arXiv:2603.27783v1 [math.CO] 29 Mar 2026

满足 core(G) =nucleus(G) 的图

Vadim E. Levit[a]、Eugen Mandrescu[b]、Kevin Pereyra[c,d]

[a]阿里埃勒大学数学系，以色列阿里埃勒。[b]霍隆理工学院计算机科学系，以色列霍隆。[c]圣路易斯应用数学研究所，圣路易斯国立大学及阿根廷国家科学与技术研究委员会，阿根廷圣路易斯。[d]圣路易斯国立大学数学系，阿根廷圣路易斯。

摘要

设 G 为有限简单图。若对于 G的每个独立集 J，独立集 I 满足 $|I| - |N(I)| \geq |J| - |N(J)|$，则称其为临界独立集。若一个临界独立集具有最大基数，则称其为最大临界独立集。 G的核 和核 分别定义为所有最大独立集的交集和所有最大临界独立集的交集。2019 年，Jarden、Levit 和 Mandrescu 提出了一个问题：刻画满足 core(G) $=$ nucleus(G) 的图。本文给出了这一问题的完整解答。利用 Larson 独立性分解（该分解将任意图划分为一个 König–Egerváry 分量 L_G 和一个 2-双临界分量 L_G^c），我们证明，core(G) = nucleus(G) 当且仅当 core(L_G^c) $= \emptyset$，且 corona(G) 中没有顶点位于 L_G 与 L_G^c 之间的边界上。我们还证明，同一边界条件等价于恒等式 diadem(G) $=$ corona(G) $\cap$ L(G)。此外，我们还推导出若干推论及相关结构性质。

关键词： 最大临界独立集、二重冠、König–Egerváry 图、冠、核、2-双临界*2000* 年数学主题分类： 05C70, 05C75

电子邮件地址：levitv@ariel.ac.il（Vadim E.Levit），eugen_m@hit.ac.il（Eugen Mandrescu），kdpereyra@unsl.edu.ar（Kevin Pereyra）

1. 引言

令 $\alpha(G)$ 表示最大独立集的基数，令$\mu(G)$ 表示 $G=(V,E)$ 中最大匹配的大小。已知$\alpha(G)+\mu(G)$ 等于 G 的阶；在这种情况下， G 是 König–Egerváry 图 [3, 8, 30]。König–Egerváry 图已得到广泛研究 [2, 9,11, 16, 17]。已知每个二分图都是 König–Egerváry 图；这可由 Kőnig 和 Egerváry 的经典结果推出 [6, 12]。Deming [3], Sterboul [30], 和 Gavril [8]分别独立地引入了这类图。

如果删除图 G 中任意两个不同的顶点后，剩余子图存在完美匹配，则称图 G 为 2-双临界图。2-双临界图这一概念由 [27], 提出，其特征如下。

定理 1.1 ([27]). 图 G 是2-双临界图，当且仅当对每个非空独立集 $S\subseteq V(G)$，都有 $|N(S)|>|S|$。

2-双临界图类可视为 König–Egerváry 图的结构对偶 [14, 22, 23, 24]。值得注意的是，[27] 表明几乎所有图都是 2-双临界图。

本文采用的主要工具是 Larson 独立性分解[14], ，它将一个图划分为两部分：一部分诱导出 König–Egerváry 图 L_G，另一部分诱导出 2-双临界图 L_G^c。

令 $\Omega^*(G)=\{S:S$ 是 $G\}$的一个独立集，$\Omega(G)=\{S:\ S$ 是 $G\}$的一个最大独立集，$\mathrm{core}(G)=\bigcap\{S:\ S\in\Omega(G)\}$ [15]，而 $\mathrm{corona}(G)=\bigcup\{S:\ S\in\Omega(G)\}$ [1]。数值 $d_G(X)=|X|-|N(X)|$ 是集合 $X\subset V(G)$ 的差，而 $d(G)=\max\{d_G(X):\ X\subset V(G)\}$ 称为 G的临界差。集合 $U\subset V(G)$ 若满足 $d_G(U)=d(G)$[31]，则称其为临界集。数值 $d_I(G)=\max\{d_G(X):\ X\in\Omega^*(G)\}$ 称为 G的临界独立差。若集合 $X\subset\Omega^*(G)$ 满足 $d_G(X)=d_I(G)$，则称其为临界独立集 [31]。显然，对于每个图，都有 $d(G)\geq d_I(G)$。已知对于所有图 [31]，都有 $d(G)=d_I(G)$。我们定义 $\mathrm{CritIndep}(G)=\{S:S$ 是 $G\}$ 的一个临界独立集，并

