90^+ 《苏格兰书》九十周年

斯坦尼斯-瓦夫·多莫拉兹基、马乌-戈扎塔·斯塔维斯卡和 Mykhailo Zarichnyi

arXiv:2603.27867v1 [math.HO] 29 Mar 2026

Abstract. 值此《苏格兰书》问世九十周年之际，我们回顾它所带来的影响。首先，我们探讨它助力开创的数学新领域。接着，我们指出，它曾积极用于激发青年数学家和学生的兴趣，并推动他们取得成果。此外，我们概述自 [55], 发表以来的十年间所取得的进展；该文回顾了《苏格兰书》中已解决的问题。我们还概述了各种以某种方式与《苏格兰书》相关的开放问题集。文中引用的《苏格兰书》问题的所有英语表述均出自 [55, 第 6]章。

1. 引言

2025年是传奇《苏格兰书》诞生九十周年。这本笔记诞生于利沃夫“苏格兰”咖啡馆内，并成为利沃夫数学学派的象征之一。以斯特凡·巴拿赫、雨果·施泰因豪斯、斯坦尼斯-瓦夫·乌拉姆及其同仁为核心形成的这一学派，是两次世界大战之间的欧洲最杰出的数学中心之一。它的力量不仅在于卓越的个人发现，也在于共同提出开放问题——这些挑战为后世指明了方向。

《苏格兰书》中记录的问题涵盖泛函分析、拓扑学、测度论及其他领域。其中许多问题数十年未能解决，推动了新方法和新研究方向的发展。有些问题在20世纪下半叶得到解决，另一些至今仍启发着现代研究人员。正是这种共同提出问题的实践表明，科学进步往往始于一个清晰提出的问题。

九十多年后的今天，《苏格兰书》不仅被视为一份历史文献，也被视为一个鲜活的象征：它证明，数学诞生于对话、共同探索之中，也诞生于将问题视为一段旅程起点的能力。这本书的周年纪念，是一个契机，让我们再次回顾利沃夫数学学派，评估其成就及其对现代数学发展的意义。

日期：2026年3月31日。

关于利沃夫数学学派，已有大量历史文献。首先要提到 Roman Duda 的著作 [28], ，该书也已译成英语。当然，书中以及其他出版物也都谈到了苏格兰咖啡馆和《苏格兰书》。本文无意追求完备，可作为现有研究的补充。此外，Mauldin的《苏格兰书》 [55]第二版问世至今已有11年；该书尤其全面地综述了当时已解决的问题，并介绍了未解决问题研究的进展。这些年来，数学家又解决了其他一些问题，这促使我们在撰写本文时关注这些新的进展。

2. New and old mathematics in problems from "The Scottish Book"

我们通常会说"《苏格兰书》"，但值得注意的是，流传着几个略有不同的《苏格兰书》版本，而且每个版本都得到某种形式的认可。以下内容可在网站 [76], 上查阅：一份来自Banach家族私人收藏的手稿副本（共193道题，最后一道未编号）；一份来自Alexiewicz家族私人收藏的打字稿副本，上有Andrzej Alexiewicz的批注和下划线（共155道题）；一份由Stanis-law Ulam翻译成英语的打字稿副本，藏于弗罗茨瓦夫大学数学系图书馆档案馆（共193道题）。Ulam的译本促成了《苏格兰书》的发表：最初以洛斯阿拉莫斯实验室预印本的形式出版（分别于1957年和1977年），之后由R. Dan Mauldin编辑成书（两个版本，分别于1979年和2015年，后者是 [55]），其中收录了题目、题解（如有）、大量评注和其他材料，例如Ulam和Mark Kac的个人回忆，以及1979年在得克萨斯州丹顿举行的、专门讨论《苏格兰书》的会议上的讲座。第二版还配套举办了一场会议：2015年1月13日，在得克萨斯州圣安东尼奥举行的联合数学会议期间，美国数学会举办了《苏格兰书》专题特别会议（相关报道见 [79]）。

那些最看重数学精确性的读者，可能会对以下两个问题的答案各不相同而感到失望：苏格兰书中有多少个问题？这些问题涉及哪些数学学科？但《苏格兰书》本身并不是一个数学对象。它是人类活动的产物，因此难免存在不精确之处。首先，问题的数量会有所不同，因为有些问题包含多个部分，这些部分可以分别计数；尤其是在其中一部分已经解决，而其他部分仍待解决时。其次，对《苏格兰书》中出现的数学主题进行分类，会因所采用的分类体系以及对不同领域之间边界（这些边界并非固定不变）的理解不同而得出不同结果。自1868年起，

分类数学问题和发表成果时采用的是《数学进展年鉴》¨这一体系。新学科的出现和专业化程度的提高，以及其他因素（见 [86] 及其中的参考文献），促使一种截然不同的体系——数学主题分类（MSC）——得以发展。该体系始于1940年，并经过多次修订。考虑到这一点，我们提出以下对《苏格兰书》中问题的主题分类（依据现行的MSC2020）：

集合论–7个问题；组合学–5；群论–5；拓扑群–9；实变量函数–27；测度论–15；位势论–2；序列、级数、可和性–13；调和分析–2；泛函分析–19；算子理论–4；凸几何–9；一般拓扑学–25；流形拓扑学–16；概率论–10；其他–...
...

在“其他”类别中，有两个子类值得一提：多项式的性质–7；代数几何、微分几何和／或初等几何–11。

苏格兰书中是否没有涉及任何重要的数学领域？让我们先看看 Mark Kac 的一段话：“重读《苏格兰书》时，我想指出，虽然其中的问题涵盖了数学大多数主要分支，

但有一个分支显然缺席，那就是数论。原因很简单：当时数论在波兰并不流行。Sierpi´nski 在年轻时（以及生命的晚年）都曾在数论领域做出重要而有趣的成果，而华沙学派确实培养出了两位“异类”：A. Walfisz（他离开波兰前往苏联，并在第比利斯担任教授）和 S. Lubelski。甚至还有一本严肃的期刊《Acta Arithmetica》（至今仍在出版），专门刊载数论研究；然而，在第二次世界大战前的波兰，这个优美而重要的领域远非数学界关注的前沿。”（[42]）

完整的故事要复杂得多。我们并不是在此声称，Kac——苏格兰咖啡馆聚会的参与者，后来也成为概率数论等领域著作的作者或合著者——犯了错误或忘记了什么重要的事情。相反，我们想指出，具体问题的主题分类可能还存在进一步的复杂性。一个问题可能以属于某个数学领域的术语来表述，但其解答可能会用到其他领域的事实和技巧；或者问题本身可能与其他领域的问题密切相关。一个有趣的例子是

问题59：RUZIEWICZ 能否将一个正方形分割成有限个彼此大小不同的正方形?

这看起来不过是又一道休闲数学谜题。事实上，Ruziewicz 在这里书面提出了一个他几年前曾在研讨会上考虑过的问题（据[55], 称，他将其归于“来自克拉科夫的数学家”）。一个类似的矩形问题也曾被考虑过，后来由 Zbigniew Moro´n（1904—1971年）解决。他曾是 Ruziewicz 在 UJK 的初级助教，第二次世界大战后在弗罗茨瓦夫的学校教授数学。他证明了矩形 33×32 可以分解为 9 个正方形，矩形 65×47 可以分解为 10 个正方形；该解法发表于 [62]。他在这一主题上还有其他研究成果（包括矩形分解与正方形分解之间的关系），但没有发表，不过他曾在 1925—28 年间 Ruziewicz 的研讨会上就其中一些成果作报告。他还于 1955 年撰写了一篇介绍性论文。20 世纪 30 年代末，人们找到了正方形的不同分解方式。虽然没有明确提及《苏格兰书》中的问题，但 Roland Sprague 于 1939年提出的解法（首个发表的解法）与 Moro´n 的成果非常相似。在另一篇论文（[63]）中，Moro´n 基于正方形的分解提出了几个初等数论问题（并解决了其中一些）。更一般地，据 [2], 称，正方形分解问题与互素数、将一个数表示为平方和、斐波那契

序列以及其他数论主题有关。最后，P. J. Federico 对 [55]问题59的评论讨论了这一问题及其解法与图论之间的联系。因此，数论和图论这两个主要领域，竟出人意料地出现在一个（及其相关问题的）解法中，而这个问题最初的表述并未涉及它们。

另一个包含数论（以及概率论）内容的问题如下：

问题152：STEINHAUS 一个半径为1的圆盘至少覆盖两个整数坐标点（x，y），至多覆盖5个。如果我们通过向量 nw（$n = 1$，2，3，.....）平移这个圆盘，其中 w 的两个坐标都是无理数，且二者之比为无理数，那么数字2，3，4会无限次重复出现。对于 $n \to \infty$，这些事件的频率是多少？它是否存在?

