arXiv:2603.27613v1 [cs.MS] 29 Mar 2026

高精度计算与 PSLQ 识别

非简谐振子的斯托克斯乘子

周健
独立研究员，*XD.Inc*，中国上海
jackzhou.sci@gmail.com

2026年3月

摘要

我们开展了一项大规模计算研究，结合任意精度算术、序列加速和 PSLQ 整数关系算法，以发现渐近分析中出现的基本常数的精确闭式表达式。具体而言，我们计算了一维非谐振子 C_M 的斯托克斯乘子 $H = p^2/2 + x^2/2 + g\,x^{2M}$，针对 $M = 2$, 3，.....，11，在以 300 位工作精度计算出的多达 1200 个微扰系数中提取出 17–30 位有效数字。计算流程分为三个阶段：(i) 在谐振子基中进行瑞利–施罗丁格递推，每阶包含 $O(Mk)$ 个矩阵元；(ii) 采用 40–100 阶的理查森外推，加速比值序列的收敛；(iii) 在由伽马函数值和代数数组成的基上进行 PSLQ 搜索。

这一流程发现了三**个新的精确恒等式**：

$$C_3^2\,\pi^4 = 32, \qquad C_5^4\,\Gamma(\tfrac{1}{4})^4\,\pi^5 = 2^{12}\cdot 3^2,$$
$$C_7^6\,\Gamma(\tfrac{1}{3})^9\,\pi^6 = 2^{20}\cdot 3^3,$$

此外，还确认了已知的 $C_2^2\,\pi^3 = 6$。同样重要的是一个**否定结果**：在30位精度下进行穷尽式PSLQ搜索，且系数界最高为2000，未能找到 C_4 的闭式，这有力地表明，x^8 情形引入了一个真正全新的超越数。

由此显现出一种数论模式：闭式的存在与欧拉函数 $\varphi(M-1)/2$ 相关，该函数统计分母为 $M-1$ 时代数独立的伽马函数超越数的数量。我们提出三个猜想，将计算常数识别与经典数论联系起来，并提供所有代码和数据，以确保结果完全可复现。

1 引言

由以下哈密顿量定义的非简谐振子

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + g\,x^{2M}, \tag{1.1}$$

是量子力学和量子场论的基石。其基态能量可展开为形式微扰级数

$$E(g) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, g^k, \tag{1.2}$$

对于所有 $g \neq 0$，该级数都按阶乘速度发散。系数 a_k的高阶行为编码了有关瞬子的非微扰信息——瞬子是在虚时间中满足运动方程的经典解。

高阶微扰理论与瞬子之间的联系，最早由 Bender 和 Wu 在开创性工作中确立 [1, 2], ，他们证明，对于四次振子（$M = 2$），有

$$a_k \;\sim\; C_2 \cdot (-1)^{k+1} \cdot A_2^{-k} \cdot \Gamma(k + \tfrac{1}{2}) \qquad (k \to \infty), \tag{1.3}$$

其中 $A_2 = 1/3$ 是瞬子作用量（按本文采用的约定）， C_2 是斯托克斯乘子。随后，Zinn-Justin [3], Zinn-Justin 和 Jentschura [4]、 ´Alvarez [5], 以及 Dunne 和 ¨Unsal [9]进一步完善了这一结果，并将其置于复苏超越级数的背景下。复苏理论的现代框架 [16, 17] 系统地阐明了微扰扇区与非微扰扇区如何通过斯托克斯乘子相互交织。

Voros [14] 为四次振子发展了复WKB方法，将斯托克斯现象与精确量子化条件联系起来。 ´Alvarez 和 Casares [6, 7] 将分析扩展到三次振子和高次振子，计算了指数小修正和次主导渐近行为。这些工作为斯托克斯乘子提供了理论基础，但重点主要在次领先修正上 c_1， c_2， ... 而非领先常数的精确闭式表达式 C_M。

尽管理论框架已相当丰富，斯托克斯乘子的精确闭式表达式 C_M 目前仅在四次情形 $M = 2$中已知，其中 $C_2 = \sqrt{6}/\pi^3$ [4]。高次非谐振子（$M \geq 3$）受到的关注较少，部分原因在于，瞬子解及其涨落行列式会变得愈发复杂。

本文对 $M = 2$ 至 $M = 11$的斯托克斯乘子 C_M 进行系统的数值计算。我们使用以 300 位数算术精度计算的微扰级数，最多取 1200 项，通过理查森外推提取 C_M ，精度达到 17–30 位有效数字，随后使用 PSLQ整数关系算法 [18]寻找闭式。主要结果如下:

1. 瞬子作用量的显式闭式表达式， $A_M = S_0(M)^{M-1}$ 其中$S_0(M) = 2^{-1/(M-1)}\mathrm{B}(1/(M-1)$ $3/2)/(M-1)$，由标准反弹解计算得到，并经数值验证，对于所有 $< 10^{-30}$ ，相对误差均为 $M \leq 11$。尽管一般形式 $A_M \propto S^{M-1}$ cl 在瞬子文献中早已广为人知， [2, 3, 5],显式的贝塔函数参数化（4.3）提供了一个便于使用的统一公式。

2. 对所有 M 都成立的普适伽马函数平移 $b = -1/2$ ，已由数值结果确认，并得到单圈涨落行列式论证的支持（第 4.3 节）。3. 除确认已知的 C_2 结果外，还得到了 C_3、C_5 和 C_7 的新精确闭式（见式 (5.3)、(5.4) 和 (5.8)）。据我们所知，C_3、 C_5 和 C_7 的闭式此前尚未见诸文献。4. 基于在 30 位精度下进行的穷尽式 PSLQ 搜索，有强有力的数值证据表明， C_4 不存在形如 $\Gamma(1/3)^a \cdot \pi^b \cdot 2^c \cdot 3^d$、且指数 $|a|$、 $|b|$、 $|c|$、 $|d| < 2000$ 为整数的闭式。

5. 一种将闭式存在性与欧拉函数$\varphi(M-1)$ 联系起来的**数论模式**，其中 $M=4$ 是一个独特的异常。

2 设定与约定

我们考虑哈密顿量 (1.1)，其中 $\hbar = m = \omega = 1$。未扰动系统$H_0 = p^2/2 + x^2/2$ 的本征值为 $E_n^{(0)} = n + 1/2$。我们计算基态的微扰系数 $(n = 0)$。

