arXiv:2603.27614v1 [math.CT] 29 Mar 2026

酉、内积与匕首范畴

Robin Cockett卡尔加里大学 加拿大卡尔加里 robin@ucalgary.ca

Durgesh Kumar卡尔加里大学 卡尔加里，加拿大 durgesh.ku mar@ucalgary.ca

Priyaa Varshinee Srinivasan塔林理工大学 塔林，爱沙尼亚 priyaavarshinee@gmail.com *

本文从内积范畴的角度，对匕首范畴作出了一种替代性刻画。匕首范畴是范畴量子力学研究的核心。内积范畴是带有内积组合子的“非手性对合”范畴。反过来，内积范畴恰好就是酉范畴，而酉范畴是匕首范畴的一种较弱形式。在酉范畴中，对象与其匕首之间存在同构；而在匕首范畴中，两者之间则是恒等函数。每个酉范畴都配有全局内积结构，它使得我们能够将酉范畴上的对合结构严格化，从而得到一个匕首范畴，并使酉范畴与匕首范畴二范畴等价。

将内积视为（非手性）对合范畴上的抽象度量，便可在内积范畴中定义保距映射（等距映射），并进一步在这一框架下发展其他特殊映射的概念——酉映射、厄米映射、正映射和正规映射。

1 引言

†-范畴（读作“dagger category”） [7] 是一种配备了反变对合的范畴，是研究范畴量子力学的基础性构造 [3, 4]。†-范畴的定义要求其匕首函子是严格的，即在对象上为恒等映射。然而，在将量子结构与更广泛的范畴框架联系起来时，这种严格性要求相当受限。例如， $\star$-自对偶范畴 [1, 2] 和紧闭范畴可能必然具有非严格的对合 [8, 第 3.1 节和第 3.2]节。本文为涵盖这些例子，沿用[6] 的做法，将 †-范畴重新表述为非手性对合范畴的实例。

“对合”一词在范畴论文献中有多种用法。例如，Donald Yau 在其著作《对合范畴论》 [10], 中研究协变对合。在这方面，他遵循了 Bart Jacobs [5]开创的先例。不过，本文所说的对合范畴专指反变对合——Yau 也称之为“反向”对合。

Paul-Andr´e Mellie`s 在研究“手性” [6]时，开创了反变对合的一般理论。“手性”一词源自化学[1] ，在此语境中，它指打破分子镜像之间的行为对称性——在这里，则是指打破一个范畴与其对偶之间的对称性。在后续论文中，我们将采用 Mellie`s 提倡的更一般的手性框架来讨论手性对合。不过，本文考察的是非手性的 0-胞腔、1-胞和 2-胞系统，这些胞不打破对称性。因此，我们将这些范畴称为非手性对合范畴。

每个非手性对合范畴都关联着一个酉范畴。酉 范畴是†-范畴的一种弱化形式 [7] ，其中每个对象都与其†-对偶同构。这个关联的

*本研究由欧盟和爱沙尼亚研究委员会通过 Mobilitas 3.0（MOB3JD1227）共同资助。[1]在化学中，手性分子是具有两种不同对映异构体的分子。尽管这类对映异构体互为镜像，但它们具有不同的化学性质和物理性质（例如，众所周知，对映异构体会使偏振光向相反方向旋转）。

已提交至 ACT 2026。

© R. Cockett、D.Kumar 和 P V. Srinivasan 本作品采用知识共享署名许可协议授权。

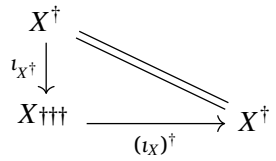
酉范畴是通过收集一般非手性对合范畴中的预酉对象构造出来的。该构造具有2-函子性，并且酉范畴的（2-）范畴是非手性范畴的2-范畴中的一个余反射子范畴。

接下来，我们将公理化地刻画非手性对合范畴配备（全局）内积结构的含义。任何酉范畴都可以等价地看作带有内积的非手性对合范畴。利用这种内积结构，可以将对合结构严格化，从而得到一个 †-范畴（依照 [7] 的定义），由此建立酉范畴、内积范畴和 †-范畴这三个 2-范畴之间的三方等价。此外，将内积视为范畴上的抽象度量，便可以把等距映射定义为保度量映射。酉映射则是可逆的等距映射。同样，厄米映射、正映射和正规映射也都可以用内积结构自然地加以描述。

手性对合范畴不是酉范畴，因此没有内积。不过，这一框架自然导向 †-线性分配范畴 [8]，其中 par 由手性对偶给出。值得注意的是，†-线性分配范畴（†-LDC）的模型被用于研究无限维量子过程。我们计划在后续论文中对此作详细阐述。

2 非手性对合

如果一个范畴具有一个反变自函子 $(\,)^\dagger : \mathbb{X}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{X}$，称为**匕首**，以及一个自然同构 $\iota : X \to X^{\dagger\dagger}$，称为**对合子**，使得下图交换，则称该范畴具有一个**（非手性）对合**：



我们将具有（非手性）对合的范畴称为**对合范畴**，并将其记为三元组 $\mathbb{X} = (\mathbb{X}, (-)^\dagger, \iota)$。我们将对合为**严格**的对合范畴（因此 $X^\dagger = X$ 且 ι 为恒等映射）称为**严格对合范畴**，并将此术语与 †-范畴交替使用。

例 2.1。
(1) [7] 中定义的所有 †-范畴都是严格对合范畴，且有许多此类范畴的例子：

(a) 每个群胚（事实上，更一般地，每个逆范畴[2]）都是一个 †-范畴，其对合为 $x^\dagger = x^{-1}$（分别为 $x^\dagger = x^{(-1)}$）。(b) 关系范畴中，$R^\dagger = R^\circ = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ 为转置关系。(c) 任意幺半环（或环）上的矩阵范畴 R，若其具有对合，则关于共轭转置构成一个 †-范畴。幺半环具有共轭，记作 $\overline{(\,)}$，当 $1 = 1$、$ab = b\,a$、$0 = 0$，且 $a + b = a + b$。当幺半环为交换幺半环时，恒等映射给出平凡的共轭。随后通过修改转置可得到严格对合：

$$\frac{(r_{i,j})_{i<n,\,j<m} : n \longrightarrow m}{(\overline{r_{i,j}})_{j<m,\,i<n} : m \longrightarrow n}\ (_)^\dagger$$

当 $R = \mathbb{C}$（其中 $\mathbb{C}$ 是带有通常共轭运算的复数）时，这就给出了通常的匕首（共轭转置）。

[2] 一个范畴，其中每个态射 f 都存在唯一的映射 g，使得 $fgf = f$，且 $gfg = g$。

（2）每个 $*$-自主范畴和紧闭范畴都是对合范畴，其对合为对偶函子。

(3) 对称自反图范畴 SRGraph 是对合范畴的一个基本例子。一个对象是一个集合X，配备了一个对称自反关系，$\smile$（其中$x \smile x$，并且若$x \smile y$，则$y \smile x$）。一个态射是底层集合之间保持关系的同构/双射（也就是说，$\alpha : X \to Y$，作为集合映射存在逆映射 α^{-1}，且满足$x \smile x'$ 蕴含 α（x）$\smile \alpha$（x'））。

对合 $(\,)^\dagger : \mathbf{SRGraph}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SRGraph}$ 将 $\alpha : (X, \smile_X) \to (Y, \smile_Y)$ 映射为 $\alpha^\dagger = \alpha^{-1} : (Y, \smile^\dagger_Y) \to (X, \smile^\dagger_X)$，其中$x \smile^\dagger_X x'$当且仅当$x \not= x'$或$x = x'$。请注意，这不是一个†-范畴（因为$(X, \smile_X) \not= (X, \smile_X)^\dagger$——空对象和单元素对象除外），但 $\iota : X \to X^{\dagger\dagger}$是恒等映射。

