arXiv:2603.27835v1 [math.CO] 29 Mar 2026

AMPLE/LOPSIDED 集的几何

HANS–JÜRGEN BANDELT、VICTOR CHEPOI、ANDREAS DRESS 和 JACK KOOLE N

摘要。1983 年，Jim Lawrence 在研究编码凸集 K 与 $\mathbb{R}^E$ 的正交象限之间交模式的 $\{-1,+1\}^E$ 的子集 L 时，引入了偏斜集。他在 L 上识别出一个强组合条件（他称之为 偏性），该条件是这类凸集 K 存在的必要条件（但正如他所证明的，它并非充分条件）；他给出了若干等价条件，并指出该概念与组合学中研究的其他多个主题密切相关。此后，其他几位作者也独立地重新发现了偏斜集，其中尤以 Andreas Dress 于 1995 年的工作为代表，他将其称为 充分的集。Dress 将充分集定义为满足某个组合不等式等式的集合族，而该不等式对所有集合族都成立。

充分集／偏斜集可视为超立方体的等距子图，其与所有子超立方体的交都是等距子图。另一种说法是，它们对应于集合族 L：当基集 E 的子集 A 被 L 打散时，A 就被 L 强打散；也就是说，由 A 定义的某个子超立方体完全包含在 L 中。

在上一篇文章中，我们从多种组合与图论角度刻画了充分集。本文研究充分集作为立方体复形（立方复形）的几何实现，并由此得到若干新的刻画。其中一种刻画表明，赋予内蕴 ℓ_1-度量的充分集立方体复形，恰好是 ℓ_1-空间的等距子空间（我们称之为弱凸集）。我们还将充分集立方体复形各面的重心映射视为 $\{\pm1,0\}$-符号向量的集合，并与通过协向量和余回路刻画定向拟阵相类比。此外，我们刻画了对应于充分集所有面及所有极大面的重心映射的 $\{\pm1,0\}$-符号向量集合。进一步地，我们证明，任意充分集 $L\subseteq\{-1,+1\}^E$ 都可以实现为弱凸集 K 与 $\mathbb{R}^E$ 的正交象限之间的交模式。所有这些都说明，充分集这一概念在立方复形的背景下相当自然。

1. 引言

本文是 [3], 的后续篇，在该文中，我们列举了 偏斜集 的组合、递归及图论刻画。这类集合最初由 Lawrence[14] 引入并研究，随后又由 Bollobàs 和 Ratcliffe [6], 、Dress [9], 及 Wiedemann [22], 独立重新发现，他们分别将其称为 极值集、充足集 和 简单集。在本文中，我们将这类集合称为 充足集 （采用 [9], 中的名称，我们认为这个名称最为恰当，因为它完美体现了这类集合的组合本质），并给出充足集的若干几何刻画，每种刻画都着重强调充足性的某一特征，以及它与实数向量空间几何中的某些基本概念之间的关系。我们将反复引用第一部分 [3] ，其中给出了充足集的定义、性质和刻画。

丰裕性。本文中，E 表示一个满足 $n:=\#E$ 个元素的有限集，$\{\pm1\}^E$是从 E到 $\{\pm1\}=\{-1,+1\}$的所有映射组成的集合，$\{\pm1,0\}^E$是从 E到 $\{\pm1,0\}=\{-1,0,+1\}$的所有映射组成的集合。因此，$\mathbb{R}^E$是由从 E到$\mathbb{R}$的所有映射构成的向量空间。实心超立方体 $H(E)=[-1,+1]^E\subset\mathbb{R}^E$ 由从 E 到区间$[-1,+1]$的所有映射构成。我们将 $H(E)$视为一个立方复形，即一个带有面结构的凸多面体。 $H(E)$的0-骨架是 $\{\pm1\}^E$，其1-骨架 $H^{(1)}(E)$是图超立方体，而 $\{\pm1,0\}^E$ 是 $H(E)$各面重心的符号映射集合。对于任意两个映射r'、$r''\in\mathbb{R}^E$，我们用 $d(r',r'')$表示它们的 ℓ_1-距离 $||r',r''||_1=\sum_{e\in E}|r'(e)-r''(e)|$。当且仅当 $d(s',s'')=2$时，两个顶点s'、$s''\in\{\pm1\}^E$在 $H^{(1)}(E)$中确定一条（长度为2的）边

在本文的大部分内容中，我们将考虑 $\{\pm 1\}^E$的子集 L 。或者，这样的集合 L 也可视为 E的子集族。 L 的集合论补集记作 L^*:

$$L^* := \{\pm 1\}^E - L.$$

我们用 $G(L)$表示由 L诱导的图超立方体 $H^{(1)}(E)$的子图。若集合 L 使得 $G(L)$连通，则称其为连通；若L 中的每一对顶点 s', s'' 都能在 $G(L)$中通过长度为 $d(s', s'')$的路径相连，则称其为等距。

给定 E 的任意子集 A ，对于任意一组符号映射 $L \subseteq \{\pm 1\}^E$ ，总能与之关联两个子集 L_A 和 L^A ，它们都属于 $\{\pm 1\}^{E-A}$:

$$L_A := \{t \in \{\pm 1\}^{E-A} : \text{ some extension } s \in \{\pm 1\}^E \text{ of } t \text{ belongs to } L\},$$
$$L^A := \{t \in \{\pm 1\}^{E-A} : \text{ every extension } s \in \{\pm 1\}^E \text{ of } t \text{ belongs to } L\}.$$

$L_A = \{s|_{E-A} : \quad s \in L\}$ 编码了 L到 $\{\pm 1\}^{(E-A)}$. 的投影。与 L_A相比，较小的集合 L^A 要求 L中存在一个与 $\{\pm 1\}^A$ 同构的完整纤维，而非仅要求存在一个来自 L的点。两个算子 L_A 和 L^A 给出了从 L导出抽象单纯复形的两种方法:

$$\overline{X}(L) := \{A \subseteq E : \ L_{E-A} = \{\pm 1\}^A\},$$
$$\underline{X}(L) := \{A \subseteq E : \ L^A \neq \varnothing\}.$$

$X(L)$ 的单形通常称为被 L 打散的集合，而 $X(L)$ 的单形称为被 L [8, 17]强打散的集合。 $X(L)$ 中单形的最大大小称为 L（视为一个集合族）的 Vapnik–Chervonenkis 维数（简称 VC 维数）。

例 1. 设 $E = \{1, 2, 3\}$，并考虑 $\{\pm 1\}^E$ 的子集 L，它由除两个常值符号映射外的所有符号映射组成。于是 L 在 $H^{(1)}(E)$ 中编码了一个等距的 6-循环。对于每个单元素集合 A， L 到 $\{\pm 1\}^{E-A}$ 的投影都是满射，但 L 不包含一个与这个二维立方体同构的完整纤维。因此， $X(L)$ 包含 $\{1, 2, 3\}$ 的所有真子集， 而 $X(L)$ 由空集和三个单元素集合组成。

在 [9] 和 [3] 中证明了

$$\#\underline{X}(L) \leq \#L \leq \#\overline{X}(L)$$

对任意 $L \subseteq \{\pm 1\}^E$ 都成立（不等式 $\#L \leq \#X(L)$ 此前由 Pajor [19]证明）。若等式 $\#L = \#X(L)$ 成立，则称集合 L为充足的。事实证明，丰裕性在取补集 L^* 以及集合 L^A, L_A时都得以保留，并且意味着 L的连通性（甚至更进一步，等距性）。由此可知，对于 $\{\pm 1\}^E$的每个充足子集 L ， L_A和 L^A 都必须是 $\{\pm 1\}^{E-A}$ 的连通（等距）子集。反过来，事实证明，对于所有 $A \subseteq E$ ， L^A 的连通性（或等距性）都意味着丰裕性，因此有人建议将这类子集称为超连通的或超等距的。进一步研究最终发现，我们的充足集恰好与 Lawrence 的偏斜集相同，并且由此可以发展出一套关于 $\{\pm 1\}^E$ 这类子集的、内容极其丰富且多面向的理论。以下列出的是在 [3], 中确立的充足集最重要的性质，每一条都可用于定义它们:

(1) 超等距性：对于所有 $A \subseteq E$， L^A 都是等距的；(2) 超连通性：对于所有 $A \subseteq E$， L^A 都是连通的；(3) 等距递归性： L 是等距的，且对于某个 $e \in E$， L_e 和 L^e 都是充足的；(4) 连通递归性： L 是连通的，且对于每个 $e \in E$， L^e 都是充足的；(5) 交换性：对于任意不相交的 A、$B \subseteq E$，$(L^A)_B = (L_B)^A$ 成立；(6) 丰裕性：$\#L = \#X(L)$；(7) 稀疏性：$\#L = \#X(L)$；(8) 偏性：对于所有满足 $A \cap B = \varnothing$ 和 $A \cup B = E$ 的 A、$B \subseteq E$，要么 $A \in X(L)$，要么$B \in X(L^*)$。

(9) 遗传欧拉示性数 *1*：对于每个面 F 的 $H(E)$ 与之相交 L，

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i f_i(L\cap F)=1,$$

其中 $f_i(L\cap F)$ 统计包含在 L 与 F的交集中之图形 i-立方体的数量 .

倒数第二种刻画是 Lawrence [14] 对偏性的最初定义。最后一种刻画最早由 Wiedemann [22] 证明。我们还回顾 Lawrence [14] 给出的充分集的以下优美刻画：

(10) 完全非对称性：如果将 L与 $H(E)$ 的一个面 F 的交集通过取对跖点而闭合，那么 $F\cap L$ 要么为空，要么与 $F\cap\{\pm 1\}^E$重合。

Lawrence [14] 给出了充分集的若干例子。特别是，他证明了与凸集 K 相交的 $\mathbb{R}^E$ 闭正交象限的符号向量构成充分集（他还给出了一个无法以这种方式实现的充分集的例子）。此外，我们在 [3], 中证明了中位图（CAT(0)立方复形）的顶点集是充分集；更一般地，凸几何及其花束（我们称之为条件反拟阵）也是充分集。

我们的结果。每个 $\{\pm 1\}^X$ 的子集 L 都会产生一个（不一定连通的）立方复形，它由超立方体 $H(E)$ 的所有面组成，且这些面的顶点均属于 L；参见 [21]。这个（紧致的）立方多面体（简称立方体复形）记作 $|L|$，并称为 L 的几何实现。$|L|$ 的顶点恰好是 L 中的元素。该立方体复形的 1-骨架就是上文定义的图 $G(L)$。若 L 连通，则 $|L|$ 也连通，因此可以赋予其内蕴的 ℓ_1 度量 $d_{|L|}$。所得度量空间 $(|L|, d_{|L|})$ 是完备的测地空间，但不一定是路径-ℓ_1-等距的（也就是说，任意 r'，$r''\in|L|$ 都能在 $|L|$ 中由一条 ℓ_1-测地线连接）。例如，若 L 如例 1 中所定义，则 $|L|$ 是 $\mathbb{R}^3$. 的一个实心六边形。该六边形中两条相对边的中点之间的 ℓ_1-距离为 4，而内蕴的 ℓ_1-距离为 6。

本文将证明，相关立方复形 $|L|$ 的路径-ℓ_1-等距性是丰裕性的又一特征，从而表明充足集构成了 ℓ_1-几何的基本域：

(11) 路径-ℓ_1-等距性：$(|L|, d_{|L|})$ 是 $(\mathbb{R}^E, d)$ 这一 ℓ_1-空间的路径-ℓ_1-等距子空间。

由于度量空间 $(|L|, d_{|L|})$ 是完备的，根据门格尔定理 [15], ， $|L|$ 的路径-ℓ_1-等距性等价于其门格尔凸性；在我们这个特定的 ℓ_1-情形中，我们将其称为弱凸性：若对于任意 $r', r''\in|L|$，都存在一个不同于 r' 和 r'' 的$r\in|L|$，使得 $d(r',r'')=d(r',r)+d(r,r'')$，则称 $K\subseteq\mathbb{R}^E$ 为弱凸。$\mathbb{R}^E$ 的凸集是弱凸的，这也解释了我们采用这一名称的原因。

弱凸性并非满足 $|L|$ 的最弱条件，但它仍能刻画 L 的丰裕性。我们称 $\mathbb{R}^E$ 的子集 K 是符号凸的，如果对于任意 r'，$r''\in K$ 以及每个满足 $r'(e)r''(e)<0$ 的 $e\in E$，都存在某个 $r\in K$，使得 $r(e)=0$ 且 sign$(r(f))\in\{$sign$(r'(f))$，对于所有满足 $r'(f)r''(f)\geq 0$ 的 $f\in E$，sign$(r''(f))\}$。

(12) 弱凸性与符号凸性：$|L|$ 是弱凸的（等价地，$|L|$是符号凸的 ）.

虽然 $\mathbb{R}^E$ 的弱凸子集显然是连通的，但符号凸性要求较宽松，因为 $\mathbb{R}^E$ 的有限子集也可能是符号凸的。事实上，我们证明符号凸性刻画了充足集 L 的 $|L|$ 的面所对应的重心映射集合 Baryc(L)。

Lawrence [14]说明了如何从 $\mathbb{R}^E$的凸子集 K 导出充分集 $L(K)$。此外，还有一种典范构造，可以从 $\{\pm 1,0\}^E$的某些子集J导出充分集 $L(J)$。考虑符号 $-1,+1$,0的标准序 $\prec$，其中 -1 与 $+1$ 不可比较，$0\prec -1$ 与 $0\prec +1$，并赋予 $\{\pm 1,0\}^E$ 乘积序，也记作 $\prec_\circ$。子集 $J\subseteq\{\pm 1,0\}^E$的上闭包 $\uparrow J$由所有满足对于某个 $t\in J$有 $t\prec t'$ 的 $t'\in\{\pm 1,0\}^E$组成。如果 L 是充分的，那么可以从集合 Baryc(L) 中取回 L，即$L=$ Baryc$(L)\cap\{\pm 1\}^E=\uparrow$Baryc$(L)\cap\{\pm 1\}^E$。因此，可以问：对于$\{\pm 1,0\}^E$的哪些子集 J，集合 $\uparrow J\cap\{\pm 1\}^E$是充分的。我们证明，$J$的上闭包的符号凸性足以刻画 $\uparrow J\cap\{\pm 1\}^E$的充分性：

(13) 上闭包的符号凸性： $L(J)$ 是充分的，当且仅当 $\uparrow J$ 是符号凸的。

此外， J 可以由 $L = \uparrow J \cap \{\pm 1\}^E$ 作为 Baryc(L) 求得。前述结果可视为通过协向量刻画定向拟阵的一个类比，参见 [5]。

为了刻画 $\{\pm 1, 0\}^E$ 的哪些子集 J 使得 $\uparrow J \cap \{\pm 1\}^E$ 是充足的，我们还需要对 $\mathbb{R}^E$中的凸性作进一步放宽：若对任意 $r', r'' \in K$ 以及任意满足 $r'(e)r''(e) < 0$ 的 $e \in E$ ，都存在某个 $r \in K$ ，使得 $r(e) = 0$ 且 $\mathrm{sign}(r(f)) \in \{0, \mathrm{sign}(r'(f)), \mathrm{sign}(r''(f))\}$ 对所有 $f \in E \setminus \{e\}$成立，则称 $K \subseteq \mathbb{R}^E$ 为 0-凸。 $\mathbb{R}^E$的每个弱凸子集或符号凸子集都是 0-凸的，但反之不成立。对于 $\{\pm 1, 0\}^E$的子集，0-凸性类似于定向拟阵 [5]中有符号回路的“弱消去”公理，并等价于以下符号回路公理 *(SCA)*：

符号回路公理： 对所有 t'， $t'' \in J$ 和 $e \in E$ ，若 $r'(e) \cdot t''(e) = -1$ ，则存在某个 $t \in J$，使得 $t(e) = 0$ 且 $t(f) \in \{0, t'(f)\ t''(f)\}$ 对所有 $f \in E$.