微扰系数的高阶行为形式如下

$$a_k \sim C_M \cdot (-1)^{k+1} \cdot A_M^{-k} \cdot \Gamma\big((M-1)k + b + 1\big) \cdot \left[1 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + \cdots\right], \tag{2.1}$$

其中 $A_M > 0$ 是瞬子作用量， b 是伽马函数平移参数， C_M 是斯托克斯乘子（或首项斯托克斯常数）。与四次情形的关键区别在于，增长率涉及 $\Gamma\big((M-1)k + b + 1\big)$ ，而不是 $\Gamma(k + b + 1)$。这反映了瞬子作用量按 $g^{-1/(M-1)}$ 缩放，因此博雷尔变换具有 $(M-1)$ 重奇点。

符号约定。 本文中， C_M 表示带符号的斯托克斯乘子，对于所有 M，其值均为负数。为清晰起见，表格中报告 $|C_M|$ 。所有闭式恒等式（第5节）都只涉及 C_M 的偶次幂，因此无论采用何种符号约定都成立。

与 Bender–Wu 约定的关系。 原始的 Bender–Wu 哈密顿量为 $H_{\mathrm{BW}} = p^2 + x^2 + g\,x^{2M}$。通过令 $g_{\mathrm{BW}} = g/4$ （对于 $M = 2$），瞬子作用量之间的关系为： $A_{\mathrm{BW}} = 4\,A_{\mathrm{ours}}$ （对于 $M = 2$）。我们的约定遵循标准的量子力学归一化。

3 计算方法

3.1 瑞利–薛定谔递推

我们使用标准的瑞利–薛定谔递推计算微扰系数 a_k 。微扰项 $V = x^{2M}$ 通过反复作用位置算符 $x = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$，在谐振子基中表示为 $2M$ 次连续作用。第 k阶能量修正为

$$a_k = E^{(k)} = \langle 0|V|\psi^{(k-1)}\rangle, \tag{3.1}$$

且第 k 阶波函数修正（其中 $\langle 0|\psi^{(k)}\rangle = 0$）满足

$$|\psi^{(k)}\rangle = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{E_0^{(0)} - E_n^{(0)}} \Big(\langle n|V|\psi^{(k-1)}\rangle - \sum_{j=1}^{k-1} a_j \langle n|\psi^{(k-j)}\rangle\Big)|n\rangle. \tag{3.2}$$

在第 k 阶，态 $|\psi^{(k)}\rangle$ 在最高达 $n = 2Mk$ 的谐振子能级上具有非零支撑。所有计算均使用 Python 中的 `mpmath` 任意精度库，工作精度设为 dps $+\,30$ 位保护数字。

作为验证，对于每个 M，第一个微扰系数 $a_1 = \langle 0|x^{2M}|0\rangle = (2M-1)!!/2^M$ 都得到了精确验证。

3.2 参数提取

瞬子作用量。根据比值 $r_k = a_k/a_{k-1}$，我们构造出序列

$$\widetilde{A}_k = \frac{\prod_{j=0}^{M-2}\big((M-1)k - j\big)}{-r_k}, \tag{3.3}$$

其收敛至 A_M，当 $k \to \infty$时。理查森外推（见第 3.3 节）可加速这一收敛。

伽马函数平移。利用 A_M 的精确值（由第 4 节推导的解析公式得出），我们从比值 r_k 的次领先修正中提取出 b，并验证 $b = -1/2$对所有 M均成立。

斯托克斯乘子。利用精确的 A_M 和 $b = -1/2$，我们构造数列

$$\widetilde{C}_k = a_k \cdot (-A_M)^k \Big/ \Gamma\big((M-1)k + \tfrac{1}{2}\big), \tag{3.4}$$

其收敛至 C_M，当 $k \to \infty$ 时。我们采用 40–100 阶的理查森外推，得到最终估计值。

3.3 理查森外推

给定一个收敛到极限 s、带有修正项 $s_k = s + c_1/k + c_2/k^2 + \cdots$ 的序列 $\{s_k\}$，从索引 k_0 开始进行 N 阶理查森外推，可通过以下方式消去前 N 个修正项

$$R_N = \sum_{j=0}^{N} (-1)^{N-j} \binom{N}{j} \frac{(k_0+j)^N}{N!}\, s_{k_0+j}. \tag{3.5}$$

我们通过比较不同起始点 k_0 和不同阶数 N 得到的结果来验证外推；在多个窗口中一致的位数被视为可靠。

3.4 误差评估

由于我们的结果完全来自数值计算，因此系统地讨论精度至关重要。我们通过比较多个独立窗口中的理查森外推估计，评估 C_M 中可靠位数的数量：不同的起始索引 k_0 和外推阶数N。在所有窗口中一致的位数被视为可靠。例如，对于 $M = 4$（第 6.1 节），来自 $k_0 = 600$ 和 $k_0 = 700$ 的估计结果有 24 位一致，从而提供了一个保守的精度界。

该序列的收敛行为在图 1中展示了 $M = 4$这一情形，这是我们计算强度最高的一项。原始序列因 $O(1/k)$ 次领先修正而收敛缓慢；采用 $N = 50$–100 阶理查森外推，可大幅加快收敛速度，从现有的 1200 项中获得 24–30 位稳定数字。

对于 PSLQ 识别出闭式的情况（$M = 2$，3，5，7），数值结果 C_M 与闭式值一致，这为微扰系数和外推过程提供了独立验证。残余差异始终小于 10^{-D}，其中 D 是所声称的可靠位数。