(4) 整数在通常序下关于取负构成一个对合范畴——注意，这不是一个匕首范畴，因为 $n^\dagger := -n \not= n$，除非 $n = 0$。更一般地，任何有限序数都可以通过反转顺序构成一个对合范畴。

Re注 2.2. 非手性对合的公理 $\iota_{X^\dagger}(\iota_X)^\dagger = 1_{X^\dagger}$ 给出一个伴随等价 $\mathbb{X} \rightleftarrows \mathbb{X}^{\mathrm{op}}$：

$$\mathbb{X} \underset{(_)^\dagger}{\overset{(_)^\dagger}{\rightleftarrows}} \mathbb{X}^{\mathrm{op}} \quad (\dashv)$$

其单位和余单位分别为 $\iota : X \to X^{\dagger\dagger}$。需要注意的是，我们所发展的理论大多不需要这个恒等式。正如我们将看到的，这个恒等式是使 ι 成为一个非手性（自然）变换所必需的。

定义 2.3. 若$(\mathbb{X}, (\,)^\dagger, \iota)$和$(\mathbb{Y}, (\,)^\ddagger, \iota')$是带对合的范畴，则一个**(非手性)对合函子** 记作$(F, \gamma) : (\mathbb{X}, (\,)^\dagger, \iota) \to (\mathbb{Y}, (\,)^\ddagger, \iota')$，由一个函子$F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$和一个自然同构 $\gamma_X : F(X^\dagger) \to F(X)^\ddagger$（关于反变函子）组成，称为**保持子**，它使下图交换：

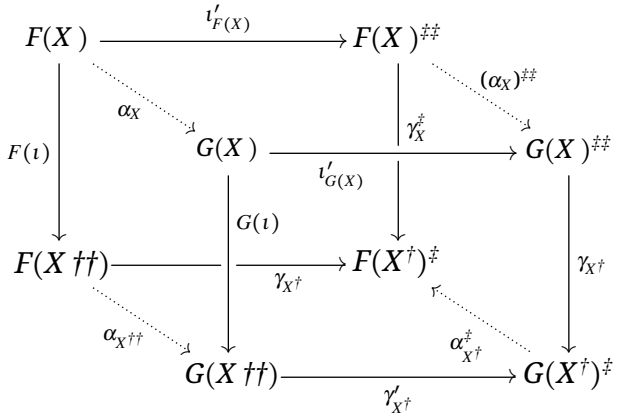
$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\iota)} & F(X^{\dagger\dagger}) \\ {\scriptstyle \iota'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_X} \\ F(X)^{\ddagger\ddagger} & \xrightarrow[\gamma^\ddagger_X]{} & F(X^\dagger)^\ddagger \end{array}$$

*Invo*保持函子按如下定义的复合进行复合$(F, \gamma)(G, \gamma') := (FG, G(\gamma)\gamma')$.

注 2.4.

(1) 这里对函子的相容性要求比通常更高。通常只要求存在 $\gamma_X : F(X^\dagger) \to F(X)^\dagger$，而不要求有相容性条件来规范其与$\iota$ 的相互作用。(2) 对于 †-范畴，要求 F“保持”匕首，也就是说，$F(X^\dagger)$ 和 $F(X)^\dagger$ 是完全相同的对象。此外，对合子是恒等映射这一事实会使上面的相容性方块退化为恒等映射。因此，这一相容性要求在 †-范畴中自动成立。(3) 对于协变对合，可以证明根据相容性要求 [5, 10]，保持子必定是一个同构。然而，这一点似乎不适用于反变对合：因此我们要求保持子是一个同构。

定义 2.5。 若 $(F\ \gamma)$、$(G\ \gamma')$: $\mathbb{X} \nrightarrow \mathbb{Y}$ 是对合函子，则一个**(非手性)变换** $\alpha : (F\ \gamma) \Rightarrow (G\ \gamma')$ 是一个自然变换 $\alpha : F \Rightarrow G$，且还满足：



注意，右下角的态射朝着“错误的方向”：我们称这个映射为**系链**。系链所在的方块必须可交换（系链要求），这一要求有一个重要后果：

引理 2.6. 系链要求迫使 α 成为自然同构。

证明。 要看出这一点，首先注意到，态射 f 是一个收缩（分别地，是一个截面），当且仅当它的任意共轭 $\beta f \gamma^{-1}$ –（其中 β 和 γ 可逆）也是一个收缩（分别地，是一个截面）。

注意，上方立方体的底部方块迫使 $\alpha_{X^{\dagger\dagger}}$ 成为一个截面：因此，由于 $\alpha_X = F(\iota)\alpha_{X^{\dagger\dagger}}G(\iota)^{-1}$, α_X 是一个截面。现在注意，右侧方块迫使 $\alpha^{\ddagger}{}_{X^\dagger}$ 成为一个收缩，因此，由于 α_X 是它的一个共轭，我们也有 α_X 是一个收缩，因而是一个同构。 □

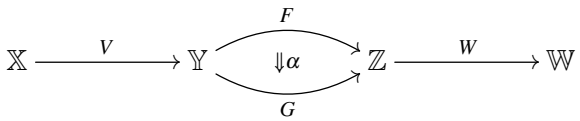
更一般地，正如我们在后续论文中讨论手性变换时将会看到的，还有另一种不那么激进的方式来解释“系链”，而无需要求所有变换都是同构。此外，正如我们将会看到的，这会带来有趣的结构性影响。

注释 2.7。

(1) 在 †-范畴的情形下，ι 和 γ 都是恒等态射，因此这迫使 $\alpha^{-1} = \alpha^\dagger$。因此，在这种情形下，$\alpha$ 是一个酉同构 [7, 定义 2.3]。

(2) 由于系链是一个同构，其方向可以校正。事实上，对于手性变换 [6],，实际上存在两个方向相反的自然变换：在非手性情形下，这一对变为（α, α^{-1}）。

显然，这些变换通过简单地叠放这些方块即可复合。同样显然，左侧粘合给出一个变换：



右侧的粘合更为复杂（参见附录 A 中图 1 的交换图）。由此得出以下断言：

命题 2.8。 对合范畴、它们的函子及其非手性变换共同构成一个 *2*-范畴，aChiral （其中所有 *2*-胞都是同构）。

这类对合函子变换有一个现成的例子：

引理 2.9。 对于任意非手性对合范畴，对合子本身就是一个（非手性的）变换。

证明见附录 A。

3 酉范畴

酉范畴这一概念是在 [8] 匕首 isomix 范畴的背景下引入的。这里，我们将这一概念的核心提炼出来，并推广到对合范畴。

一个对合范畴， $\mathbb{X}$ 是一个**酉范畴** [8, 定义 4.1] 当且仅当对每个对象$X \in \mathbb{X}$，都存在一个同构 $\varphi_X : X \to X^\dagger$，称为**X** 的**酉结构映射**，且不要求其满足自然性，使得：

[U.1] $\varphi_{X^\dagger} = (\varphi_X^{-1})^\dagger$其中 $\varphi_{X^\dagger} : X\dagger \to X^{\dagger\dagger}$; **[**

U.2] $\varphi_X \varphi_{X^\dagger} = \iota_X$其中 $\iota_X : X \to X^{\dagger\dagger}$。

因此，酉范畴是由对合范畴和一个酉结构组成的四元组——$\mathbb{X} = (\mathbb{X},\ (-)^\dagger,\ \iota,\ \varphi)$。酉结构映射满足若干恒等式：