Jan Mycielski在 [55] 中的评论运用丢番图逼近的相关事实解释了这一解法。

下面的问题将图论与概率论结合起来：

问题38：乌拉姆设有 N 个元素（人）。从给定的 N 个元素中随机为每个元素指定另外 k 个元素（这些人是该人的朋友）。从每个元素出发，能否通过相互为朋友的链条到达每个其他元素，其概率 P_{kN} 是多少？（友谊关系不一定是对称的！）求$\lim_{n=\infty} P_{kN}$ （$=0$ lub 1？）。”

正如 Ron Graham 在 [55], 的第二版评论中指出的那样，这个问题涉及某些随机图的连通性。因此，乌拉姆可以被视为随机图领域的先驱，比 P. Erd˝os 和 A. R´enyi 在 1959年正式定义随机图早了二十多年。[1] 由此，问题38开创了一个全新的数学领域：随机图理论；并间接推动了渗流数学理论的发展，后者研究随机图的连通性。[2]

[1]在 [55] 的第一版中，对这道题的评注由 Erd˝os 撰写，其中包含他对该问题的一种解法：在友谊关系具有对称性（即图是无向图）且 $k \geq 2$的情况下。在第二版中，Erd˝os 和 Graham 的评注之后，附有 D. S. Jungreis 对该问题的详细通解。Graham 没有提及 Edgar Gilbert；他于 1959年 引入了另一种随机图。[2] 2010年，Stanislav Smirnov 因其在渗流方面的研究等成就获得了菲尔兹奖（数学领域最高荣誉之一）。

顺便一提，图及相关概念可用于描述人类活动中的各种科学现象。在信息科学和文献计量学中，人们会使用引文图；而合作图则出现在科学社会学中。广为人知的“Erd˝os 数”是 Erd˝os 合作图上（数学家之间的）距离。

这些问题要么源于讨论并当场提出，要么是提出者事先思考了一段时间。[3] 后一种情况下，答案或至少部分解可能早已为人所知。上文讨论的问题59就是这样一个问题，另一个则是

问题118 弗´雷歇设 $\Delta(n)$ 为所有项均等于± 1的 n 阶行列式的绝对值中的最大值。是否存在一个简单的解析表达式，将 $\Delta(n)$ 表示为 n 的函数？或者更简单地说，求出$\Delta(n)$的渐近表达式。

亨里克·明茨在其对问题118的评论 [55]中讨论了这个问题的历史。他回顾说，雅克·阿达马于1893年证明，任意一个 $n \times n$ 复矩阵A ，只要其各元素的绝对值不超过1，就满足不等式 $|\det A| \leq n^{n/2}$。对于实矩阵，当且仅当 $AA^T = nI_n$时等号成立。满足这一等式的矩阵称为阿达马矩阵。它们在编码理论中得到了应用。当 $n = 1,2$或 n 为4的倍数时，阿达马矩阵存在。然而，目前仍不知道对所有这类 n是否都存在阿达马矩阵。有些构造可追溯到 J. J. 西尔维斯特于1867年的工作。1933年，雷蒙德·佩利利用有限域，为某些$n < 92$给出了构造这类矩阵的方法。目前尚不确定是否存在阿达马矩阵的最小阶数是 $n = 668$。

数学的另一个新领域——无限博弈论——是由《苏格兰书》中的一个问题开创的。[4] Stanis-law Mazur 曾研究过这类博弈

[3]据乌拉姆所说：“ [这些问题] 曾在文中列出姓名的众人之间经过广泛讨论，随后逐渐用墨水写入这本‘书’中。大多数提出的问题，在被考虑正式收入这本‘书’之前，都应当已经受到相当多的关注。正如读者将会看到的，这条一般规则也无法避免偶尔出现答案相当简单甚至微不足道的问题。”（乌拉姆为《苏格兰书》手稿 1957 年英语译本所作的序言， [76]或见 [55]第 xi—xiii 页）[4]早在 17 世纪，人们就已对博弈进行过一些数学研究。然而，作为数学独立分支的一般博弈论，历史并不比《苏格兰书》早多少。约翰·冯·诺伊曼的奠基性论文发表于 1928 年（[66]）。

问题43：Mazur

奖品：一瓶葡萄酒，S. Mazur。

某种博弈的定义。给定一个 E 实数集。两个玩家 A 和 B 之间的博弈定义如下：A 先任意选择一个区间 d_1，随后 B 任意选择一个包含于 d_1 中的线段（区间）；然后 A 再轮流选择一个任意线段 d_3，该线段包含于 d_2 中，如此继续。若交集 d_1，d_2，..... d_n... [sic] 包含该集合 E 中的一个点，则 A 获胜；否则 A 失败。若 E 是一个第一纲集的补集，则存在一种方法使 A 获胜；若 E 是一个第一纲集，则存在一种方法使 B 获胜。

问题： 的确 [sic] 只有对于那些集合 E 的补集在某个区间内属于第一纲时，玩家 A 才存在获胜的方法；同样地，如果 E 是第一纲集，B 是否也存在一种获胜的方法 [sic]？”

问题43之后接着介绍了对 Mazur 博弈的两种改动，一种由乌拉姆提出，另一种由巴拿赫提出（未编号）。巴拿赫还以问题67的形式提出了另外两种变体。乌拉姆对问题43的改动（称为 Ulam 博弈，或二进制博弈）启发雨果·施泰因豪斯和 Jan Mycielski 于1962年提出了一条新的集合论公理，称为决定性公理。该公理指出，Ulam 博弈是确定的（也就是说，两位玩家中有一位拥有获胜策略）。这条公理与选择公理不相容。关于无限博弈及其对集合论和拓扑学的影响，详见 [85]。

实变函数论虽然是一门现代学科，但在利沃夫学派形成之前就已发展成熟。《苏格兰书》中有27道这一领域的问题，数量相当可观。为什么这个领域会有这么多问题，而它并不像泛函分析、算子理论或概率论那样，被视为利沃夫数学学派的主要兴趣所在？或许可以（带有一些推测地）这样解释：利沃夫的数学家试图先了解（证实或反驳）特定函数的性质，再考虑整个空间的性质。事实上，数学家常常采用“玩具模型”，考察具体但在某种程度上具有典型性的例子，以更好地理解、解释和预见数学现象。还有另一种解释（与前一种互为补充，而非相互矛盾）。说到 Ruziewicz，我们不妨回想一下：他于1918年凭借一篇关于实变量函数的论文获得博士学位。他的导师是 Wacław Sierpiński。第一次世界大战前，在 Sierpiński、Zygmunt Janiszewski 和 Stefan Mazurkiewicz 的共同努力下，拓扑学、集合论和实变量函数等领域就在利沃夫得到了发展。这三位数学家后来成为华沙数学学派的中坚力量，而该学派与上述领域的联系更为密切。无论如何，

此后，利沃夫仍将实变函数论作为一门独立学科加以研究，并运用泛函分析处理这一领域的问题。例如，可参见 Steinhaus 发表于《数学研究》创刊号上的论文 [80] 。除 Ruziewicz 外，实变函数论问题的出题者还有 J. Schauder、S. Mazur、H. Auerbach、S. Banach、Z. ·Lomnicki、S. Ulam、J. Schreier、H. Steinhaus、M. Kac（任职于利沃夫的学术机构），L. Infeld、A. Zygmund、W. Sierpiński、A. J. Ward、S. Stoilow、E. Szpilrajn、S. Saks 和 S. Sobolev（访问学者）。若想了解一些例子（问题17.1和109），请参见下一节。

2.1. **《苏格兰书》与青年数学家的成长**。在苏格兰咖啡馆的聚会中，最年轻的常客是斯坦尼斯瓦夫（斯坦）·乌拉姆和马雷克（马克）·Kac。乌拉姆于1933年在利沃夫理工学院师从 Kazimierz Kuratowski 获得博士学位；Kac 于1937年在扬·卡齐米日大学（利沃夫）师从 Steinhaus 获得博士学位。两人后来都凭奖学金前往美国（乌拉姆于1935年，Kac 于1938年），但只要有可能便会回访利沃夫。他们积极参与《苏格兰书》，提出了许多问题。Kac 提出了问题126、161、177、178；乌拉姆提出了问题13、16、17、17.1、18、19、20、21、29、30、31、32、33、34、35、36、37、38、42，对问题43作了修改，以及问题68、70、71、77、99、101、102、110、115、139、140、141、142、145、146、164、165、166、167、168（独自提出）、2、3、11、40、100（与巴拿赫共同提出）、10.1（与 Mazur、Auerbach 和巴拿赫共同提出）、22、95、98、103、116、163（与 Schreier 共同提出）、62、63、69、109、144（与 Mazur 共同提出）、90、114（与 Auerbach 共同提出）、94（与 Z. ·Lomnicki 共同提出）、96（与 Kuratowski 共同提出）、108（与巴拿赫和 Mazur 共同提出），并解决了问题9。Zbigniew ·Lomnicki（1904—1994）并不常来参加聚会，因为他在利沃夫大学完成数学和物理学学业后，成为一名精算师；1933年，他迁往华沙，在 Zak·lad Ubezpiecze´n Spo·lecznych [社会保险机构]工作。不过，他与数学合作者乌拉姆共同提出了问题94。这里还应提到 J´ozef Marcinkiewicz（1910—1940）([25], [53], [56])。他在维尔诺大学（维尔纽斯）接受教育，于1933年获得硕士学位，1934年获得博士学位。之后，他在国家文化基金 [Narodowy Fundusz Kultury]奖学金的资助下，于1935/36学年在利沃夫大学学习。尽管年纪轻轻，他当时已是一位颇有建树的数学家。在利沃夫，他担任巴拿赫的助教，并与其他人讨论数学，尤其是与 Juliusz Schauder 和 Stefan Kaczmarz（他与后者发表过一篇合著论文）交流。Marcinkiewicz 常去苏格兰咖啡馆，并解决了《苏格兰书》中的若干问题：83、106（他的解答需要进一步诠释）、131；他还提出了问题124。回到维尔诺后，他试图在咖啡馆里建立类似的传统，让教授、助教和高年级学生聚在一起讨论数学，但未能形成气候。据当时在维尔诺任助教的 Leon Je´smanowicz 所述[8]