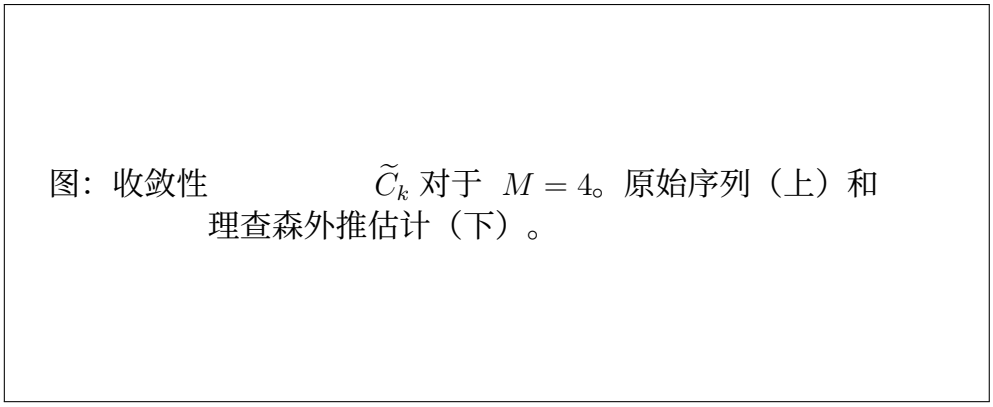

图 1：斯托克斯乘子提取的收敛性 $M = 4$。**上图：**原始序列 C_k（蓝色圆点），由（3.4）定义，因$O(1/k)$修正项而收敛缓慢。**下图：**理查森外推估计 R_N 对于 $N = 20$、40、60、80、**100**，从 $k_0 = 600$开始。水平虚线表示最佳估计 $C_4 \approx -0.74005\,14983$。达到 25+ 位精度需要 $N = 80$。

3.5 PSLQ 搜索

对于每个 M，我们将 PSLQ 算法 [18] 应用于向量

$$\big(\ln|C_M|,\ \ln\Gamma(1/(M{-}1)),\ \ln\pi,\ \ln 2,\ \ln 3,\ 1\big) \tag{3.6}$$

寻找系数有界的整数关系。关系 $\sum n_i v_i = 0$ with $n_1 \neq 0$意味着

$$|C_M|^{n_1}\cdot\Gamma\!\left(\tfrac{1}{M-1}\right)^{n_2}\cdot\pi^{n_3}\cdot 2^{n_4}\cdot 3^{n_5} = e^{-n_6}.$$

对于含 N 个元素的基，在 D 位精度下，PSLQ 检测极限约为 maxcoeff $\lesssim 10^{D/N}$。使用 30 位精度和含 5 个元素的基，得到 maxcoeff $\lesssim 10^{6}$，远远超出我们设定的界限。

当 $\varphi(M{-}1)/2 \geq 2$ 时，会将其他独立的伽马函数值 $\Gamma(a/(M{-}1))$（其中 $\gcd(a,\ M{-}1) = 1$）纳入基中。

4 瞬子作用量：回顾与显式公式

4.1 经典反弹解的推导（回顾）

我们简要回顾标准的反弹解计算（遵循 [2, 3, 12]），并给出一个显式的贝塔函数参数化，作为适用于所有 M 的便捷统一公式。一般结构 $A_M \propto S^{M-1}{}_{\rm cl}$ 自 Bender–Wu 和 Lipatov 的奠基性工作以来便已为人所知；显式参数化（4.3）并非新结果，而是将相关结果整理成便于系统计算的形式。

瞬子作用量决定了穿过反转势垒的隧穿率 $U(x) = -x^2/2 + |g|\,x^{2M}$。反弹解 $x_{\rm cl}(\tau)$ 满足 $\ddot{x} = -x + 2M|g|\,x^{2M-1}$，并到达由 $U(x_0) = U(0) = 0$ 定义的转折点 x_0，从而得到 $x_0^{2(M-1)} = 1/(2|g|)$。

反弹的经典作用量为

$$S_{\rm cl} = 2\int_0^{x_0}\sqrt{x^2 - 2|g|\,x^{2M}}\,\mathrm{d}x = x_0^2\int_0^1\sqrt{1-t^{M-1}}\,\mathrm{d}t, \tag{4.1}$$

其中我们 代入 $t=(x/x_0)^2$。剩余的积分可计算为贝塔函数 :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^{M-1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{M-1}\,\mathrm{B}\Big(\frac{1}{M-1},\,\frac{3}{2}\Big) = \frac{\Gamma\big(\frac{1}{M-1}\big)\,\sqrt{\pi}}{2(M-1)\,\Gamma\big(\frac{1}{M-1}+\frac{3}{2}\big)}. \tag{4.2}$$

由于 $x_0^2=(2|g|)^{-1/(M-1)}$，经典作用量具有以下形式： $S_{\mathrm{cl}}=S_0\cdot|g|^{-1/(M-1)}$，其中 re

$$\boxed{S_0(M)=2^{-1/(M-1)}\cdot\frac{\mathrm{B}\big(\frac{1}{M-1},\,\frac{3}{2}\big)}{M-1}=\frac{2^{-1/(M-1)}\,\Gamma\big(\frac{1}{M-1}\big)\,\sqrt{\pi}}{2(M-1)\,\Gamma\big(\frac{1}{M-1}+\frac{3}{2}\big)}.} \tag{4.3}$$

4.2 关系 $A_M=S_0^{M-1}$

微扰级数 $E(g)=\sum a_k g^k$ 与能量的虚部（负耦合时）通过色散关系相关联

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}E(-g+i0)}{g^{k+1}}\,\mathrm{d}g. \tag{4.4}$$

由于 $\operatorname{Im}\ E\sim K\cdot|g|^{-1/2}\cdot\exp\big(-S_0/|g|^{1/(M-1)}\big)$ 在 $g=0$ 附近，因此代入 $u=S_0/|g|^{1/(M-1)}$ 得

$$a_k\ \propto\ S_0^{-(M-1)k}\cdot\Gamma\big((M-1)k+\cdots\big). \tag{4.5}$$

识别出 $A_M^{-k}=S_0^{-(M-1)k}$，我们得到

$$\boxed{A_M=S_0(M)^{M-1}.} \tag{4.6}$$

4.3 伽马函数平移 $b=-1/2$ （回顾）

我们回顾标准的单圈论证（遵循 [3, 14, 12]），以确定 $b=-1/2$。(4.5) 中伽马函数的精确指数可通过追踪色散关系 (4.4) 中 $|g|$ 的所有幂次来确定。靠近 $g=0^-$ 时，能量的虚部具有如下形式 [3, 15, 9]

$$\operatorname{Im}E(-|g|+i0)\ \sim\ K\cdot|g|^{-1/(2(M-1))}\cdot\exp\big(-S_0/|g|^{1/(M-1)}\big)\cdot\big(1+O(|g|^{1/(M-1)})\big), \tag{4.7}$$