引理 3.1. 酉结构映射满足：

$$(i)\ \varphi_X^\dagger = \varphi_{X^\dagger}^{-1}; \qquad (ii)\ \varphi_X = \iota(\varphi_X^\dagger); \qquad (iii)\ \varphi_X^{-1}\iota = (\varphi_X^{-1})^\dagger; \qquad (iv)\ \iota(\varphi_{X^\dagger})^\dagger \iota^{-1} = \varphi_X^{-1}.$$

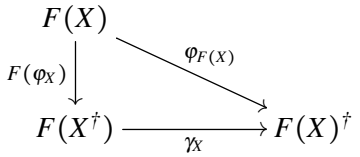
例 3.2。

(1) 任意 †-范畴都具有由恒等映射给出的酉结构。

(2) 酉 †-范畴的标准例子是有限维向量空间范畴：每个有限维空间都与其对偶同构，尽管这种同构并非自然同构（取决于基的选择）：这些同构给出酉结构 [8, Section 4.4.1]。

(3) 赋予整数通常序并以取负作为对合，构成一个简单的非酉范畴例子。

定义 3.3. 酉范畴之间的对合函子 $(F\ \gamma) : (\mathbb{X}, (\ )^\dagger, \iota) \to (\mathbb{Y}, (\ )^\ddagger, \iota')$，若对每个 $X \in \mathbb{X}$，下图都交换，则称为**酉函子**：



注 3.4。

（1）对于酉函子（$F\ \gamma$），酉结构将保持子确定为 $\gamma_X = F(\varphi_X^{-1})\varphi_{F(X)}$，这迫使保持子成为一个同构（回想一下，一般情况下我们必须要求这一点）。

(2) †-范畴之间的酉函子必然严格保持对合，因为保持子 $\gamma : F(X\dagger) \to F(X)^\dagger$是恒等映射；由于$F(\varphi_X)\gamma = \varphi_{F(X)}$，且酉结构映射都是恒等映射，因此 γ也必为恒等映射。

引理 3.5。

(i) †-范畴之间的酉函子必然是严格的对合函子，并且严格保持匕首，$F(X^\dagger) = F(X)^\dagger$；*(ii)* 对于酉函子，其底层函子决定了保持子。

证明。 只需证明后一条陈述。假设 $(F\ \gamma)$ 和 $(F\ \gamma')$ 是具有相同底层函子 F 的酉函子，那么，由于 $\varphi_{F(X)} = F(\varphi_X)\gamma$，我们有 $\gamma = F(\varphi_X^{-1})\varphi_{F(X)}$。 □

引理 3.6。 带有酉函子和非手性变换的酉范畴构成一个 *2*-范畴，UNITARY。

证明。 显然，恒等函子（连同恒等自然变换）是酉函子。现在我们来证明两个酉函子的复合仍是酉的:

$$G(F(\varphi_X))G(\gamma_X)\gamma'_X = G(\phi_{F(X)})\gamma'_{F(X)} = \psi_{G(F(X))}$$

复合的单位律和结合律由对合函子的相应性质推出。 □

现在，我们构造酉范畴与对合范畴之间的 2-余反射。显然，酉范畴构成对合范畴的一个子 2-范畴，$\mathrm{I} : \mathrm{UNITARY} \to \mathrm{aChiral}$。我们调整酉构造 [8,定义 4.12]，从任意对合范畴中提取一个酉范畴。

给定一个对合范畴 $\mathbb{X}$，我们如下构造 Unitary($\mathbb{X}$):

对象： 对 $(X,\ h : X \to X\dagger)$，其中 X 是 $\mathbb{X}$ 的一个对象，且 h 是一个同构，满足 $h(h^{-1})^\dagger = \iota$。每个这样的对称为 $\mathbb{X}$ 的一个预酉对象。

映射： 映射 $f : (X,\ h : X \to X\dagger) \to (Y,\ h' : Y \to Y\dagger)$ 是 $\mathbb{X}$ 中任意一个映射 $f : X \to Y$。

对合： 在对象上为 $(X,h)^\dagger := (X,h^{-1})^\dagger$，而在映射上以及对于 ι，则如 $\mathbb{X}$ 所示。

我们重新考察一些对合范畴的例子（来自例 2.1），以说明这些范畴中的预酉对象:

例 3.7。

(1) 设 $\mathbb{X}$ 为任意 †-范畴。$\mathbb{X}$ 的预酉对象为 (X，h)，其中 h 是厄米同构，(f = f †)，且通过将对象 X 映射为 (X，id_X)，$\mathbb{X}$ 嵌入 Unitary($\mathbb{X}$) 成为一个满子范畴。(2) 对于范畴 SRGraph，回顾一下，映射的匕首就是它的逆函数。对于一个预酉对象，我们需要有一个同构 $\mathrm{h} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^\dagger$，它必须保持关系；此外还需满足 $\mathrm{h}(\mathrm{h}^{-1})^\dagger = 1$。在 SRGraph 中，后一个恒等式意味着底层集合函数满足 $\mathrm{hh} = 1$。假设 $\mathrm{h(a)} = \mathrm{b}$，且 $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$；那么若 $\mathrm{a} \sim \mathrm{b}$，则 $\mathrm{h(a)} \not\sim \mathrm{h(b)}$；反过来，若 $\mathrm{a} \not\sim \mathrm{b}$，则 $\mathrm{h(a)} \sim \mathrm{h(b)}$，因此不可能存在被交换的不同点。这迫使 h 为恒等映射；然而，类似的论证也表明，在这种情况下 h 不能固定两个不同的点。因此，底层集合的基数至多为 1。所以，SRGraph 的预酉对象恰好是空集上的空关系，以及单元素集上的唯一自反关系。(3) 在整数的偏序范畴中，Unitary 构造得到单对象离散范畴 0。注意，对于非零整数构成的子范畴，不存在预酉对象。

给定一个非手性函子 $F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$，我们可以通过将$h : X \to X\dagger$ 映射为 $F(h)\gamma : F(X) \to F(X)^\dagger$，将其转移到酉对象上。我们必须验证 $F(h)\gamma : F(X) \to F(X)^\dagger$ 是一个预酉对象：——

$$\begin{aligned} F(h)\gamma((F(h)\gamma)^{-1})^\dagger &= F(h)\gamma(\gamma^{-1}F(h)^{-1})^\dagger = F(h)\gamma(F(h)^{-1})^\dagger(\gamma^{-1})^\dagger \\ &= F(hh^{-1\dagger})\gamma(\gamma^{-1})^\dagger = F(\iota)\gamma(\gamma^{-1})^\dagger = \iota. \end{aligned}$$

由预酉对象上的F 的定义可知，F 是一个酉函子。因此，Unitary : aChiral → UNITARY 是一个 2-函子：——

命题 3.8。 存在一个 *2*-伴随：

$$\mathsf{UNITARY}(\mathbb{U}, \mathsf{Unitary}(\mathbb{X})) \simeq \mathsf{aChiral}(\mathcal{I}(\mathbb{U}), \mathbb{X})$$

其中，$\mathbb{U}$ 是一个酉范畴，$\mathbb{X}$ 是一个对合范畴，并且具有$\mathsf{Unitary}(\mathcal{I}(\mathbb{U})) \simeq \mathbb{U}$，从而构成一个 *2*-余反射。

4 内积范畴

我们的下一个目标是证明，每个酉范畴都具有内积结构；事实上，我们还将证明，这一结构刻画了酉范畴。为此，我们从以下内容开始：

定义 4.1. 一个**内积范畴**是一个具有**内积组合子的对合范畴**：

$$\frac{f : A \longrightarrow X \quad g : B \longrightarrow X}{\langle f|g\rangle : A \longrightarrow B^\dagger}$$

满足以下公理 **[IP.1]–[IP.4]**。

[IP.1] 前复合： $\langle hf|kg\rangle = h\langle f|g\rangle k^\dagger$。

[IP.2] 匕首与对偶： *(a)* $\iota\langle f^\dagger|g^\dagger\rangle^\iota = \langle f\ |g\rangle$ 以及 *(b)* $\iota\langle f\ |g\rangle^\dagger = \langle f\ |g\rangle$。