([41])，失败的原因是物价高、关门时间早，最后还有大学因学生骚乱而暂时关闭。

还有一些曾在某个时期与利沃夫有联系、但未必受过利沃夫数学学派训练的青年数学家，受到《苏格兰书》中所列问题的启发，并成功地致力于求解这些问题。第一个例子是Andrzej Turowicz（1904—1989）。他于1928年获雅盖隆大学（克拉科夫）数学硕士学位，随后在克拉科夫和梅莱茨的中学教授数学数年。1937年，应Antoni Łomnicki之倡议，他获任利沃夫理工学院数学讲座的高级助教。他积极参与利沃夫的数学活动，并与利沃夫数学学派的数学家合作。他与Stefan Kaczmarz（1895—1939）共同解决了Mazur和乌拉姆提出的以下问题：

问题109：MAZUR、乌拉姆

1935年10月16日

给定 n 个实变量函数： f_1，……， f_n）。用 $R(f_1$，……， $f_n)$表示由给定函数经过有理运算（形如……的表达式）得到的所有函数的集合

$$\left(\frac{\sum a_{k_1\ldots k_n} f_1^{k_1}\cdots f_n^{k_n}}{\sum b_{k_1\ldots k_n} f_1^{k_1}\cdots f_n^{k_n}}\right).$$

在集合 R中，是否总存在一个函数 f，使其不定积分不属于集合 R?

如果将所有由属于 R的函数复合得到的函数也纳入集合 R，那么是否有一个类似的问题?

他们的解答发表在以利沃夫为基地的顶尖期刊《数学研究》上，论文题为 [44]。 [55], 随后附上的补遗，是根据乌拉姆的打字稿译文写成的，其中说：“第一个问题的肯定答案由副教授 S. Kaczmarz 博士和 A. Turowicz 博士找到。”[5] 补遗日期为 1938 年 3 月，但一定是很久以后才添加的。Turowicz 直到 1946 年才在雅盖隆大学获得博士学位，其博士论文题为《论连续与乘性泛函》，导师是 Tadeusz Wa˙zewski。 [6] Turowicz 的博士论文（以 [90]为题发表）回答了一个由

[5]在《苏格兰书》的波兰语手稿副本以及Alexiewicz家族收藏的波兰语打字稿中，均未附有此问题的补遗；相关资料见 [76], 。若想进一步了解Turowicz在第二次世界大战后成为本笃会修士的精彩人生与成就，请参阅 [22] 和 [26]。

斯特凡·巴拿赫和 Meier Eidelheit 提出的问题。尽管巴拿赫和 Eidelheit 都在《苏格兰书》中录入过许多问题，但这个问题并不在其中。以下是 Turowicz 对其论文研究缘起的回忆：

我曾遇到过这样一件与巴拿赫有关的事：在一次数学学会的会议上，我提议作一个关于乘法连续泛函的报告（我的提议是在*1939*年春提出的；战后我才完成这项工作）。我正在作报告时，巴拿赫走进了房间，稍微迟到了一会儿，脸色阴沉得令人难以置信。我注意到巴拿赫很生气。他极其专注地听着，脸色也发生了变化。报告结束后，巴拿赫发言说："我也研究过这个问题；你的做法完全不同，而且做得很好。"我很高兴地接受了他的评价。会议结束后的第二天，*Sto ̇zek*（他没有参加会议）问道："巴拿赫在场吗？" *[*我说*]*："是的，他在。" *[*他说*]* ："我本来不想事先吓到你；当他得知你要讲什么时，他非常生气。他说：'我正在研究这个问题；我肯定告诉过某个人，而 *[*现在*]* *Turowicz*却把它说成是他自己的。'"巴拿赫来时就是打算让我难堪。幸运的是，证明的思路与 *[*他的*],* 完全不同， *[*因此*]*他表扬了我， *[*并且*]*没有大闹一场。.....从那以后，巴拿赫对我一直非常友好。（[89], 磁带2b），由M. Stawiska从波兰语翻译）这一事件印证了乌拉姆关于问题在分享之前会受到"相当多关注"的观察，但我们永远无法确切知道，巴拿赫是否曾打算将这个问题记入《苏格兰书》中。

苏格兰书中的问题启发一位年轻数学家开展研究的另一个例子是

问题 17.1（乌拉姆）：设 f 是定义在所有 $0 \leq x \leq 1$ 上的连续函数。是否存在一个由点 C 构成的完美集，以及一个解析函数 φ，使得对于该集合中的所有点 C，都有 $f \equiv \varphi$?

该问题由 Zygmunt Zahorski（1914—1998）解决。Zahorski 于 1934—1938年在华沙大学学习数学，之后在空军军官候补生学校任教，并在 Stefan Mazurkiewicz 指导下准备博士论文。1939年第二次世界大战爆发时，他逃往利沃夫。1939—1941年间，他担任巴拿赫的助教，并在利沃夫大学攻读研究生（相当于博士候选人）。据 [51], 所述，巴拿赫把乌拉姆的问题告诉了他。他于1941年解决了该问题，当时苏联对利沃夫的第一次占领即将结束，纳粹德国的占领刚刚开始。当时当然不可能发表；直到战后才得以发表（[95]）。这个解是否定的[7], 接下来

[7]在 [95], 中，Zahorski 重新表述了这个问题，并将其也归于乌拉姆。这个重新表述的正解意味着问题 17.1 没有正解。

由一系列引理得出，并与其他几个问题的解答及相关的新开放问题一同出现。Zahorski 对它的描述 [97], 颇带戏谑意味，如下所示：“用反证法证明只需三分钟，我把这部分留给读者；只要选取一个函数，使得 $r(x) = 0$ 对每个 x都成立即可。不过，构造这样一个函数可能要花上好几个小时，而要满足整个条件，给我一个月就够了，也可能最终做不到。”尽管有这些复杂之处——或者正是因为如此？——他仍将问题 17.1 的解答视为自己最重要的成就之一。此外，在 [97] 他还坦言，自己曾短暂研究过《苏格兰书》中的另一个问题，即著名的 Mazur 的问题 153；该问题最终由 Per Enflo 解决：“战后不久的某个时候，我曾试着解决 *Mazur* 的问题——我觉得它很难，而且似乎有些人为。我当时不知道它与一个自然的收敛问题关系如此密切，于是放弃了尝试——否则我至今还会继续尝试（困难总是吸引着我）。”[8]

关于利沃夫第一次苏联占领时期，我们还应提到 Mark Vishik（1921—2012）和 Vladyslav Lyantse（1920—2007）的情况。当时，他们是利沃夫大学的数学学生。人们开始专门为学生组织会议。1941年4月，Vishik 在一次此类会议上作了报告，由 Banach 和 Edward Szpilrajn 等资深数学家指导（后者是来自德国占领下的华沙的难民，后来以 Marczewski 之名为人所知）。[9] 报告涉及他与 Lyantse 的合作成果，部分解决了《苏格兰书》中的问题 192。该问题由 Bronis-law Knaster（另一位来自华沙的难民）和 Szpilrajn 提出（[45], [83]）。他们没有发表这一解答（或许是因为德苏战争不久后爆发而无法发表），但原版《苏格兰书》的评注中提到了它。Szpilrajn 也在战后不久发表的一篇论文中提到了这一点 [84]）。

问题 192：B. 克纳斯特，E. Szpilrajn1941年5月
定义。若拓扑 [sic] T 具有性质（S）（Suslin 性质），则每个由 T 中开集组成的互不相交的集合族至多可数。定义。若空间 T 具有性质（K）（Knaster 性质），则每个由 T 中开集组成的不可数集合族，都包含一个不可数子族，其中的集合两两有公共元素。（.....）

问题（B. 克纳斯特和 E. Szpilrajn）。是否存在一个拓扑空间（按 Hausdorff 的意义，或按较弱的意义，例如 Kolmogoroff 空间），具有性质（S）但不满足性质（K）？（.....）问题（E. Szpilrajn）。性质（S）是否是

[8]如需了解更多关于 Zahorski 生平与成就的信息，请参见 [31], [96]。[9]
如需了解有关此次会议及其参与者的更多信息，请参见 [54]。11