其中，前因子 $|g|^{-1/(2(M-1))}$ 源自瞬子周围的单圈涨落行列式。具体而言，在路径积分形式中，对反弹解 $x_{\mathrm{cl}}(\tau)$ 附近的涨落进行高斯积分，会得到一个泛函行列式比 (6.2)。与时间平移相关的零模会贡献一个与$\sqrt{S_{\mathrm{cl}}}\propto|g|^{-1/(2(M-1))}$ 成正比的因子（例如参见 [3, 14, 12]）。

将（4.7）代入色散关系（4.4），并进行变量替换 $u=S_0/|g|^{1/(M-1)}$，可得

$$a_k\propto S_0^{-(M-1)k-1/2}\int_0^\infty u^{(M-1)k-1/2}e^{-u}\,\mathrm{d}u = S_0^{-(M-1)k-1/2}\,\Gamma\big((M-1)k+\tfrac{1}{2}\big),$$

它确定了 $b+1=1/2$，即 $b=-1/2$，采用约定（2.1）。这一论证并非完全严格：它依赖于涨落行列式的标准单圈近似。我们已通过直接从比值序列中提取，数值验证了 $b=-1/2$ 对所有 $M=2$，从 **−11** 到至少 **15** 位精度均成立。

4.4 显式值

瞬子作用量的部分闭式表达式：

$$A_2 = \frac{1}{3}, \tag{4.8}$$

$$A_3 = \frac{\pi^2}{32}, \tag{4.9}$$

$$A_4 = \left[\frac{\Gamma(1/3)\sqrt{\pi}}{6 \cdot 2^{1/3} \cdot \Gamma(11/6)}\right]^3, \tag{4.10}$$

$$A_5 = \left[\frac{\Gamma(1/4)\sqrt{\pi}}{8 \cdot 2^{1/4} \cdot \Gamma(7/4)}\right]^4. \tag{4.11}$$

数值结果 $M = 2$–11 汇总于表 1。

瞬子作用量 $A_M = S_0(M)^{M-1}$ 对应 $M = 2$–11。所有数值均由精确公式（4.3）–（4.6）计算得出，并经数值验证。

M	A_M （25 位有效数字）
2	0。33333 33333 33333 33333 33333
3	0。30842 51375 34042 45683 85778
4	0。29773 98851 42370 65877 32447
5	0.29177 88890 88323 84613 12676
6	0.28797 24878 47264 09171 87288
7	0.28533 03025 39346 92720 83473
8	0.28338 87041 04389 92199 79632
9	0.28190 15212 11548 86162 85270
10	0。28072 58717 53553 28853 46806
11	0.27977 31136 89115 26931 01861

5 斯托克斯乘子：精确结果

本节给出斯托克斯乘子 C_M for$M = 2$，3，5，7 的精确闭式表达式，这些表达式是通过数值计算和 PSLQ 识别发现的。

5.1 $M = 2$：四次振子（回顾）

四次情形 $V = x^2/2 + gx^4$ 研究得最为广泛。利用 200 位精度下的 500 个微扰系数，我们提取出

$$C_2 = -\sqrt{\frac{6}{\pi^3}} = -\frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \approx -0.43989\,68135\,81545\,43367. \tag{5.1}$$

这与 Zinn-Justin 和 Jentschura 的精确值一致 [4] ，并且已验证至 24 位数。等价地，

$$C_2^2 \cdot \pi^3 = 6. \tag{5.2}$$

5.2 $M = 3$：六次振子

对于 $V = x^2/2 + gx^6$，大阶增长涉及 $\Gamma(2k + 1/2)$，而非 $\Gamma(k + 1/2)$。使用 200 位精度下的 500 项，PSLQ 可识别出

$$C_3 = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \approx -0.57315\,91682\,50756\,26287, \qquad \text{i.e.,} \quad C_3^2 \cdot \pi^4 = 32. \tag{5.3}$$

已验证至 20 位有效数字。尽管已有研究探讨了六次振子的大阶渐近式，´包括 Alvarez 和 Casares [6] 以及 Jentschura 和 Zinn-Justin 的研究 [15]（他们给出了次领先修正 c_1，c_2，……适用于 3–8 次），但这些研究似乎并未给出主导斯托克斯乘子的显式闭式 C_3。$C_3^2\pi^4 = 32$ 不过，我们注意到，该乘子或许可以从他们的结果中推导出来；本文的新意在于通过 PSLQ 明确识别该乘子，并将其数值验证至 20 位有效数字。

5.3 $M = 5$：十次振子

对于 $V = x^2/2 + gx^{10}$，以 200 位精度计算 600 项，可得到 $|C_5|$，精确至 20 位有效数字。对基底 $(\ln |C_5|, \ln \Gamma(1/4), \ln \pi, \ln 2, \ln 3, 1)$ 应用 PSLQ 得到关系 $[-4, -4, -5, 12, 2, 0]$，由此可得

$$\boxed{C_5^4 \cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)^4 \cdot \pi^5 = 2^{12} \cdot 3^2 = 36\,864.} \tag{5.4}$$

等价地，

$$|C_5| = \frac{8\sqrt{3}}{\Gamma(1/4) \cdot \pi^{5/4}} \approx 0.91376\,01170\,24928\,46899. \tag{5.5}$$

验证：$|C_5|^4 \cdot \Gamma(1/4)^4 \cdot \pi^5 = 36864.000\ldots$ 与全部 20 位可用数字一致。

5.4 $M = 7$

对于 $V = x^2/2+gx^{14}$，以 180 位精度计算 400 项，得到 $|C_7|$，精确到 22 位。对基底 $(\ln |C_7|, \ln \Gamma(1/6), \ln \pi, \ln 2, \ln 3, 1)$ 使用 PSLQ，得到 $[24, 18, 33, -74, -21, 0]$，因此

$$C_7^{24} \cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{6}\right)^{18} \cdot \pi^{33} = 2^{74} \cdot 3^{21}. \tag{5.6}$$

利用 $\Gamma(z)$ $\Gamma(z+1/2)$ 的高斯乘法公式，可以对其进行化简。应用倍增公式，其中 $z = 1/6$：

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{6}\right)\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-2/3}}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right).$$

结合反射公式 $\Gamma(1/3)$ $\Gamma(2/3)$ $= \pi/\sin(\pi/3) = 2\pi/\sqrt{3}$，得到

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{6}\right) = \frac{\Gamma(1/3)^2 \cdot \sqrt{3}}{2^{1/3}\sqrt{\pi}}. \tag{5.7}$$

