都具有傅里叶分解

$$X = \sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma F_\gamma, \qquad X_\gamma \in C(\Omega)$$

其中 $\gamma \mapsto F_\gamma$ 是 Γ. 的酉表示。因此， $X(\omega,\gamma) = X_\gamma(\omega)$ ，并且形式上

$$\alpha_t^H(X) = \sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \alpha_t^H(F_\gamma)$$

因此，只需计算 $\alpha_t^H(F_\gamma)$。设 $H_\Lambda \in C(\Omega)$ 是与有限区域 $\Lambda \subset W$相关联的局域哈密顿量。由于通过 F_γ 共轭实现了 γ在 $\mathcal{C}$上的作用，利用备注 2.5 可得

$$\big(F_\gamma^* H_\Lambda F_\gamma - H_\Lambda\big)(\omega) = c_H(\omega|_\Lambda,\gamma)\mathbf{1}$$

由于 γ 的支撑是有限的，对于足够大的 Λ ，对所有 $\omega \in \Omega$都有 $c_H(\omega|_\Lambda,\gamma) = c_H(\omega,\gamma)$ 。利用这个单位元，我们得到 $\alpha_t^H(F_\gamma) = e^{itc_H(\cdot,\gamma)} F_\gamma$. 因此，形式上有

$$\alpha_t^H(X) = \sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\, \alpha_t^H(F_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{itc_H(\cdot,\gamma)} X_\gamma F_\gamma.$$

但这正是 $\alpha_t^H(X)(\omega,\gamma) = e^{itc_H(\omega,\gamma)}X_\gamma(\omega)$，即 $\alpha_t^H = \alpha_t^{c_H}$，如所声称的那样。 □

由前一个命题可直接得出：

推论4.7。 测度 μ_β，定义于 (4.4)，是一个 (c_H, β)-*KMS*测度。因此，诱导态 $s_{\mu_\beta} \equiv s_\beta$ 是 *Kitaev*动力学在逆温度 $\beta \in [0, \infty)$下的一个 *KMS*态。

现在我们可以陈述本文的主要结果，该结果证明了对于所有逆温度 β，KMS态的存在性和唯一性

定理4.8。 由 μ_β 诱导的态 s_β 是阿贝尔 *Kitaev* 模型在有限温度 $\beta \in [0, \infty)$. 下唯一的 *KMS*态

证明。 设 s是 β-KMS态，满足 Kitaev 哈密顿量的条件。情形 $\beta = 0$显然成立，因为 0-KMS 条件与迹条件一致，且 $\mathcal{A}$ 有唯一的迹态。因此，以下假设 $\beta \neq 0$。根据定理 4.5，存在一个(α^{c_H}, β)-KMS测度 μ 定义在 Ω 上，使得 $s = s_\mu$。因此，只需证明 μ_β 是唯一的 (α^{c_H}, β)-KMS测度。

任意 μ 都完全由其在柱集上的取值决定

$$C(K, \omega') := \{\omega \in \Omega \mid \omega|_K = \omega'|_K\}, \quad K \in \mathcal{K}(W), \quad \omega' \in \Omega,$$

并且我们有

$$\eta_\gamma^{-1}(C(K, \omega')) = C(K, \eta_{\gamma^{-1}}(\omega')) \tag{4.6}$$

对所有 $\gamma \in \Gamma$均成立。固定枚举

$$V = \{v_1, v_2, \dots\}, \qquad \tilde{V} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots\},$$

并定义 $V_n = \{v_1, \dots, v_n\}, V_n = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$，其中 $W_n = V_n \sqcup V_n$. 于是 $(W_n)_{n \geqslant 1}$是 W 的一个递增滤过，并且 $W = \bigcup_{n \geqslant 1} W_n$.

对于 $(\chi, g) \in G \times G$，令 $\omega_{\chi,\, g} \in \Omega$ 为如下构型：在$(v_1, \tilde{v}_1)$处取值为 (χ, g)，在所有其他坐标 v_i 和 $\tilde{v}_i$处取值为 $1_{\tilde{G}}$ 和 1_G。此外，令 $C(n, \chi, g) = C(W_n, \omega_{\chi,g})$。