最大临界独立集$(G)=\{S:\ S$ 是 $G\}$的一个最大临界独立集。回顾以下定义：$\ker(G)=\bigcap\mathrm{CritIndep}(G)$ [18, 21, 28], $\mathrm{nucleus}(G)=\bigcap$最大临界独立集$(G)$ [10], 且二重冠$(G)=\bigcup\mathrm{CritIndep}(G)$ [29]。事实上，每个临界独立集都包含于某个最大临界独立集，而最大临界独立集可以在多项式时间内找到[13]。另请注意，二重冠$(G)=\bigcup\mathrm{CritIndep}(G)=\bigcup\mathrm{MaxCritIndep}(G)$）。

当核(G)是一个临界独立集时，会出现若干有趣的现象，这些现象已在 [10]中得到研究。在 [20], 中，核(G)是临界独立集的图已得到完整刻画。

定理 1.2 ([20])。 对于任意图，核(G) 是临界独立集，当且仅当 核(L_G^c) $= \emptyset$。

然而，定理 1.2 中的条件并不能保证等式 核(G) =核(G)成立，图 1中的示例便说明了这一点。

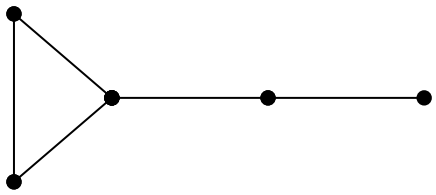


图 1：一个满足 核(L_G^c) $= \emptyset$ 而 核(G) $\neq$ 核(G) 的图

.

已知当 核(G) 是临界独立集时，核(G) $\subseteq$核(G) [10], ，且当二重冠(G) $=$ 冠(G) 时等式成立。因此，提出了 [10]以下问题：

问题 1.3([10])。 刻画满足 核(G) $=$ 核(G)的图。

已知每个 König–Egerváry 图都满足 核(G) $=$ 核(G)[17]。本文通过证明：除定理 1.2 中的条件 核$(L_G^c) = \emptyset$ 外，唯一额外的障碍是冠(G)中的顶点位于 Larson 分划两侧之间的边界上，从而解决定理 1.3。我们的方法还纳入了二重冠：我们证明，冠(G) $\cap \partial_L(G)$ $= \emptyset$ 等价于二重冠(G) $=$冠(G) $\cap L(G)$。

本文的组织结构如下。在第 1 节中，我们介绍问题的一般背景，并引入主要概念和定义。在第2 节中，我们确定全文将使用的符号。在第 3 节中，我们给出满足 core(G) =nucleus(G)的图的刻画，并给出描述相应二重冠的相关结果，从而证明定理 1.3。最后，第 5 节将讨论总结性评论和未来研究方向。

2. 预备知识

本文所讨论的所有图都是有限、无向且简单的。对于任何未定义的术语或符号，请参阅 Lovász 和 Plummer [26]或 Diestel [4]。

设 $G=(V, E)$ 是一个简单图，其中 $V=V(G)$ 是有限顶点集，$E=E(G)$ 是边集。G 的子图是一个图 H，满足 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$。如果 $V(H)=V(G)$，则称 G 的子图 H 为生成子图。对于两个顶点集 X，$Y \subseteq V(G)$，我们用 $E(X, Y)$ 表示满足 $u \in X$ 且 $v \in Y$ 的边集 $uv \in E(G)$。

设 $e \in E(G)$ 和 $v \in V(G)$。我们定义 $G-e=(V, E-\{e\})$ 和$G-v=(V-\{v\}, \{uw \in E: u, w \neq v\})$。如果 $X \subseteq V(G)$，则 G 在 X 上的导出子图是子图 $G[X]=(X, F)$，其中 $F=\{uv \in E(G): u, v \in X\}$。图 G 和图 H 的并是图 $G \cup H$，满足$V(G \cup H)=V(G) \cup V(H)$ 且 $E(G \cup H)=E(G) \cup E(H)$。

图 G 中顶点的数量称为该图的《序》，记作 $n(G)$。G 中的圈称为奇圈（分别称为偶圈），当且仅当它包含奇数（分别为偶数）条边。

对于顶点 $v \in V(G)$，v 的邻域为

$$N_G(v)=\{u \in V(G): uv \in E(G)\}.$$

若无歧义，我们用 $N(v)$ 代替 $N_G(v)$。对于集合 $S \subseteq V(G)$，S 的邻域为

$$N_G(S)=\bigcup_{v \in S} N_G(v).$$

图 G 中的一个匹配 M 是由两两不相邻的边组成的集合。G的匹配数记作 $\mu(G)$，即 G中任意匹配的最大基数。匹配在图的顶点集上诱导出一个对合：$M: V(G) \rightarrow V(G)$，其中若 $uv \in M$，则 $M(v)=u$；否则，$M(v)=v$。如果 $S, U \subseteq V(G)$且 $S \cap U=\emptyset$，我们称 M是从S 到 U 的匹配，当且仅当 $M(S) \subseteq U$。若对图中的每个顶点，$M(v) \neq v$，则匹配 M 是完美匹配。如果 $|v \in V(G): M(v)=v|=1$，则该匹配是近完美匹配。若对每个顶点$v \in V(G)$，$G-v$都有完美匹配，则该图称为因子临界图。图 G 的亏格记作 def(G)，定义为 def$(G)=|G|-2\mu(G)$。