将 (5.7) 代入 (5.6)：$\Gamma(1/6)^{18} = [\Gamma(1/3)^2\sqrt{3}/(2^{1/3}\sqrt{\pi})]^{18} = \Gamma(1/3)^{36} \cdot 3^9/(2^6 \cdot \pi^9)$。约去并将所有指数除以 4 后，得到

$$\boxed{C_7^6 \cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)^9 \cdot \pi^6 = 2^{20} \cdot 3^3 = 28\,311\,552.} \tag{5.8}$$

数值为

$$|C_7| \approx 1.26735\,98646\,78474\,53438. \tag{5.9}$$

这两种形式（5.6）和（5.8）均已通过数值验证，精确到所有可用位数。

备注 5.1。 关于 C_7 的闭式 $\Gamma(1/3)$ 涉及同一个超越数，它也出现在 $M=4$ 振子的瞬子作用量中。这种通过高斯乘法公式建立的联系，将在第 7 节的数论分析中发挥关键作用。

6 $M=4$ 异常

6.1 高精度计算

对于八次振子 $V=x^2/2+gx^8$，我们以 300 位数算术精度计算了 1200 个微扰系数——这是本文中计算量最大的一项工作（耗时 55 分钟，占用 1 GB 内存）。利用精确的瞬子作用量（4.10）和理查森外推，我们得到

$$C_4=-0.74005\,14982\,59358\,50640\,15114\,91622\ldots \tag{6.1}$$

通过比较多个理查森外推窗口，评估结果约有 30 位可靠数字：

$$\begin{aligned}&\text{start}=600,\ N=100:\ -0.74005\,14982\,59358\,50640\,15114\,91622\,\mathbf{02}\ldots\\&\text{start}=700,\ N=100:\ -0.74005\,14982\,59358\,50640\,15114\,\mathbf{74}\ldots\end{aligned}$$

这些结果在前 24 位上相符；我们采用第一个估计值的前 30 位作为最佳值。

6.2 穷尽式PSLQ搜索

我们使用对数基（$\ln|C_4|$、$\ln\Gamma(1/3)$、$\ln\pi$、$\ln 2$、$\ln 3$），通过 PSLQ 搜索形式为 $|C_4|^{n_1}\cdot\Gamma(1/3)^{n_2}\cdot\pi^{n_3}\cdot 2^{n_4}\cdot 3^{n_5}=1$ 的关系。精度为 30 位数且基包含 5 个元素时，PSLQ 检测极限为 $\text{maxcoeff}\lesssim 10^{30/5}=10^6$。我们在 30、35 和 40 位数的精度下，使用 $\text{maxcoeff}=200$、500、1000、2000 进行搜索。

结果：未找到关系。这构成了有力的数值证据，表明 C_4 无法表示为 $\Gamma(1/3)^a\cdot\pi^b\cdot 2^c\cdot 3^d$，其中整数指数满足 $|a|$、$|b|$、$|c|$、$|d|<2000$。我们强调，这只是在有界搜索空间内的数值排除，而不是关于超越性或代数独立性的数学证明。原则上，该关系可能涉及更大的指数，或基中未包含的其他常数。尽管如此，按照我们的参数，PSLQ 检测极限（$\text{maxcoeff}\lesssim 10^6$）远远超过设定的上界，因此在所搜索的基内，这一排除结果非常可靠。我们强调，我们的搜索仅限于 $\Gamma(1/3)$–π–代数组合；涉及其他超越数（例如椭圆积分、模形式或 $\zeta(3)$）的闭式无法通过我们的方法排除。

6.3 解释

缺少 C_4 的闭式尤其令人惊讶，因为 $M=7$——其闭式（5.8）包含相同的 超越数 $\Gamma(1/3)$——确实存在闭式。这表明，障碍不在于瞬子作用量（对于 $\Gamma(1/3)$ 和 $M=4$ 以及$M=7$，它都涉及 涨落行列式，也就是在

$$\frac{\det{}'\big(-\partial_\tau^2+V''(x_{\mathrm{cl}})\big)}{\det\big(-\partial_\tau^2+1\big)} \tag{6.2}$$

瞬子背景下计算出的比值。

对于 $M = 2$，瞬子剖面 $x_{\mathrm{cl}} \propto \operatorname{sech}(\tau)$ 给出了一个具有已知谱的 Pöschl–Teller 涨落势。对于 $M = 7$，高斯乘法公式将$\Gamma(1/6)$ 化简为 $\Gamma(1/3)$，从而有效地简化了涨落行列式。对于 $M = 4$，则不存在这种化简，而数值证据表明，涨落行列式可能会引入一个真正全新的超越数，它在代数上独立于$\Gamma(1/3)$、 π以及代数数。

7 数论结构

$M = 2$–11 中闭式存在性的规律揭示了它与经典数论之间的联系，值得仔细分析。

7.1 素数猜想及其反驳

前四个存在闭式的 M 值为 $M \in \{2, 3, 5, 7\}$——恰好是最小的四个素数。这一观察自然而然地引出了：

朴素猜想：¨当且仅当 M 是素数时，才存在以伽马函数值和 π 表示的闭式。

该猜想作出两项预测：（i）所有素数 M 都应有闭式；（ii）所有合数 M 都不应有闭式。让我们用数据检验这两项预测。

检验预测（ii）。$M = 4$ 是合数，而且确实没有闭式——与预测一致。不过，正如我们将看到的，原因并非它是合数，而是一种更微妙的数论性质。

检验预测（i）。我们以 20 位精度计算 C_{11}，并使用 PSLQ 搜索遍历所有相关的伽马函数基底 $\{\Gamma(1/10)\ \ \Gamma(3/10)\}$，结果未能找到闭式：

$$C_{11} \approx -1.98146\,49381\,17015\,81236, \qquad \text{PSLQ: no relation found.} \tag{7.1}$$

需要指出的是，$M = 11$ 的计算仅使用了 250 项，精度为 160 位（20 位可靠数字），因此 PSLQ 检测极限为 $\sim 10^{20/7} \approx 10^{2.9}$——远弱于 $M = 4$ 搜索（$\sim 10^{6}$）。因此，C_{11} 不存在闭式这一结论尚属暂定，可以通过更高精度的计算加以巩固。尽管如此，既然 $M = 11$ 是素数，素数猜想**在我们的搜索精度范围内已被推翻**。M 的素性既非存在闭式斯托克斯乘子的必要条件，也非充分条件。