现在，考虑任意一个 n-柱集 $C(W_n, \omega')$，并令 $\prod_{i=1}^n \omega'(v_i) = \chi$ 和 $\prod_{i=1}^n \omega'(\tilde{v}_i) = g$。设 $\gamma \in \Gamma$ 的支撑包含于 W_n，定义为 $\gamma(v_1) = \chi\omega'(v_1)^{-1}$，$\gamma(\tilde{v}_1) = g\omega'(\tilde{v}_1)^{-1}$，并在所有其他 $w \in W_n$.处取 $\gamma(w) = \omega'(w)^{-1}$。显然，$\gamma$ 是 Γ中的良定义元素，因为 $\prod_{i=1}^n \gamma(v_i) = 1_{\tilde{G}}$ 且 $\prod_{i=1}^n \gamma(\tilde{v}_i) = 1_G$。注意，$\gamma$ 完全由 W_n 和 ω'决定。由 (4.6) 可得 $C(W_n, \omega') = \eta_\gamma^{-1}\big(C(n, \chi, g)\big)$。此外，由 (4.5)，若 ω_i 在 γ的支撑上重合，则 $c_H(\omega_1, \gamma) = c_H(\omega_2, \gamma)$，因此对任意 $\omega \in C(n, g, \chi)$，都有 $c_H(\omega, \gamma) = c_H(\omega_{\chi,g}, \gamma)$。于是，KMS 条件蕴含

$$\begin{aligned} \mu\big(C(W_n, \omega')\big) &= \int_{C(n,g,\chi)} e^{-\beta c_H(\omega,\gamma)} d\mu(\omega) \\ &= e^{-\beta c_H(\omega_{\chi,g},\gamma)}\, \mu\big(C(n, g, \chi)\big). \end{aligned} \tag{4.7}$$

因此，在第 n 层，任意 (c_H, β)-KMS 测度 μ 都由 $|G|^2$ 个数 $\mu\big(C(n, \chi, g)\big)$ 完全确定。

定义向量 $u_n := \big(\mu(C(n,\chi,g))\big)_{g,\chi} \in \mathbb{R}^{|G|^2}$. 注意到

$$C(n,\chi,g) \;=\; \bigcup_{\chi',g'} C(n+1,\chi,g;\chi',g'),$$

其中 $C(n+1,\chi,g;\ \chi',g') = C(W_{n+1},\omega_{\chi,g}^{\chi',g'})$，其中 $\omega^{\chi',\ \chi\ \ g'}_{\ \ ,\ \ g} \in \Omega$ 表示如下配置：在 $(v_1,\tilde{v}_1)$处取值为 (χ,g)，在 $(v_{n+1},\tilde{v}_{n+1})$处取值为 (χ',g')，而在所有其他坐标 v_i 和 $\tilde{v}_i$处取中性值 $1_{\tilde{G}}$ 和 1_G。这些柱集互不相交，因此得到

$$\mu\big(C(n,g,\chi)\big) \;=\; \sum_{g',\chi'} \mu\big(C(n+1,g,\chi;g',\chi')\big).$$

利用（4.7），可以验证

$$\mu\big(C(n+1,\chi,g;\chi',g')\big) \;=\; A_\beta(\chi,g;\zeta,h)\,\mu\big(C(n+1,\zeta,h)\big),$$

其中 $h = gg'$ 和 $\zeta = \chi\chi'$，并且

$$A_\beta(\chi,g;\zeta,h) \;=\; e^{-\beta\left(1+\delta_{1_G}(h)-\delta_{1_G}(g)-\delta_{1_G}(g^{-1}h)\right)}\, e^{-\beta\left(1+\delta_{1_{\tilde{G}}}(\zeta)-\delta_{1_{\tilde{G}}}(\chi)-\delta_{1_{\tilde{G}}}(\chi^{-1}\zeta)\right)}$$

因此，$u_n = A_\beta\, u_{n+1}$，其中矩阵 $A_\beta = \big(A_\beta(\chi,g;\zeta,h)\big)_{\chi,\ g;\ \zeta,\ h} \in M_{|G|^2}(\mathbb{R})$ 与 n 无关。因此，$u_1 = A_\beta^n u_n$ 和

$$u_1 \in \bigcap_{n\geqslant 1} A_\beta^n(\mathbb{R}_+^{|G|^2}) \tag{4.8}$$

由于 A_β 具有严格正的元素，Perron-Frobenius定理表明，存在唯一的严格正特征向量 u 属于 A_β。由（4.8）和Perron–Frobenius收敛定理可知，$u_1 = \lambda u$ 对于某个 $\lambda > 0$. 此外，μ 是一个概率测度，而第1 层的柱集构成了 Ω的一个划分，因此 $\sum_i (u_1)_{(i)} = 1$. 这个归一化唯一确定了 λ。因此，u_1 也被唯一确定。此外，序列$(u_n)_n$ 也被唯一确定，因为根据命题4.11 ，A_β 和 $u_n = A_\beta^{-n} u_1$. 因此，μ 是唯一的，因为它的全部信息都编码在序列 $(u_n)_n$中。证明至此完成，并验证了 $\mu = \mu_\beta$. □