(14) *0*-凸性和 *(SCA)*： $\uparrow J \cap \{\pm 1\}^E$ 是充分集，当且仅当 J 是 0-凸的，即 J 满足 (SCA)。

$\{\pm 1, 0\}^E$的每个子集 J都可以扩展为立方体复形 $[J]$，该复形由所有重心属于 J的立方体组成。由前面的结果可知，立方体复形 $[J]$是路径-ℓ_1-等距的，当且仅当 J 是 0-凸的。

充分集 L 还可以通过其“余回路”来刻画，即相关立方体复形 $|L|$的各个面（极大面）的重心映射所组成的集合 Cocirc(L)。由前面的刻画我们推得，充分集的余回路恰好是满足符号回路公理 (SCA) 且两两极小（关于 $\prec$）的符号映射：

(15) 余回路：Cocirc(L) 满足 (SCA)，且 t， $t' \in$ Cocirc(L)，其中 $t \prec t'$ 蕴含 $t = t'$。

此外，(SCA) 和两两极小性，则 Cocirc($L(J)$) $= J$。定向拟阵的余回路刻画 $R \subseteq \{\pm 1, 0\}^E$ 也涉及极大性和符号回路公理，但还要求满足对称性（$r \in R$ 蕴含 $-r \in R$）[5]。然而，缺乏对称性意味着，充分集在组合结构和几何结构方面可能与定向拟阵有很大差异。

主 要动机是 Lawrence 在 [14] 研究并推广那些子集

$$L(K) := \{s \in \{\pm 1\}^E : \{t \in K : t(e)s(e) \geq 0 \text{ for all } e \in E\} \neq \varnothing\}$$

of $\{\pm 1\}^E$ ，它们表示与 $\mathbb{R}^E$ 的凸子集 K 相交的 $\mathbb{R}^E$ 的闭正交象限。Lawrence（以及 Wiedemann [22]）证明了这类集合是充足集。然而，并非每个充足集都编码了欧几里得空间中某个凸集的正交象限交模式；参见 [14]。不过，它已经很接近了。正如下文将要展示的，要获得完整的几何表示，就必须采用弱凸性这一较弱的概念：

(16) 由弱凸集实现： L编码了某个弱凸（路径-ℓ_1-等距）集 K 在（$\mathbb{R}^E$， $||\cdot||_1$）中的正交象限交模式；也就是说，符号向量 s 属于 L，当且仅当由 s 确定的正交象限也包含 K.中的一个点

我们还证明，对于 $\{\pm 1\}^E$ 的子集 L ，当且仅当 L 是充足的时，（正交）投影与几何实现恰好可交换：

(17) C 投影与几何实现的可交换性： $|L|_A = |L_A|$ 对所有 $A \subseteq E$均成立 .

此外，无需考虑$|L|_A = |L_A|$，只需考察 $|L|_A$ 与 $|L_A|$的拓扑维数相等：

(18) 维数等式：$\dim(|L|_A) = \dim(|L_A|)$ 对所有 $A \subseteq E$均成立。

（个人）历史札记。我们在充分集/偏斜集领域的探索始于1995年12月，当时 A. Dress 给我们发来一份传真，其中写有不等式 $\#X(L) \leq \#L \leq \#X(L)$，并建议研究满足 $\#L = \#X(L)$ 的集合族 L 。不久之后，我们得出了文中所介绍的刻画与示例中的大部分内容，以及本文的若干结果。1996年，我们发现了 Lawrence 的论文 [14] ，并证明他的偏斜集与我们的充分集是相同的。这多少削弱了我们的热情，但我们仍继续研究这一主题（例如，1998年 A. Dress 从纽约发给我们每人一份长达100页的传真，也印证了这一点）。2006年，我们完成了论文的第一部分，该部分发表于 [3] （一些初步结果已在 [9] 中公布）。 [3], 发表后不久，我们每人都收到 R. Wiedemann 的一封信，附有他1986年的博士论文 [22], 信中告知我们，他在 [22] 中以“简单集”之名重新发现了充分集。2012年，我们完成了当前论文的第一个版本，并读到了 S. Moran 的硕士论文 [16], ；从中我们得知，Bollobàs 和 Ratcliffe 也曾独立重新发现充分集/偏斜集，并将其称为“极值集” [6], 而不等式 $\#L \leq \#X(L)$ 早已由 Pajor 建立 [19]。不等式 $\#L \leq \#X(L)$ 在组合学和计算学习理论中具有一定重要性，尤其是因为它蕴含经典的 Sauer-Shelah-Perles 不等式 $\#L \leq \binom{n}{\leq d}$ （其中 d 是 L 的 VC 维数）；该不等式在 VC 维数理论中得到了广泛应用。事实上， $X(L)$ 的单形是由 L 的子集遮蔽的，而 $X(L)$ 中最大单形的大小就是 VC 维数 d。鉴于此（并仿照 Sauer-Shelah-Perles 不等式），我们建议将 $\#X(L) \leq \#L \leq \#X(L)$ 称为 Dress-Pajor 不等式。

满足 $\#L = \binom{n}{\leq d}$ 的集合族 L 被称为“极大集” [11] ，它们也是充足的。极大集已在 [11] 中得到研究，并且代表了重要的概念／假设类；对于这些类，计算学习理论中的 样本压缩猜想 [12] 已得到证明。这也促使人们研究并解决了关于充足集的样本压缩猜想 [17] （关于该猜想的无标签版本，另见 [8] ）。

尽管本文先前并未投稿发表，但所得结果促使我们中的两位与 K. Knauer 引入了定向拟阵复形（也称为条件定向拟阵，简称 COMs） [4]。COMs 以余向量（$\{\pm 1, 0\}^E$-向量）定义，采用与定向拟阵（OMs） [5], 类似的公理；唯一的区别是，定向拟阵所要求的全局对称性和零符号向量的存在性，在这里由局部相对条件取代。COMs 是充足集、定向拟阵、排序和 CAT(0) 考克斯特带状复形的一种广泛共同推广。COMs 可以赋予胞腔复形的结构，其中每个胞腔都是一个定向拟阵，并且该胞腔复形是可缩的。充足集恰好是所有胞腔均为立方体的 COMs。Knauer 和 Marc [13] 刻画了 COMs 的顶向量图。目前，充足集和 COMs 都是活跃的研究课题。

结构安排。本文结构如下。第 2 节介绍全文其他各节所用的主要定义。第 3 节和第 4 节给出预备结果。第 3 节探讨线性空间和度量空间中通常凸性的度量松弛与组合松弛，这些内容用于本文的所有刻画。第 4 节讨论与任意度量空间 (M, d) 相关联的内在路径度量（初读时可以跳过本节）。接下来的四节介绍本文的主要结果。第 5 节和第 6 节分别通过度量条件、弱凸性与符号凸性，以及投影，对充足立方多面体进行刻画。随后，第 7 节根据充足集与正交象限的交模式，确立其几何实现。第 8 节探讨回路和余回路的概念，以及它们与充足立方多面体几何结构的关系。

2. 预备知识

2.1. 映射与符号映射。 给定有限集 E，我们用 $\#E$ 表示其基数，用 $\{\pm 1\}^E$ 表示从 E 到 $\{\pm 1\} = \{-1, +1\}$ 的所有映射组成的集合，用 $\{\pm 1, 0\}^E$ 表示从 E 到 $\{\pm 1, 0\}$ 的所有映射组成的集合，并用 $\mathbb{R}^E$ 表示由所有从 E 到 $\mathbb{R}$ 的映射 r 构成的向量空间。显然，

$\{\pm1\}^E \subset \{\pm1,0\}^E \subset \mathbb{R}^E$。对于 $r \in \mathbb{R}^E$ 和 $e \in E$，我们用 $\mathrm{sign}(r(e)) \in \{-1,0,+1\}$ 表示 $r(e)$ 的符号。对于每个映射 $r \in \mathbb{R}^E$，我们将其支撑 $\mathrm{supp}(r) = \{e \in E : r(e) \neq 0\}$ 以及符号向量 $\mathrm{sign}(r) \in \{\pm1,0\}^E$ 与之关联，其中符号向量的坐标为 $\mathrm{sign}(r(e))$ $e \in E$。对于任意 r'、$r'' \in \mathbb{R}^E$，我们用 $\Delta(r',r'') = \{e \in E: r'(e) \neq r''(e)\}$ 表示它们的差集，用 $d(r',r'')$ 表示它们的ℓ_1-距离 $||r',r''||_1 = \sum_{e\in E} |r'(e) - r''(e)| = \sum_{e\in\Delta(r',r'')} |r'(e) - r''(e)|$。另令 $[r',r''] = \{r \in \mathbb{R}^E: d(r',r) + d(r,r'') = d(r',r'')$。注意，$[r',r'']$ 是一个轴平行盒。

每个 $e \in E$ 都定义一个坐标超平面 $H_e = \{r \in \mathbb{R}^E: r(e) = 0\}$，它属于 $\mathbb{R}^E$，并将$\mathbb{R}^E - H_e$ 划分为正开半空间和负开半空间。集合 $\mathcal{H} = \{H_e : e \in E\}$ 是一个中心超平面排列； $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{R}$ 划分 $\mathbb{R}^E$ 提供索引，将其划分为开区域，并递归地划分为由 $\mathcal{H}$中的若干超平面的交集所定义的区域。更具体地说，每个区域$R \in \mathcal{R}$ 都是一组超平面 H_e，$e \in E'$ 的交集，以及一组正或负半空间的交集，其中 $\mathcal{H}$ 中的每个 H_f，$f \in E - E'$对应一个半空间。每个 R的维数介于 $\#E$和 0 之间。 $\mathcal{R}$中维数最大的区域是 $\mathbb{R}^E$的 $2^{\#E}$ 开正交象限。

对于 $\mathbb{R}^E$中的每个点 r，符号向量 $\mathrm{sign}(r)$ 是符号映射 $s \in \{\pm1,0\}^E$，满足$s(e) = 0$，若 $r \in H_e$； $s(e) = +1$，若 r 属于 H_e 的正半空间；以及 $s(e) = -1$，若 r属于 H_e的负半空间。属于 $\mathcal{R}$ 的同一区域 R 的所有点 r 具有相同的符号向量，而属于 $\mathcal{R}$ 不同区域的任意两点具有不同的符号向量。特别地，属于 $\mathbb{R}^E$ 的同一开正交象限 O 的所有点具有相同的符号向量 $s \in \{\pm1\}^E$，并且 O 可以从 s 中恢复如下：

$$O = \{r \in \mathbb{R}^E : r(e) \cdot s(e) > 0 \text{ for all } e \in E\}.$$

$\widetilde{O}$ O 的闭包是 $\mathbb{R}^E$ 的一个闭正交象限，而 $\widetilde{O}$ 也可以通过符号映射 s 识别为$\backsim O = O(s)$，其中

$$O(s) := \{r \in \mathbb{R}^E : r(e) \cdot s(e) \geq 0 \text{ for all } e \in E\}.$$

反过来，给定 $r \in \mathbb{R}^E$，集合

$$\mathrm{Sign}(r) := \{s \in \{\pm1\}^E : r(e) \cdot s(e) \geq 0 \text{ for all } e \in E\},$$

表示 r 所属的 $\mathbb{R}^E$ 的闭正交象限。

2.2. **超立方体 $H(E)$及其面**。我们用 $H(E)$表示实心超立方体 $[-1,+1]^E \subset \mathbb{R}^E$，并将 $H(E)$视为一个立方复形。我们用 $H^{(1)}(E)$表示代表 $H(E)$的*1*-骨架的图，即顶点集为 $\{\pm1\}^E$、边集由 $\{\pm1\}^E$的所有点对 $\{s,s'\}$ 组成的图，其中 $d(s,\ s') = 2$（等价地，$\Delta(s,\ s') = 1$）。这意味着，$H^{(1)}(E)$中任意两个顶点 s'，$s'' \in H^{(0)}$ 之间的标准图距离等于 $\frac{1}{2}d(s',\ s'')$。

定义 n 1（H（E）的面及其重心）。超立方体 H（E）的面 F 是 A-纤维形式为

$$F = H(A) \times s_0 \text{ for some } s_0 \in \{\pm1\}^{E-A}$$

其中 $A \subseteq E$. 按惯例，H（E）是其 E-纤维，其顶点是作为 $\varnothing$-纤维的面。面 F 的重心是映射 $s \in \{\pm1,0\}^E$，满足：若 $e \in A$，则 s（e）$= 0$；若 $e \in E - A$，则 s（e）$= s_0$（e）$\in \{-1,+1\}$。如果存在 $A \subseteq E$ 和 s_0'，$s_0'' \in \{\pm1\}^{E-A}$，使得 $F' = H$（A）$\times s_0'$ 且 $F'' = H$（A）$\times s_0''$，我们称 H（E）的两个面 F'，F'' 平行。平行面由此可通过用平行（仿射） A-平面与超立方体相交得到。

$$\{p \in \mathbb{R}^E : p|_{E-A} = c\} \text{ for } c \in H(E - A).$$

对于每个 $r \in H(E)$，用 $F(r)$ 表示包含.....的 $H(E)$ 的（必然唯一的）最小面 r.