7.2 独立的伽马函数超越数

正确的组织原则涉及欧拉函数 $\varphi(n)$。根据反射公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ 和高斯乘法公式，$\{\Gamma(a/n) : 1 \le a < n$ 中（在域 $\mathbb{Q}(\pi)$ 上）满足 $\gcd(a, n) = 1\}$ 的代数独立值的数量，猜想为 $\varphi(n)/2$（当 $n \ge 3$ 时；而当 $n = 1, 2$ 时为 0）。这一独立性计数是罗赫利希–朗兹猜想 [20, 21] 的推论；乔拉–塞尔伯格公式 [19] 则给出了相关的乘积恒等式，将伽马函数值表示为复乘椭圆曲线的周期。

表 2 展示了与闭式存在性的关联。斯托克斯乘子 C_M涉及 $\Gamma\big(a/(M-1)\big)$；因此，PSLQ 基中的独立超越数数量为 $\varphi(M-1)/2$。

表 2： $\varphi(M-1)/2$ 与闭式存在性之间的相关性。列“M是素数吗？”表明，素性并不能决定结果。

M	$M-1$	$\varphi(M-1)/2$	是否存在闭式？	M 是素数吗？	PSLQ 基
2	1	0	Yes	Yes	$\{\pi\}$
3	2	0	Yes	Yes	$\{\pi\}$
4	3	1	**No**	No	$\{\Gamma(1/3)\ \pi, 2, 3\}$
5	4	1	Yes	Yes	$\{\Gamma(1/4)\ \pi,\ 2,\ 3\}$
6	5	2	No	No	$\{\Gamma(1/5)\ \Gamma(2/5)\ \ldots\}$
7	6	1	Yes	Yes	$\{\Gamma(1/6)\ \pi,\ 2,\ 3\}$
8	7	3	No	No	$\{\Gamma(1/7)\ \Gamma(2/7)\ \Gamma(3/7)\ \ldots\}$
9	8	2	No	No	$\{\Gamma(1/8)\ \Gamma(3/8)\ \ldots\}$
10	9	3	No	No	$\{\Gamma(1/9)\ \Gamma(2/9)\ \Gamma(4/9)\ \ldots\}$
11	10	2	No	**Yes**	$\{\Gamma(1/10)\ \Gamma(3/10)\ \ldots\}$

7.3 猜想与经验观察

我们区分可证伪猜想（适用于无穷多个情形）与经验观察（总结有限且已穷尽的低欧拉函数值范围）。

猜想 7.1（欧拉函数阈值）。对于 $\varphi\left(M-1\right)/2 \geq 2$，斯托克斯乘子 C_M 不具有如下形式的表示：

$$C_M^p \cdot \prod_j \Gamma(a_j/(M-1))^{q_j} \cdot \pi^r = 2^s \cdot 3^t \cdot (algebraic\ number) \tag{7.2}$$

其中整数指数满足 $|p|$、$|q_j|$、$|r|$、$|s|$、$|t| \leq 10^3$。

我们强调，这是关于不存在低复杂度关系的猜想，而不是超越性命题。我们的方法无法排除指数极大的关系。启发式推理有两点：（i）当 $\varphi(M-1)/2 \geq 2$ 时，PSLQ 基至少包含两个独立的伽马超越数，而每增加一个基元素都会降低 PSLQ 的检测能力（检测极限 $\sim 10^{D/N}$）；（ii）高次势的涨落行列式可能涉及瞬子作用量中不存在的超越数。

经验观察1（$M = 4$ 唯一性）。在具有$\varphi\left(M-1\right)/2 \leq 1$ 的 M 的五个值中（即 $M \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$），$M = 4$ 是唯一一种 C_M 无法用有理数自变量处的伽马函数值、π 和代数数表示为闭式的情况。由于这个集合是有限的，且已被彻底检验，因此这是一项经验事实，而非可证伪猜想。

在 $M \leq 11$ 中，满足 $\varphi(M-1)/2 \leq 1$ 的值为 $M \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$。其中，除 $M = 4$ 外，其余值均已确认存在闭式。

经验观察2（低欧拉函数值的闭式）。对于所有满足 $\varphi(M-1)/2 \le 1$ 和 $M \neq 4$ 的 M，斯托克斯乘子 C_M 都具有 $C_M^p \cdot \Gamma(\cdots)^q \cdot \pi^r = 2^s \cdot 3^t$ 类型的闭式。与观察1一样，可检验集合是有限且已穷尽的；这只是对观察结果的总结，而非可证伪猜想。

注 7.2。满足 $\varphi(M-1)/2 \le 1$ 的 $M-1$ 值构成序列 1、2、3、4、6（除此之外没有其他值，因为 $\varphi(n)/2 = 1$ 要求 $n \in \{3,4,6\}$）。因此，观察2适用于 $M \in \{2,3,4,5,7\}$，而不会对 $M > 7$ 作出任何预测——可检验情形的集合是有限的，并且已经全部穷尽。严格来说，观察2因此是对我们观察结果的总结，而不是一个可证伪猜想。我们将其纳入，是为了强调低欧拉函数值范围的完备性。

注 7.3。观察1是最引人注目的论断：在满足$\varphi(M-1)/2 \le 1$的 M 的五个值中，恰好有一个——$M = 4$——无法产生闭式。这究竟反映了 $\Gamma(1/3)$ 更深层的算术性质，还是 x^8 涨落算子的内在复杂性，仍然是一个悬而未决的问题。

8 CompleteData表格

表3：C_M –11 的斯托克斯乘子。“位数”列表示可靠有效数字的位数，依据比较多个理查森外推窗口进行评估。闭式条目为精确值。

M	$\lvert C_M \rvert$	位数	闭式
2	0。43989 68135 81545 43367	精确值	$\sqrt{6/\pi^3}$
3	0。57315 91682 50756 26287	精确值	$4\sqrt{2}/\pi^2$
4	0.74005 14982 59358 50640 15	30	—
5	0。91376 01170 24928 46899	精确值	$8\sqrt{3}/(\Gamma(\tfrac{1}{4})\ \pi^{5/4})$
6	1。08996 63616 43951 31222	20	—
7	1。26735 98646 78474 53438	22	式（5.8）
8	1。44540 95063 62104 73523	20	—
9	1。62385 95507 60926 01970	17	—
10	1。80257 17672 30778 81596	20	—
11	1。98146 49381 17015 81236	20	—