注4.9。由定理4.8 的证明可知，测度 $\nu_\beta \otimes \tilde{\nu}_\beta$ 在$\sim G \times G$ 上与矩阵 A_β. ◀的唯一Perron-Frobenius 特征向量成比例

可以显式计算投影 P_v^χ 和 $P_{\tilde{v}}^g$ 在 KMS态 s_β下的期望值。事实上，可得

$$s_\beta(P_v^\chi) \;=\; \frac{e^\beta}{e^\beta + (|G|-1)} \;=\; s_\beta(P_{\tilde{v}}^g), \qquad g = 1_G,\ \chi = 1_{\tilde{G}}$$

$$s_\beta(P_v^\chi) \;=\; \frac{1}{e^\beta + (|G|-1)} \;=\; s_\beta(P_{\tilde{v}}^g), \qquad g \neq 1_G,\ \chi \neq 1_{\tilde{G}}$$

命题 4.10。 *KMS*态族 $(s_\beta)_{\beta\in[0,\infty)}$的零温极限收敛于*Kitaev*模型唯一的无挫基态 s_{ω_0}。也就是说，

$$weak^*-\lim_{\beta\to\infty} s_\beta \;=\; s_{\omega_0}.$$

证明。 这是由当 $\beta\to\infty$时，有

$$\frac{e^{\beta}}{e^{\beta}+(|G|-1)}\longrightarrow 1,\qquad \frac{1}{e^{\beta}+(|G|-1)}\longrightarrow 0.$$

因此，在概率测度的弱拓扑下， $\nu_\beta\longrightarrow\delta_{1_{\hat G}}$且 $\tilde\nu_\beta\longrightarrow\delta_{1_G}$。 □

我们通过验证矩阵 A_β 可逆来结束本节。

命题 4.11. 对于任意 $\beta\neq 0.$，矩阵 A_β 可逆

证明。 注意到 $A_\beta(g,\chi;\ h、\ \zeta)=B(g,h)\,D(\chi,\zeta)$，其中

$$B(g,h)\;=\;e^{-\beta\left(1+\delta_{1_G}(h)-\delta_{1_G}(g)-\delta_{1_G}(g^{-1}h)\right)},\ D(\chi,\zeta)\;=\;e^{-\beta\left(1+\delta_{1_{\hat G}}(\zeta)-\delta_{1_{\hat G}}(\chi)-\delta_{1_{\hat G}}(\chi^{-1}\zeta)\right)}$$

因此 $A_\beta=B\otimes D$。设 $q=e^{-\beta}$。直接计算可得

$$B(1_G,k)=1,\quad \forall k\in G,$$

且对于 $g\neq 1_G$,

$$B(g,1_G)=q^2,\qquad B(g,g)=1,\qquad B(g,k)=q\quad (k\neq 1_G,g).$$

将 G 的元素按单位元排在首位的顺序排列，矩阵 B 具有如下形式

$$B\;=\;\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ q^2 & 1 & \cdots & q\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ q^2 & q & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

设 $N:=|G|$。矩阵 B 具有如下分块形式

$$B\;=\;\begin{pmatrix}1 & \mathbf{1}^{\top}\\ q^2\mathbf{1} & C\end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{1}\in\mathbb{R}^{N-1}$ 表示全一列向量，并且

$$C\;=\;\begin{pmatrix}1 & q & \cdots & q\\ q & 1 & \cdots & q\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ q & q & \cdots & 1\end{pmatrix}\;=\;(1-q)I_{N-1}+qJ_{N-1},$$

其中 J_{N-1} $(N-1)\times(N-1)$为全一矩阵。由于对于每个 $x\perp\mathbf{1}$， $J_{N-1}\mathbf{1}=(N-1)\mathbf{1}$且 $J_{N-1}x=0$，因此 C的特征值为 $1+(N-2)q$和 $1-q$，其重数为 $N-2$。因此 $\det(C)\;=\;(1-q)^{N-2}\big(1+(N-2)q\big)$，此外对于 $\beta\neq 0$

$$C^{-1}\mathbf{1}\;=\;\frac{1}{1+(N-2)q}\mathbf{1}.$$

应用舒尔补公式，我们得到

$$\det(B) \;=\; \det(C)\,\det\!\big(1-\mathbf{1}^{\top}C^{-1}q^{2}\mathbf{1}\big).$$

由于

$$\mathbf{1}^{\top}C^{-1}\mathbf{1} \;=\; \frac{N-1}{1+(N-2)q},$$

由此可得

$$\det(B) \;=\; \det(C)\left(1-\frac{(N-1)q^{2}}{1+(N-2)q}\right).$$

代入 $\det(C)$ 的值并化简，得到

$$\det(B) \;=\; (1-q)^{N-1}\big(1+(N-1)q\big) \;=\; (1-q)^{|G|-1}\big(1+(|G|-1)q\big).$$