顶点集 $S \subseteq V$ 是独立的，当且仅当对于任意一对顶点 u， $v \in S$，都有 $uv \notin E$。最大独立集中的顶点数记作 $\alpha(G)$。

Gallai–Edmonds 分解将在本文中发挥重要作用。

定理 2.1 ([5, 7]Gallai–Edmonds 结构定理)。 设 G 是一个图，并定义

$$D(G) = \{v : \text{存在一个最大匹配，使其未匹配 } v\},\ A(G) = \{v : v \text{ 与某个 } u \in D(G) \text{相邻，但 } v \notin D(G)\},\ C(G) = V(G) - (D(G) \cup A(G))。$$

若 G_1、.....、G_k 是 $G[D(G)]$ 的连通分支，且 M 是 G的一个最大匹配，则：

1. M 覆盖 $C(G)$，并将 $A(G)$ 匹配到 $G[D(G)]$的不同连通分支中。2. 每个 G_i 都是一个因子临界图，且 M 在 G_i 上的限制是一个近完美匹配。3. 每个非空的 $S \subseteq A(G)$ 都与$G[D(G)]$的至少 $|S|+1$ 个连通分支相邻。

3. 主要结果

本节将给出本文的主要结果。我们先证明几个预备引理，然后刻画核等于核的图。在 [14], Larson 中，Larson 引入了以下分解定理。

定理 3.1 ([14])。 对于任意图 G，存在唯一的集合 $L(G) \subset V(G)$使得

1. $\alpha(G) = \alpha(G[L]) + \alpha(G[V(G) - L(G)])$, *2.* $G[L(G)]$是一个 *König-Egerváry* 图，*3.* 对于 $G[V(G) - L(G)]$，中每个非空独立集 I，我们有$|N(I)| > |I|$，以及 *4.* 对于 G 中每个最大临界独立集 J， $L(G) = J \cup N(J)$。

在本文余下部分中， $L(G)$和 $L^c(G) = V(G) - L(G)$表示定理3.1中的集合；此外，为了简化记号，我们定义导出子图

$$L_G = G[L(G)],$$
$$L_G^c = G[L^c(G)].$$

观察 3.2。 根据定理 *3.1*，对于每个满足 G 的图 $L^c(G) \neq \emptyset$，可得L_G^c 是一个2-临界图。

引理 3.3 ([13])。 设 I 是 G的一个临界独立集。那么存在 G 的一个最大匹配，将 $N(I)$ 匹配到 I中。

现在我们回顾一下关于 Larson 分划的核(G) 的结构描述。这个结果使我们能够分别考察两侧L_G 和 L_G^c的贡献。

引理 3.4 ([20])。 对于每个图

$$\text{core}(G) = \text{core}(L_G^c) \cup (\text{core}(G) \cap L(G)).$$

此外，

$$\text{core}(G) \cap L(G) = \bigcap_{S \in \Omega(G)} (S \cap L(G)) \subseteq \text{nucleus}(G).$$

定理 3.5 ([25])。 对于每个图 G，等式 核$(G) = D(L_G)$ 成立。

此时，主要困难便显现出来。尽管 core(G) 和 MaxCritIndep(G) 在很大程度上受 L_G 的结构控制，但位于 L_G 与 L_G^c 之间界面上的顶点可能会干扰这一行为。为刻画这一现象，我们引入边界集

$$\partial_L(G) = \{v \in L(G) : N(v) \cap L^c(G) \neq \emptyset\}.$$

B定理 3.1，可得 $\partial_L(G) \subseteq N(I)$ 对于每个 $I \in$最大临界独立集(G) .