对于 r $H(E)$ 中的每个点，面 $F(r)$ 由满足 $-1 < r(e) < +1$ 的坐标 $r(e)$ $(e \in E)$ 确定：

$$F(r) = H(E(r)) \times r|_{E-E(r)}, \text{ where}$$
$$E(r) := \{e \in E : -1 < r(e) < +1\}, \text{ and}$$
$$r|_{E-E(r)} \in \{\pm1\}^{E-E(r)}.$$

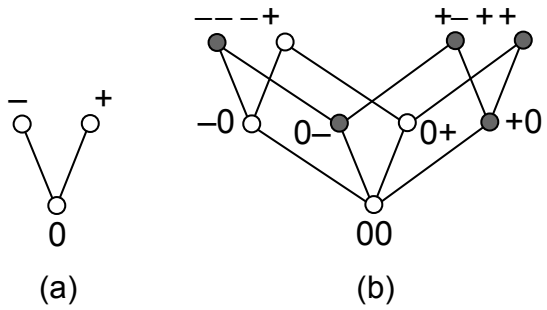


图1. (a) 符号序。(b) $\{\pm1,0\}^2$上的乘积序；阴影节点对应于一个充分集的重心映射。

面 $F(r)$ 的重心由从 E 到 $\{\pm1,0\}$ 的映射给出：该映射在 $E(r)$ 上为零映射，在其他地方与 $r|_{E-E(r)}$ 重合。

$H(E)$的各个面的重心构成的集合为 $\{\pm1,0\}^E$。为了用相应的重心映射来表示 $H(E)$各面的包含关系，我们采用符号的标准序 $\prec$ of signs$-1,+1,0$，在该序下， -1和 $+1$不可比， $0\prec-1$和 $0\prec+1$；见图1(a)。 $\{\pm1,0\}^E$ 上的乘积序 $\prec^E$ 也记作 $\prec$。($\{\pm1,0\}^E,\prec$)的无向哈斯图是一个网格图（即一条含两条边的路径的笛卡尔 E次幂），记作 $G(\{\pm1,0\}^E)$；$E=2$的情形见图1(b)。因此，对于两个映射 $t_1,t_2\in\{\pm1,0\}^E$， $t_1\prec t_2$成立，当且仅当对所有 $x\in E,$ 都有 $t_1(x)\in\{0,t_2(x)\}$ ；等价地，对于相应的面，包含关系 $F(t_2)\subseteq F(t_1)$成立。

2.3. **符号映射的子集、其立方体复形及重心完备化**。对于 $\{\pm1\}^E$的子集L，我们用 $L^*:=\{\pm1\}^E-L$ 表示 L 的集合论补集，用 $G(L)$表示由 L诱导的 $H^{(1)}(E)$的子图，也就是说，其顶点集为 L，边集由 $H^{(1)}(E)$中连接 L 两个顶点的所有边组成（同样假设 $G(L)$的边长为 2）。如果 $G(L)$是连通的，则称集合 L 为连通；如果 s',s''中的任意一对顶点都能在 $G(L)$中由长度为 $d(s',s'')$.的路径连接，则称集合 L 为等距。

定义 2（立方体复形）。集合$L\subseteq\{\pm1\}^E$ 的几何实现（简称立方体复形）是立方复形 $|L|\subseteq H(E)$，由超立方体 $H(E)$中满足 $F\cap\{\pm1\}^E\subseteq L.$ 的所有面 F 构成。 $|L|$ 的顶点是 L 的元素，而$|L|$ 的 1-骨架 $|L|^{(1)}$ 与 $G(L)$重合。 $|L|$ 的面是 $|L|$中按包含关系极大的面。

注意，对于 $|L|$ 中的每个点 r，它在超立方体 $H(E)$ 中的最小面 $F(r)$ 必然属于 $|L|$。

定义 3（重心完备）。对于 $\{\pm1\}^E$ 的子集 L，由 $|L|$ 的各个面的所有重心组成的 $\{\pm1,0\}^E$ 的子集称为 L 的重心完备，记作 Baryc(L)（或 Baryc($|L|$)）。

定义 4（上闭包与极小元集合）。对于子集 $J\subseteq\{\pm1,0\}^E$，相对于序 $\prec$， J 的上闭包 $\uparrow J$ 定义为

$$\uparrow J=\{t'\in\{\pm1,0\}^E:\ t\prec t'\text{ for some }t\in J\}.$$

若 $\uparrow J=J$，则称 $J\subseteq\{\pm1,0\}^E$ 为上闭。

也用 Min(J) $=\{t\in J$ 表示偏序集 $(J,\prec)$ 的所有极小元组成的集合，其中 $t'\prec t$ 蕴含对所有 $t'\in J\}$ 均有 $t'=t$。

接下来介绍上闭包的两个简单性质：

引理 1. 对于 $\{\pm1,0\}^E$ 的任意子集 J，$\mathrm{Baryc}(\uparrow J\cap\{\pm1\}^E)=\uparrow J$。

证明。事实上，$\uparrow J$由面 $F(t')$ 的重心 t' 组成，这些面包含在 $H(E)$ 的面 $F(t)$ 中，且$t\in J$。它们恰好是 $H(E)$ 中满足 $F\cap\{\pm1\}^E\subseteq\uparrow J\cap\{\pm1\}^E$ 的面 F 的重心，即 Baryc($\uparrow J\cap\{\pm1\}^E$)。□

Lemma 2. 对于 $\{\pm1\}^E$ 的任意子集 L，$\mathrm{Baryc}(L)$ 是 $\{\pm1,0\}^E$ 的一个上闭子集。

证明。若 $t \in \mathrm{Baryc}(L)$ 且 $t \prec t'$，则 t' 是包含在 $F(t)$ 中的面 $F(t')$ 的重心。由于 $F(t)$ 属于 $|L|$，$F(t')$ 也属于 $|L|$，因此 $t' \in \mathrm{Baryc}(L)$。这表明 $\uparrow \mathrm{Baryc}(L) \subseteq \mathrm{Baryc}(L)$。反向包含关系显然。□

2.4. 子集的交模式与投影 $\mathbb{R}^E$。对于 $\mathbb{R}^E$ 的任意子集 K，我们关联两个符号映射集合 $L(K) \subseteq \{\pm 1\}^E$ 和 $J(K) \subseteq \{\pm 1, 0\}^E$，它们分别编码了 K 与 $\mathbb{R}^E$ 的闭正交象限以及与由超平面排列 $\mathcal{H}$ 诱导的划分 $\mathcal{R}$ 的区域之间的交模式。

定义 5 ($L(K)$ 和 $J(K)$)。给定 $\mathbb{R}^E$ 的任意子集 K，令

$$L(K) := \bigcup_{r \in K} \mathrm{Sign}(r) = \{s \in \{\pm 1\}^E : \exists r \in K \text{ with } r(e) \cdot s(e) > 0 \ \forall e \in \mathrm{supp}(r)\}$$

and

$$J(K) := \bigcup_{r \in K} \mathrm{sign}(r) = \{t \in \{\pm 1, 0\}^E : \exists r \in K \text{ with } \mathrm{sign}_0(r) = t\}.$$

因此，当且仅当 $K \cap O(s) \neq \varnothing$ 时，$s \in \{\pm 1\}^E$ 属于 $L(K)$，即存在某个 $r \in K$，使得对于所有 $e \in E$，$r(e) \cdot s(e) \geq 0$。类似地，当且仅当存在某个 $r \in K$，使得对于所有 $e \in \mathrm{supp}(r)$，$r(e) \cdot t(e) > 0$，并且对于所有 $e \in E - \mathrm{supp}(r)$，$t(e) = 0$ 时，$t \in \{\pm 1, 0\}^E$ 属于 $J(K)$。另请注意，$L(L(K)) = L(K)$，且 $J(J(K)) = J(K)$。

对于 $\{\pm 1, 0\}^E$ 的任意子集 J，可将其与符号映射集合

$$L(J) = \bigcup_{r \in J} \mathrm{Sign}(r) = \uparrow J \cap \{\pm 1\}^E = L(\uparrow J)$$

以及相应的 $L(J)$ 的几何实现 $|L(J)|$ 联系起来。这个几何实现可以与立方复形 $[J]$ 进行比较，后者定义为包含 t 的 $H(E)$ 的最小面 $F(t)$ 的并集，其中 $t \in J$：

$$[J] := \bigcup_{t \in L} F(t) \ \subseteq \ |L(J)|.$$

可以从 $[J]$ 中恢复上闭包 $\uparrow J$，方法如下：

$$\uparrow J = J([J]) = \mathrm{Baryc}([J]).$$

现在，我们引入记号 K^A 和 K_A，表示 $H(E)$ 的子集 K；这与用 L^A 和 L_A 表示 $\{\pm 1\}^E$. 的子集 L 的做法类似。对于 $\mathbb{R}^E$ 的子集 K 和 E 的子集 A，我们用 K_A 表示 K 关于将 K 正交投影到（$E - A$）平面上的投影像：

$$K_A := \{r|_{E-A} : r \in K\} \subseteq H(E - A).$$

对于 $H(E)$ 的子集 K 以及 $A \subseteq E$，集合

$$K^A := \{r|_{E-A} : H(A) \times r|_{E-A} \subseteq K\} \subseteq H(E - A)$$

表示 K 中同时也是 $H(E)$ 的 A-纤维（面）的 A-纤维所在的位置。

2.5. 内禀度量。设 (M, ρ) 是一个度量空间，$I \subset \mathbb{R}$ 是一个非空区间，$\gamma : I \to M$ 是一条曲线（即一个连续映射）。我们将 γ 的长度 $\ell(\gamma) \in [0, \infty]$ 定义为 $\ell(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^{k} \rho(\gamma(t_{i-1}, t_i)$，其中上确界取遍所有 $k \in \mathbb{N}$ 以及 I 中的所有序列 $t_0 \leq t_1 \leq .. t_k$。若 $\ell(\gamma) < \infty$，则称 γ 是可求长的。与 ρ 相关联的内禀度量是函数 $\delta_{M,\rho}$：$M \times M \to [0, \infty]$，定义为 $\delta^{M,d}(x, y) = \inf \ell(\gamma)$，其中下确界取遍所有从 x 到 y 的可求长曲线 γ：$[0, 1] \to M$，即 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$。若 $\delta^{M,d} = \rho$，则称 (M, ρ) 为长度空间（其他相关概念和结果见附录）。

(M, ρ)的一条测地线是连续映射 γ：$[0, \alpha] \to M$的像，其中 $\alpha = \rho(r', r'')$ 满足 $\gamma(0) = r', \gamma(\alpha) = r''$，且对于所有 $s, t \in [0, \alpha]$，$\rho(\gamma(s)\ \gamma(t)) = |s - t|$。度量空间 (M, ρ) 称为测地空间 [7]，如果任意两点 r', r'' 都能在 M 中通过一条测地线连通。本文考虑测地度量空间 $(\mathbb{R}^E, d)$，其中 d 是 ℓ_1-距离。一条 ℓ_1-测地线是 $(\mathbb{R}^E, d)$ 的一条测地线。

度量空间 (M,d) 称为门格尔凸，如果对于任意两个不同的点 $x,y\in M$，都存在某个点 z 位于 x 与 y, 之间，也就是说， z 属于线段

$$[x,y]_M=\{z\in M:\ d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)\}$$

并且满足： z 与 x 及 y不同。Menger [15] 指出，完备度量空间（M， d）中的门格尔凸性意味着（M， d）是测地的（另见 [1] 或 [20, §18.5]）。

3. 弱凸性与符号凸性

本节讨论度量空间中经典凸性的若干弱化形式。我们将 $\mathbb{R}^E$ 的每个子集 K 视为度量空间（K， d），其度量取为 K 上的 ℓ_1度量 d 所诱导的度量（我们也用 d表示诱导度量）。回顾一下，若子集 K 包含任意两点 r'、 $r''\in K$之间的线段，则称其为凸集。类似地，若 $K\subseteq\mathbb{R}^E$包含任意两点 r'、 $r''\in K$之间的所有 ℓ_1测地线，则称其为 ℓ_1凸。由于线段是 ℓ_1测地线，因此每个 ℓ_1凸集都是凸集。对于任意 $e\in E$，由 H_e定义的坐标超平面 H_e、开半空间 H_e^-、 H_e^+以及闭半空间 H_e^-、 H_e^+ 都是 ℓ_1凸的。此外，超立方体 H（E）的面也都是 $\overline{\ell_1}$凸的。众所周知（且易于证明）， $\mathbb{R}^E$ 的 ℓ_1凸子集具有如下意义下的门控性质。若度量空间（$\mathbb{R}^E$， d）的子集 K满足：对每个点 $r\in\mathbb{R}^E$，都存在一个（必然唯一的）点 $r'\in K$，即 r 在 K中的门点，使得

$$d(r,q)=d(r,r')+d(r',q)\text{ for all }q\in K.$$

现在，我们来考虑较弱形式的凸性。

定义 6（弱凸性）。若子集 K of $\mathbb{R}^E$ 是完备且门格尔凸的，即对于任意两个不同的点 r', $r''\in K$，都存在某个点 $r\neq r'$， r''，使得 $d(r',\ r'')=d(r',\ r)+d(r,\ r'')$，则称其为弱凸。

显然， $\mathbb{R}^E$ 的每个凸子集都是弱凸的。下面的引理可视为弱凸性定义的另一种表述，并可由前文提到的门格尔定理 [15]推出：

引理 3. 对于 $\mathbb{R}^E$ 的子集 K，若(K,d) 完备，则以下条件等价：

(i) K 是弱凸的；(ii) (K,d) 是长度空间；(iii) K 在如下意义下是路径-ℓ_1-等距的： ℓ_1 度量 d 在 K 上的限制构成了 K的内禀度量 $\delta^{K,\ d}$。

我们继续讨论弱凸性的两种组合松弛：

定义 7（符号凸性）。若子集 K of $\mathbb{R}^E$ 满足：对于任意两个不同的点 $r',r''\in K$ 以及每个 $e\in E$，若 $r'(e)r''(e)<0$，则存在某个点 $r\in K$ with$r(e)=0$，并且 sign$(r(f))\in\{$sign$(r'(f))$、sign$(r''(f))\}$ 对所有满足 $r'(f)r''(f)\geq 0$ 的 $f\in E$ 均成立（若 $r'(f)r''(f)<0$ 且 $f\neq e$, 则对 sign$(r(f))$ 的符号不作条件限制），则称其为符号凸。

