arXiv:2603.27466v1 [math.HO] 29 Mar 2026

§ 12.

弗罗贝尼乌斯与施蒂克尔贝格尔的英文译文

O论椭圆函数

《纯粹与应用数学杂志》83, 175–179（1877）

费迪南德·格奥尔格·弗罗贝尼乌斯与路德维希·施蒂克尔贝格尔，苏黎世

1877年3月10日

埃尔米特先生在最近发表的一篇关于椭圆函数的短文中给出了一条卓越的公式（本期刊第82卷，第343页），这促使我们指出若干相关公式之间的联系。为了从我们起始所用的一般方程，过渡到埃尔米特先生更为特殊的公式，再由此过渡到基珀特先生用作其乘法问题解法基础的进一步特殊化公式，我们采用一种极限过程，并先以一般形式加以阐述。

Let

$$f_0(u), \quad f_1(u), \quad \dots \quad f_n(u)$$

是 $n+1$关于 u 的正幂收敛级数，并令 $u_0, \quad u_1, \quad \dots \quad u_n$为它们共同收敛域内的任意值。则 $(n+1)^{\text{th}}$阶行列式

$$|f_\alpha(u_\beta)| = F(u_0, u_1, \dots u_n)$$

可展开为 $u_0, u_1, \dots u_n$ 的幂级数；而它作为一个交错函数，可以化为以下形式

$$F = G(u_0, u_1, \dots u_n)\Pi(u_\alpha - u_\beta)$$

其中，对称函数 G同样是关于 u_0、u_1、$\dots u_n$的正幂级数。（在差积中，α和 β遍历这里及下文中满足 $\alpha > \beta$的数对 0、1、$\dots n$。）那么，当所有 $n+1$变量都取值为 u 时，函数 $G(u_0$、u_1、$\dots u_n)$的值很容易表示为一个行列式。为简便起见，令 h 表示一个小量，并设

$$u_\beta = u + \beta h, \quad (\beta = 0, 1, \dots n)$$

[1]基珀特，《椭圆函数的整数乘法的实际执行》，本期刊第76卷，第21页。文中给出了函数 $\sigma(u)$ 和 $\wp(u)$ 的定义；魏尔斯特拉斯先生将这两个函数引入椭圆函数论，并简要汇编了它们最重要的性质。关于下文将要用到的该理论中的公式和定理，我们请读者参阅那篇论著。

并引入记号

$$\Delta f(u) = f(u+h) - f(u),$$

于是根据一个已知的行列式定理

$$|f_\alpha(u_\beta)| = |\Delta^\beta f_\alpha(u)|$$

因此

$$G = \frac{F}{\Pi(u_\alpha - u_\beta)} = \frac{1}{\Pi(\alpha-\beta)} \left| \frac{\Delta^\beta f_\alpha(u)}{h^\beta} \right|.$$

由此令 h 趋于极限 0，即可得到所求的关系

$$\lim \frac{F(u_0, u_1, \ldots u_n)}{\Pi(u_\alpha - u_\beta)} = \frac{1}{\Pi(\alpha-\beta)} |f_\alpha^{(\beta)}(u)|. \tag{1}$$

左边的商首先要展开成关于 u_0、u_1、$\ldots u_n$ 的正幂级数，然后令所有自变量都等于 u。

现在我们对行列式采用类似的步骤

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \psi(u_0+v_0) & \ldots & \psi(u_0+v_n) \\ . & . & \ldots & . \\ 1 & \psi(u_n+v_0) & \ldots & \psi(u_n+v_n) \end{vmatrix},$$

其中

$$\psi(u) = \frac{d \log \sigma(u)}{du}.$$

差值 $\psi(u+v) - \psi(u)$ 是 u 的双周期函数。将 R 的第一行各元素乘以 $\psi(u_0)$，再从第二行相应元素中减去，便可看出这个行列式是 u_0 的双周期函数。由于对构成 R 的其他变量也能得出同样的结论，这个以 $2n+2$ 个变量为自变量的函数还具有一个显著性质：它关于每个变量都是双周期的。