引理 3.6。 若 I 是 G 的一个最大临界独立集，则

$$\text{core}(G) \cap L(G) = M\,(N(I) - \text{corona}(G)) \cup D(L_G),$$

对于 L_G 的每一个最大匹配 M 。

证明。设 $I \in$MaxCritIndep(G)，并设 M 是 L_G 的一个最大匹配。根据定理 3.1，$L(G) = I \cup N(I)$，且 L_G 是一个 König–Egerváry 图。根据定理 3.3，存在 G 的一个最大匹配，使 $N(I)$ 与 I 匹配。该匹配限制在 L_G 上后，是一个基数为 $|N(I)|$ 的匹配，因此$\mu(L_G) \geq |N(I)|$。由于 I 是 L_G 的一个独立集，且 $\alpha(L_G) + \mu(L_G) = |L(G)| = |I| + |N(I)|$，我们得到

$$|I| \leq \alpha(L_G) = |L(G)| - \mu(L_G) \leq |I| + |N(I)| - |N(I)| = |I|\,.$$

因此，$I \in \Omega(L_G)$ 和 $\mu(L_G) = |N(I)|$。由此，每个 L_G 的最大匹配的基数为 $|N(I)|$。由于 I 是独立的，M 的边均不在 I 内。若 M 中有一条边的两个端点都在 $N(I)$ 中，则 M 将覆盖 $N(I)$ 中至少 $|N(I)| + 1$ 个顶点，这不可能。因此，M 的每条边都连接 $N(I)$ 中的一个顶点与 I 中的一个顶点，并且 M 将 $N(I)$ 匹配到 I 中。

设 $v \in \text{core}(G) \cap L(G)$。根据定理 3.4，我们有 $v \in \text{nucleus}(G)$，因此 $v \in I$。若 $v \notin D(L_G)$，则 L_G 的每个最大匹配都覆盖 v。特别地，存在 $u \in N(I)$，使得 $M(u) = v$。若 $u \in \text{corona}(G)$，则某个集合 $S \in \Omega(G)$ 包含 u。由于 $v \in \text{core}(G)$，同一个集合 S 也包含 v，这与 $uv \in E(G)$ 矛盾。因此，$u \notin \text{corona}(G)$，于是 $v \in M\,(N(I) - \text{corona}(G))$。这就证明了

$$\text{core}(G) \cap L(G) \subseteq M\,(N(I) - \text{corona}(G)) \cup D(L_G).$$

现在令 $S \in \Omega(G)$。根据定理 3.1，集合 $S \cap L(G)$ 属于 $\Omega(L_G)$。由于 M 有 $|N(I)|$ 条边，且其未匹配顶点位于 I 中，$\Omega(L_G)$ 中的每个集合都恰好包含 M 的每条边的一个端点，以及 M 的每个未匹配顶点。因此，若 $x \in D(L_G)$，则存在 L_G 的一个最大匹配 M_x，它未覆盖 x；将前述观察应用于 M_x 可知 $x \in S \cap L(G)$。由于 $S \in \Omega(G)$ 是任意的，因此可得 $D(L_G) \subseteq$ 核$(G) \cap L($$G)$。

最后，令 $v \in M(N(I) -$冠$(G))$，并选择 $u \in N(I) -$冠(G)，使得 $M(u) = v$。对于每个集合 $S \in \Omega(G)$，集合 $S \cap L(G)$ 属于 $\Omega(L_G)$，因此恰好包含 M 的每条边的一个端点。由于 $u \notin$ 冠(G)，G 的任何最大独立集都不包含 u，因此每个这样的集合 S 都必须包含 v。因此，$v \in$ 核$(G) \cap L(G)$，这就证明了反向包含关系。 ∎

根据定理3.4、引理3.6和定理3.5，我们推得如下结论。

定理 3.7。 若 I 是 G 的最大临界独立集，则

$$\mathrm{core}(G) = \mathrm{core}(L_G^c) \cup M\left(N(I) - \mathrm{corona}(G)\right) \cup \ker(G),$$

对于 L_G的每一个最大匹配 M 。

定理 3.8 ([17])。 G是 *König–Egerváry* 图，当且仅当它的每个最大独立集都是临界的。

由定理3.8可直接得到以下结论。

定理 3.9。 若 G 是 *König–Egerváry* 图，则

$$\mathrm{MaxCritIndep}(G) = \Omega(G),$$

也就是说，nucleus(G) =core(G)。

定理 3.10 ([20])。 等式 $d(G) = d(L_G)$ 对每个图 G都成立。

在描述了 core(G) 后，我们现在转向最大临界独立集族。

定理 3.11。等式

$$\mathrm{MaxCritIndep}(G) = \{S \in \Omega\left(L_G\right) : E(S, L^c(G)) = \emptyset\}$$

对每个图 G均成立。

证明。设 $I \in$为最大临界独立集(G)。根据定理 3.1，有 $L(G) = I \cup N(I)$，且 L_G 是一个 König–Egerváry 图。根据定理 3.3，存在 G 的一个最大匹配，使 $N(I)$中的元素匹配到 I中。如定理 3.6 的证明所示，这意味着 $\mu(L_G) \geq |N(I)|$。由于 I在 L_G 中是独立集，且 $\alpha(L_G) + \mu(L_G) = |L(G)| = |I| + |N(I)|$，我们得出 $I \in \Omega(L_G)$。此外，注意到 $E(I, L^c(G)) = \emptyset$。