引理 4。 每个弱凸（因而每个凸）子集 K *of* $\mathbb{R}^E$ 都是符号凸的。

证明。任取 r'、 $r''\in K$ 和 $e\in E$，使得 $r'(e)r''(e)<0$。由于 K 弱凸， r' 和 r'' 可由一条 ℓ_1-测地线 $\gamma(r',r'')$ 在 K 中连通。考虑由 e 定义的坐标超平面 H_e。由于 $r'(e)r''(e)<0$， r' 和 r'' 属于由 H_e 定义的两个不同开半空间。因此， $\gamma(r',r'')$ 与 H_e 相交于一点 r。于是 $r(e)=0$，故 sign$(r(e))=0$。现在，考虑任意满足 $r'(f)r''(f)\geq 0$ 的 $f\in E$。这意味着 r' 和 r'' 属于由超平面 H_f 定义的同一个闭半空间；不妨设 r'、 r'' 属于闭负半空间 H_f^-。由于 H_f^- 是 ℓ_1-凸的，测地线 $\gamma(r',r'')$ 以及点 r 也属于 H_f^-。因此，$r(f)\leq 0$，故 sign$(r(f))\in\{-1,0\}$。若点 r'、 r'' 中一个属于 H_f，另一个属于开半空间 H_f^-，则 $\{$sign$(r'(f))$， sign$(r''(f))\}=\{-1,0\}$，从而 sign$(r(f))\in\{$sign$(r'(f))$， sign$(r''(f))\}$。若点 r'、 r'' 都属于 H_f，则 r 也属于

H_f，因为 H_f 是 ℓ_1-凸的，因此我们得到 sign($r(f)$) =sign($r'(f)$) =sign($r''(f)$) = 0。最后，若点 r'、r'' 都属于开半空间 H_f^-，则 r 也属于 H_f^-，因为 H_f^- 是 ℓ_1-凸的，因此我们得到 sign($r(f)$) = sign($r'(f)$) = sign($r''(f)$) = -1。在所有情况下，$r'(f)r''(f) \geq 0$ 都蕴含 sign($r(f)$) $\in$ {sign($r'(f)$), sign($r''(f)$)}，如所需。□

$\mathbb{R}^E$ 的弱凸子集是路径 ℓ_1等距的，因此它们是连通的。另一方面，符号凸集不一定连通，尤其是它们可能是有限集。例如，集合 $\{\pm 1, 0\}^E$ 是符号凸的。下面的结果将 $\mathbb{R}^E$ 子集的符号凸性与 $\{\pm 1, 0\}^E$子集的符号凸性联系起来。

引理 5. *K 是 $\mathbb{R}^E$ 的符号凸子集，当且仅当 $J(K)$ 是 $\{\pm 1, 0\}^E$ 的符号凸子集。因此，$K \subseteq \mathbb{R}^E$ 是符号凸的，当且仅当存在 $S \subseteq \{\pm 1, 0\}^E$ 使得$J(K) = J(S)$。*

证明。任取 r'、$r'' \in K$，并令 t' =sign(r') t'' =sign(r'')。根据定义，对于任意 $f \in E$，不等式 $t'(f)t''(f) \geq 0$ 成立，当且仅当不等式 $r'(f)r''(f) \geq 0$ 成立。首先，设 K 是符号凸的。为证明 $J(K)$ 是符号凸的，任取 t'、$t'' \in J(K)$和 $e \in E$，使得 $t'(e) = -1$ 且 $t''(e) = +1$。令 r'、$r'' \in K$ 满足sign(r') = t' 且 sign(r'') = t''。于是 $r'(e) < 0$ 且 $r''(e) > 0$。由于 K 是符号凸的，必存在某个 $r \in K$，使得$r(e) = 0$且对于任意满足 $r'(f)r''(f) \geq 0$的 $f \in E$，均有sign($r(f)$) $\in$ {sign($r'(f)$), sign($r''(f)$)}。令 t = sign(r)。则 $t(e)$ = sign($r(e)$) = 0。此外，由于 $t'(f)t''(f) \geq 0$ 当且仅当$r'(f)r''(f) \geq 0$成立，因此对于任意满足 $t'(f)t''(f) \geq 0$的 $f \in E$，均有 $t(f)$ =sign($r(f)$) $\in$ {sign($r'(f)$), sign($r''(f)$)} = {$t'(f)$ $t''(f)$}。

反之，设 K 是 $\mathbb{R}^E$ 的一个子集，且 $J(K)$ 是符号凸的。为了证明 K 是符号凸的，令 r'、$r'' \in K$ 和 $e \in E$ 满足 $r'(e)r''(e) < 0$。令 t' = 为 sign(r')，且令 t'' = 为 sign(r'')。于是 $t'(e)t''(e) < 0$。由于 t'、$t'' \in J(K)$ 和 $J(K)$ 是符号凸的，存在 $t \in J(K)$，使得 $t(e) = 0$，且对于所有满足 $t'(f)t''(f) \geq 0$ 的 $f \in E$，都有 $t(f) \in \{t'(f)\ t''(f)\}$。任取满足 sign($r$) = t 的 $r \in K$。则 sign($r(e)$) = $t(e)$ = 0，因此 $r(e) = 0$。此外，由于 $t'(f)t''(f) \geq 0$ 当且仅当 $r'(f)r''(f) \geq 0$，我们得到 sign($r(f)$) = $t(f) \in \{t'(f)\ t''(f)\}$ ={sign($r'(f)$), 对于任意满足 $r'(f)r''(f) \geq 0$ 的 $f \in E$，均有 sign($r''(f)$)}。证明完毕。□

定义 8（0-凸性）。如果对于任意两个点 $r', r'' \in K$ 以及任意满足 $r'(e)r''(e) < 0$ 的 $e \in E$，都存在某个点 $r \in K$ 满足 $r(e) = 0$，且对于所有 $f \in E \setminus \{e\}$，sign($r(f)$) $\in$ {0,sign($r'(f)$), sign($r''(f)$)}，则称 $\mathbb{R}^E$ 的子集 K 为 0-凸 。

注意，$\{\pm 1, 0\}^E$ 的子集的 0-凸性源于以下公理，该公理类似于有向拟阵中有符号回路的“弱消去”公理（参见 [5,定义 3.2.1]）。如果子集 $J \subseteq \{\pm 1, 0\}^E$ 满足以下条件，我们就称其满足有符号回路公理 *(SCA)*：

(SCA) for all $t', t'' \in J$, and $e \in E$ with $t'(e) \cdot t''(e) = -1$ there exists some $t \in J$ such that $t(e) = 0$ and $t(f) \in \{0, t'(f), t''(f)\}$ for all $f \in E$.

因此，J of $\{\pm 1, 0\}^E$ 的子集是 0-凸的，当且仅当它满足 (SCA)。

符号凸性与 0-凸性的区别在于，对于 $f \in E$ with $r'(f)r''(f) = +1$，符号凸性要求 $r(f) = r'(f) = r''(f)$，而 0-凸性允许 $r(f)$ 为 0，或$r'(f) = r''(f)$。若 $r'(f)r''(f) = 0$，且设 $r'(f) = 0$，则两个条件都要求 $r(f) \in \{0, r''(f)\}$。最后，若 $r'(f)r''(f) = +1$，则符号凸性和 0-凸性都不对 $r(f)$ 的符号施加任何约束。因此，以下结论成立（第二个断言由第一个断言和引理 5 得出）：

引理 6. *如果 K $\mathbb{R}^E$ 的符号凸子集 K，那么集合 K 和 $J(K)$ 是 0-凸的。*

任何包含零映射 (0，.....，0) 的 $\{\pm 1, 0\}^E$ 子集 J 都是 0-凸的，但不一定是符号凸的，这表明 0-凸性弱于符号凸性。然而，对于 $\{\pm 1, 0\}^E$ 的上闭子集，符号凸性与 0-凸性等价。此外，它们各自也都等价于一种“门格尔凸性类型”条件，该条件要求定义符号凸性和 0-凸性时所用的符号映射 r 属于盒 $[r', r'']$。

命题 1。 对于 $\{\pm1,0\}^E$ 的上闭子集 J，以下条件等价:

(i) J 是符号凸的; *(i′)* 对于任意满足 $t_1(e)t_2(e) = -1$ 的 t_1、$t_2 \in J$ 和 $e \in E$，存在某个 $t_0 \in [t_1, t_2] \cap J$，使得$t_0(e) = 0$，且 $t_0(f) \in \{t_1(f)\ t_2(f)\}$ 对任意满足 $t_1(f)t_2(f) \geq 0$ 的 $f \in E$ 均成立; *(ii)* J 是 *0*-凸的; *(ii′)* 对于任意满足 $t_1(e)t_2(e) = -1$ 的 t_1、$t_2 \in J$ 和 $e \in E$，存在某个 $t_0 \in [t_1, t_2] \cap J$，使得$t_0(e) = 0$，且 $t_0(f) \in \{0, t_1(f)\ t_2(f)\}$ 对任意满足 $t_1(f)t_2(f) \geq 0$ 的 $f \in E$ 均成立。

每个上闭的符号凸（*0*-凸）子集 J *of* $\{\pm1,0\}^E$ 都会诱导出网格 $G(\{\pm1,0\}^E)$ 的等距子图$G(J)$。

证明。 蕴含关系 (i′)⇒(i) 是显然的，而蕴含关系 (i)⇒(ii) 由引理 6 得出。为证明 (ii)⇒(ii′)，设 J 是 $\{\pm1,0\}^E$ 的一个上闭 0-凸子集。任取 t_1、$t_2 \in J$和 $e \in E$，使得 $t_1(e)t_2(e) = -1$。0-凸性给出某个 $t \in J$，使得对于所有 $f \in E - \{e\}$和 $t(e) = 0.$，都有 $t(f) \in\{0, t'(f)\ t''(f)\}$。于是，由下式定义映射 t_0

$$t_0(f) := \begin{cases} t'(f) & \text{if } t(f) = 0 \text{ and } f \neq e, \\ t(f) & \text{otherwise} \end{cases}$$

支配 t，因此属于 $\uparrow J \cap [t', t''] = J \cap [t', t'']$.

为证明 (ii′)⇒(i′)，设 $t_1,t_2 \in J$和 $e \in E$ 满足 $t_1(e)t_2(e) = -1$。条件 (i′) 可得某个$t \in [t_1, t_2] \cap J$满足 $t(e) = 0$且 $t(f) \in \{0, t_1(f)\ t_2(f)\}$，对任意 $f \in E \setminus \{e\}$均成立。现在，任取满足 $t_1(f)t_2(f) \geq 0$的 $f \in E \setminus \{e\}$。若 $t(f) \notin \{t_1(f)\ t_2(f)\}$，则这意味着 $t(f) = 0$且$t_1(f)\ t_2(f) \in \{\pm1\}^E$。由于 $t_1(f)t_2(f) \geq 0$，我们得出 $t_1(f) = t_2(f)$。又因 $t \in [t_1, t_2]$且 $t(f) = 0$，便得到一个矛盾。

最后，我们证明，对于每个向上闭符号凸子集 $J$of $\{\pm1,0\}^E$, $G(J)$ 都是 $G(\{\pm1,0\}^E)$ 的等距子图。反设存在互不相同的 $t_1,t_2 \in J$，它们在图 $G(\{\pm1,0\}^E)$ 中不相邻，且盒 $[t_1, t_2]$ in$H(E)$ 与 J 的交集仅为 t_1 和 t_2. 。若对某个 $e \in E$ 有 $t_1(e) \cdot t_2(e) = -1$，则由条件 (i′) 可知，存在某个 $t_0 \in [t_1, t_2] \cap J$ 使得 $t_0(e) = 0$。于是 $t_0 \notin \{t_1, t_2\}$，这与初始假设矛盾。因此，对于所有 $f \in E$，都有 $t_1(f) \cdot t_2(f) \geq 0$；也就是说， t_1 和 t_2 的所有坐标都具有可比较的符号。因此， t_1 和 t_2 的并 t 在有序集 $(\{\pm1,0\}^E, \prec)$ 中存在，且对所有 $f \in E.$，由 $t(f) =$min$\{t_1(f)\ t_2(f)\}$ 给出。接着 $t \in [t_1, t_2]\cap \uparrow J = [t_1, t_2] \cap J = \{t_1, t_2\}$，设为 $t_2 \prec t = t_1.$。由于 t_1 和 t_2 在图 $G(\{\pm1,0\}^E)$ 中不相邻，它们至少在两个不同的坐标 e 和 f 上取值不同，因此 $t_2(e) = t_2(f) = 0$，且 $t_1(e)\ t_1(f) \in \{\pm1\}.$。然后，定义映射 $t \in \{\pm1,0\}^E$ 为

$$t(g) := \begin{cases} 0 & \text{if } g = e, \\ t_1(g) & \text{if } g \neq e \end{cases}$$

不同于 t_1和 t_2，但属于 $[t_1, t_2]\cap \uparrow J = [t_1, t_2] \cap J$，从而得出最终矛盾。这证明 $G(J)$ 是 $G(\{\pm1,0\}^E)$ 的等距子图。□

我们以证明以下结论结束本节： $\{\pm1,0\}^E$ 的子集具有 0-凸性，当且仅当它们的上闭包具有 0-凸性:

引理 7. $\{\pm1,0\}^E$ 的子集 J 是 *0*-凸的，当且仅当其上闭包 $\uparrow J$ 是 *0*-凸的。

证明。显然， J和 $\uparrow J$具有相同的极小元集合: Min(J) =Min$(\uparrow J)$。假设 J是 0-凸的，并取 t'_1、$t'_2 \in \uparrow J$，使得 $t_1 \prec t'_1$和 $t_2 \prec t'_2$对某些 t_1、$t_2 \in J.$成立。如果对于某个 $e \in E$， $t'_1(e) \cdot t'_2(e) = -1$ ，那么在 $0 \in \{t_1(e)\ t_2(e)\}$.的情况下，可以选择令 t_0 为 t_1、t_2 之一。否则，可以在 J中选择 t_0，使得 $t_0(e) = 0$且 $t_0(f) \in \{0, t_1(f)\ t_2(f)\}$ 对所有 $f \in E.$成立。反过来，假设 $\uparrow J$ 是 0-凸的。由于相对于 $\prec$、用于证明 $\uparrow J$ 具有 0-凸性的极小选择属于 J，因此 J 也具有 0-凸性。□