9 计算性能

所有计算均在一台工作站上使用 Python 3.11 和`mpmath` 任意精度库 [22]完成。表 5总结了每个 M的计算资源。

算法复杂度。主要成本来自 Rayleigh–Schr¨odinger 递推（第 3.1节）。在第 k阶时，状态 $|\psi^{(k)}\rangle$ 支持 $n \le 2Mk$ 个谐振子能级。每一阶需要 $O(Mk)$ 个内积，每次乘法的计算成本为 $O(\mathrm{dps}^2)$

表 4：每个 M 的计算参数。“最高阶数”是计算出的微扰系数数量；“dps”是工作十进制精度；“理查森阶数”是用于最终 C_M 估计的理查森外推阶数。

M	最高阶数	dps	理查森阶数	PSLQ 最大系数	PSLQ 基大小
2	500	200	40	200	5
3	500	200	60	200	5
4	1200	300	100	2000	5
5	600	200	80	200	6
6	500	200	80	200	7
7	400	180	80	200	6
8	300	180	60	200	8
9	300	180	60	200	7
10	250	160	50	300	8
11	250	160	50	200	7

表5：计算性能。“运行时间”是完整流程（RS 递归 + Richardson + PSLQ）的耗时。内存为峰值常驻集大小。所有运行均为单线程。

M	阶数	dps	运行时间	内存	C_M 位数
2	500	200	2 分钟	0.2 GB	24（精确值）
3	500	200	3 分钟	0.3 GB	20（精确值）
4	1200	300	55 分钟	1.0 GB	30
5	600	200	8 分钟	0.4 GB	20（精确值）
6	500	200	7 分钟	0.3 GB	20
7	400	180	6 分钟	0.3 GB	22（精确值）
8	300	180	5 分钟	0.2 GB	20
9	300	180	5 分钟	0.2 GB	17
10	250	160	4 分钟	0.2 GB	20
11	250	160	4 分钟	0.2 GB	20

（使用 `mpmath` 的任意精度算术）。因此， K 阶的总成本为$O(MK^2 \cdot \text{dps}^2)$。

理查森外推（第 3.3 节），阶数为 N，起始索引为 k_0，需要 $O(N)$ 次求值和 $O(N^2)$ 次算术运算，与递归相比可忽略不计。

PSLQ 算法（第 3.5 节）在 $d = 5$–8 的基上，以 $D = 30$–40 位精度运行。其每次迭代的复杂度为 $O(d^3 \cdot D^2)$，最坏情况下需要迭代 $O(D^2)$ 次， [18]，总计 $O(d^3 D^4)$，与系数生成相比可以忽略不计。

并行化机会。针对不同 M 取值的 RS 递归可以轻松并行化。在单个 M内部，递归本质上是串行的（阶数 k取决于阶数 1、……、 $k-1$）。不过，同一阶数下的矩阵元 $\langle n|V|\psi^{(k-1)}\rangle$ 可以通过共享内存模型分配到多个核心上。当前实现为单线程；在现代多核计算机上，并行版本可将 $M = 4$ 计算时间从 55 分钟缩短至 10 分钟以内。

可复现性。所有代码，包括 RS 递归、理查森外推和 PSLQ 搜索脚本，均可在以下地址获取： https://github.com/JackZH26/stokes-multipliers采用 MIT 许可证。预先计算的微扰系数（压缩格式）和所有数值结果均包含在代码仓库中。对于所有 $M = 2$–11，运行完整流程在配备 2 GB 内存的单核上约需 100 分钟。

10 讨论

与复苏理论的联系。斯托克斯乘子 C_M 是复苏超越级数中的首项系数

$$E(g) \sim \sum_{k} a_k g^k + C_M \cdot e^{-A_M/g^{1/(M-1)}} \cdot g^{-1/(2(M-1))} \cdot \big(1 + \cdots\big). \tag{10.1}$$

我们的精确值为高阶非谐振子的复苏分析提供了精度基准。尤其是， C_5 和 C_7的闭式结果可作为未来任何解析推导的非平凡一致性检验。

的普适性。伽马函数平移 $b = -1/2$ 对所有 $M = 2$–11 均得到数值验证。在大阶公式（2.1）中，这对应于 $b + 1 = 1/2$，即Γ（（$M-1$）$k + 1/2$）。如第4.3节所述，这种普适性可由单圈涨落行列式自然解释：零模积分贡献了因子 $|g|^{-1/(2(M-1))}$，使 b 平移 $-1/2$。若要给出完全严格的证明，则需控制一般 M情况下路径积分最速下降近似中的余项。

次领先修正。作为一致性检验，我们提取出首个次领先修正 c_1 （2.1）中的 $M = 2$。构造序列 $\widetilde{c}_{1,\,k} = k\big(\widetilde{C}_k/C_2 - 1\big)$ 并应用理查森外推，我们得到 $c_1 = -95/72$ ，精确到所有可用位数。该值对应于此处采用的 $\Gamma(k + 1/2)$ 约定下的首个次领先修正，并且与 [4, 15]的瞬子级结果一致。将 c_1 提取为精确有理形式，有力地验证了微扰系数和理查森外推过程。对所有 c_1 进行系统计算 M 留待未来工作。

这个 $M = 4$ 谜团。在 $\varphi(M-1)/2 \le 1$ 这些情况中，八次振子是唯一没有闭式的情况。值得注意的是， $M-1 = 3$ 是使 $\Gamma(1/n)$ 成为真正独立的超越数的最小整数（即 $\varphi(3)/2 = 1$ ，而 $\Gamma(1/3)$ 不能化为更简单的伽马函数值）。相比之下， $M-1 = 4$ ($\varphi(4)/2 = 1$, $\Gamma(1/4)$) 和 $M-1 = 6$($\varphi(6)/2 = 1$, $\Gamma(1/6) = f(\Gamma(1/3))$) 都能得到闭式。 $M = 4$ 异常究竟反映了 $\Gamma(1/3)$ 更深层的算术性质，还是涨落算子本身固有的复杂性，仍是一个悬而未决的问题。

开放问题。

1. C_4 能否用其他已知常数表示——例如椭圆积分、模形式或代数簇的周期?

2. 对于 $M = 6$、8、9、……，在更高精度下，使用更大的 PSLQ 基和系数界，是否存在闭式?