两个因子的笛卡尔积运算的不变量?
备注：（.....）（5）E. Szpilrajn 于1941年5月证明，对于任意数量的因子，性质（K）是笛卡尔积的不变量；B. [sic] Lance 和 M. Wiszik 则证实，如果一个空间具有性质（S），另一个空间具有性质（K），那么它们的笛卡尔积也具有性质（S）。

乌拉姆在 [93], 看来，咖啡馆的聚会是波兰数学会利沃夫分会会议的延续，甚至在苏格兰咖啡馆成为大家首选的聚会地点之前也是如此："就我们的故事而言，咖啡 ´馆罗马咖啡馆起初是两家咖啡馆中更为重要的一家。数学家们在我们当地分会每周举行波兰数学会会议后，最初就是在那里聚集的。会议通常在星期六于大学的一间研讨室举行——因此离咖啡 ´馆很近。会议可能安排在下午，也可能安排在晚上。通常的议程包括四到五场、每场十分钟的报告；半小时的报告并不常见，而一小时的报告则少之又少，令人庆幸。当然，研讨会上也会进行一些讨论，但真正富有成效的讨论是在会议正式结束后，于罗马咖啡 ´馆进行的。" 若能将波兰数学会会议的议题与《苏格兰书》中记录的问题加以比较，将会很有意思。不过，这要等到这些会议的记录可以查阅时才能进行（如果记录确实存在的话）。《波兰数学会年刊》（波兰数学会的期刊）刊载的1935至1938年利沃夫分会报告并不完整。1935年7月（Banach 登记问题1）至1938年6月之间的会议情况没有任何记录。1935年上半年和1938年的报告都没有摘要，因此很难判断报告的主题是否与演讲者在《苏格兰书》中登记的问题有关。1938年下半年仅有4场会议的报告，其中的演讲者包括让·勒雷、S. Ulam、S. Mazur 和 M. Kac。Kac 于1938年9月登记了两个问题（177和178），早于他在10月所作的报告。

3. Rewards of doing mathematics

为了解决《苏格兰书》中的一些问题，出题者设立了奖品，大多是可以立即享用的饮料和食物。一个值得一提的例外是 Stanis-law Mazur 提出的活鹅。后来，这只鹅于1972年颁给了 Per Enflo，以表彰他解决了问题153；它最终也成了食物（[50]）。有时，根据问题得到肯定或否定的解答，奖品也会有所不同。针对他提出的问题152（1936年11月6日），雨果·施泰因豪斯设立了以下奖品："对于

计算频率：100克鱼子酱。对于频率存在性的证明：一小杯啤酒。对于反例 [sic]：一小杯咖啡。”

然而，解决科学问题的奖励并非利沃夫数学学派的发明，早在该学派出现之前就已存在。许多机构（科学院、学术团体、大学及其他机构）都会举办竞赛并颁发奖金，以评选“最佳”作品；有时竞赛只围绕一个主题（但主题范围足够广泛）展开。在诸多此类竞赛中，值得一提的是法国科学院于1915—1918年在巴黎举办的数学科学大奖赛，主题是复变函数（一个或多个）的迭代。加斯顿·朱利亚、Samuel Latt`és和萨尔瓦托雷·平切莱提交了参赛论文（皮埃尔·法图同期的研究成果虽未参赛，也一并列入），这些作品奠定了现代全纯动力系统理论的基石（[3], [73]）。最终，朱利亚赢得了3000法郎。

奖金竞赛也可以聚焦于单个问题。G¨斯塔·米塔-莱夫勒（《数学学报》的创办者兼主编）于1885年发起了一场国际数学竞赛，以庆祝奥斯卡二世国王60岁生日。由评审委员会（卡尔·魏尔施特拉斯、夏尔·埃尔米特）提出了四个尚未解决的问题。奖项包括金牌、 $+\ 2$ 500瑞典克朗 +以及在《数学学报》上发表论文的机会。亨利·庞加莱于1889年赢得竞赛后，其研究成果随即准备发表。付印期间，人们发现他关于稳定性的论证存在严重错误，庞加莱立即承认了错误，并将奖金退还给主办方，还承担了已产生的印刷费用。[10]

对数学感兴趣的医生保罗·弗里德里希·沃尔夫斯凯尔（1856—1906年）在遗嘱中指定拨出10万马克，作为证明费马大定理的奖金（由哥廷根皇家科学学会颁发）。安德鲁·怀尔斯于1997年获得了这笔奖金，但受通货膨胀影响，金额已降至约7.5万德国马克（[10]）。

第二次世界大战后，为数学问题的解答提供小额奖品的传统仍在延续。1981年，Mark Kac 提出，谁能解决几乎马蒂厄算子的谱是否为康托尔集这一问题，谁就能获得十杯马提尼鸡尾酒。2009年，A. 阿维拉和 S. 吉托米尔斯卡娅给出了肯定解答，相关成果发表在一份最负盛名的数学期刊上（[4]）。

[10]参见 [11] ，其中有详尽的分析。

这里还应提到保罗·埃尔德什，他以自己奖励解决其所提出数学问题者的传统而闻名。他用自己的一套标准评估问题的难度。金钱奖励从 25 美元（相对简单的问题）到 10,000 美元（特别困难的问题）不等。

与此形成对照的是，克雷数学研究所为其选定的每一道著名千禧年难题都悬赏100万美元。美国银行家安德鲁·比尔也悬赏同样金额，征求对其猜想的证明或反证：如果 $A^x + B^y = C^z$，其中 A，B，C，x，y 和 z 是正整数，且 x，y，$z > 2$，那么 A，B 和 C 有公共质因数。

利沃夫的奖金通常金额不高。或许在第一次苏联占领期间物资匮乏的日子里，解出第184题（由斯坦尼斯瓦夫·萨克斯于1940年提出；他也是一位来自华沙的难民）可获一公斤肥膘肉，这份奖品会格外受欢迎，即便它并不便宜。许多问题并未设奖。有一次，出奖者并非问题的提出者：Samuel Eilenberg为乌拉姆提出的问题7的(a)部分悬赏一瓶葡萄酒。

然而，这些奖项本身并不是最终目标。这是一个更为普遍的现象。例如，亚历山大·格罗滕迪克拒绝了克拉福德奖（1988年），格里戈里·佩雷尔曼拒绝了菲尔兹奖（2006年）和千禧年奖（2010年）。

为了得出一些总体结论，值得借助波兰-以色列医生 Ludwik Fleck（他曾在利沃夫与 Steinhaus 合作）提出的概念，来分析《苏格兰书》这一现象。

根据 Fleck [34], 的观点，思想集体（德语为“Denkkollektiv”）是一个由研究人员组成的共同体，他们通过集体互动，利用共享的文化习俗和知识获取体系来生产或发展知识。

科学知识生产主要可定义为一种社会过程，它依赖先前的发现和实践，并以此限制和制约新的思想与概念。

[11]Steinhaus这样描述物资供应方面的困难：“这些当局一直承诺一切都会好起来，但物资短缺仍在持续：除许多其他物资外，肥皂、糖、煤油和取暖燃料都极其匮乏——而且那是一个严酷的冬天。”[82][12]波兰语中是“s-lonina”。在 [55] 及更早的版本中被误译为“培根”。

弗莱克将这一共享的既有知识集合称为“思想风格”，并以这两个理念构建了一种科学比较认识论。

研究人员在知识生产过程中通过社会互动，创造出共同的概念和实践，并借此讨论和辩论彼此的想法与发现。

从某种意义上说，苏格兰咖啡馆和《苏格兰书》是利沃夫数学学派参与者进行社会互动的平台。年轻成员被视为学术上的同侪。学派也热情接待来自其他中心的访客，甚至包括利沃夫第一次苏联占领期间来自苏联学术机构的代表。 [13]奖品的作用主要是象征性的，但它们彰显了利沃夫数学家之间盛行的友好氛围。

4. During the last decade

本节旨在回顾过去十年中有关《苏格兰书》问题的研究成果，也就是自 [55]发表以来取得的成果。正如我们将看到的，某些问题取得了显著进展，甚至得到了完备解答。在某些情况下，我们还补充了有关 [55]中评论的信息。

鉴于《苏格兰书》所涉主题极其广泛，本节内容不可避免地远非完备。

集合论（一般）拓扑学与泛函分析相关。泛函分析从广义上说，涉及对拓扑结构和代数结构及其相互作用的研究。这或许可以解释为何《苏格兰书》中提出的相当多问题都与拓扑学有关。此处还应补充与拓扑群和半群理论相关的问题。

问题 1：巴拿赫

1935年7月17日

(a) 什么时候可以对一个度量空间 [（可能是类型(B)）] 赋予度量，使其成为完备且紧致的，并且原先收敛的所有序列在新度量下也仍然收敛?

（b）例如，空间 c_0 能否赋予这样的度量?

[13]N. N. Bogolyubov（183）、P. Alexandroff（187）、S. Sobolev（188）、A. F. Fermant（189）和 L. Lusternik（190）曾在《苏格兰书》中记下问题。

它是重新标记为 [8]，用现代术语来说，这个问题如下：

度量空间（可能是巴拿赫空间） X 何时存在一个凝缩映射（即双射连续映射），将其映到某个紧致度量空间（=紧致度量空间）上?