引理 7 的类似结论对符号凸性并不成立： $\{\pm1,0\}^E$ 是任何包含 (0,. . . , 0) 的子集 J 的上闭包，但 J不一定是符号凸的。

4. 内在路径度量

本节回顾一些关于内在路径度量和路径长度的基本概念，这些概念与立方体复形的内禀度量有关。

在任意度量空间（M, d）中，可以平凡地定义点 x =之间一条有限 x, y-$pathP$的长度 $\ell(P)$: $t_0, t_1, \ldots,$ $t_k := y$为总和 $\ell(P) := \sum_{i=1}^{k} d(t_{i-1}, t_i)$。这条路径的模长 是所有单步长度 $d(t_{i-1}, t_i)$中的最大值，其中 $i = 1,...,k.$。于是下确界

$$\inf\{\ell(P) : \ P \text{ is a finite } x, y\text{-path in } M \text{ with modulus}(P) < \epsilon\}$$

在 M 中， x 与 y 之间所有有限路径长度的下确界存在，因为根据三角不等式， x 与 y 之间每条有限路径的长度都不小于 $d(x, y)$。于是上确界

$$\delta_{M,d}(x, y) := \sup\{\inf\{\ell(P): \quad P\text{是 } M\text{中的一条有限 } x, y\text{-path，模长为}(P) \ < \epsilon\} : \ \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

将称为度量空间 (M, d) 中 x 与 y 之间的（内在）有限路径距离。当上确界不存在时，它在形式上可以取扩展实数轴上的值 ∞ 。然而，如果所有值都是实数，那么我们就可以称 (M, d) 的（内在）有限路径度量，因为显然 (M, d) 满足三角不等式。

如果在 (M, d) 中存在一条（一般的） x, y-路径，也就是说，存在一个连续映射 $\gamma\colon [0, 1] \to M$，满足 $\gamma(0) = x$ 且 $\gamma(1) = y$，那么其长度为 [19, p.11]

$$L(\gamma) := \sup\Big\{\sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) : 0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_k \le 1 \text{ where } k \ge 1\Big\}$$

是所有包含在 γ 中的有限 x, y-路径 P 的长度 $\ell(P)$ 的上界。如果存在一条 x, y-路径 γ ，满足 $L(\gamma) < \infty$，那么称 x和 y 在 (M, d) 中通过一条可求长路径连通 [19, p.35]。对所有一般的 x, y-路径取下确界，可得

$$\delta^{M,d}(x, y) := \inf\{L(\gamma) : \ \gamma \text{ is an } x, y\text{-path in } M\},$$

称为 M 上的路径（或长度）距离，相对于 d（在本书 [19]中，长度距离记作 d_ℓ）。如果 M 中的每对点都由一条可求长路径连接，那么根据 [19, 命题2.1.5] $\delta^{M,\ d}$ 是 M上的一个度量，称为与 $d.$ 相关联的 M的（内在）路径度量。因此我们有以下不等式

$$d(x, y) \le \delta_{M,d}(x, y) \le \delta^{M,d}(x, y),$$

其中任一 δ 值都可能等于 ∞。在极端情况下，$\delta_{M、\ d}$ 可以是一个度量，而 $\delta^{M、\ d}$ 则是在不同点对上取常数 ∞ 的映射。例如，考虑带有自然度量 d的有理数单位区间 $M = \mathbb{Q}[0, 1]$ ：由于任意模长的路径都存在，内在路径度量与自然度量一致，但不同点之间不存在测地线，因此内在长度距离为无穷大。因此，使用$\delta_{M、\ d}$ 而非 $\delta^{M、\ d}$ 的优点在于，我们无需假设可求长路径存在。在重要的情形下，若(M, d)是一个长度（或路径度量）空间 [19, p.35], ，也就是说， d 与 $\delta^{M、\ d}$一致，那么两种内在度量的概念都可等同于原度量 $d.$ 。性质$\delta_{M、\ d} = d$ 也适用于(M, d)的稠密子空间。在任意长度空间(M, d)中，长度为 $d(x, y)$的一般x、 y-路径，也就是 x、 y-测地线，未必存在。然而，如果任意一对点之间都存在这样的路径，那么该空间称为测地空间。若测地空间(M, d)中的每条测地线都是其端点之间唯一的路径，则称该空间为实树。注意，紧实树(M, d)可能有无穷多个分支点，即满足 $M - \{p\}$ 至少有三个连通分支的点 p。

每个有限图 $G = (V, \ E)$ 都有一个平凡的几何实现，即一个一维胞腔复形：将每条边 $\{x, y\}$ 替换为一条实心连线，也就是实数轴上单位区间 $[0, 1]$ 的一个副本 $[u_x, u_y]$ ，使得两个副本恰好在对应边关联时于一个端点相交。由此得到的几何图（又称网络） M 继承了其度量 δ ，该度量来自 G 的标准图度量 d 以及 $[0, 1].$ 的通常距离。通俗地说，几何图 M中，来自一条连线的点 p与来自另一条连线的点 q之间的距离 $\delta(p, \ q)$，是以下四个和中最小的一个： $|p - u_v| + d(v, \ x) + |q - u_x|$， $|p -$

$u_v| + d(v,\ y) + |q - u_y|$，$|p - u_w| + d(w,\ x) + |q - u_x|$，以及 $|p - u_w| + d(w,\ y) + |q - u_y|$. 更正式地说，可以采用例 2.1.3(iv)| 或第 I.1 节9|所述的长度度量一般构造方法。这样便可得到一个测地空间（$M,\ \delta$）。类似地，也可以用临时的方法处理任意有限立方复形的几何实现；不过，对于偏斜集，我们可以用一种规范的方式，使其相关几何实现具有长度空间性质；见下文。

完备性是门格尔证明完备的门格尔凸空间是测地空间时不可或缺的前提。事实上，康托尔集与无理数（开）单位区间的交集 $(M,\ d)$ 是门格尔凸的，但 $\delta_{M,\ d}(x,\ y) = \infty$ 对任意一对不同的点 x, y 都成立。若不具备门格尔凸性这一条件，要求 $\delta_{M,\ d} < \infty$ 再加上某种局部紧致性条件，至少可以保证 $(M,\ \delta_{M,\ d})$ 是测地空间。若每个闭有界子集都是紧致的，我们就称该度量空间为有界紧致的 。请注意，在黎曼几何和长度空间的语境中，人们通常称这类空间为“正常空间”。

引理8。 若有界紧致度量空间(M, d) 具有有限路径度量 $\delta_{M,\ d} < \infty$，则$(M,\delta_{M,\ d})$ 是测地空间，因此 $\delta_{M,\ d} = \delta^{M,\ d}$ 成立。

证明。对于任意不同的点 x, y，我们可以用模长为 $1/n$ $(n \to \infty)$ 的有限 x, y-路径来逼近 $\alpha := \delta_{M,d}(x, y)$。具体而言，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一条有限的 x, y-路径 P_n，其长度小于 $\alpha(1 + 1/(2n))$，且模长小于 $\alpha/(2n)$。在每条路径 P_n 上，选取首个满足以下条件的点 y_n：从起点到该点的初始 x, y_n-子路径 P'_n 的长度超过 $\alpha/2$。因此，P_n 的末尾 y_n, y-子路径长度小于 $\alpha(1 + 1/(2n))$。由于序列 (y_n) 包含在以 x为中心的闭 2α-球中，它含有一个子序列 (z_n)，该子序列收敛到某个点 z，使得，例如，$d(z_n, z) < \alpha/(2n)$。将这个极限点 z 插入每条 P_n 中，紧接在 y_n 之后，就得到一条路径，它由初始 x, z-子路径和末尾 z, y-子路径组成；两者的模长都小于$\alpha/(2n)$，且长度介于 $\alpha/2 - 1/(2n)$ 和 $\alpha/2 + 1/n.$ 之间。因此

$$\delta_{M,d}(x, z) + \delta_{M,d}(z, y) \leq \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha = \delta_{M,d}(x, y),$$

因此，凭借三角不等式，z 相对于有限路径度量 $\delta_{M,\ d}$是 x与y 之间线段的中点。现在，我们可以通过先对点对 x，z和 z，y，等应用该步骤，反复进行这一中点构造。最终，我们将得到线段 $[x, y]$ 的一个稠密子集 Z（相对于度量 $\delta_{M,\ d}$），并存在一个等距映射 ζ，将 $(Z,\ \delta_{M,\ d}|_{Z\times Z})$ 映到赋有自然度量的二进分数 1 的 α 倍数集合上。

单位区间中的每个非二进数 τ，都是某个由 1 的二进分数组成的序列 (τ_n) 的极限；对于该序列，所有 α 倍数在 Z 中都有一个关于 ζ 的原像 u_n。于是，序列 (u_n) 相对于 $\delta_{M,d}$ 是柯西序列，因而相对于 d 也是柯西序列；由 (M, d) 的完备性，它收敛到某个点 u。对于 Z 中任意两点 v 和 w，若 $\zeta(v) < \alpha\tau$ 且 $\zeta(w) > \alpha\tau$，则几乎所有 u_n 相对于 $\delta_{M,d}$ 都位于 v 和 w 之间。因此，可以用模数趋于 0、总长度趋于 $\delta_{M,d}(v, w)$ $(n \to \infty)$ 的有限 v, u_n-路径和 u_n, w-路径拼接而成的路径对，来逼近 $\delta_{M,d}(v, w)$。在所有路径中用 u 替换 u_n，即可得到一列拼接路径，它同时逼近 $\delta_{M,d}(v, u)+ \delta_{M,d}(u, w)$ 和 $\delta_{M,d}(v, w)$。这表明，相对于 $\delta_{M,d}$，u 位于 v 和 w 之间。总而言之，我们由此建立了一个等距映射，它将 $(M,\delta_{M,d})$ 中 Z 的闭包 $\overline{Z}$ 映到区间 $[0, \alpha]$；其中 Z 是 $(M,\delta_{M,d})$ 中的一条 $\overline{x, y}$-测地线. □

设 X 和 Y 分别是从某些互不相交的非空集合 A和 B到集合 Λ的两组映射。于是，我们用 $X \times Y$表示所有映射 $r\colon A \cup B \to \Lambda$ 的集合，其中 $r|_A$ 属于 X 且 $r|_B$ 属于 $Y.$。对于单元素集合 X 或 Y，省略集合括号。给定有限集E 以及其非空子集 A，对于任意 $r_0 \in \Lambda^{E-A}$，集合 $\Lambda^A \times r_0$ 称为笛卡尔幂 Λ^E的一个纤维，即 Λ^E 在 $q_0 \times r_0$ 处的 A-纤维，其中 $q_0 \in \Lambda^A.$ 任意。若 Λ 赋有一个（自然的）度量，则将乘积空间Λ^E上的乘积度量 d^E 记为 d，其中 E 为有限集。当 Λ 连通时，Λ^E 的子空间 K 称为纤维连通的，如果 K 与每个 Λ^E 的纤维的交集都是连通的（或为空集）。类似地，当 Λ 是测地空间时，若 K 与 Λ^E 的每个纤维的交集都是测地子空间（或为空集），则称 $K \subseteq \Lambda^E$ 为纤维测地的。Λ^E 的 E-纤维指整个空间 Λ^E。

命题2。设 Λ 是一个有界紧致测地空间。对于 Λ 的某个有限次幂 Λ^E 的闭子集 K （赋有乘积度量 $d = d^E$），以下陈述等价：

(i) K 的内在有限路径度量 $\delta_{K,\,d}$ 与 Λ^E的乘积距离 $d = d^E$ 在 $d|_K$ 上的限制相同；
(ii) K 是 Λ^E的测地子空间；(iii) K 是纤维测地的。

证明。显然，(ii)⇒(i)&(iii) 以及 (iii)⇒(ii) 均成立。由于 Λ有界紧致且 E 有限，Λ^E也有界紧致。由于K是 Λ^E的闭子集，这一性质也适用于 $(K,\ d|_K)$。若 (i) 成立，则根据引理8，$(K,\ \delta_{K,\,d|_K})$ 是一个测地空间，因为 $\delta_{K,\,d|_K} = d|_K < \infty$。因此，$K$ 是 Λ^E的测地子空间，从而证明了蕴含关系 (i)⇒(ii)。□

例如，命题2可应用于欧几里得空间$\mathbb{R}^E$ 的闭子集 K：因此，当且仅当 K 对取线段封闭，也就是说，当 K 是凸集时，欧几里得度量在 K 上的限制才构成相对于欧几里得度量的 K 的内禀（有限）路径度量。在 ℓ_1 的情形下，命题2的条件（iii）还可根据空间 Λ进一步弱化。具体而言，若要用纤维连通性替代纤维测地性，各因子必须是实树。

命题3。设 Λ 是一个有界紧致实树（配备自然度量），其中每条线段都只包含有限个分支点。那么，Λ 的某个有限次幂 Λ^E 的闭子集 K 是 Λ^E 的测地子空间，当且仅当 K 是纤维连通的。

证明。根据命题2，Λ^E 的任何闭测地子空间都是纤维测地的，因此也是纤维连通的。反过来，假设 K 是 Λ^E的纤维连通闭子空间。由于（$\Lambda^E,\ d$）是完备的且 K是闭的，（$K,\ d|_K$）也是一个完备度量空间。因此，要证明 K是 Λ^E的测地子空间，只需证明 K 相对于 d是门格尔凸的。我们对#E. 进行归纳。由于 K 的任何真纤维 K_0 都是 $\Lambda^A \times r_0$ 的闭纤维连通子集，其中 A 是 E 的真子集，且映射为 $r_0 \in \Lambda^{E-A}$，根据归纳假设，我们可以假定 K_0 是 $\Lambda^A \times \{r_0\}$ 和 Λ^E的测地子空间。反设 K 不是门格尔凸的。根据归纳假设，我们可以假定存在 $r_1,\ r_2 \in K$，使得

$$[r_1, r_2]_K = K \cap [r_1, r_2]_{\Lambda^E} = \{r_1, r_2\}$$

使得对所有 $x \in E$.，$r_1(x) \neq r_2(x)$ 成立

对于任意 $x \in E$，令 Λ^x为积 Λ^E的第 x 个因子（一个 Λ 的副本）。那么，$\Lambda^{E-\{x\}} \times r_1(x)$ 是 Λ^E 的（$E - \{x\}$）-纤维，其中包含 K 中的点 r_1。用 $\Lambda^x_+ = \Lambda^x_+(r_1,\ r_2)$ 表示实树 Λ^x 中所有满足 $r_1(x)$ 不位于 λ 与 $r_2(x)$ 之间的点 λ 的集合，也就是说，

$$\Lambda^x_+ := \{\lambda \in \Lambda^x :\ [\lambda, r_1(x)]_{\Lambda^E} \cap [r_1(x), r_2(x)]_{\Lambda^E} \neq \{r_1(x)\}\}.$$