[IP.3] 给定 $hg = 1$，$\langle f|g\rangle\langle h|k\rangle^\iota = fk$**[I**

P.4] 给定 $gh = 1$，$\langle f\ |g\rangle^\iota\langle h|k\rangle = (kf)^\dagger$，

其中映射$\langle h|k\rangle^\iota : A^\dagger \longrightarrow B$ 是 $h : X \to A$ 和 $k : X \to B$ 的**对偶内积**，定义如下—— *s:*

[dual-IP]

$$\begin{array}{ccc} A^\dagger & \xrightarrow{\iota_{A^\dagger}} & A^{\dagger\dagger\dagger} \\ {\scriptstyle \langle h|k\rangle^\iota}\downarrow & := & \downarrow{\scriptstyle \langle k^\dagger|h^\dagger\rangle^\dagger} \\ B & \xleftarrow[\iota_B^{-1}]{} & B^{\dagger\dagger} \end{array}$$

关于 **[IP.1] - [IP.4]**, 类型的映射，参见附录 B 中的定义 B.1。

引理 4.2。 在内积范畴中，以下条件等价：

(a) **[IP.2](a)** 或 **[IP.2](b)** 成立，且 **[IP.2](c)** $\langle f^{\dagger\dagger}|g^{\dagger\dagger}\rangle = \iota_A^{-1}\langle f\ |g\rangle\iota_{B^\dagger}$ 成立；

(b) **[IP.2](a)** 和 **[IP.2](b)**均成立。

上述引理的证明以及本节后续结果见附录 B。

引理 4.3。 以下方程在内积范畴中成立：

(i) 若 $h,k : B \to A$ 且 $f, g : A \to X$，则 $\langle hf|kg\rangle^\iota = f^\dagger \langle h|k\rangle^\iota g$

(ii) $\langle g^\dagger | f^\dagger\rangle = (\langle f|g\rangle^\iota)^\dagger$

(iii) $\langle f|g\rangle^\dagger = \langle g^\dagger | f^\dagger\rangle^\iota$

定义 4.4. 若对合函子 $(F, \gamma) : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是内积范畴之间的函子，则称其**保持**内积，若对任意 $f, g : A \to X \in \mathbb{X}$，$\langle F(f)|F(g)\rangle = F(\langle f|g\rangle)\gamma_A$。

给定任意酉范畴，对于任意一对映射 $f : A \to X$ 和 $g : B \to X$，我们可以定义一个**内积** $f|g := f\varphi_X g^\dagger : A \to B^\dagger$。

引理 4.5。 每个酉范畴都是一个内积范畴，其内积组合子定义如下。给定 $f : A \to X$、$g : B \to X$，它们的内积定义为：

$$\langle f|g\rangle_X := f\varphi_X g^\dagger$$

证明。 我们先计算对偶内积。给定 $h : X \to A$ 和 $k : X \to B$，

$$\begin{aligned}\langle h|k\rangle^\iota &:= \iota_{A^\dagger}\langle k^\dagger|f^\dagger\rangle^\dagger \iota_B^{-1} = \iota_{A^\dagger}(k^\dagger \varphi_{X^\dagger} h^{\dagger\dagger})^\dagger \iota_B^{-1} \\ &= \iota_{X^\dagger} h^{\dagger\dagger\dagger}(\varphi_{X^\dagger})^\dagger k^{\dagger\dagger}\iota_B^{-1} = f^\dagger \iota_{X^\dagger}(\varphi_{X^\dagger})^\dagger \iota_X^{-1} k \\ &= h^\dagger \varphi_X^{-1} k\end{aligned}$$

其中最后一行用到了（另见引理 3.1）： $\iota(\varphi_{X^\dagger})^\dagger \iota^{-1} = \iota(\varphi_X^{-1})^{\dagger\dagger}\iota^{-1} = \varphi_X^{-1}$。

现在证明以下恒等式：给定 $f : A \to X$ 以及 $B \to X$， **[IP.2]** 是显然的。事实上，

[IP.2] (a) $\iota\langle f^\dagger|g^\dagger\rangle^\iota = \iota f^{\dagger\dagger}\varphi_{X^\dagger}^{-1} g^\dagger = f\iota\varphi_{X^\dagger}^{-1} g^\dagger = f\varphi_X g^\dagger = \langle f|g\rangle$

(b) $\iota\langle f|g\rangle^\dagger = \iota(f\varphi_X g^\dagger)^\dagger = \iota g^{\dagger\dagger}\varphi_X^\dagger f^\dagger = g\iota\varphi_X^\dagger f^\dagger = g\varphi_X f^\dagger = \langle g|f\rangle$

[IP.2] 若 $hg = 1$ 则，$\langle f|g\rangle\langle h|k\rangle^\iota = f\varphi_X g^\dagger h^\dagger \varphi_X^{-1} k = f\iota_X(hg)^\dagger \iota_X^{-1} k = fk$

[IP.2] 若 $gh = 1$ 则，$\langle f|g\rangle^\iota\langle h|k\rangle = f^\dagger \varphi_X^{-1} gh\varphi_X k^\dagger = f^\dagger k^\dagger = (kf)^\dagger$ □

命题 4.6。 内积范畴是一个酉范畴，其中酉结构定义为： $\varphi_A := \langle 1_A|1_A\rangle : A \to A^\dagger$.

证明。 我们证明 $\varphi_A := 1_A|1_A : A \to A^\dagger$ 是酉结构映射，即 **[U。1]** 和 **[U。2]** 成立。

首先， $\varphi_A : A \to A^\dagger$ 是一个同构：其逆映射为 $\varphi_A^{-1} := 1_A|1_A{}^\iota$。由 **[IP。3]** 可得 $\varphi_A^{-1}\varphi = 1_A$，由 **[IP。4]** 可得 $\varphi_A\varphi_A^{-1} = 1_{A^\dagger}$。

[U.1] $\varphi_{A^\dagger} = (\varphi_A^{-1})^\dagger$

$$\varphi_{A^\dagger} := \langle 1_{A^\dagger}|1_{A^\dagger}\rangle = \langle 1_A^\dagger|1_A^\dagger\rangle \overset{Lem.4.3(ii)}{=} \langle 1_A|1_A\rangle^{\iota^\dagger} =: (\varphi_A^{-1})^\dagger$$

[U.2] $\varphi_A\varphi_{A^\dagger} = \iota$

$$\varphi_A := \langle 1_A|1_A\rangle \overset{\textbf{[IP.2]}(a)}{=} \iota\langle 1_A^\dagger|1_A^\dagger\rangle^\iota = \iota\langle 1_{A^\dagger}|1_{A^\dagger}\rangle^\iota =: \iota\varphi_{A^\dagger}^{-1}$$

最后需要指出，几乎立刻就能得到，由内积结构诱导的酉结构会诱导回原来的内积结构；反过来，酉结构的内积结构也会诱导回原来的酉结构。因此，这两种结构之间存在双射对应。 □

注意，命题 4.6 并未使用 **[内积。2]**(b)。这意味着要求恒等映射是多余的。因此，如下方引理所示，我们应当能够由 **[内积。2]**(a) 证明 **[内积。2]**(b)。

证明利用 **[IP.1]** 和 **[IP.4]** 将问题化简为酉结构映射的恒等式，然后利用酉结构映射是同构这一事实。

定理 4.7。 酉范畴与内积范畴完全相同。

证明。 由命题 4.5 和 4.6 立即可得。 □

因此，内积可以用来替代酉结构，反之亦然。此外，正如我们现在要指出的，内积与酉结构之间的等价在函子层面上也成立：

引理 4.8。 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是内积范畴。那么，$(F\ \gamma): \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是一个对合函子，当且仅当它是保持内积的酉函子。