反过来，设 $I \in \Omega\left(L_G\right)$，使得 $E(I, L^c(G)) = \emptyset$。由定理 3.9 可知 $I \in$ MaxCritIndep(L_G)，因此 $|I| - |N_{L_G}(I)| = d(L_G)$。注意， $N_{L_G}(I) = N_G(I)$，因为 $E(I, L^c(G)) = \emptyset$。此外，由定理 3.10 可知， $d(G) = d(L_G)$。因此，$|I| - |N_G(I)| = d(G)$，所以 I 是 G 的临界独立集。如果 $J \in$ MaxCritIndep(G)，那么证明的第一部分表明 $J \in \Omega(L_G)$。因此 $|J| = \alpha(L_G) = |I|$，所以 I 是 G 的最大临界独立集。 ■

推论 3.12。对于每个图 G,

$$\text{nucleus}(G) = \bigcap \{S \in \Omega(L_G) : E(S, L^c(G)) = \emptyset\}$$

and

$$\text{diadem}(G) = \bigcup \{S \in \Omega(L_G) : E(S, L^c(G)) = \emptyset\} \subseteq \text{corona}(G) \cap L(G).$$

证明。第一个等式是对定理 3.11 的直接改写。第二个等式由二重冠(G)的定义以及对最大临界独立集(G)的同一刻画得出。若 $I \in$最大临界独立集(G), 则由定理 3.11 可得 $I \in \Omega(L_G)$以及 $E(I, L^c(G)) = \emptyset$。设 $R \in \Omega(L_G^c)$。由于 $I \cup R$ 是独立的，且根据定理 3.1,

$$|(|\, I \cup R) = \alpha(L_G) + \alpha(L_G^c) = \alpha(G),$$

由此可得 $I \cup R \in \Omega(G)$。因此， $I \subseteq$ 冠$(G) \cap L(G)$，对所有满足 $I \in$最大临界独立集(G)的集合取并，即得所需的包含关系。 ■

定理 3.13. 若 I 是 G的最大临界独立集，则

$$M\left(N(I) - (\text{corona}(G) - \partial_L(G))\right) \cup \ker(G) \subseteq \text{nucleus}(G)$$

对于 L_G的每个最大匹配 M，上述结论均成立。

证明。设 $I \in$ 最大临界独立集(G)。由定理 3.1 可知 $L(G) = I \cup N(I)$。设 M 是 L_G的一个最大匹配。与定理 3.6 的证明类似，M 将 $N(I)$匹配到 I中，并且 L_G 的每个最大独立集都恰好包含 M每条边的一个端点。由定理 3.11,

$$\text{nucleus}(G) = \bigcap \{S \in \Omega(L_G) : E(S, L^c(G)) = \emptyset\}.$$

设 $v \in M(N(I) - ($冠$(G) - \partial_L(G)))$。选取 $u \in N(I) -$(冠$(G) - \partial_L(G))$，使得 $M(u) = v$。

若 $u \notin$ 冠(G)，则由定理 3.6 得 $v \in$ 核$(G) \cap L(G) \subseteq$核(G)。现在假设 $u \in \partial_L(G)$。取 $S \in \Omega(L_G)$，满足 $E(S, L^c(G)) = \emptyset$。由于 u 在 $L^c(G)$ 中有一个邻点，因此必有 $u \notin S$。因为 S 恰好包含 M 的每条边的一个端点，所以可得 $v = M(u) \in S$。由于 S 是任意的，我们得出 $v \in$核(G)。

最后，由于 $\ker(G) \subseteq$核(G)，我们得到

$$M\left(N(I) - (\text{corona}(G) - \partial_L(G))\right) \cup \ker(G) \subseteq \text{nucleus}(G),$$

至此，证明完成。 ■

定理 3.14. 如果 G是一个 *König–Egerváry* 图，那么

$$\operatorname{nucleus}(G) = M\left(N(I) - \operatorname{corona}(G)\right) \cup \ker(G).$$

证明。令 $I \in \mathsf{MaxCritIndep}(G)$。由于 G 是一个 König–Egerváry 图，定理 3.9 蕴含 $I \in \Omega(G)$。因此 $I \cup N(I) = V(G)$，由定理 3.1 可得 $L(G) = V(G)$，即 $L_G = G$。再次由定理 3.9，得到 $\mathsf{nucleus}(G) = \mathsf{core}(G)$。因此，由定理 3.5 和定理 3.6 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{nucleus}(G) &= \operatorname{core}(G)\\ &= M\left(N(I) - \operatorname{corona}(G)\right) \cup D(L_G)\\ &= M\left(N(I) - \operatorname{corona}(G)\right) \cup \ker(G).\end{aligned}$$