关于拓扑空间凝缩映射的问题属于集合论拓扑学。最初的《苏格兰书》问题可能曾在利沃夫数学学派讨论多年。文章 [8] 指出，问题 1 的根源在于 Sierpinski 的文章 [78]。后来，亚历山德罗夫学派研究了将拓扑空间紧化为紧空间的问题。

Mauldin 的评论指出，对于可分巴拿赫空间，这个问题的解可由 Anderson-Kadets 定理推出；该定理说明此类空间同胚于空间 $\mathbb{R}^\infty$，而后者的这种紧化很容易构造，只需从 $\mathbb{R}$ 到某个紧集的凝缩映射出发即可。

然而，Mauldin 并未提及不可分巴拿赫空间。论文 [8] 的主要结果是证明密度为 ω_1 的希尔伯特空间可以凝缩到希尔伯特立方体 Q上。由于所有密度相同的巴拿赫空间彼此同胚，这就完全解决了密度为 ω_1的巴拿赫空间这一类中的问题。

此外， [8] 还给出了一个相对简单的解法，解决密度为 $\mathfrak{c}$ 的巴拿赫空间的 Problem1。密度介于 ω_1 与连续统之间的情形仍未解决。

在 [6]，Taras Banakh 宣布了以下结果：

(1) 连续统可以是一任意大的基数，同时每个密度为 $\leq c$ 的无限维巴拿赫空间都可以压缩到希尔伯特立方体上。

(2) 连续统可以是一任意大的基数，同时没有任何密度为$\aleph_1 < d$（X）的巴拿赫空间 $< c$ 能够压缩到某个紧致度量空间上。

这里的“相容”意为“与策梅洛-弗兰克尔集合论相容”。巴拿赫问题的答案取决于集合论公理体系，这一事实使它与康托尔连续统假设相似。

巴拿赫问题中的“度量”部分由 Pytkeev [71] 针对可分绝对博雷尔空间这一类解决。

相关进展请参见 [68], [69]。

问题7：Mazur、巴拿赫

巴拿赫空间 [中两个凸的无限维子集] 是否总是同胚的?

在这种表述下，这个问题的解显而易见；正如 Taras Banakh 所指出的 [6], ，问题7本应是对巴拿赫空间中的闭凸集按同胚分类。在这种表述下，这个问题后来被证明对无限维拓扑学的发展十分重要。

V. Klee 的评论所列参考文献止于1975年。我们将补充介绍这一方向上一些最重要的成果。

H. Toru´nczyk [87]证明，任意弗雷歇空间都与希尔伯特空间同胚。

Dobrowolski 和 Toru´nczyk [24]扩展了 Klee 提到的分类:

弗雷歇空间中的每个可分闭凸子集 C 都与 $[0,1]^n\times[0,1)^m\times(0,1)^k$ 同胚，其中基数为 $0\leq n,k\leq\omega$ 和 $0\leq m\leq 1$。特别地， C 与可分希尔伯特空间 ℓ^2 同胚，当且仅当 C 不是局部紧的。

最后，Banakh 和 Cauty 的以下结果 [7]可视为 Fr´echet 空间类中（修改后的）问题7 的完整解答:

Fr´echet 空间的每个闭凸子集 C 都同胚于某个基数为 $0\leq n\leq\omega$、 $0\leq m\leq 1$ 和 $\kappa\geq 0$ 的 $[0,1]^n\times[0,1)^m\times\ell_2(\kappa)$。特别地， C 同胚于无限维希尔伯特空间，当且仅当 C 不是局部紧的。

问题19：乌拉姆 一个具有均匀密度的实体，若能在任意姿态下漂浮于水中，它是否必定是球体?

自《苏格兰书》第二版出版以来，已有一些沿此方向的新论文发表。在 [39], 中，研究者提出并考察了一类与问题19相关的新型凸体。

文献 [35]给出了 $\mathbb{R}^n$ 中对称凸体类内问题19的一个简短肯定解答。

2022 年，该问题得到了否定的解答 [74]。该解答不可能具有对称性，但它是一个旋转体。

在 [98], 中，作者介绍了 H. Auerbach 关于问题19的经典定理的自然仿射对应形式。

有关相关进展的讨论，请参阅 [1], [35], [52], [60], [75]。

斯坦尼斯-瓦夫·乌拉姆提出的问题35：

射影希尔伯特空间（也就是说，希尔伯特空间中单位球面所有直径构成的集合，并以豪斯多夫公式度量）是否与希尔伯特空间本身同胚?

W. Holsztynski 指出，答案是否定的，因为希尔伯特空间是单连通的，而射影希尔伯特空间不是单连通的（因为它有一个二重覆盖）。显然，这立刻引出了确定射影希尔伯特空间拓扑类型的问题。

这与问题36密切相关，该问题同样由乌拉姆提出，可改述如下：是否存在从希尔伯特空间的闭单位球到其边界的收缩映射？问题36的答案是肯定的；此外，希尔伯特空间的单位球面与整个空间同胚。由此可知，射影希尔伯特空间是一个希尔伯特流形。此外，由于群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在希尔伯特空间的单位球面上自由作用，射影希尔伯特空间是一个空间 $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$。由于希尔伯特流形由其同伦类型分类，射影希尔伯特空间与一个从无限维射影空间到希尔伯特空间的无限望远镜的乘积同胚。这就是问题35完整解答应有的样子。

问题42，作者 Stanis-law Ulam：

对于欧几里得空间中的每个闭凸集 X，若它包含于球面 K，则以连续的方式（按豪斯多夫度量的意义）为其指定另一个包含于 K 的闭凸集 $f(X)$；是否存在一个不动点，也就是说，是否存在一个闭凸 X_0，使得 $f(X_0) = X_0$?

实际上，这个问题涉及 K 的紧凸子集构成的超空间。Nadler、Quinn 和 Stavrokas [65] 证明了这个超空间与希尔伯特立方体Q同胚。这个问题的肯定答案恰好就是 Q的不动点定理（布劳威尔不动点定理的无限维推广）。

问题54，作者 Juliusz Schauder：

一个凸的、闭的、紧致的集合 H 通过其某个部分上的连续映射 $U(x)$ 进行变换。 H 包含于一个(F)型空间中。该变换是否存在不动点?

众所周知，凸紧有限维集合上的每个映射都有一个不动点（布劳威尔）。因此，绍德尔问题涉及布劳威尔定理在无限维情形下是否存在类似结果。

1930年，绍德尔发表了一篇关于无限维不动点定理的论文 [77] 。然而，主要结果的证明存在一个漏洞：它只适用于巴拿赫空间。1934年，Tychonoff [91]证明了局部凸空间中紧凸子集的不动点定理。

自该问题出现在《苏格兰书》中以来，已有许多不动点结果问世。这里我们只提及多值映射的角谷-格利克斯伯格不动点定理 [36]。由于它在均衡理论和博弈论中的应用，这一定理十分重要且广受欢迎。

然而，按照一般表述，绍德尔问题仍未解决。2001年，Robert Cauty发表了一篇文章 [19] ，论证该问题有正解。Tadeusz Dobrowolski [23]进一步阐述并解释了Cauty的论证。然而，人们很快发现，这种方法并未给出正确的证明。Cauty发表了这篇论文[20] ，在其中发展了代数绝对邻域收缩理论，他认为该理论为绍德尔问题提供了完备的解决方案。

如今，不能假定 Cauty 的证明已得到整个数学界的认可（参见 [49], ，其中只引用了 [19] 和 [23], ，却没有引用 [20]）。无论如何，正如 [49]所说：“最好能提出比 Cauty 的证明简单得多的论证。”

关于问题73、74的一些新结果见 [21]。

问题107：STERNBACH 对于一个不切割平面的有界平面连续体 E，是否每个从 E 到其某个部分的连续映射都有不动点？对于从 E 到其自身的同胚映射，是否也如此?