函数 $\psi(u)$ 仅在 $u = 0$ （及与之同余的值）处变为无穷大，其按 u 的升幂展开以 $\frac{1}{u}$ 开头。将 u_0 视为函数时， R 因此仅在 $n+1$ 值处变为无穷大

$$u_0 = -v_0, \quad -v_1, \quad \ldots \quad -v_n$$

以及与之同余的值，并且在每个这样的值处都有简单极点。另一方面， R 显然在以下情形下为零

$$u_0 = u_1, \quad \ldots \quad u_n.$$

然而，椭圆函数[2] 的零点数与无穷点数相同；并且（根据阿贝尔定理），使其为零的各个值之和，与使其变为无穷大的各个值之和同余。（*Briot et Bouquet*，《椭圆函数》，第 II 版，第 241 页，

[2]遵照魏尔斯特拉斯先生的说法，如果一个双周期函数在有限平面内处处具有有理函数的性质，即在每个有限值 a 的邻域内都能展开为 $u-a$ 的整数次幂级数，且其中只有有限个负幂，我们就称它为椭圆函数。

定理 III；第 242 页，定理 V。基珀特，同上，第 24 和 25 页。）因此， R 在 u_0的另一个（$n+1$）值处也必定为零，该值由下式计算得出：

$$u_0 + v_0 + \cdots + u_n + v_n = 0$$

根据一个已知定理（*Briot et Bouquet*，第 242 页，定理 IV；第 243 页，定理 VI。基珀特，同上），因此，该行列式除去一个与 u_0 无关的因子后，等于

$$\frac{\sigma(u_0+v_0+\cdots+u_n+v_n)\sigma(u_1-u_0)\sigma(u_2-u_0)\ldots\sigma(u_n-u_0)}{\sigma(u_0+v_0)\sigma(u_0+v_1)\ldots\sigma(u_0+v_n)}.$$

若以类似方式考察它对其余 $2n+1$ 个参数的依赖关系，则可发现[3], 除一个常数因子外，

$$-\begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \frac{\sigma'(u_0+v_0)}{\sigma(u_0+v_0)} & \ldots & \frac{\sigma'(u_0+v_n)}{\sigma(u_0+v_n)} \\ . & . & \ldots & . \\ 1 & \frac{\sigma'(u_n+v_0)}{\sigma(u_n+v_0)} & \ldots & \frac{\sigma'(u_n+v_n)}{\sigma(u_n+v_n)} \end{vmatrix} = \frac{\sigma(u_0+v_0+\cdots+u_n+v_n)\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)\Pi\sigma(v_\alpha-v_\beta)}{\Pi\sigma(u_\alpha+v_\beta)}. \tag{2}$$

在右侧的分母中，乘积应遍及从 0 到 n 的所有数对；而在分子中，则仅遍及满足 $\alpha > \beta$ 的数对。

为验证方程（2.）中的常数因子是否正确，可注意到该式对 $n=0$ 立即成立，而一般情形则可由 n 到 $n+1$ 通过归纳法容易地推出。事实上，若将左侧最后一行的各元素乘以 u_n+v_n，然后令 $u_n=-v_n$，则除最后一个元素外，其余元素全都消失，而最后一个元素变为 1。因此， R 化为由 n 个参数对 u_0、v_0、$\ldots u_{n-1}$、v_{n-1} 类似地构成的行列式。在方程（2.）右侧的表达式中，当 $u_n=-v_n$ 时，我们有

$$\lim \frac{u_n+v_n}{\sigma(u_n+v_n)} = 1,$$

$$\frac{\sigma(u_n-u_\beta)\sigma(v_n-v_\beta)}{\sigma(v_n+u_\beta)\sigma(u_n+v_\beta)} = 1 \quad (\beta = 0, 1, \ldots n-1).$$