■

现在我们来到了论证的关键之处。下面的定理表明，一旦边界障碍消失，最大临界独立集族及其对应的不变量就完全由 König–Egerváry 部分 L_G确定。

定理 3.15。 设 G 是一个图，使得 $\mathsf{冠}(G) \cap \partial_L(G) = \emptyset$。那么

$$\operatorname{MaxCritIndep}(G) = \left\{T \cap L(G) : T \in \Omega(G)\right\}.$$

因此，

$$\operatorname{nucleus}(G) = \operatorname{core}(G) \cap L(G) \qquad \text{and} \qquad \operatorname{diadem}(G) = \operatorname{corona}(G) \cap L(G).$$

证明。 由定理3.11，

$$\operatorname{MaxCritIndep}(G) = \left\{S \in \Omega\left(L_G\right) : E(S, L^c(G)) = \emptyset\right\}.$$

我们断言

$$\left\{S \in \Omega\left(L_G\right) : E(S, L^c(G)) = \emptyset\right\} = \left\{T \cap L(G) : T \in \Omega(G)\right\}.$$

设 $S \in \Omega\left(L_G\right)$ 满足 $E(S, L^c(G)) = \emptyset$。若 $R \in \Omega\left(L_G^c\right)$，则 $S \cup R$是一个基数为 $\alpha(L_G) + \alpha(L_G^c) = \alpha(G)$ 的独立集，因此 $S \cup R \in \Omega(G)$。于是 $S = (S \cup R) \cap L(G)$。反过来，设 $T \in \Omega(G)$。根据定理 3.1，集合 $T \cap L(G)$ 属于 $\Omega(L_G)$。此外， $T \cap L(G) \subseteq \mathsf{冠}\left(G\right) \cap L(G)$。由于$\mathsf{冠}\left(G\right) \cap \partial_L(G) = \emptyset$， $T \cap L(G)$ 中没有顶点与 $L^c(G)$ 相邻，

因此 $E(T \cap L(G)\ L^c(G)) = \emptyset$。这就证明了该结论。对这两个相等的族分别取交集和并集，得到

核$(G) =$ 核$(G) \cap L(G)$，且二重冠$(G) =$ 冠$(G) \cap L(G)$，如所要求。

■

结合前面的结果，我们得到主要的刻画定理。

定理 3.16. 图 G 满足 核$(G) =$核(G) 当且仅当

$$\mathrm{core}(L_G^c) = \mathrm{corona}(G) \cap \partial_L(G) = \emptyset.$$

证明。令 $I \in$ 为最大临界独立集(G)。由定理 3.1， $L(G) = I \cup N(I)$。由于核$(G) \subseteq I \subseteq L(G)$且核$(G) =$ 核(G)，可得核$(G) \subseteq L(G)$。由定理 3.4,

$$\mathrm{core}(G) = \mathrm{core}(L_G^c) \cup (\mathrm{core}(G) \cap L(G)),$$

因此核$(L_G^c) = \emptyset$。

现在假设存在 $u \in$ 冠$(G) \cap \partial_L(G)$。令 M 为 L_G的一个最大匹配。如定理 3.6 的证明所示，匹配 M将 $N(I)$ 匹配到 I中。设 $v = M(u)$。由于 $u \in$冠(G)， G 的某个最大独立集 T 包含 u。因为 $uv \in E(G)$，我们有 $v \notin T$，因此 $v \notin$ 核 $(G) =$核 (G)。

另一方面，设 $J \in$ MaxCritIndep(G)。根据推论 3.11，我们有$J \in \Omega\ (L_G)$ 和 $E(J, L^c(G)) = \emptyset$。由于 $u \in \partial_L(G)$，可得 $u \notin J$。与定理 3.6 的证明一样， L_G 的每个最大独立集都恰好包含 M每条边的一个端点。因此， $v = M(u) \in J$。由于 J 是任意的， $v \in$ nucleus(G)，矛盾。因此，corona$(G) \cap \partial_L(G) = \emptyset$。

反过来，假设核$(L_G^c) =$冠$(G) \cap \partial_L(G) = \emptyset$。那么定理 3.4 表明核$(G) =$ 核$(G) \cap L(G)$。因此，根据定理 3.15,

$$\mathrm{core}(G) = \mathrm{core}(G) \cap L(G) = \mathrm{nucleus}(G),$$

正如所声称的。

■

推论 3.17。图 G 满足

$$\mathrm{diadem}(G) = \mathrm{corona}(G) \cap L(G)$$

当且仅当

$$\mathrm{corona}(G) \cap \partial_L(G) = \emptyset.$$

证明。若 corona(G) $\cap$ ∂_L(G) $=\emptyset$，则由定理 3.15 可得 diadem(G) =corona(G) $\cap$ L(G)。反之，假设 diadem(G) $=$ corona(G) $\cap$ L(G)，并设存在 $u \in$ corona(G) $\cap$ ∂_L(G)。由于 $u \in L(G)$，所假设的等式意味着 $u \in$ diadem(G)，因此某个集合 $J \in$最大临界独立集(G) 包含 u。然而，定理 3.11 给出 $E(J, L^c(G)) = \emptyset$，这不可能，因为 $u \in \partial_L(G)$。因此 corona(G) $\cap$ ∂_L(G) $=\emptyset$。 ■