那么，Λ^x_+ 是实树 Λ^x 的一个开子集，其闭包 $\Lambda^x_+ = \Lambda^x_+ \cup \{\overline{r_1(x)}\}$ 是 Λ^x 的一个有界紧致子树。显然，$\Lambda^E_+ := \prod_{x\in E} \Lambda^x_+$ 的闭包等于

$$\overline{\Lambda^E_+} = \prod_{x\in E} (\Lambda^x_+ \cup \{r_1(x)\}).$$

（注意，在 $\Lambda = \mathbb{R}$，$\overline{r_1} = \mathbf{0}$ 和 $r_2 > \mathbf{0}$的情况下，Λ^E_+ 和 Λ^E_+ 分别等于 $\mathbb{R}^E$ 的开第一正交象限和闭第一正交象限。）我们断言，

$$K \cap \overline{\Lambda^E_+} = (K \cap \Lambda^E_+) \cup \{r_1(x)\}.$$

反设，也就是说，假设存在一点

$$r \in (K - \{r_1\}) \cap \prod_{y\in E} (\Lambda^y_+ \cup \{r_1(y)\} \text{ with } r(x) = r_1(x)$$

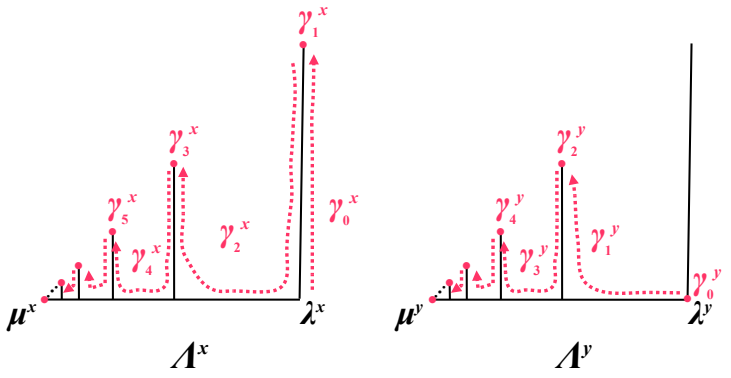


图2。从测地线 γ 在 $\Lambda^x \times \Lambda^y$ 到各因子的投影

对某个 $x \in E$ 成立。那么 r 和 r_1 都属于纤维 $\Lambda^{E-\{x\}} \times r_1(x)$，因此根据归纳假设，它们由一条测地线 γ 在 K 中连接。另一方面，由于 Λ 是一棵实树，存在一点 s，它属于 Λ^E（r_1，r，s 的中位点），使得

$$[r_1, s]_{\Lambda^E} = [r_1, r_2]_{\Lambda^E} \cap [r_1, r]_{\Lambda^E}.$$

补集 $A = \{y \in E : \ r_1(y) \neq r(y)\}$ 不包含等化子 r_1 和 r 的元素 x。于是，γ 与 r_1 和 r 之间的测地线包含在 A-纤维 r_1 处（以及 r处）。根据初始假设，$r(y) \in \Lambda^y_+$，因此对于每个 $y \in A$，都有 $r_1(y) \neq s(y)$。令 ϵ 为 $r_1(y)$ 和 $s(y)$ 到 $y \in A$ 在实树 Λ的各个副本中的距离的最小值。于是，γ 与以 r_1 为中心、半径为 ϵ 的闭球的交集包含在盒中

$$[r_1|_A, s|_A]_{\Lambda^A} \times r_1|_{E-A} \subseteq [r_1, r_2]_{\Lambda^E},$$

由此

$$\{r_1\} \subsetneq \gamma \cap [r_1, r_2]_{\Lambda^E} \subseteq [r_1, r_2]_K,$$

这与 $[r_1, r_2]_K = \{r_1, r_2\}.$ 的假设相矛盾

交集 $K_+ := K \cap \Lambda^E_+$ 是 Λ^E 的（拓扑）子空间 K 中的一个开集，它包含 r_2，但不包含 r_1。我们希望证明 K_+ 也是闭集。根据刚才证明的结果，

$$\overline{K_+} \subseteq K_+ \cup \{r_1\} \subseteq K.$$

因此，假设 $r_1 \in K_+.$ 。那么存在一个 K_+ 中的序列 (s_n) 收敛到 $r_1.$ 。中位点序列 t_n t_n r_1，r_2，以及 s_n $(n \in \mathbb{N})$ 也收敛到 $r_1.$ 。由于 (s_n) 完全包含于 Λ^E_+，，所以 (t_n) 也如此。由 $[r_1, r_2]_K = \{r_1, r_2\}$ 可知，对于每个坐标 x 和指标 n，要么 $t_n(x) = r_2(x)$，要么 $t_n(x)$ 是 Λ^x 的一个分支点。然而，这与 Λ 的初始要求相矛盾：Λ 的所有线段都只包含有限多个分支点。由此得出 $K_+ = K_+$，如所断言。因此，K_+ 在 K 中既是开集又是闭集，这最终与 K 的连通性矛盾，证明完毕。□

一个标准例子表明，命题3中关于线段上分支点有限性的条件不可省略。考虑图2所示的紧树 Λ 的两个副本 Λ^x 和 Λ^y。它连接一个直角三角形的三个顶点，该三角形的两条直角边长均为 1；其叶节点序列位于斜边上，并收敛于斜边与一条直角边的交点 μ。Λ 的分支点位于这条直角边上，也收敛于 μ。Λ 的总长度等于 3。可通过交替取用 x-纤维 γ_0、γ_2、.....以及y-纤维 γ_1、γ_3、.....，构造 $\Lambda^x \times \Lambda^y$ 中两点（λ^x，λ^y）和（μ^x，μ^y）之间的路径 $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \{$（$\mu^x$，$\mu^y$）$\}$，其极限点为（$\mu^x$，$\mu^y$）；图1展示了 γ 在 Λ^x和 Λ^y. 上的两个投影。于是，γ 与连接（λ^x，λ^y）和（μ^x，μ^y）的线段仅交于其两个端点。因此，$\Lambda^x \times \Lambda^y$ 的闭子集 γ 是纤维连通的，但不是门格尔凸的，因而并非测地子空间。

5. 立方体复形的弱凸性与符号凸性

本节将通过立方体复形刻画充足集。我们证明，它们恰好是 $\{\pm 1\}^E$ 的那些子集，其立方体复形是弱凸或符号凸的。我们还将刻画 $\{\pm 1, 0\}^E$ 的那些子集，其上闭包是充足集的重心完备化，

也就是说，我们证明，它们恰好是 $\{\pm 1, 0\}^E$ 的 0-凸子集。我们还将给出立方体复形以及充足集的重心完备化的其他度量刻画。

对于 $L$of $\{\pm 1\}^E$ 的连通子集，其在超立方体 $H(E)$（赋予 ℓ_1-度量 d）中的几何实现 $|L|$ 具有内在路径度量 $d_{|L|} = \delta^{|L|,\ d}$。事实上， $|L|$ 中任意一对点都能通过一条相对于 d 的可求长路径在 $|L|$ 中连接起来，因此根据引理8， $d_{|L|}$ 存在。尽管 $(|L|,\ d_{|L|})$ 本身是一个测地空间，但它不一定是 $(\mathbb{R}^E,\ d)$ 的度量子空间，即使 L 是等距的。本节证明的第一个定理表明，形如 $K = |L|$ 的集合是 $(\mathbb{R}^E,\ d)$ 的度量子空间（即它是弱凸的），当且仅当 L 是充足的。

定理1。 对于 $\{\pm 1\}^E$的子集 L，以下陈述等价：

(i) L 是充足的；(ii) $|L|$是弱凸的；(iii) $|L|$ 是符号凸的；(iv) $\mathrm{Baryc}(L)$ 是符号凸的；(v) L 是等距的，并且 $|L|$ 的每个面在$(|L|, d_{|L|})$中都是门控的；(vi) 内禀度量 $d_{|L|}$ 与 ℓ_1-度量 d 在$\mathrm{Baryc}(L)$ 上的限制一致；(vii) $|L|$ 中任意两个平行面的重心 t_1 和 t_2 ，在内禀度量和 ℓ_1-度量下的距离相同：

$$d_{|L|}(t_1, t_2) = d(t_1, t_2).$$

证明。 为证明从(i)到(vii)这些条件的等价性，我们建立三条蕴含链：(i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (vi) ⇒ (vii)，(ii) ⇒(v) ⇒ (vii)，以及(vii) ⇒(i)。

根据命题 2 和 3，要证明 (i)⇒(ii)，只需证明 $|L|$是纤维连通的。 $|L|$ 的一个纤维 F 是 $|L|$ 与某个 A-平面的交集，例如，

$$F = |L| \cap (\mathbb{R}^A \times r|_{E-A}) \text{ for some } r \in |L| \text{ and } A \subseteq E.$$

注意，包含 $r|_{E-A}$ 的 $|L|_A$ 的最小面具有如下形式

$$F(r|_{E-A}) = H(B) \times r|_{E-A-B}, \text{ where}$$

$$B = E(r) - A = \{e \in E - A :\ -1 < r(e) < +1\}.$$

因此，包含 F 中任意一点的 $|L|$ 的最小面，都以超立方体 $H(B)$ 为因子：

$$H(B) \times F_B \subseteq |L|.$$

这也可以表述为： $F_B = \{q|_{E-B} :\ q \in F\}$ 是包含$r|_{E-B}$. 的 $|L^B|$ 的 A-纤维。由于 F_B 中各点坐标严格介于 -1 和 $+1$ 之间的位置都属于 A，我们推知， F_B 等于 L^B 在$r|_{E-B}$.处的 A-纤维的几何实现。由于 L^B 及其纤维都是充足的，因而根据 [3,定理 3]，，它们也是连通的。由此可得 F_B 是连通的， F也因此连通。这就证明了 (i)⇒(ii)。

蕴含关系 (ii)⇒(iii)⇒(iv) 由引理4和引理5得出。接下来我们证明 (iv)⇒(vi) 成立。任取 $t_1, t_2 \in \mathrm{Baryc}(L)$。我们通过对 $d(t_1, t_2)$ 进行归纳法，证明等式 $d_{|L|}(t_1, t_2) = d(t_1, t_2)$。首先，假设存在 $e \in E$，使得 $t_1(e)t_2(e) = -1$。根据引理2，$\mathrm{Baryc}(L)$ 是上闭的。因此，根据命题 1，存在某个 $t_0 \in [t_1, t_2] \cap \mathrm{Baryc}(L)$，满足 $t_0(e) = 0$，并且对于任意满足 $t_1(f)t_2(f) \geq 0$ 的 $f \in E$，有 $t_0(f) \in \{t_1(f)\ t_2(f)\}$。由于 $t_0(e) = 0$， t_0 不同于 t_1 和 t_2。由于 $t_0 \in [t_1, t_2]$，我们有 $d(t_1, t_0) < d(t_1, t_2)$，以及 $d(t_0, t_2) < d(t_1, t_2)$。根据归纳假设， $d_{|L|}(t_1, t_0) = d(t_1, t_0)$，并且 $d_{|L|}(t_0, t_2) = d(t_0, t_2)$。因此， $|L|$ 包含一条长度为 $d(t_1, t_0)$、连接 t_1 和 t_0 的路径，以及一条长度为 $d(t_0, t_2)$、连接 t_0 和 t_2 的路径。这些路径的并是一条长度为 $d(t_1, t_2) = d(t_1, t_0) + d(t_0, t_2)$、位于 t_1 和 t_2 之间的路径，这表明 $d_{|L|}(t_1, t_2) = d(t_1, t_2)$。这就完成了蕴含关系 (iv)⇒(vi) 的证明。蕴含关系 (vi)⇒(vii) 是显然的。

我们继续讨论推论 (ii) ⇒ (v) ⇒ (vii)。为证明 (ii)⇒(v)，对于面 F of$|L|$ 和点 $r \in |L|$，取超立方体$H(E)$的 ℓ_1-度量 d 下， r 相对于 F 的门点 r'。由于 $r' \in F \subseteq |L|$ 和 $|L|$ 是路径-ℓ_1-等距的，我们有 $d_{|L|}(r,\ r') = d(r,\ r')$，因此 r'也可作为立方体复形 $|L|$.中的对应门点

接下来我们证明 (v)⇒(vii) 成立。若 t_1 和 t_2 是两个平行面的重心，那么这些面分别为 $F(t_1)$ 和 $F(t_2)$，且维数为 k，不妨如此设定。于是它们位于某个子集 $A \subseteq E$ 对应的平行 A-平面上，且 $\#A = k$. 令 q 为 $F(t_1)$ 的任意顶点（必然属于L），并令 r 为 $F(t_2)$ 中对应的顶点（且属于 L），从而满足 $q|_A = r|_A$. 。由于 L 是等距的，且 t_1 是 $F(t_1)$ 的重心，我们有

$$\begin{aligned} d_{|L|}(t_1, r) &\leq d_{|L|}(t_1, q) + d_{|L|}(q, r) \\ &= d(t_1, q) + d(q, r) = d(t_1, r), \end{aligned}$$

由此等式成立。因此， t_1 在 $F(t_2)$中的门点到 $F(t_2)$的所有顶点的距离均为 $k/2$ 。具有此性质的 $F(t_2)$中的唯一点是重心 t_2。因此，相对于内禀度量 $d_{|L|}$， t_2 是 t_1 在 $F(t_2)$中的门点。特别地，$d_{|L|}(t_1,\ t_2) = d(q,\ r) = d(t_1,\ t_2)$，如所需。这就证明了 (v)⇒(vii)。