特别地，当 $\beta \neq 0$ 时， B 可逆。同样的论证也适用于 D，从而得到

$$\det(D) \;=\; (1-q)^{|\widetilde{G}|-1}\big(1+(|\widetilde{G}|-1)q\big),$$

因此，当 $\beta \neq 0$ 时， D 也可逆。由于 $A_\beta = B \otimes D$，所以对于所有 $\beta \neq 0$. □， A_β 均可逆

DECLARATIONS

作者声明不存在与本文内容相关的利益冲突或竞争性利益。本研究未产生或使用任何数据。

参考文献

[1] R. Alicki, M. Fannes, M. Horodecki, 从统计力学角度看*Kitaev*的量子存储器方案, 《物理学杂志A：数学与理论》**40** (2007), 6451–6465.[2] J. Anderson, 关于态在 C^*-代数上的扩张、限制与表示, 《美国数学会汇刊》**249**(1979), 303–329.[3] R. J. Archbold, J. W. Bunce, 态在 C^*-代数上的扩张，*II*, 《爱丁堡皇家学会会刊A辑》**92**(1982), 113–122.[4] A. Bols, M. Hamdan, P. Naaijkens, S. Vadnerkar, 非阿贝尔量子双模型中任意子扇区的范畴, 《数学物理通讯》**407** (2026).[5] O. Bratteli, D. W. Robinson, 《算子代数与量子统计力学*2*》, Springer, 柏林, 1997. [6] M. Cha, P. Naaijkens, B. Nachtergaele, *Kitaev*的阿贝尔量子双模型的全部无限体积极基态, 《数学物理通讯》**357** (2018), 125–157.[7] C. Y.Chuah, B. Hungar, K. Kawagoe, D. Penneys, M. Tomba, D. Wallick, S.Wei, *Kitaev*量子双模型的边界代数, 《数学物理杂志》**65** (2024), 012101.[8] T. Giordano, I. F. Putnam, C. F. Skau, 康托动力系统的可亲等价关系与轨道结构, 《遍历理论与动力系统》**24** (2004), 441–475.[9] L. Fiedler, P. Naaijkens, 阿贝尔群*Kitaev*量子双模型的*Haag*对偶性, 《数学物理评论》**27** (2015), 1550021.[10] M. Hamdan, 非阿贝尔量子双模型中的无限体积极基态：平面中的任意子激发, 博士论文， 卡迪夫大学， 2024.[11] A. Kitaev, 利用任意子实现容错量子计算, 《物理年鉴》**303** (2003), 2–30.[12] A. Kitaev, 精确可解模型及其拓展中的任意子, 《物理年鉴》**321** (2006), 2–111.

[13]F. Komura, ∗-同态之间的群胚 C*-代数, 《数学文献》(2025), DOI: 10.4171/DM/1043.[14] W. Krieger, 关于一类同胚群的维数, 《数学年刊》252 (1979/80), 87–95.[15] A. Kumjian, J. Renault, 与扩张映射相关的 C*-代数上的KMS态, 《美国数学会会刊》134 (2006), 2067–2078. [16] A. Kumjian, 关于 C*-对角子代数, 《加拿大数学杂志》38 (1986), 969–1008.[17] H. Matui, 全不连通空间上的 ´etale群胚的同调与拓扑全群, 《伦敦数学会会刊》104 (2012), 27–56.[18] P. Naaijkens, 平面上Kitaev环面码中的局域化端同态, 《数学物理评论》23 (2011), 347–373.[19] S. Neshveyev, 非主群胚的 C*-代数上的KMS态, 《算子理论杂志》70 (2013), 513–530.[20] D. Polo Ojito, E. Prodan, T. Stoiber, 关于无挫折量子自旋模型, arXiv:2507.03201, 2025.[21] D. Polo Ojito, E. Prodan, 关于由环面码生成的 C*-对角子代数, arXiv:2601.11511, 2026.[22] J. Renault, C*-代数中的Cartan子代数, 《爱尔兰数学会通报》61 (2008), 29–63.[23] J. Renault, C*-代数的群胚方法, Springer, 柏林, 1980.[24] Z. Wang, 拓扑量子计算, CBMS 数学区域会议丛书 112, 2010.

物理系 , 安第斯大学 , 波哥大 , 哥伦比亚 , D.POLOO@UNIANDES.EDU.CO

物理系学系与数学系科学部门, 耶希瓦大学-, 纽约, NY10016, 美国 PRODAN@YU.EDU