这个问题至今仍未解决。一些部分结果及相关结果见 [72, 16, 17]和 [15]。

Samuel Eilenberg 提出的问题138：位于某类（B_0）线性空间中的任何紧凸集都是绝对收缩核。

（回想一下，类型为 (B_0) 的线性空间恰好是弗雷歇空间（即完备可度量化拓扑向量空间）。这个问题引发了对绝对收缩核理论及相关的绝对延拓体理论的一系列研究。特别是，基本的杜根吉定理指出，局部凸可度量化拓扑向量空间的每个非空凸子集都是绝对收缩核。

最引人注目的结果之一是，并非所有线性拓扑空间都是绝对收缩子[18]。

问题151：WAVRE

1936年11月6日；

奖品：在日内瓦享用一次“奶酪火锅”；原稿为法语

是否存在一个定义在某个区域内的调和函数，该区域内部包含一个立方体，且此函数在立方体的所有棱上均为零？不考虑 $f \equiv 0$。

肯定答案见于 [94]。

问题157：WARD

1937年3月23日；

奖品：在“Dorothy”餐厅吃午餐

对这个问题的匿名评论指出，该问题已于1975年由 Richard O’Malley 解决。在 [13], 中有人指出，问题175的肯定解是 Daniel Ornstein 的一项结果 [67]的直接推论。

问题155：Mazur、Sternbach

1936年11月18日

给定两个空间 X, Y，它们属于类型（B），$y = U（x）$是将空间 X 一一映射到整个空间 Y 上的映射，并满足以下性质：对于每个 $x_0 \in X$，都存在一个 $\epsilon > 0$，使得映射 $y = U（x）$在 x 属于以 x_0 为中心、 ϵ为半径的球时，是一个等距映射。映射 $y = U（x）$是等距变换吗？若 U^{-1} 连续，这个定理成立。特别是，当 Y 是有限维时，或者具有以下性质时，情况便是如此：若 $\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|$，$y_1 \neq 0$，则$y_2 = \lambda y_1$，$\lambda \geq 0$。

用现代术语来说，这个问题可以重新表述如下：

设 U 是巴拿赫空间之间的一个双射映射。假设 U 局部等距。是否可以断定 U 是等距映射？

[55]中没有对此问题的评论。对于可分巴拿赫空间， [61]给出了肯定的解答。 [12]则给出了另一个部分解。

设 X 和 Y 是巴拿赫空间，且 $U : X \to Y$ 是局部等距映射。那么 U 是等距映射。这里，如果映射 f: $X \to Y$ 满足：对每个 $x \in X$，都存在一个开邻域V，使得 $f|V$ 是到 Y 的某个开子集上的等距映射，则称 f 为局部等距映射。

问题 175，Karol Borsuk 提出。

(a) 希尔伯特立方体 Q 与形状如字母 T 的曲线的笛卡尔积，是否与 Q 同胚？(b) 由无限序列的字母T 构成的乘积空间，是否与 Q 同胚?

回想一下，希尔伯特立方体

$$Q = I \times I \times I \times \dots$$

（I 表示单位线段）是 n 维立方体 $I \times I \times I \times \cdots \times I$（$n$ 个因子）的自然对应物。

非正式地说，Borsuk 的问题是：线段的无限乘积能否“吸收”字母 T 形曲线中的一个奇异点。H. Torunczyk 对这个问题作了详尽的评述（该问题后来由 Anderson 肯定地解决），并指出它对希尔伯特立方体几何的发展极为重要。事实上，还可以说得更多：无限维流形的拓扑学源于多个方面，其中之一便是 Borsuk 的问题。

《苏格兰书》中的一些问题与 J´ozef Schreier 的名字有关（问题 4、11、22、29、48、67、68、95、96、98、103、111、116）。在这篇文章 [37]中，作者概述了与 Schreier 博士论文相关的结果，以及《苏格兰书》中的一些问题。其中尤其包括乌拉姆提出的问题 96：

能否为整数的所有置换构成的群 S_∞ 定义一种度量，使群运算（置换的复合）成为连续函数，并使集合 S_∞ 在此度量下成为紧空间？（局部紧？）

1935年11月，Schreier 和乌拉姆发表了补遗：这个群无法被赋予紧致的度量。然而，局部紧的情形仍未解决，直到2011年，才在 [9]中得到否定的解决。

第184题 S. SAKS 奖品：一公斤培根。次调和函数 ϕ 处处具有偏导数 $\partial^2\phi/\partial x^2$, $\partial^2\phi/\partial y^2$。是否有 $\Delta\phi \geq 0$?

备注：显然，在 $\partial^2\phi/\partial x^2$的所有连续点处， $\Delta\phi \geq 0$,$\partial^2\phi/\partial y^2$成立，因此在一个处处稠密集上成立。

下列结果证明见 [32]:

设 u 是一个二元次调和函数，其一阶偏导数在坐标轴上存在，且 u_{xx}、 u_{yy} 在原点处存在。那么 $u_{xx}(0,0) + u_{yy}(0,0) \geq 0$。

这为该问题给出了肯定解答。

5. Continuing traditions

还有一些其他公开数学问题集以各种方式（历史、地理或思想层面）与《苏格兰书》相关。本节将介绍其中的一些。

5.1. **《新苏格兰书》**。《苏格兰书》最重要的续篇名为《新苏格兰书》，由弗罗茨瓦夫的数学家编纂而成。事实上，《新苏格兰书》的简史构成了 [55, 章的内容，而 8], 和[55, 章 9]则收录了该书的一些精选问题。颇具象征意义的是，第一个问题由雨果·施泰因豪斯提出；他也曾在原版《苏格兰书》中提出最后一个问题。

作者没有提供确切的统计数据，但乍看之下，显然大多数问题都属于拓扑学或相关领域。有些问题附有答案或评注。解答某些问题还可获得奖励。有些奖励并非实物，例如，B. 克纳斯特曾为解答某些问题提供“讲两个长度适中的笑话的机会”。

5.2. **“利沃夫苏格兰书”**。战后，苏格兰书所在的场所几经易主，用途也数度改变。有一段时间，那里甚至开过一家银行。2014年，那里又开起了一家餐厅和酒吧。店主恢复了旧名 Szkocka。餐厅将《苏格兰书》的一份副本作为一项特色保留下来。不久，访客开始在副本的空白页上写下他们到访餐厅的感想，也出乎意料地写下了新的数学问题。很快，店里便专门准备了笔记本来记录这些问题，于是新苏格兰书诞生了。详细历史以及部分问题的列表，可见 [5]。

“利沃夫苏格兰书”是数学家集体博客和在线社群 MathOverflow 的集体参与者。社群成员中有来自世界各国的许多著名数学家。

来访利沃夫的波兰研究生提出的一个问题，后来由美国数学家、菲尔兹奖得主陶哲轩解决。完全遵循利沃夫数学学派的传统，问题的提出者为解答者准备了一瓶蜂蜜酒作为奖品，因此决定在22

陶哲轩抵达华沙时颁发这份奖品。与此同时，陶哲轩还获得了现代利沃夫数学学会颁发的特别奖——一尊鹅雕塑。

5.3.**“非阿基米德苏格兰书”**。回想一下，如果一个度量 d 满足强三角不等式 $d(x,y) \leq \max\{d(x,z)\ d(z,y)\}$，就称其为非阿基米德度量。 p-进度量就是非阿基米德度量的一个例子。大约十年前，加州大学圣迭戈分校的 Kiran S. (Sridhara) Kedlaya 发起了所谓的“非阿基米德苏格兰书”（见 [46]）。

5.4. 《**拓扑学公开问题**》。《苏格兰书》中的许多问题都与集合论拓扑学有关。从这个意义上说， [59, 70]可以被视为《苏格兰书》的延续。我们还应注意到某种地理上的联系：书中有两章由当代利沃夫数学家撰写。

《拓扑学公开问题》项目的一项特色，是定期在《拓扑学及其应用》期刊上发表已解决的问题。据我们所知，这类发表在一段时间前就已停止。

5.5. **“《苏格兰茶馆小册子”** [《**苏格兰小册子**》]。 20世纪70至80年代，雅盖隆大学（波兰克拉科夫）的数学学生在雅盖隆大学学生数学家圈子的活动中，编制了一本笔记本，记录数学问题，其中有些问题设有奖品。该圈子网站上有如下记述：

*“1978*年，该圈子效仿利沃夫的前辈，开办了‘苏格兰茶馆’。学生们在那里提出问题，并为解答设定奖品。奖品包括一块巧克力、一瓶百事可乐、一节手电筒电池；如今听来都很平常，但当时这些奖品在商店里几乎买不到。问题被记录在一本特别的‘苏格兰小册子’中。最为人熟知的是第*48*题，后来被称为等距问题，由*Edward Kania*于*1979*年提出。学生和助教们为这道题苦思了一年；*1980*年*10*月，刚入学的学生*Sławomir Kołodziej*给出了答案。”（[48],由M. Stawiska从波兰语译出）。

这是一项严格限于当地的倡议，似乎并未延续下去。它并非附属于某家真正的茶馆。这个名称刻意关联到伟大的利沃夫先驱，指的是一系列非正式聚会，人们在会上喝茶（咖啡更难弄到）。苏格兰咖啡馆再次被视为一种象征。