因此，右侧同样化为由 n自变量对 u_0、v_0、$\ldots u_{n-1}$、v_{n-1} 类似地构成的表达式。

现在在方程 (2.) 中令

$$v_\beta = \beta h \quad (\beta = 0, 1, \ldots n)$$

并按上文已采用的方法变换左侧，将其化为一个行列式，其中（$\alpha+2$）th 行包含以下元素

$$1, \quad \psi(u_\alpha), \quad \Delta\psi(u_\alpha), \quad \Delta^2\psi(u_\alpha), \quad \ldots \quad \Delta^n\psi(u_\alpha).$$

由于在这一变换中，第一行的元素变为

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots \quad 0$$

[3]对于 $n=1$，此公式实质上与*Jacobi* 在本期刊第15卷（第204页，第13式）中给出的公式一致。

左边化为一个（$n+1$）th 阶行列式，我们用一种易于理解的方式将其记作

$$-R = |1, \quad \Delta\psi(u_\alpha), \quad \Delta^2\psi(u_\alpha), \quad \dots \quad \Delta^n\psi(u_\alpha)|.$$

因此

$$\left|1, \quad \frac{\Delta\psi(u_\alpha)}{h}, \quad \frac{\Delta^2\psi(u_\alpha)}{h^2}, \quad \dots \quad \frac{\Delta^n\psi(u_\alpha)}{h^n}\right|$$
$$= \frac{\sigma(u_0+v_0+\cdots+u_n+v_n)\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)}{\Pi\sigma(u_\alpha+v_\beta)}\Pi\frac{\sigma(v_\alpha-v_\beta)}{h},$$

因此，当 h 趋于零时，

$$|1, \quad \psi'(u_\alpha), \quad \psi''(u_\alpha), \quad \dots \quad \psi^{(n)}(u_\alpha)| = \frac{\sigma(u_0+\cdots+u_n)\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)\Pi(\alpha-\beta)}{(\Pi\sigma(u_\alpha))^{n+1}}.$$

按照魏尔斯特拉斯先生的设定

$$-\psi'(u) = -\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2} = \wp(u),$$

该公式可写为

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_0) & \wp'(u_0) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_0) \\ 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n\Pi(\alpha-\beta)\sigma(u_0+\cdots+u_n)\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)}{(\Pi\sigma(u_\alpha))^{n+1}}. \tag{3}$$

这基本上就是埃尔米特先生在上述引述的信中给出的方程。现在我们再次采用开头所述的取极限过程，在公式 (1.) 中取

$$f_0(u) = 1, \quad f_1(u) = \wp(u), \quad \dots \quad f_n(u) = \wp^{(n-1)}(u).$$

于是，在行列式 $|f_\alpha^{(\beta)}(u)|$ 中，第一列除首项外的元素都为零，因此它化为一个 n^{th} 阶行列式。由此便得到基珀特先生的公式（前引书，第 31 页，公式 (29^a)。）

$$\begin{vmatrix} \wp'(u) & \wp''(u) & \dots & \wp^{(n)}(u) \\ \wp''(u) & \wp'''(u) & \dots & \wp^{(n+1)}(u) \\ . & . & \dots & . \\ \wp^{(n)}(u) & \wp^{(n+1)}(u) & \dots & \wp^{(2n-1)}(u) \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n(\Pi(\alpha-\beta))^2\sigma((n+1)u)}{\sigma(u)^{(n+1)(n+1)}}. \tag{4}$$

———— • ◇ • ————

译者注

原始论文。 Frobenius, F. G. 和 Stickelberger, L.（1877）。论椭圆函数理论。《纯粹与应用数学杂志》，83，175–179。
数字对象标识符： https://doi.org/10.1515/crll.1877.83.175维基媒体扫描件：
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Zur_Theorie_der_elliptischen_Functionen.djvu

K. Khazanzheiev 和 G. Hesketh 翻译，2026年3月。