全局内积并非新想法：例如，Vicary [9], 将匕首范畴中两个平行映射 $f, g : A \to X$ 的内积定义为 $f|g = fg^\dagger$。请注意，对于 †-范畴中的平行映射，我们的内积定义与 Vicary 的定义一致。不过，我们的定义也涵盖非平行映射。因此，每个匕首范畴当然都是内积范畴的一个例子。

将群胚视为 †-范畴时，两个态射 $x : X \to Z, y : Y \to Z$ 的内积为 xy^{-1}。在关系范畴中，$R : X \to Z, S : Y \to Z$ 的内积为 $RS^\dagger : X \to Y$，其中 $S^\dagger$ 是转置关系。

4.1 内伴随

目前我们知道，酉范畴可以等价地定义为带有内积的范畴。不过，带有内积的范畴还支持“内伴随”的概念。

定义 4.9. 在内积范畴中，给定 $f : A \to B$，f 的（内）**伴随**是一个映射 $f^* : B \to A$，满足

$$\langle xf|y\rangle = \langle x|yf^*\rangle$$

内伴随提供了希尔伯特空间意义下“伴随”的一般化。它们还提供了一种简洁的方式来证明酉范畴等价于 †-范畴。

引理 4.10. 在内积范畴中，映射 $f : A \to B$ 的伴随存在且唯一，并由下式给出

$$f^* := \varphi_B f^\dagger \varphi_A^{-1} \tag{1}$$

它满足：

$(i)\ \langle xf|y\rangle = \langle x|yf^*\rangle$ $(ii)\ \langle xf^*|y\rangle = \langle x|yf\rangle$ $(iii)\ f = (f^*)^*$ $(iv)\ 1_A^* = 1_A$ *and* $(fg)^* = g^* f^*$

证明。 令 $f : A \to B$，令 $x = 1_A$ 和 $y = 1_B$，得到：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle f|1\rangle = \langle 1|f^*\rangle}{f\varphi_B = \varphi_A (f^*)^\dagger}}{\varphi_A^{-1} f \varphi_B = (f^*)^\dagger}}{\iota(\varphi_A^{-1} f \varphi_B)^\dagger \iota^{-1} = \iota (f^*)^{\dagger\dagger} \iota^{-1}}}{\iota \varphi_B^\dagger f^\dagger (\iota \varphi_A^\dagger)^{-1} = f^*}}{f^* = \varphi_B f^\dagger \varphi_A^{-1}}$$

这表明 f 唯一确定了 f^*。类似地，f^* 将 f 确定为

$$f = \varphi_A (f^*)^\dagger \varphi_B^{-1}$$

现在我们可以用这些来证明引理：

(i) 这是根据定义得出的。

(ii) 这意味着，当 $f : A \to B$ 时，我们有 $x|yf^\ddagger = xf|y$，以及 $xf^*|y = x|yf$，其中我们定义 $f^* := \varphi_B f^\dagger \varphi_A^{-1} : B \to A$。

(iii) 特别是，这意味着 $f^{**} = f$。我们也可以直接计算出来：

$$f^{**} := \varphi_A (f^*)^\dagger \varphi_B^{-1} := \varphi_A (\varphi_B f^\dagger \varphi_A^{-1})^\dagger \varphi_B^{-1} = \varphi_A (\varphi_A^{-1})^\dagger f^{\dagger\dagger} \varphi_B^\dagger \varphi_B^{-1} = \iota f^{\dagger\dagger} \iota^{-1} = f.$$

(iv) 现在这个 $(-)^*$ 显然是一个反变函子，因为很容易看出它保持恒等态射；对于复合，我们有：

$$\langle x|y(fg)^*\rangle = \langle xfg|y\rangle = \langle xf|yg^*\rangle = \langle x|yg^*f^*\rangle \text{ and so } (fg)^* = g^*f^* \qquad \square$$

因此，对映射取伴随是一个反变且在对象上保持不变的函子，满足 $f^{**} = f$；有了这一结构，我们便将内积范畴 $(\mathbb{X}, (-)^\dagger)$ 转化为匕首范畴 $(\mathbb{X}, (-)^*)$：我们将后一结构称为伴随对合。

命题 4.11。对于每个内积范畴 $\mathbb{X}$，伴随对合 $(\mathbb{X}, (-)^*)$ 都给出一个匕首范畴。

证明。由引理 4.10（*iii*）可得 $f^{**} = f$，由（*iv*）可得 $1_A^* = 1_{A^*}$ 且 $(fg)^* = g^* f^*$。因此，$(-)^*$ 是 $\mathbb{X}$ 上的反变对合。 $\square$

此外，恒等函子现在成为酉范畴的态射：

$$V_{\mathbb{X}} ::= (\mathrm{Id}, \varphi^{-1}) : (\mathbb{X}, (-)^\dagger) \longrightarrow (\mathbb{X}, (-)^*)$$

其中保持子为 $\varphi_X^{-1} : X^\dagger \to X$（回忆一下，$X^* = X$）。这显然是一个自然变换，因为对于任意 $f : X \to Y \in \mathbb{X}$，

$$\varphi_Y^{-1} f^* \overset{\text{Eqn (1)}}{:=} \varphi_Y^{-1} \varphi_Y f^\dagger \varphi_X^{-1} = f^\dagger \varphi_X^{-1}$$

并且它满足所需的相干条件：

$$\iota_X \varphi_{X^\dagger}^{-1} = \varphi_X = \varphi_X (\varphi_X^{-1})^\dagger (\varphi_X)^\dagger = \varphi_X (\varphi_X^{-1})^\dagger ((\varphi_X)^\dagger)^{-1} = \varphi_X (\varphi_X^{-1})^\dagger \varphi_{X^\dagger}^{-1} = (\varphi_X^{-1})^\ddagger$$

现在注意到，由于每个 †-范畴都有内积结构，我们可以基于伴随定义一个新的内积：$f|g^* := fg^*$。于是函子 $(\mathrm{Id}\ \varphi^{-1})$ 保持内积结构：

$$\langle f|g\rangle \varphi^{-1} = f \varphi g^\dagger \varphi^{-1} =: fg^* =: \langle f|g\rangle^*$$

因此，根据引理 4.8，它是一个酉函子。这个函子显然是一个（酉）等价。我们还有内积（或酉）范畴与酉函子所成的范畴，以及匕首范畴与酉函子所成的范畴之间的一个等价。我们将内积范畴映到其诱导的匕首范畴，并将酉函子 $(F\ \gamma)$ 映到 (F, id)，由此定义这个函子。这个函子显然在对象上是双射，并且是满的。根据共轭的等式 (1)，可知这个函子是忠实的。因此我们得到以下命题：

命题 4.12. 内积范畴（或酉范畴）、酉函子及变换所构成的范畴，与匕首范畴的全子 *2*-范畴 †-Cat 之间存在等价。

我们通过将酉范畴映射到其 †-范畴来定义这种等价，并通过夹入 $\alpha_{\mathbb{X}} \mapsto V_{\mathbb{X}}^{-1} \alpha_{\mathbb{X}} V_{\mathbb{X}}$ 来传递 1-胞和 2-胞。

4.2 等距映射与特殊映射

利用内积来理解对合范畴中可用的各种特殊映射类，是很自然的做法。为此，可以将内积结构视为在对象上提供了一种抽象度量。由此便得到保距映射的概念，也称为等距映射：

定义 4.13. 在内积范畴中，若对每个 f、$g : A \to X$，均有 $\langle f | g \rangle = \langle fh | gh \rangle$，则称 $h : X \to Y$ 为**等距映射**。

显然，等距映射的复合仍是等距映射。

引理 4.14. 在内积范畴中，以下条件等价：

$$(i)\ h : X \longrightarrow Y \text{ is an isometry;} \qquad (ii)\ h\varphi_Y h^\dagger = \varphi_X \qquad (iii)\ hh^* = 1_X$$

证明。

$(i) \Rightarrow (ii)$：若内积在 h 下保持不变，则这一保持性质必然也适用于 X 上的恒等映射，也就是说 $1_X | 1_X = h | h = h1_Y | 1_Y h^\dagger$，因此 $h\varphi_Y h^\dagger = \varphi_X$，如所需。

$(ii) \Rightarrow (iii)$：若 $h\varphi_Y h^\dagger = \varphi_X$ 则 $hh^* := h\varphi_Y h^\dagger \varphi_X^{-1} = \varphi_X \varphi_X^{-1} = 1_X$.