最后，让我们引用记者约瑟夫·梅恩 [57], 的话。他最早描述了与苏格兰咖啡馆相关的知识群体：“咖啡馆是一场你不会事先安排

却会欣然赴约的聚会！也就是说：这不仅是与他人相聚，也是与自己自由相会的独特机会——一种不受拘束地“回归自我”的独特机会。

6. Acknowledgements

作者　　感谢 Maciej Klimek 提醒他们注意到这篇参考文献 [48] 。

References

[1] Alfonseca, M. ´Angeles；Saor´ın G´omez, Eugenia：《苏格兰书》中乌拉姆问题19的一个反例，《西班牙皇家数学会公报》26（2023），第3期，457–475页[2]Anderson, Stuart 2020：Zbigniew Moro´n（1904—1971年），Wraclow [sic]，Poland，在线版本（20.02.2021）：http://www.squaring.net/history_theory/z_moron.html[3] Audin, Mich`ele：《Fatou、Julia、Montel：1918年数学科学大奖及其后续》。法语译本。《数学讲义》2014。《数学史分辑》。柏林：Springer（ISBN 978-3-642-17853-5/平装；978-3-642-00446-9/电子书）。viii，332页。（2011）[4] Avila, Artur；Jitomirskaya, Svetlana：《十马提尼问题》。《数学年刊》（第2辑）170，第1期，303–342页（2009）[5] Iryna Banakh、Taras Banakh、Olena Hryniv、Yaroslav G. Prytula、Mykhailo Zarichnyi：《苏格兰书：延续传统》。《Antiquitates Mathematicae》18（2024），71–103页[6] T.O. Banakh，纪念《苏格兰书》首次记录85周年的小型会议，https://www.youtube.com/watch?v=x51gZonZivw[7] Taras Banakh、Robert Cauty，《弗雷歇空间中闭凸集的拓扑分类》，《数学研究》，2011，205，1，1–11，DOI 10.4064/sm205-1-1[8] T.O. Banakh、A.M. Plichko，关于《苏格兰书》中度量空间凝缩映射到紧空间的问题，《数学研究》8（1997）119–122。[9] Taras Banakh；Igor Guran，完全可支撑半群在每一种豪斯多夫平移不变拓扑中都是 σ-离散的，《拓扑代数及其应用》（2013）第1卷，1–8页[10] Barner, Klaus：《Paul Wolfskehl与沃尔夫斯凯尔奖》。《美国数学会会刊》44，第10期，1294–1303页（1997）[11] Barrow-Green, June，《Poincar´e与三体问题》。《数学史》（普罗维登斯）11。普罗维登斯，罗得岛：AMS，美国数学会；伦敦：伦敦数学会（ISBN 0-8218-0367-0）。xv，272页。（1997）[12] Giuliano Basso，《Mazur与Sternbach的一个问题》，arXiv:2308.08400[13] Kevin Beanland、Paul Humke、Trevor Richards，《关于苏格兰书问题157》，《实分析交流》，第41卷，第2期，2016年，331–346页。[14] P. Biler、P. Krupski、G. Plebanek和W. A. Woyczy´nski：《西方的´*Lwów*：弗罗茨瓦夫-新苏格兰书简史，第三部分见 [55][15] Blokh, Alexander；Oversteegen, Lex；Timorin, Vladlen，《多项式Julia集不变子连续统的割点》，《Arnold数学期刊》8（2022），第2期，271–284页。[16] J.P. Boro´nski，《平面同胚映射的卡特赖特–利特尔伍德不动点定理的一种推广》，《遍历论与动力系统》（2017），37，1815–1824页，doi:10.1017/etds.2015.129

[17] J.P. Boro´nski、J. Kupka，《超空间上诱导映射的一个Sternbach型不动点问题》。《拓扑学及其应用》282（2020）107304[18] R. Cauty，《一个不是绝对收缩核的线性度量空间》，《数学基础》146（1994），85–99页。[19] Robert Cauty，《Schauder不动点问题的解》，《数学基础》（2001），170，第3期，231–246页[20] R. Cauty，《代数邻域绝对收缩核》，《Serdica数学期刊》31（2005），第4期，309–354页。[21] Marianna Chatzakou、Yannis Sarantopoulos，《巴拿赫空间上多项式范数的估计》，《多洛米蒂近似研究札记》，第14卷，2021年，40–52页。[22] K. Ciesielski、Z. Pogoda：《与Andrzej Turowicz的谈话》，《数学智者》10.4（1988），13–20页[23] Dobrowolski, Tadeusz：《重访Cauty对Schauder猜想的证明》。《抽象与应用分析》（2003）。第2003卷，第7期，407–433页[24] T. Dobrowolski、H. Toru´nczyk，关于与 ℓ_2 同胚的线性度量空间，以及与 Q同胚的紧凸集，《波兰科学院通报》数学科学系列27:11-12（1979），883–887页。[25] S. Domoradzki、Z. Pawlikowska-Bro˙zek：《J´ozef Marcinkiewicz（1910—1940年）：以文献与回忆为视角。诞辰百年纪念》。《文集》19/1-2（36-37），23–62页[26] S. Domoradzki、M. Stawiska，《两次世界大战之间时期雅盖隆大学数学杰出毕业生。第二部分：1926—1939年》。《技术汇刊》（《技术期刊》），基础科学（基础科学）第2-NP卷，112（2015），117–141页。[27] Domoradzki, Stanis-law；Stawiska, Ma-lgorzata；Zarichnyi, Michael 2021：《利沃夫数学学派的形成与活动》，载于第227–286页，见Be˘cv´a˘rov´a, Martina（编）2021：《两次世界大战之间的数学发展：案例研究、实例与分析》，欧洲—新加坡：World Scientific Publishnig Ltd.，ISBN 978-1-78634-930-9。[28] R. Duda，《失落之城的珍珠：利沃夫数学学派》，Daniel Davies译自2007年波兰语原版。《数学史》第40卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2014年。xii + 231 页。ISBN 978-1-4704-1076-6；波兰语版：Lwowska szko-la matem- atyczna。弗罗茨瓦夫：弗罗茨瓦夫大学出版社，《弗罗茨瓦夫大学学报》第2949号。2007年。256页。[29] R. Duda，《波兰数学史：科学与文化发展背景下的考察》，波兰科学院科学史研究所及ASPRA-JR 出版社，华沙，2019年[30] R. Duda（编）：《波兰数学家传记词典》，克拉科夫，波兰艺术与科学学院，2024年[31] R. Duda、M. Terepeta：Zahorski, Zygmunt Marian，见 [30]。467–468页[32] A. Eremenko，《Stanislaw Saks的一个问题》，《数学研究》52（2019），173–175页。[33] Feigenbaum, Mitchell 1982：《波兰大师的回忆：与Stan Ulam和Mark Kac的访谈》，《洛斯阿拉莫斯科学》3(3)，54–65页，ISSN 0273-7116[34] Fleck, Ludwik（1935）。《科学事实的产生与发展——思维风格与思维集体学说导论》（德语）。巴塞尔：Schwabe 出版社，出版部。[35] D. I. Florentin、C. Sch¨utt、E. M. Werner和N. Zhang，《凸平衡浮体》，《美国数学会会刊》150（2022），3037–3048页。

[36] I. L. Glicksberg, 《角谷不动点定理》的进一步推广及其在纳什均衡点中的应用, 《美国数学会会刊》第3卷第1期（1952年2月）, 第170–174页[37] I. Guran、Ya. Prytula：《拓扑群中的有限基》, 《数学研究》第39卷（2013年）, 第3–9页。[38] 希尔伯特, David, 1902年：《数学问题》, 《美国数学会通报》第8卷第10期, 第437–479页。doi:10.1090/S0002-9904-1902-00923-3[39] Huang, Han；Slomka, Boaz A.；Werner, Elisabeth M.（2019）。乌拉姆浮体。《伦敦数学会杂志》第100卷第2期: 425–446。[40] Jakimowicz, Emilia；Miranowicz Adam（编）2011年：斯特凡·巴拿赫：非凡人生, 璀璨数学。传记资料。第三版。格但斯克：格但斯克大学出版社, ISBN：978-83-7326-827-2[41] Leon Je´smanowicz：《回忆》, 第 [56], 277–280页[42] Kac, Mark, 1981年：《苏格兰书的个人史》, 载于Mauldin, Richard Daniel（编）2015年[43] M. Kac, 《机遇之谜：自传》。阿尔弗雷德·P·斯隆基金会。哈珀与罗出版公司, 纽约, 1985年。xxviii+163页。ISBN：0-06-015433-0[44] S. Kaczmarz、A. Turowicz：论不定积分的无理性, 《数学研究》, 利沃夫, 第8卷, 129–134页（1939年）。JFM 65.0212.02[45] Ekaterina Kalikinskaya, 马克·约西福维奇·维希克访谈, 《纯粹与应用分析通讯》第13卷第5期, 2014年9月, 第i–x页；doi:10.3934/cpaa.2014.13.5i[46]Kiran Kedlaya等, https://scripts.mit.edu/~kedlaya/wiki/index.php?title=The_Nonarchimedean_Scottish_Book[47] Kordos, Marek, 2011年, 《苏格兰书》, 载于第143–152页 [40][48] Anna Maria Kos、Krzysztof Ciesielski、Danuta Ciesielska、Antoni Leon Dawidowicz、Andrzej Grze-sik、Zdzis-law Pogoda、Edward Tutaj、Anna Valette, 《历史》, 日期不详, https://kmsuj.matinf.uj.edu.pl/historia_koa/ [49] W. Kulpa、A. Szymanski 和 M. Turza´nski, 不动点定理与 L^*-算子, 《不动点理论与应用杂志》（2018）20:23 https://doi.org/10.1007/s11784-018-0494-9[50]Kuratowski, Kazimierz, 《波兰数学半世纪 1920—1970年：回忆与思考》。华沙：大众知识出版社。1973年。Andrzej Kirkor 英译：《波兰数学半世纪：回忆与思考》。S. Ulam作序。纽约州埃尔姆斯福德：培格曼出版社；华沙：PWN波兰科学出版社, 1980年（《纯粹与应用数学国际丛书》, 108）, viii+200 页。ISBN：0-08-023046-6[51] J.S. Lipi´nski, Zygmunt Zahorski（1914—1988年）, 《数学消息》第36卷（2000年）, 73–83页[52] Liu, Chunyan；Werner, Elisabeth M.；Ye, Deping；Zhang, Ning, 阿基米德浮力原理与浮体：构造、推广及相关问题, 《数学科学学报（B辑）》（英文版）第45卷（2025年）, 第1期, 237–256页。[53] Lech Maligranda：J´ozef Marcinkiewicz（1910—1940年）——纪念其诞辰百年, 《马尔琴凯维奇百年纪念文集》, 《巴拿赫中心出版物》第95卷, 波兰科学院数学研究所, 华沙, 2011年, 第133–234页 [54] Lech Maligranda、Jaros-law G. Prytu-la, 1939—1941年利沃夫大学：数学、物理学与天文学。《数学消息》第53卷第2期, 2017年, 303–329页