3. 能否使用谱ζ函数方法解析计算一般 M 的涨落行列式?

4. 是否存在对 C_5 和 C_7的闭式的可重求和推导?

11 结论

我们对具有 $M = 2$ 的非谐振子 $H = p^2/2 + x^2/2 + gx^{2M}$ 的斯托克斯乘子 C_M进行了系统性高精度计算，最高达到 11 位。我们的主要贡献如下:

- 瞬子作用量的通用闭式表达式， $A_M = \left[2^{-1/(M-1)}\mathrm{B}(1/(M-1), 3/2)/(M-1)\right]$ 对所有 $M \le 11$ 均已验证。
- 两个新的精确斯托克斯乘子： C_5 涉及 $\Gamma(1/4)$（方程（5.4））以及 C_7 涉及$\Gamma(1/3)$（方程（5.8））。
- 强有力的数值证据——通过在30位精度下进行穷尽式PSLQ搜索——表明C_4 在标准 Gamma–π 基底中不存在闭式，从而确立了八次振子是具有 $\varphi(M-1)/2 \le 1$ 的振子中的一个异常例子。
- 的高精度数值 C_M 对于 $M \le 11$ (表3)，可作为未来分析和数值研究的基准。
- 关于闭式存在性与欧拉函数之间关系的猜想（定理7.1 及观察 1–2），将量子力学与经典数论联系起来。

本研究揭示的瞬子物理学、发散级数与伽马函数的数论性质之间的相互作用，表明它们存在丰富的结构联系，值得进一步探索。

致谢

计算使用 Python，并借助 `mpmath` 任意精度库 [22]。整数关系检测使用了 `mpmath` 中的 PSLQ 实现。

数据可用性

所有计算代码（系数生成、理查森外推、PSLQ 搜索）以及预先计算的数值结果均已公开发布于 `https://github.com/JackZH26/stokes-multipliers` ，并采用 MIT 许可证。论文可作为 Figshare预印本 获取，DOI 为10.6084/m9.figshare.31796332.v1。

参考文献

[1] C. M. Bender 和 T. T. Wu, 《非简谐振子》, Phys. Rev. 184, 1231 (1969)。[2] C. M. Bender 和 T. T. Wu, 《非简谐振子 II：大阶微扰理论研究》, Phys. Rev. D 7, 1620 (1973)。[3] J. Zinn-Justin, 《量子力学中的多瞬子贡献 II》, J. Math. Phys. 45, 4345 (2004)。[4] J. Zinn-Justin 和 U. D. Jentschura, 《多瞬子与精确结果 I：猜想、WKB展开与瞬子相互作用》, Ann. Phys. 313, 197 (2004)。[5] G. ´Alvarez, 《对称双阱多瞬子展开的 Langer–Cherry推导》, J. Math. Phys. 45, 3095 (2004)。[6] G. ´Alvarez 和 C. Casares, 《三次非简谐振子本征值渐近展开中的指数小修正》, J. Phys. A 33, 5171 (2000)。[7] G. ´Alvarez 和 C. Casares, 《均匀场斯塔克问题大阶渐近式的高阶修正》, J. Phys. A 48, 045203 (2015)。.[8] G. V. Dunne 和 M. Unsal, 《从微扰理论生成非微扰物理》, Phys. Rev. D 89, 041701(R) (2014)。.[9] G. V. Dunne 和 M. Unsal, 《量子场论中的新非微扰方法：从大-N 轨形等价到双子与复苏理论》, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 66, 245 (2016)。[10] G. Ba¸sar 和 G. V. Dunne, 《复苏理论与Nekrasov-Shatashvili极限：连接 Mathieu 和 Lam´e 系统中的弱耦合与强耦合》, JHEP 02, 160 (2015)。.[11] A. Cherman、D. Dorigoni 和 M. Unsal, 《利用复苏理论解码微扰理论：斯托克斯现象、新鞍点与 Lefschetz thimble》, JHEP 10, 056 (2015)。[12] O. Costin 和 R. D. Costin, 《非线性微分系统解在反斯托克斯方向上奇点的形成》, 《数学发明》145, 425 (2001)；另见 O. Costin, 《渐近分析与Borel可和性》, Chapman & Hall/CRC, 2009。[13] E. Delabaere 和 F. Pham, 《半经典渐近分析中的复苏方法》, Ann. Inst. Henri Poincar´e Phys. Th´eor. 71, 1 (1999)。[14] A. Voros, 《四次振子的回归：复 WKB方法》, Ann. Inst. Henri Poincar´e Phys. Th´eor. 39, 211 (1983)。[15] U. D. Jentschura 和 J. Zinn-Justin, 《多瞬子与精确结果 III：偶次与奇次非谐振子共振的统一描述》, Ann. Phys. 325, 1135 (2010)。[16] D. Dorigoni, 《复苏理论、横截级数与外尔计算导论》, Ann. Phys. 409, 167914 (2019)。

[17] I. Aniceto, G.Ba.sar, 和 R. Schiappa, 《复苏转级数及其渐近分析入门》, 《物理报告》**809**, 1（2019）。[18] H. R. P. Ferguson、D. H. Bailey 和 S. Arwade, 《使用 PSLQ 算法识别常数》, 《数学计算》**68**, 351（1999）。[19] S. Chowla 和 A. Selberg, 《论爱泼斯坦ζ函数》, 《纯粹与应用数学杂志》**227**, 86（1967）。[20] M. Waldschmidt, 《周期的超越性：现状》, 《纯粹与应用数学季刊》**2**, 435（2006）。[21] D. Rohrlich, 《阿贝尔积分的周期及 Chowla–Selberg 公式》, 《数学发明》**45**, 193（1978）；S. Lang, 《分布关系及经典例子》, *S´em. Delange–Pisot–Poitou*, 1978。[22] F. Johansson 等, `mpmath`：用于任意精度浮点运算的 Python 库（版本 1.3）, http://mpmath.org/, 2023。