$(iii) \Rightarrow (i)$：若 $hh^* = 1_X$ 则 $\langle fh | gh \rangle = \langle f | ghh^* \rangle = \langle f | g \rangle$。 □

显然，若一个同构是等距映射，则其逆映射自动也是等距映射：

引理 4.15。 在内积范畴中，对于一个同构 $h : X \to Y$，以下条件等价：

(i) h 和 h^* 是等距映射；*(ii)* h 或 h^{-1} 是等距映射；*(iii)* $h^\dagger = \varphi_Y^{-1} h^{-1} \varphi_X$，或者等价地，$h = \varphi_X (h^{-1})^\dagger \varphi_Y^{-1}$；*(iv)* $h^{-1} = h^*$。

证明。$(i) \Rightarrow (ii)$ 显然。

$(ii) \Rightarrow (iii)$ 已知h是等距映射。因此，根据引理 4.14(ii)，有：$h\varphi_Y h^\dagger = \varphi_X$。利用$h$是同构这一事实，可以推出$h^\dagger = \varphi_Y^{-1} h^{-1} \varphi_X$。

$(iii) \Rightarrow (iv)$ 已知$h^\dagger = \varphi_Y^{-1} h^{-1} \varphi_X$。因此，根据引理 4.14(iii)，有$hh^* = 1_X$。由于$h$是同构，$hh^* = hh^{-1}$，这进而意味着$h^* = h^{-1}$。

$(iv) \Rightarrow (i)$ 当$h^{-1} = h^*$时

$$\langle f | g \rangle = \langle fhh^* | g \rangle = \langle fh | gh \rangle$$

因此h是一个等距映射。同样，h^*是一个等距映射，因为

$$\langle fh^* | gh^* \rangle = \langle f | gh^* h^{**} \rangle = \langle f | gh^* h \rangle = \langle f | g \rangle.$$ □

定义 4.16. 在内积范畴中，如果一个同构满足引理 *4.15* 中任一等价条件，则称其为**酉的**。

引理 4.17.

(i) 当且仅当 $f\dagger : X^\dagger \to A^\dagger$ 是酉映射时，$f : A \to X$ 是酉映射。

(ii) 酉结构映射 φ_A 是等距映射。

(iii) 对合映射 $\iota : A \to A^{\dagger\dagger}$ 是等距映射。

证明。

(i) 首先，当f是酉的时， $\varphi_X = f^{-1}\varphi_A(f^\dagger)^{-1}$，因此我们有

$$\varphi_{X^\dagger} = ((f^{-1}\varphi_A(f^\dagger)^{-1})^{-1})^\dagger = (f^\dagger\varphi_A^{-1}f)^\dagger = f^\dagger(\varphi_A^{-1})^\dagger f^{\dagger\dagger} = f^\dagger\varphi_{A^\dagger}f^{\dagger\dagger}$$

所以$f\dagger$是酉的。而当$f^\dagger$是酉的时，我们有

$$(\varphi_A^{-1})^\dagger = (f^\dagger)^{-1}\varphi_{X^\dagger}(f^{\dagger\dagger})^{-1} = (f^\dagger)^{-1}(\varphi_X^{-1})^\dagger(f^{\dagger\dagger})^{-1} = ((f^\dagger)^{-1}\varphi_X^{-1}f^{-1})^\dagger$$

因此，由$\dagger$函子的忠实性可得 $\varphi_A^{-1} = (f^\dagger)^{-1}\varphi_X^{-1}f^{-1}$，进而有 $\varphi_A = f\,\varphi_X f\dagger$，所以$f$是酉的。

(ii) 对于酉结构映射，我们有：

$$\varphi_A\varphi_{A^\dagger}\varphi_A^\dagger = \varphi_A(\varphi_A^{-1})^\dagger\varphi_A^\dagger = \varphi_A(\varphi_A\varphi_A^{-1})^\dagger = \varphi_A$$

因此 $\varphi_A : A \to A^\dagger$ 是一个等距映射。

(iii) 对于对合子，我们有：

$$\iota_A\varphi_{A^{\dagger\dagger}}\iota_A^\dagger = \iota_A(\varphi_{A^\dagger}^{-1})^\dagger\iota_A^\dagger = \iota_A\varphi_A^\dagger = \varphi_A$$

其中，最后一个等式由引理 3.1 (ii) 得出。 □

注意，酉结构映射和对合子当然也是酉的，因为它们是同构等距映射。

定义 4.18. 映射 $a : X \to X$ 称为**厄米**的，如果对每个 f、$g : A \to X$，都有$\langle fa \mid g\rangle = \langle f \mid ga\rangle$.

引理 4.19. 在内积范畴中，以下条件等价：

$$(i)\ \ a : X \longrightarrow X \text{ is Hermitian;} \qquad (ii)\ \ a\varphi_X = \varphi_X a^\dagger; \qquad (iii)\ \ a = a^*.$$

证明。

$(i) \Rightarrow (ii)$：若a是厄米的，则 $1_X a|1_X = 1_X|1_X a$，因此$a\varphi_X = \varphi_X a^\dagger$。

$(ii) \Rightarrow (iii)$：由引理 4.14，$a^* = \varphi_X a^\dagger \varphi_X^{-1}$，所以当$a\varphi_X = \varphi_X a^\dagger$时，$a = a^*$。$(iii) \Rightarrow (i)$：由伴随的定义立即可得。 □

定义 4.20. 在内积范畴中，

- 若存在映射 $q : X \to Y$，使得映射 $f : X \to X\dagger$ 满足 $f = \langle q|q\rangle$，则称 f 为正映射。
- 若 $\langle f\,|f\rangle\varphi_{X\dagger} = \varphi_X\langle f\dagger\ |f\dagger\rangle$，则称映射 $f : X \to X$ 为正规映射。

注 4.21。 这种正映射的概念与匕首范畴中通常所说的正映射有何关系？回想一下，在匕首范畴中，若存在映射$g : X \to Y$，使得$f : X \to X$满足$f = gg^\dagger$，则称映射$f : X \to X$为正映射。当对合在对象上是恒等映射时，我们在 $\dagger$-范畴中的定义便退化为正映射的这一标准定义。

引理 4.22。 存在以下包含关系：

(i) 每个厄米映射都是正规映射。

(ii) 每个酉自同态都是正规的。证明见附录 B.1。

参考文献

[1] Michael Barr。《*-自对偶范畴》，数学讲义第 752 卷。施普林格，柏林、海德堡，1979年。[2] J Robin B Cockett 和 Robert AG Seely。弱分配范畴。《纯粹与应用代数杂志》，114(2)：133–173，1997年。[3] Bob Coecke 和 Aleks Kissinger。《量子过程图示：量子理论与图示推理入门》。剑桥大学出版社，2017年。[4] Chris Heunen 和 Jamie Vicary。《量子理论范畴：导论》。牛津大学出版社，2019年 11 月。[5] Bart Jacobs。对合范畴与幺半群，以及 GNS对应。《物理学基础》，42：874–895，2012年。[6] Paul-Andr´e Melli`es。对话范畴与手性。《数学科学研究所刊》，52：359–412，2016年。[7] Peter Selinger。匕首紧闭范畴与完全正映射。《理论计算机科学电子笔记》，170，2007年。[8] Priyaa Varshinee Srinivasan。《匕首线性逻辑与范畴量子力学》。博士论文，加拿大卡尔加里大学，2021年。[9] Jamie Vicary。匕首范畴的完备性与复数。《arXiv》预印本 arXiv:0807.2927，2008年。[10] Donald Yau。《对合范畴论》。数学讲义。施普林格，2020年。