最后，我们证明蕴含关系 (vii)⇒(i)。用测地线 γ连接两个平行的 A-面 $F(t_1)$和 $F(t_2)$的重心 t_1 和 t_2 ，其中 $|L|$. 。那么， γ中的每个点 r在 $H(A)$上的投影都与 t_1 和 t_2相同。因此， $F(r)$以一个 A-立方体为因子，于是测地线 γ 投影到 $|L|^A$ 的一条测地线 γ^A 上，该测地线连接 L^A的顶点 $t_1|_{E-A}$ 和 $t_2|_{E-A}$。为证明 $t_1|_{E-A}$ 和 $t_2|_{E-A}$ 在 L^A中的距离为 $d(t_1,t_2)$，我们对 $t_1|_{E-A}$ 和 $t_2|_{E-A}$. 之间的 ℓ_1-距离使用归纳法。设 r 为 γ 中距 t_1为2的点。那么，$F(r)$是 L 中的某个$(A \cup B)$-立方体，且具有 $\varnothing \neq B \subseteq E - A$；它必然将 $F(t_1)$包含为一个面。于是， $F(r|_{E-A})$中的每个点都属于 $|L|^A$. 。特别地， $r|_{E-A}$的邻点 s' 满足 $r|_{E-A-\{e\}} = s'|_{E-A-\{e\}}$ ，并且 $s'(e) = -r(e)$对某个 $e \in B$ 成立；该邻点也属于 $|L|^A$ ，且位于 $t_1|_{E-A}$ 和 $t_2|_{E-A}$. 之间。根据归纳假设， s' 和 $t_2|_{E-A}$ 之间的距离为$d(s',\ t_2|_{E-A}) = d(u, v) - 2.$。因此， L^A 是等距的，从而 L 是充足的。□

本节的第二个定理刻画了 J 的哪些 $\{\pm 1, 0\}^E$ 子集的上闭包 $\uparrow J$ 限制在 $\{\pm 1\}^E$ 上时是充足的。我们证明，这些子集恰好是 $\{\pm 1, 0\}^E$ 的 0-凸子集（即满足 (SCA) 的子集）。

定理 2. 对于 $\{\pm 1, 0\}^E$ 的一个子集 J 以及 $L := \uparrow J \cap \{\pm 1\}^E$，以下陈述等价：

(i) $[J]$ 是弱凸的；(ii) $\uparrow J$ 是符号凸的；(iii) $\uparrow J$ 是 0-凸的；(iv) J 是 0-凸的；(v) $\uparrow J$ 是网格图 $G(\{\pm 1, 0\}^E)$ 的等距子集；(vi) L 是充足的，且 $[J] = |L|$ 和 $\uparrow J = \mathrm{Baryc}(L)$。

证明。 如果 $[J]$ 是弱凸的，那么由引理 4 可知 $[J]$ 是符号凸的。由引理 5，集合 $J([J]) = \uparrow J$ 是符号凸的。这就证明了 (i)⇒(ii)。(ii)⟺(iii) 的等价性由命题 1 的第一项断言得出，而 (iii) ⟺(iv) 的等价性由引理 7 得出。(ii)⇒(v) 的蕴含关系由命题 1 的第二项断言得出。

为证明 (v)⇒(vi)，我们首先断言：包含某个顶点 $s \in \{\pm 1\}^E$ 处的 A-纤维的网格图$G(\{\pm 1, 0\}^E)$ 中最小的等距子集 U，是 s 处的 A- 纤维 $\{\pm 1, 0\}^E$。事实上，由于 $\{\pm 1\}^A \times s|_{E-A} \subseteq U$，且在每个坐标上都需要 0 才能将$-1$ 连接到 $+1$，我们可以对 $\#A$ 使用归纳法，假设对某个 $e \in A$,

$$\{\pm 1, 0\}^{A-\{e\}} \times \{\pm 1\}^e \times s|_{E-A} \subseteq U,$$

由此， $\{\pm 1, 0\}^{A-\{e\}} \times \{0\}^e \times s|_{E-A}$构成网格图中各对 $t_1,\ t_2$ 的唯一公共邻点集合，其中 $t_1|_{A-\{e\}} = t_2|_{A-\{e\}},\ \{t_1(e)\ t_2(e)\} = \{\pm 1\}$，且 $t_1|_{E-A} = s|_{E-A} = t_2|_{E-A}$. 因此 $\{\pm 1, 0\}^A \times s|_{E-A} \subseteq U$, 如所断言。

由于 $\uparrow J$在 $G(\{\pm 1, 0\}^E)$ 中是等距的，我们可以应用前面的观察，推断对于 $L = \uparrow J \cap \{\pm 1\}^E$，上闭包 $\uparrow J$ 包含 Baryc(L)。由于反向包含显然成立（因为 $\uparrow J$ 是上闭集），因此我们已证明 $\uparrow J = $Baryc($L$)，由此可得

$$[J] = [\uparrow J] = [\mathrm{Baryc}(L)] = |L|,$$

如所需。$\uparrow J$ 的等距性还意味着，对于每个 $A \subseteq E.$，L^A 也是等距的。事实上，对于每一对 s_1、$s_2 \in L^A$，与 $\{\pm 1\}^A \times s_i (i = 1, 2)$ 对应的重心映射 t_i，根据刚才的观察，都属于 $\uparrow J$。于是，任何在 $\uparrow J$ 中连接 t_1 和 t_2 的等距路径，都会投影为 $G(\{\pm 1, 0\}^{E-A})$ 中连接 s_1 和 s_2 的等距路径，因为对于 $i = 1, 2$，$t_1|_A = t_2|_A$ 在 A 上是零映射，而且 $t_i|_{E-A} = s_i$。为了证明 s_1 和 s_2 实际上由 $G(\{\pm 1\}^{E-A})$ 中的一条最短路径连接（该空间以尺度 2 嵌入 $G(\{\pm 1, 0\}^{E-A})$），我们对 s_1 与 s_2之间的 ℓ_1-距离作简单归纳。设投影路径上 s_1 的邻点 w 在坐标 $e \in E - A.$ 处等于 0。那么，满足 $s_1'|_{E-A-\{e\}} = s_1|_{E-A-\{e\}} = w|_{E-A-\{e\}}$且 $s_1'(e) = -s_1(e) = s_2(e)$ 的符号映射 s_1' 属于 L^A，因为 $w \prec s_1'.$。由于在 $G(\{\pm 1\}^{E-A})$ 中，s_1' 是介于s_1 和 s_2 之间的 s_1 的邻点，我们得出 L^A 是等距的。由此最终可知 L是充足的，从而完成了 (v)⇒(vi) 的证明。

最后，若 (vi) 成立，则根据定理1，充分集 $L = \uparrow J \cap \{\pm 1\}^E$ 的几何实现 $|L|$ 是 $H(E)$ 的弱凸子集，并且根据 (vi)，它与 $[J]$ 重合。这就证明了 (i)，证明完毕。□

注 1. 定理 2 的条件 (ii) –(vi) 完全是组合性的，它们的等价性无需借助整个几何实现的度量/拓扑特征即可证明。事实上，我们的组合证明得出了 (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv) 以及 (ii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi)。剩下的蕴含关系 (vi) $\Rightarrow$(iii) 可以直接证明，无需绕道立方体复形：假设 $J \subseteq \{\pm 1, 0\}^E$ 满足 (vi)，则符号映射的“顶端”集 $L := \uparrow J \cap \{\pm 1\}^E$ 是充足的，而 (vi) 的第二部分保证立方体复形 $|L|$ 的所有重心映射都属于$\uparrow J$。设 t_1 和 t_2 是 $\uparrow J$ 中的两个元素，满足 $t_1(e) = -1$ 且 $t_2(e) = +1$，其中某个 $e \in E$。t_i 的零坐标确定了集合 $A_i \subsetneqq E$，因此对于 $i = 1, 2$，t_i 编码了 $H^{(1)}(E)$ 的某个 A_i-立方体。A_1-立方体和 A_2-立方体在 $H^{(1)}(E)$ 内有互为最近的顶点（门点） s_1 和 s_2。于是 $t_1 \prec s_1$ 和 $t_2 \prec s_2.$。根据 e 的选取以及 s_1 和 s_2 的门点性质，我们有

$$e \in \Delta(s_1, s_2) = \{f \in E : s_1(f) \neq s_2(f)\} \subseteq E - (A_1 \cup A_2).$$

由于 L 是充足的，$L^{A_1 \cap A_2}$ 是等距的，因此在 L中存在一条连接 s_1和 s_2的最短路径 P，它在 $L^{A_1 \cap A_2}$.中投影为连接 $s_1|_{A_1 \cap A_2}$ 和 $s_2|_{A_1 \cap A_2}$ 的最短路径。必然地，P经过两个相邻顶点 s_1' 和 s_2'，满足 $s_1'(e) = -1$ 以及 $s_2'(e) = +1.$。因此，在 s_1' 和 s_2'处分别存在 $A_1 \cap A_2$-立方体，它们是一个包含 s_1'和 s_2'的$(A_1 \cap A_2) \cup \{e\}$-立方体的纤维。令 t_0 表示这个后者立方体的重心映射。于是

$$t_0(f) := \begin{cases} 0 & \text{if } f \in (A_1 \cap A_2) \cup \{e\}, \\ s_2(f) = t_2(f) & \text{if } f \in \Delta(s_1, s_1'), \\ s_1(f) = t_1(f) & \text{if } f \in \Delta(s_1', s_2), \\ s_1(f) = s_2(f) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，对于 $g \in A_i - A_j$，有 $s_i(g) = t_0(g) = t_j(g)$，其中 $\{i, j\} = \{1, 2\}.$。因此，t_0满足(SC A)定义中的要求，从而确立了(vi)⇒(iii)。

6. 投影与维数

现在我们将证明，对于 $\{\pm 1\}^E$ 的子集 L，当且仅当 L 充足时，（正交）投影算子与几何实现可交换。为此，我们将使用 [3] 中发展起来的、涉及形如 $(L^B)_A$ 的集合的演算。首先注意到，根据定义，我们有

$$|L| = \bigcup_{B \subseteq E} \bigcup_{s \in L^B} H(B) \times s. \tag{1}$$

因此，立方体复形 $|L|$的拓扑维数可表示为

$$\dim |L| = \max\{\#B : L^B \neq \varnothing\} = \max\{\#B : B \in \underline{X}(L)\},$$

使用 [3]的术语；另请参见引言。将上述方程应用于 L_A而非 L，可得

$$|L_A| = \bigcup_{B\subseteq E-A} \bigcup_{t\in(L_A)^B} H(B)\times t. \tag{2}$$

对于从 $H(E)$ 到 $H(E-A)$ 的投影，将其应用于 $K=|L|$，我们计算得

$$\begin{aligned}
|L|_A &= \left(\bigcup_{B\subseteq E}\bigcup_{s\in L^B} H(B)\times s\right)_A \\
&= \bigcup_{B\subseteq E}\bigcup_{s\in L^B} H(B-A)\times s|_{(E-B)-A} \\
&= \bigcup_{B\subseteq E}\bigcup_{t\in (L^B)_{A-B}} H(B-A)\times t \\
&\subseteq \bigcup_{B\subseteq E}\bigcup_{t\in (L^{B-A})_A} H(B-A)\times t
\end{aligned}$$

因为对于 E 的每个子集 B，我们都有包含关系

$$(L^B)_{A-B} = ((L^{B-A})^{B\cap A})_{A-B} \subseteq ((L^{B-A})_{B\cap A})_{A-B} = (L^{B-A})_A.$$

请注意，此处第一个和最后一个等式使用了 [3], 中公式 (13) 的结果，而包含关系则由 [3] 中公式 (12) 推得。若选择 B 使其与 A 不相交，则前面这一串表达式便简化为 $(L^B)_A$，且 $H(B)$ 等于 $H(B-A)$。这表明上面的等式实际上成立：

$$|L|_A = \bigcup_{B\subseteq E-A}\bigcup_{t\in(L^B)_A} H(B)\times t. \tag{3}$$

由于根据 [3], 中的 (13), $(L^B)_A \subseteq (L_A)^B$，我们可由 (2) 和 (3) 推得包含关系

$$|L|_A \subseteq |L_A|.$$

利用 (3)，投影立方体的维数可表示为

$$\begin{aligned}
\dim|L|_A &= \max\{\#B:\ (L^B)_A\neq\varnothing \text{ for some } B\subseteq E-A\} \\
&= \max\{\#B:\ B\subseteq E-A \text{ with } L^B\neq\varnothing\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

现在，证明所述结果所需的前提条件都已具备。

定理 3. 对于子集 $L\subseteq\{\pm1\}^E$，以下陈述等价：

(i) L是充足的；(ii) 对所有 $A\subseteq E$, $|L|_A=|L_A|$ 都成立；(iii) 维数 $|L|_A$ = 维数 $|L_A|$ 对所有 $A\subseteq E$都成立。

证明。若 L 是充足的，则根据 [3, 定理 2]，有 $(L^B)_A=(L_A)^B$，因此，由 (2) 和 (3) 可知 $|L|_A$ 和$|L_A|$ 相等。后一个等式显然意味着相应的维数相等。

为完成证明，假设

$$\dim|L|_{E-A} = \dim|L_{E-A}| \text{ for all } A\in\overline{X}(L),$$

也就是说，$A\subseteq E$ 且 $L_{E-A}=\{\pm1\}^A$. 那么

$$\begin{aligned}
\#A &= \dim H(A) = \dim|L_{E-A}| \\
&= \dim|L|_{E-A} \\
&= \max\{\#B:\ B\subseteq A \text{ with } L^B\neq\varnothing\},
\end{aligned}$$

由此 $L^A\neq\varnothing$，也就是说，$A\in\underline{X}(L)$。因此，根据 [3, 定理 2]，L 是充足的。 □

7. 正交象限交模式

给定 $\mathbb{R}^E$中的任意子集 K，集合

$$L(K) = \{s \in \{\pm 1\}^E : \ K \cap O(s) \neq \varnothing\}$$

刻画了 K 与由 $\{\pm 1\}^E$的符号映射确定的 $\mathbb{R}^E$ 闭正交象限之间的交模式。Lawrence [14]对凸集进行了这一构造。他证明，只要 K 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^E$中的凸集， $L(K)$就是充分集；然而，并非每个充分集 L 都能以这种方式实现。

在 $\mathbb{R}^E$ 的更广泛子集类别中实现这一构造的线索（这些子集具有某些较弱的凸性性质），来自显而易见的实现

$$L(|L|) = L \text{ if } L \subseteq \{\pm 1\}^E \text{ is ample.} \tag{5}$$

事实上，包含关系 $L \subseteq L(|L|)$显然成立。现在，如果 $t \in L^* = \{\pm 1\}^E - L$， 那么相应的闭正交象限 $O(t)$与 $\{\pm 1\}^E$ 的任何纤维 $F \subseteq L$ 都不相交，因此也与 $|L|$的面 F 不相交， 由此 $t \notin |L|$.