推论 3.18. 图 G 满足 核(G) =核(G) 当且仅当

$$\mathrm{core}(L_G^c) = \emptyset \qquad \text{and} \qquad \mathrm{diadem}(G) = \mathrm{corona}(G) \cap L(G).$$

证明. 这可由定理 3.16和3.17立即推出。 ■

定理 3.16 完成了对定理 1.3的证明。它揭示了核(G)、核(G)和二重冠(G) 的性质完全由 Larson 分解所决定。

近似二分图是指包含唯一奇圈的图。在近似二分非 König–Egerváry 图中，已知其 Larson 分解为：L_G 是一个二分图，而 L_G^c 是一个奇圈 [20]。那么核$(L_G^c) = \emptyset$。此外，L_G 可通过 Gallai-Edmonds 结构分解为：$D(L_G)$ $A(L_G)$ $C(L_G)$。由定理 2.1 容易看出

$$D(L_G) \cap \partial_L(G) = A(L_G) \cap \mathrm{corona}(G) = \emptyset.$$

因此，由定理 3.16可得以下结论。

定理 3.19. 一个几乎二分的非 *König–Egerváry* 图 G 满足核(G) =核(G) 当且仅当

$$C(L_G) \cap \mathrm{corona}(G) \cap \partial_L(G) = \emptyset.$$

4. 结论

本文解决了 [10] 提出的问题，即刻画满足核(G) = 核(G)的图。该问题的解决方案以 Larson 独立性分解为基础

$$V(G) = L(G) \cup L^c(G).$$

我们的主要定理表明，等式 core(G) = nucleus(G) 由两个独立障碍决定：core(L_G^c) 中顶点的存在，

这源于 2-双临界一侧；以及冠 corona(G) 的顶点位于边界 $\partial_L(G)$ 上，这衡量了两部分之间的相互作用。

沿途得到的辅助结果对图的最大临界结构作出了更详细的描述。特别是，定理 3.11 将族 MaxCritIndep(G) 确定为 L_G 中避开 L_G^c的最大独立集。定理 3.15 和3.17 则表明，边界条件 corona$(G) \cap \partial_L(G) = \emptyset$ 恰好是这样一个条件：在该条件下，最大临界集是 $L(G)$ 上 G的最大独立集的迹。因此，

$$\mathrm{nucleus}(G) = \mathrm{core}(G) \cap L(G) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{diadem}(G) = \mathrm{corona}(G) \cap L(G)$$

当 corona(G) 中没有顶点位于 Larson 边界上时。对于 König–Egerváry 图，这便恢复了经典恒等式 nucleus(G) =core(G) 和 diadem(G) = corona(G)。值得注意的是，diadem(G) = corona(G) 当且仅当 G 是 König–Egerváry 图 [19, 29]。

近似二部情形展现了这一刻画的实用性。在这种情况下，由于 L_G^c 是一个奇圈，来自 core(L_G^c) 的障碍会自动消失，问题因而归结为对 König–Egerváry 部分 L_G的 Gallai–Edmonds 分解所需满足的条件。这表明，Larson 分解为进一步研究最大独立集与最大临界独立集之间的关系提供了一个稳健的框架。

5. 开放问题

本文的结果指出了若干值得进一步研究的自然方向。

问题 5.1。 针对任意图 G，用 *Larson* 分解 $V(G) = L(G) \cup L^c(G)$和边界集 $\partial_L(G)$给出二重冠(G) 的显式结构描述。

问题 5.2。 确定判定一个图 G 是否满足 核(G) = 核(G)的算法复杂度。更一般地，研究如何根据 *Larson* 分解计算 核(G) 和二重冠(G) 的复杂度。

问题 5.3. 为核、核仁、冠和二重冠的概念构造加权类比，并刻画加权核与加权核仁何时重合。

致谢

本研究部分由圣路易斯国立大学资助，项目编号 PROICO 03-0723 和 PROIPRO 03-2923；MATH AmSud 资助，项目编号 22- MATH-02；国家科学与技术研究委员会资助，项目编号 PIP 11220220100068CO；以及 Agencia I+D+I 资助，项目编号 PICT 2020-00549 和 PICT 2020-04064。