A 非手性对合

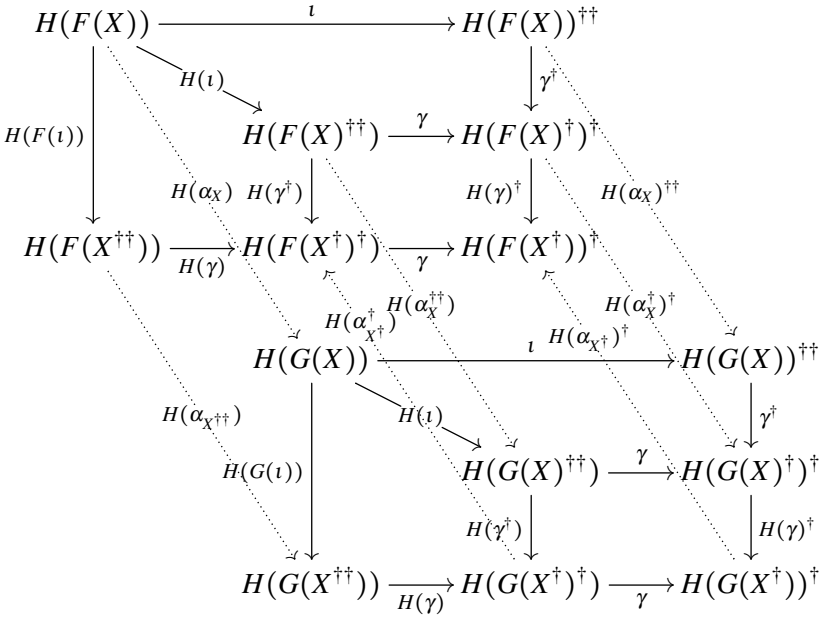
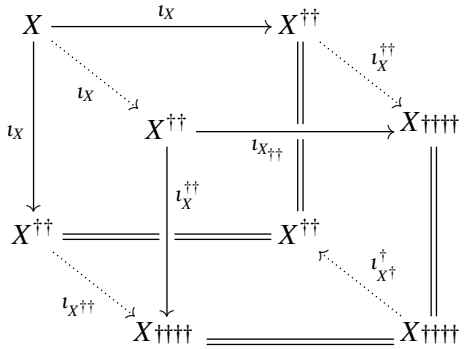


图 1：右侧粘合

引理 A.1. 对于任意非手性对合范畴，对合子本身就是一个（非手性）变换。

证明。 考虑以下图表：



所有方块都交换：注意，$\iota^{\dagger\dagger}{}_X = \iota_{X^{\dagger\dagger}}$，底部和最右侧的方块利用伴随对偶性交换。

□

B 内积范畴

定义 B.1. 一个**内积范畴**是一个具有**内积组合子**的**对合范畴：**

$$\frac{f : A \longrightarrow X \quad g : B \longrightarrow X}{\langle f|g\rangle : A \longrightarrow B^\dagger}$$

满足下列所列的公理 **[IP.1]–[IP.4]**。

[IP.1] 前复合： $\langle hf|kg\rangle = h\langle f|g\rangle k^\dagger$

也就是说，给定映射 $f : A \to X$、$g : B \to X$、$h : Y \to A$ 和 $k : Z \to B$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\ h\ } & A \\ {\scriptstyle \langle hf|kg\rangle}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle \langle f|g\rangle} \\ Z^\dagger & \xleftarrow[k^\dagger]{} & B^\dagger \end{array}$$

[IP.2] 匕首与对偶： *(a)* $\iota\langle f^\dagger|g^\dagger\rangle^\iota = \langle f\,|g\rangle$ 以及 *(b)* $\iota\langle f\,|g\rangle^\dagger = \langle f\,|g\rangle$。

也就是说，给定 $f : A \to X$ 和 $g : B \to X$，以下图表可交换：

$$(a)\qquad \begin{array}{ccc} A & & \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & \searrow^{\langle f|g\rangle} & \\ A^{\dagger\dagger} & \xrightarrow[\langle f^\dagger|g^\dagger\rangle^\iota]{} & B^\dagger \end{array} \qquad (b)\qquad \begin{array}{ccc} B & & \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & \searrow^{\langle g|f\rangle} & \\ B^{\dagger\dagger} & \xrightarrow[\langle f|g\rangle^\dagger]{} & A^\dagger \end{array}$$

[IP.3] 给定 $hg = 1$，$\langle f|g\rangle\langle h|k\rangle^\iota = fk$

也就是说，给定 $f : A \to X$ 和 $g : B \to X$，以及平行映射 h、$k : X \to B$，并且 $hg = 1_X$，以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ {\scriptstyle \langle f|g\rangle}\downarrow & \searrow^{fk} & \\ B^\dagger & \xrightarrow[\langle h|k\rangle^\iota]{} & B \end{array}$$

[IP.4] 给定 $gh = 1$，$\langle f\,|g\rangle^\iota\langle h|k\rangle = (kf)^\dagger$。

也就是说，给定映射 $f : A \to Z$、$g : A \to X$，以及平行映射 h、$k : X \to A$，并且 $gh = 1_B$，那么以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} Z^\dagger & & \\ {\scriptstyle \langle f|g\rangle^\iota}\downarrow & \searrow^{(kf)^\dagger} & \\ X & \xrightarrow[\langle h|k\rangle]{} & X^\dagger \end{array}$$

其中，映射 $h : X \to A$ 和 $k : X \to B$ 的**对偶内积**是映射 $\langle h|k\rangle^\iota : A^\dagger \to B$，定义如下：

[dual-IP]
$$\begin{array}{ccc} A^\dagger & \xrightarrow{\ \iota_{A^\dagger}\ } & A^{\dagger\dagger\dagger} \\ {\scriptstyle \langle h|k\rangle^\iota}\downarrow & := & \downarrow{\scriptstyle \langle k^\dagger|h^\dagger\rangle^\dagger} \\ B & \xleftarrow[\iota_B^{-1}]{} & B^{\dagger\dagger} \end{array}$$

引理 B.2. 内积范畴中有以下结论：

(i) 若 $h,k : B \to A$ 且 $f, g : A \to X$，则 $\langle hf|kg\rangle^\iota = f^\dagger \langle h|k\rangle^\iota$
g *(ii)* $\langle g^\dagger | f^\dagger \rangle = (\langle f|g\rangle^\iota)^\dagger$ *(iii)* $\langle f|g\rangle^\dagger = \langle g^\dagger | f^\dagger\rangle^\iota$

证明。

(i) 应用 **[IP.1]** 时，必须仔细展开对偶内积的定义：

$$\begin{aligned}\langle hf|kg\rangle^\iota &:= \iota\langle (kg)^\dagger | (hf)^\dagger\rangle^\dagger \iota^{-1} = \iota\langle g^\dagger k^\dagger | f^\dagger h^\dagger\rangle^\dagger \iota^{-1} \\ &= \iota(g^\dagger \langle k^\dagger | h^\dagger\rangle f^{\dagger\dagger})^\dagger \iota^{-1} = \iota f^{\dagger\dagger\dagger}\langle k^\dagger|h^\dagger\rangle^\dagger g^{\dagger\dagger}\iota^{-1} \\ &= f^\dagger \iota\langle k^\dagger|h^\dagger\rangle^\dagger \iota^{-1} g \quad =: f^\dagger \langle h|k\rangle^\iota g\end{aligned}$$