现在我们将证明，对于 K of $\mathbb{R}^E$ 的闭子集，弱凸性足以确保 $L(K)$ 是充足的。为此，我们只需考虑 $H(E)$ 的紧子集。由于 $L(K)$ 是有限的，因此存在 K 的一个有限子集 K_0，使得 $L(K_0) = L(K)$。我们可以用某个 $\lambda > 0$ 对 K 进行缩放，使得 $\lambda K_0 \subseteq H(E)$。 然后

$$\widetilde{K} := H(E) \cap \lambda K$$

$\widetilde{\ }$是 $H(E)$ 的一个紧弱凸子集，且 $L(K) = L(K)$。

定理4。 $\{\pm 1\}^E$ 的子集 L 是充足的，当且仅当存在 $\mathbb{R}^E$ 的一个弱凸子集 K（或者等价地，存在 $H(E)$ 的一个紧弱凸子集 K），使得 $L = L(K)$。

证明。 还需证明：只要 K 是 $H(E)$ 的闭弱凸子集， $L := L(K)$ 就是充足的。我们对 $\#E$. 使用归纳法。由于 K 是弱凸的， K 是路径-ℓ_1-等距的，因此存在 $e \in E$，使得 $L^e \neq \varnothing$。我们断言 $L^e = L(K')$，其中

$$K' = \{r|_{E-\{e\}} : \ r \in K \text{ with } r(e) = 0\}.$$

显然， $\{\pm 1\} \times L(K') \subseteq L$。反过来，若 $s' \in L^e$，则 s_1、$s_2 \in \{\pm 1\}^E$ 这两个 s' 的扩张（其中 $s_1(e) = -1$，且 $s_2(e) = +1$）都属于 L。因此存在 r_1、$r_2 \in K$，使得$r_1(e) = -1$， $r_2(e) = +1$，且 $r_1(x) \cdot s'(x) \geq 0$， $r_2(x) \cdot s'(x) \geq 0$ 对所有 $x \in E - \{e\}$. 都成立。于是，在 K 中连接 r_1 与 r_2 的任意测地线 γ 都必定包含一点 r，满足 $r(e) = 0$，因此必然有$r(x) \cdot s'(x) \geq 0$ 对所有 $x \in E$ 都成立。这就证明了 $L^e = L(K')$。显然， K 与经过原点的 e- 超平面的交集是路径-ℓ_1-等距的，因而是弱凸的。因此，根据归纳假设， L^e 是充足的。

最后，为证明 L 是等距的，假设存在某个子集 A，满足 $\#A > 1$，且有s_1、$s_2 \in L$，满足 $s_1|_{E-A} = s_2|_{E-A}$和 $\{s_1(y)\ s_2(y)\} = \{\pm 1\}$ 对所有 $y \in A$. 均成立。为方便记号，假设 $s_1(y) = -1$ 且 $s_2(y) = +1$ 对所有 $y \in A$. 均成立。根据 L 的定义，存在 r_1、$r_2 \in K$，满足 $r_i(x) \cdot s_i(x) \geq 0$，其中 $i = 1$、2 以及所有 $x \in E - A$均成立，但 $r_1(y) \leq 0 \leq r_2(y)$对所有 $y \in A$. 均成立。任何一条在 K 中连接 r_1 和 r_2 的测地线 γ 都包含一个点 r，满足 $r(z) = 0$，其中存在某个 $z \in A$，使得连接 r_1 和 r 的 γ 的子测地线上的所有内点在 A. 处均具有负坐标。必然有 $r(x) \cdot s_i(x) \geq 0$，其中 $i = 1$、2 以及所有 $x \in E - A$. 均成立。因此，在图超立方体 $H^{(1)}(E)$ 中，连接 s_1 和 s_2 的最短路径上，满足 $s(z) = +1$ 且 $s|_{E-\{z\}} = s_1|_{E-\{z\}}$ 的 s_1 的邻点 s 属于 Sign(r) $\subseteq L$. 。由 $\#A$的平凡归纳法可知，L 是等距的，因而是连通的。于是根据 [3, 定理 4]，我们得出$L = L(K)$是充足的。□

8. 回路与余回路

本节将通过其立方体复形 $|L|$的面（极大面）的重心映射集合 Cocirc(L)，刻画充分集 L。它们对应于集合

相对于 $\{\pm1,0\}$ 上的序 $\prec$，Baryc(L) 中的极小元集合 Min(Baryc(L))（见定义 4）：Cocirc(L) $=$ Min(Baryc(L))。Cocirc(L) 的元素称为 L 的余回路，因为其定义与定向拟阵 [5] 中余回路的定义相似。然后

$$\begin{aligned}\mathrm{Baryc}(L) = {\uparrow}\mathrm{Cocirc}(L) &= \{t\in\{\pm1,0\}^E : {\uparrow}\{t\}\cap\{\pm1\}^E\subseteq L\}\\ &= \{t\in\{\pm1,0\}^E :\ t|_{E-E(t)}\in L^{E(t)}\}\\ &= \{t\in\{\pm1,0\}^E :\ t|_{E-E(t)}\notin (L^*)_{E(t)}\},\end{aligned}$$

其中，$L^* = \{\pm1\}^E - L$ 和 $E(t) = \{x\in E:\ -1 < t(x) < +1\} = t^{-1}(\{0\})$ 对于 $t\in\{\pm1,0\}$ 此前已有定义。

L 的回路集 Circ(L) 定义为 L^* 的余回路集 Cocirc(L^*)。显然，$t\in\{\pm1,0\}^E$ 包含于 Cocirc(L^*) 当且仅当 $t|_{E-E(t)}\notin L_{E(t)}$ 成立，也就是说，当且仅当对于每个 $s\in L$，都存在某个 $x\in E$，使得 $t(x)\cdot s(x) = -1$；或者——等价地——当且仅当 $s\in\{\pm1\}^E$ 和 $t\prec s$ 蕴含 $s\notin L$.。因此，Circ (L) 由具有该性质的 $\{\pm1,0\}^E$中的极小元组成。还容易看出，L 与所有满足 $t\prec s$ 的符号映射 $s\in\{\pm1\}^E$（其中某个 $t\in$ 属于 Cocirc(L)）组成的集合相同；同时也与所有满足对于每个 $t\in$，都有 $t\not\succ s$的符号映射 $s\in\{\pm1\}^E$ 组成的集合相同，其中 $t\in$属于 Circ(L)。于是，我们基本上可将最终结果作为定理 2 的推论得到：

定理5。 对于集合 $L\subseteq\{\pm1\}^E$，以下命题等价：

(i) L是充足的；(ii) Baryc(L)满足 ***(SCA)***；(iii) Cocirc(L)满足 ***(SCA)***；(iv) Baryc(L^*)满足 ***(SCA)***；(v) Circ(L)满足 ***(SCA)***。

此外，若 $J\subset\{\pm1,0\}^E$满足 ***(SCA)***，且 $\mathrm{Min}(J) = J$，则集合 $L = {\uparrow}J\cap\{\pm1\}^E$ 是充足的，且 $\mathrm{Cocirc}(L) = J$。

证明。 给定集合 $L\subseteq\{\pm1\}^E$，其对应的子集 $J :=$ Baryc(L) 是上闭的，即 ${\uparrow}J = L$，并可还原得到 L，即 $J\cap\{\pm1\}^E$。特别地，根据这两个立方体复形的定义，$[J] = |L|$ 成立。因此，若 L 是充足的，则定理 2 的条件 (vi) 得到满足。这就证明了 (i)⇒(ii)（或 (iii)）。显然，${\uparrow}$Cocirc(L) $= L$，由此，根据定理 2 中 (iii) 与 (iv) 的等价性，(ii)⟺(iii) 立即成立。若 L 满足 (SCA)，则根据定理 2 中 (ii) 推出 (vi)，L 是充足的。综上，我们已证明前三个命题 (i)、(ii)、(iii) 等价。由于 Circ(L) =Cocirc(L^*)，且 L 是充足的当且仅当其补集 L^* 是充足的（参见 [3,定理 2]），命题 (iv) 和 (v) 也等价于 (i)。若 $J\subset\{\pm1,0\}$ 满足 (SCA) 且 Min(J) $= J$，则根据定理 2，$L = {\uparrow}J\cap\{\pm1\}^E$ 是充足的，且 Baryc(L) $= {\uparrow}J$。由于 Min(${\uparrow}J$) $=$Min(J)，我们也有 Cocirc(L) $= J$。□

注2。 由此可知，对于某个充足子集 L，若 $r\in$Circ(L) of $\{\pm1\}^E$，则对 $E - E(r)$ 的每个正常子集 A，都有 $L|_A = \{\pm1\}^A$，因此

$$X(L_{E(r)}) = \mathcal{P}(E - E(r)) - \{E - E(r)\}.$$

换句话说，对于每个回路 $r\in$ Circ(L)，其支撑 $E - E(r)$ 是 $X(L)$ 的一个“回路”，也就是说，它是 E 的一个极小子集，不包含于 $X(L)$，而 $r|_{E-E(r)}$ 是$\{\pm1\}^{E-E(r)}$ 中唯一不包含于 $L_{E(r)}$的元素。特别地，我们有 #Circ(L) = #Circ($X(L)$)，其中

$$\mathrm{Circ}(X(L)) := \{A\in\mathcal{P}(E) - X(L) :\ B\in X(L) \text{ for all } B\subsetneqq A\}$$

对于每个充足子集 $L$of $\{\pm1\}^E$。

注3. 尽管证明方式不同（采用了真正的组合方法），定理5的条件 (i)、(iii) 和 (v) 之间的等价性是我们最早对丰裕性作出的刻画之一。后来，我们找到了第二个证明，它更具几何性质，并在此给出。不过，我们可以解读 [14]，中定理5的表述（该定理刻画了充足的/偏斜集的路径系统）中的 (SCA)。路径系统对应于 L^* 的极大立方体集合，即

按我们的记号，即 Circ(L)。因此， [14, 定理 5] 确立了定理5中 (i) 与 (v) 的等价性（证明方式不同）。

致谢。V. Chepoi 部分得到 ANR项目MIMETIQUE“度量子图”（ANR-25-CE48-4089-01）的资助。他还要感谢 J. Chalopin 和 K. Knauer 就 [14, 定理 5]进行讨论。J.H. Koolen 部分得到国家自然科学基金（编号：12471335）和安徽省量子信息技术创新计划（编号：AHY150000）的资助。

参考文献

[1] N. Aronszajn，《完整凸空间线段连通性的新证明》，Erg. Math. Koll. Wien 6 (1935)，45–46。[2] H.-J. Bandelt 和 V. Chepoi，《度量图论与几何：综述》，载于《离散与计算几何综述：二十年之后》（J. E. Goodman、J. Pach 和 R. Pollack 编），Contemp. Math.，第453卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2008年，第49–86页。[3] H.-J. Bandelt、V. Chepoi、A. Dress 和 J. Koolen，《偏斜集组合学》，European J. Combin. 27 (2006年)，669–689。[4] H.-J. Bandelt、V. Chepoi 和 K. Knauer，《条件定向拟阵：定向拟阵复形》，J. Combin. Th. Ser. A，156 (2018)，195–237。[5] A. Björner、M. Las Vergnas、B. Sturmfels、N. White、G. Ziegler，《定向拟阵》，《数学及其应用百科全书》第46卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[6] B. Bollobàs 和 A. J. Radcliffe，《缺陷型 Sauer 结果》，J. Comb. Theory, Ser. A，72 (1995)，189–208。[7] M. Bridson 和 A. Haefliger，《非正曲率度量空间》，施普林格出版社，1999年。[8] J. Chalopin、V. Chepoi、S. Moran 和 M. Warmuth，《充足类与极大类的无标签样本压缩方案及角剥离》，《计算机与系统科学杂志》127 (2022)，1–28。[9] A.W.M. Dress，《迈向整体聚类理论》，载于《数学层次结构与生物学》（新泽西州皮斯卡塔韦，1996年），271–289，DIMACS离散数学与理论计算机科学丛书，第37卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年。[10] A.W.M. Dress 和 R. Scharlau，《度量空间中的门控集》，Aequationes Math. 34 (1987)，112–120。[11] B. Gärtner 和 E. Welzl，《Vapnik-Chervonenkis 维数与（伪）超平面排列》，Discr. Comput. Geom. 12 (1994)，399–432。[12] S. Floyd 和 M.K. Warmuth，《样本压缩、可学习性与 Vapnik-Chervonenkis 维数》，Mach. Learn. 21 (1995)，269–304。[13] K. Knauer 和 T. Marc，《定向拟阵复形的顶元图》，Discr. Comput. Geom. 63 (2020)，377–417。[14] J. Lawrence，《偏斜集与凸集的正交象限交》，Pacific J. Math. 104 (1983)，155–173。[15] K. Menger，《一般度量研究，I、II、III》，Math. Ann. 100 (1928)，75–163。[16] S. Moran，《打散极值系统》，硕士论文，2012年，arXiv:1211.2980。[17] S. Moran 和 M.K. Warmuth，《极值类的带标签压缩方案》，ALT 2016，34–49。[18] A. Pajor，《巴拿赫空间的子空间》，《进行中的研究》，Hermann，巴黎，1985年。[19] A. Papadopulos，《度量空间、凸性与非正曲率》，IRMA数学与理论物理讲座，第6卷，欧洲数学会，2005年。[20] W. Rinow，《度量空间的内在几何》，施普林格出版社，柏林，1961年。[21] M.L.J. van de Vel，《凸结构理论》，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1993年。[22] D.H. Wiedemann，《海明几何》，博士论文，安大略大学，1986年，2006年7月重新排版。

数学系，汉堡大学，联邦大道55号，D-20146 汉堡，德国
电子邮箱地址：bandelt@math.uni-hamburg.de

计算机与系统实验室，艾克斯-马赛大学卢米尼科学学院，F-13288 马赛 Cedex 9，法国电子邮箱: victor.chepoi@lis-lab.fr

中国科学技术大学，中国电子邮箱: koolen@ustc.edu.cn