写作过程中使用生成式人工智能和人工智能辅助技术的声明

在撰写本文的过程中，作者使用了 ChatGPT-3.5 来改进文中若干段落的语法。使用该服务后，作者根据需要对内容进行了审阅和编辑，并对出版内容承担全部责任。

数据可用性

本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

声明

利益冲突作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Boros, E., Golumbic, M. C., 和 Levit, V. E.（2002）。关于属于图的所有最大稳定集的顶点数量。《离散应用数学》，124(1-3)：17–25。2

[2] Bourjolly, J.-M., Hammer, P. L., 和 Simeone, B.（2009）。具有 König–Egerváry 性质的节点加权图。载于奥伯沃尔法赫 *II* 数学规划，第 44–63 页。施普林格。2

[3] Deming, R. W. (1979年). 图的独立数：König–Egerváry 定理的推广。《离散数学》，27(1):23–33。2

[4] Diestel, R. (2012).《图论》，第4版，数学研究生教材第173卷。施普林格。4[5] Edmonds, J. (1965). 路径、树与花。《加拿大数学杂志》，17:449–467。5[6] Egerváry, J. (1931). 矩阵的组合性质。《数学与自然科学学报》，38:16–28。匈牙利语。2[7]Gallai, T. (1964). 最大独立边系。A Mag- yar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei，9(3):401–413。5[8] Gavril, F. (1977). 最大匹配与最小点覆盖相等性的检验。《信息处理快报》，6(6):199–202。2[9] Jarden, A., Levit, V. E., and Mandrescu, E. (2017). König–Egerváry 图的另外两种刻画。《离散应用数学》，231:175–180。2[10] Jarden, A., Levit, V. E., and Mandrescu, E. (2019). 图的最大独立集族的单调性质。《序》，36(2):199–207。2, 3, 12[11] Jaume, D. A., Levit, V. E., Mandrescu, E., Molina, G., and Pereyra, K. (2026年). 关于图的König–Egerváry 指数。《离散应用数学》，383:139–151。2[12] Kőnig, D. (1915). 线系与行列式。《数学与自然科学学报》，33:221–229。匈牙利语。2[13] Larson, C. E. (2007). 关于临界独立性约化的注记。《组合学及其应用研究所通报》，5:34–46。2, 6[14] Larson, C. E. (2011). 临界独立数与独立分解。《欧洲组合学杂志》，32(2):294–300。2, 5[15] Levit, V. E. and Mandrescu, E. (2003). 关于 $\alpha+$-稳定 König–Egerváry 图。《离散数学》，263(1-3):179–190。2

[16] Levit, V. E. 和 Mandrescu, E.（2006）。König– Egerváry 图中的 α-临界边。《离散数学》，306(15):1684–1693。2[17] Levit, V. E. 和 Mandrescu, E.（2012a年）。临界独立集与König–Egerváry 图。《图与组合》，28(2):243–250。2, 3, 8[18] Levit, V. E. 和 Mandrescu, E.（2012b年）。属于图中所有临界集的顶点。SIAM离散数学杂志，26(1):399–403。2[19] Levit, V. E. 和 Mandrescu, E.（2018年）。关于最大临界独立集的König–Egerváry集族。《离散与应用数学艺术》，2。13[20] Levit, V. E.、Mandrescu, E. 和 Pereyra, K.（2026年）。核为临界独立集的图的刻画。已提交。3, 6, 8, 12[21] Lorentzen, L.（1966年）。关于无向图中用节点覆盖弧的札记。报告 ORC 66-16，运筹学研究中心，加州大学伯克利分校，加利福尼亚州。2[22] Pereyra, K.（2025a年）。SD-KE分解与Gallai-Edmonds分解：一种结构联系。已提交。2[23] Pereyra, K.（2025b年）。Sterboul-Deming图与posy因子。已提交。2[24] Pereyra, K.（2025c年）。Sterboul-Deming图：刻画。已提交。2[25] Pereyra, K.（2026年）。通过图分解刻画 ker(G)=core(G)。已提交。6[26] Plummer, M. D. 和 Lovász, L.（1986年）。匹配理论，第29卷。爱思唯尔。4[27]Pulleyblank, W. R.（1979年）。最小节点覆盖与2-双临界图。《数学规划》，17(1):91–103。2[28] Schrijver, A. 等（2003年）。组合优化：多面体与效率，第24卷。施普林格。2

[29] Short, T.（2016年）。关于图的临界独立集的一些猜想。组合学电子期刊，23(2):P2.43。2，13[30]Sterboul, F.（1979年）。横截数等于匹配数的图的刻画。组合理论杂志*B*辑，27(2):228–229。2[31] Zhang, C.-Q.（1990年）。寻找临界独立集和临界顶点子集是多项式问题。*SIAM*离散数学杂志，3(3):431–438。2