(ii) 现在我们仅利用范畴是对合的这一事实，来证明这个恒等式成立：

$$\frac{\iota\langle g^\dagger|f^\dagger\rangle^\dagger = \iota\langle g^\dagger|f^\dagger\rangle^\dagger \iota^{-1}\iota =: \langle f|g\rangle^\iota \iota = \iota(\langle f|g\rangle^\iota)^{\dagger\dagger}}{\dfrac{\langle g^\dagger|f^\dagger\rangle^\dagger = (\langle f|g\rangle^\iota)^{\dagger\dagger}}{\langle g^\dagger|f^\dagger\rangle = (\langle f|g\rangle^\iota)^\dagger}}$$

特别地，我们用到 ι 可逆，并且 $(\,)^\dagger$ 是一个忠实函子。

(iii) **[IP.2]** 的两个恒等式蕴含这个恒等式

$$\frac{\iota\langle f^\dagger|g^\dagger\rangle^\iota = \langle f|g\rangle = \iota\langle g|f\rangle^\dagger}{\langle f^\dagger|g^\dagger\rangle^\iota = \langle g|f\rangle^\dagger}$$

□

引理 B.3. 在内积范畴中，以下命题等价：

(a) **[IP.2](a)** 或 **[IP.2](b)** 成立，且 **[IP.2](c)** $\langle f^{\dagger\dagger}|g^{\dagger\dagger}\rangle = \iota_A^{-1}\langle f|g\rangle \iota_{B^\dagger}$ 成立；*(b)* **[IP.2](a)** 和 **[IP.2](b)**均成立。

证明。 **(⇒)** 假设 **[IP.2](a)** 成立，即 $\iota_A f^\dagger | g^\dagger \iota = f|g$，并且以下等式成立

$$\langle f^{\dagger\dagger}|g^{\dagger\dagger}\rangle = \iota_A^{-1}\langle f|g\rangle \iota_{B^\dagger}. \quad (\star)$$

于是，我们证明 **[IP.2](b)** 成立，即 $\iota_B f|g^\dagger = g|f$:

$$\begin{aligned}\langle g|f\rangle &\overset{\text{[IP.2](a)}}{=} \iota_B\langle g^\dagger|f^\dagger\rangle^\iota = \iota_B \iota_{B^{\dagger\dagger}}\langle f^{\dagger\dagger}|g^{\dagger\dagger}\rangle^\dagger \iota_{A^\dagger}^{-1} \\ &\overset{\text{[IP.2](c)}}{=} \iota_B\iota_{B^{\dagger\dagger}}\left(\iota_A^{-1}\langle f|g\rangle\iota_{B^\dagger}\right)^\dagger \iota_{A^\dagger}^{-1} \\ &= \iota_B\iota_{B^{\dagger\dagger}}\iota_{B^\dagger}^\dagger\langle f|g\rangle^\dagger(\iota_A^{-1})^\dagger\iota_{A^\dagger}^{-1} \\ &= \iota_B\iota_{B^{\dagger\dagger}}(\iota_{B^\dagger})^\dagger\langle f|g\rangle^\dagger\iota_{A^\dagger}\iota_{A^\dagger}^{-1} = \iota_B\langle f|g\rangle^\dagger\end{aligned}$$

同样地，如果 **[IP.2](b)** 和 $(\star)$ 成立，那么 **[IP.2](a)**也成立。

(⇐) 反之，假设 **[IP.2]**(a) 和 **[IP.2]**(b) 成立。那么，

$$\begin{aligned}\iota_A^{-1}\langle f|g\rangle\iota_{B^\dagger} &\overset{\textbf{[IP.2]}(a)}{=} \iota_A^{-1}\iota_A\langle f^\dagger|g^\dagger\rangle^\iota\iota_{B^\dagger} = \langle f^\dagger|g^\dagger\rangle^\iota\iota_{B^\dagger}\\ &\overset{\textbf{[dual-IP]}}{=} \iota_{A^{\dagger\dagger}}\langle g^{\dagger\dagger}|f^{\dagger\dagger}\rangle^\dagger\iota_{B^\dagger}^{-1}\iota_{B^\dagger} \overset{\textbf{[IP.2](b)}}{=} \iota_{A^{\dagger\dagger}}(\iota_{A^{\dagger\dagger}})^{-1}\langle f^{\dagger\dagger}|g^{\dagger\dagger}\rangle\\ &= \langle f^{\dagger\dagger}|g^{\dagger\dagger}\rangle\end{aligned}$$

□

引理 B.4。设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是内积范畴。那么 $(F\ \gamma):\mathbb{X}\ \ \rightarrow\mathbb{Y}$，一个对合函子是保持内积的，当且仅当它是酉函子。

证明。(⇒) 设 $(F\ \gamma):\mathbb{X}\longrightarrow\mathbb{Y}$是一个酉函子，且$f,g:A\rightarrow X$是$\mathbb{X}$中的一对平行映射，】【。 n:

$$\begin{aligned}F(\langle f|g\rangle)\gamma_A &= F(f\langle 1_X|1_X\rangle g^\dagger)\gamma_A && \text{(by [IP.1])}\\ &= F(f)F(\langle 1_X|1_X\rangle)F(g^\dagger)\gamma_A\\ &= F(f)F(\langle 1_X|1_X\rangle)\gamma_X(F(g))^\ddagger\\ &= F(f)F(\varphi_X)\gamma_X(F(g))^\ddagger\\ &= F(f)\langle 1_{F(X)}|1_{F(X)}\rangle(F(g))^\ddagger && \text{(as F is unitary)}\\ &= \langle F(f)|F(g)\rangle\end{aligned}$$

因此，F 保留内积。

(⇐) 假设F 保持内积，则:

$$F(\varphi_A)\gamma_A = F(\langle 1_A|1_A\rangle)\gamma_A = \langle F(1_A)|F(1_A)\rangle = \langle 1_{F(A)}|1_{F(A)}\rangle = \varphi_{F(A)}$$

□

B.1 等距映射与特殊映射

引理 B.5. 以下是包含关系:

(i) 每个厄米映射都是正规的。*(ii)*

每个酉自同态都是正规的。

证明。

*(i)*对于一个 $:X\rightarrow X$，若其为厄米映射，则有，$a\varphi_X = \varphi_X a^\dagger$，因此

$$\langle a|a\rangle\varphi_{X^\dagger} = a\varphi_X a^\dagger\varphi_{X^\dagger} = aa\varphi_X\varphi_{X^\dagger} = aa\iota$$

and

$$\varphi_X\langle\varphi_X|a^\dagger\rangle = \varphi_X a^\dagger\varphi_{X^\dagger}a^{\dagger\dagger} = a\varphi_X\varphi_{X^\dagger}a^{\dagger\dagger} = a\iota a^{\dagger\dagger} = aa\iota.$$

*(ii)*设一个 $:X\rightarrow X$是酉映射，首先根据引理 4.17 (i)，注意到$a^\dagger:X^\dagger\ \ \rightarrow X$†也是酉映射。于是有，

$$\langle a|a\rangle\varphi_{X^\dagger} = a\varphi_X a^\dagger\varphi_{X^\dagger} = \varphi_X\varphi_{X^\dagger} = \iota$$

and

$$\varphi_X\langle a^\dagger|a^\dagger\rangle = \varphi_X a^\dagger\varphi_{X^\dagger}a^{\dagger\dagger} = \varphi_X\varphi_{X^\dagger} = \iota.$$

□