[55]Mauldin, Richard Daniel（编）2015年：《苏格兰书：苏格兰咖啡馆中的数学》，附新苏格兰书选录问题。第二版，修订增补版。尚贝里：Birkhäuser/Springer，ISBN 978-3-319-22896-9[56] J. Marciak-Koz-lowska、E. Jakimowicz（编）：J´ozef Marcinkiewicz：天才数学家——卡廷的殉难者。Wydawnictwo Buk，比亚韦斯托克，2011年[57] Mayen, J´ozef，1934年：《利沃夫咖啡馆漫谈》，《Chwila》，6月18日至7月9日，在线版（2021年2月20日）：http://www.lwow.com.pl/rocznik/kawiarnie.html[58] S.V. Medvedev，k-博雷尔集到完备度量空间的压缩，《苏联数学文摘》，第31卷（1985年），341–344页。[59] van Mill, Jan 和 George M. Reed（编）。《拓扑学公开问题》。阿姆斯特丹：North-Holland，1990年。[60] Montejano, Luis，《波兰数学学派的三个古老问题》，《墨西哥数学会公报》（第3辑）第30卷（2024年），第2期，论文编号68，共9页。[61]Michiya Mori，关于Mazur和Sternbach提出的《苏格兰之书》问题155，《数学报告》2024年，第362卷，第813–816页 https://doi.org/10.5802/crmath.572[62] Z. Moro´n，《论矩形的正方形分割》，《数学与物理评论》第3卷，152–153页（1925年）[63] Z. Moro´n，《论矩形的近乎完美-sic ∫分割》，《波兰数学会年刊》第二辑，《数学消息》第1卷第2期，175–179页（1956年）[64] Jan Mycielski、Hugo Steinhaus：一个与选择公理相矛盾的数学公理，《波兰科学院通报》数学、天文学与物理学辑，第10卷（1962年），1–3页。[65] Nadler S.B., Jr.、Quinn J.、Stavrokas N.M. 紧凸集超空间，《太平洋数学杂志》第83卷（1979年），第441–462页。[66] von Neumann, J.，《关于博弈论》。《数学年刊》第100卷，295–320页（1928年）。[67] D. Ornstein，单调函数的刻画，《伊利诺伊数学杂志》第15卷（1971年），73–76页[68] Alexander V. Osipov，关于巴拿赫问题1：巴拿赫空间到紧空间的压缩，《Filomat》第37卷第7期（2023年），2183–2186页。https://doi.org/10.2298/FIL2307183O[69] Alexander V. Osipov，关于第一个巴拿赫问题：绝对 κ-博雷尔集到紧空间的压缩，《匈牙利数学学报》第173卷，169–175页（2024年）。https://doi.org/10.1007/s10474-024-01428-9[70] Pearl, Elliott M.（编）。《拓扑学公开问题 II》。阿姆斯特丹：爱思唯尔，2007年。[71] E.G. Pytkeev，拓扑的上界，《数学札记》第20卷（1976年），831–837页。[72] D. Robatian，连续统在诱导区间映射下的不动点性质，《数学科学杂志》第215卷（2016年），376–386页。[73] Rosa, Alessandro，《全纯动力系统的起源：关于“数学大奖赛”（1915—1918年）选定主题的历史研究》。尚贝里：Birkhäuser（ISBN 978-3-032-17105-4/hbk；978-3-032-17108-5/pbk；978-3-032-17106-1/ebook）。x，512页。（2026年）[74] Ryabogin, D.：《苏格兰书》中乌拉姆问题19的否定答案。《数学年刊》（第2辑）第195卷第3期，1111–1150页（2022年）[75] Ryabogin, Dmitry，任意方向平衡漂浮的物体，《几何学专论》第217卷（2023年），第4期，论文编号70，共17页。

[76] （多个版本及作者）《苏格兰书》。波兰语和英语手稿及打字稿的副本，在线文档，http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/archiwalia. html[77] J. Schauder，《函数空间中的不动点定理》，《数学研究》2（1930年），第171–180页。[78] W. Sierpi´nski，《关于全体无理数集合的一一映像》，Matematica 1（1929年），第18–20页。[79] Stawiska, Ma-łgorzata 2015：2015年1月在美国得克萨斯州圣安东尼奥举行的联合数学会议上的波兰数学，Antiquitates Mathematicae 9，第181–192页，ISSN 1898-5203[80] H. Steinhaus，《泛函分析在实函数论若干问题上的应用》，《数学研究》1（1929年），第51–81页[81] H. Steinhaus，《回忆与笔记》。Wydawnictwo Aneks。伦敦，1992年。英文译本： [82][82] H. Steinhaus，《四季数学家——回忆与笔记》，第1卷（1887–1945）。Kazimierz Dziewanowski作序。A. Shenitzer由波兰语译出。R.G. Burns、I. Szymaniec和A. Weron编订并撰写导言，Vita Mathematica丛书第18卷，Birkhäuser — Springer，尚贝里，2015年，xiii + 491 页。ISBN 978-3-319-21983-7。[83] Storozh, O. G.; Chuyko, G. I.; Kudryk, T. S.; Mykytyuk, Ya. V.; Sushchyk, N. S. Vladyslav Elijovych Lyantse（纪念其诞辰100周年）。《数学研究》55卷第2期，214–222页（2021年）[84] E. Szpilrajn-Marczewski，《关于集合类的两个性质》，《数学基础》33(1)，303–307页（1945年）[85] Telg´arsky, Rastislav 1987：《拓扑博弈：纪念巴拿赫-马祖尔博弈诞生50周年》，Rocky Mountain Journal of Mathematics 17，第227–276页，ISSN 0035-7596[86] Olaf Teschke，《“数学进展年鉴”作为 zbMATH Open 的组成部分》，Eur. Math. Soc. Mag. 122（2021年），第62–64页[87] Toru´nczyk, H.《希尔伯特空间拓扑的刻画》，《数学基础》111.3（1981年）：247–262。[88] Fejes T´oth, G.（2023）。凸体序列的装填与覆盖性质。载于：Lagerun-gen。《数学科学基础丛书》第360卷。Springer，尚贝里。https://doi.org/10.1007/978-3-031-21800-2_14[89] A. Turowicz：录音带，日期不详，承蒙 Z. Pawlikowska-Bro˙zek 惠允，由 S. Domoradzki 转录，M. Stawiska-Friedland 译为英语[90] A. Turowicz：《关于连续乘性泛函》，Ann. Soc. Polon. Math. 20，135–156页（1948年）。[91] Tychonoff, A.：《不动点定理》，Math. Ann. 3，1935年，767–776页。[92] S. M. Ulam，《数学家的冒险》，Charles Scribner’s Sons，纽约，1976年。xi+317页（25幅插图）。波兰语版：Ulam Stanis-ław M. 1996：《数学家的冒险》，Agnieszka G´ornicka 译，华沙：Pr´oszy´nski i S-ka，ISBN 83-86868-25-2。[93] Stanislaw Ulam，《苏格兰书轶事史》，第1章。[94] Ioann Vasilyev，《调和多项式的零点集》，arXiv:2506.24116[95] Z. Zahorski，《关于具有各阶导数的实变量函数的奇点集》，Fund. Math. 34（1947年），183–245页[96] Zahorski, Zygmunt 1986：《传记纲要》，Zeszyty Naukowe Politechniki ´Sl˛askiej, Matematyka-Fizyka 48，第7–25页。ISSN 0072-420X

[97] Zahorski, Zygmunt；对波兰数学会历史委员会调查的答复，寄给 Zofia Pawlikowska-Bro˙zek 博士（未发表），现由 Stanis-law Domoradzki 保存[98] Bart-lomiej Zawalski，《平面上漂浮体与浮力体的位似猜想》，arXiv:2507.11850[99]K. Zielinski，苏格兰咖啡馆的´客人和主人 [《苏格兰书》咖啡馆的客人与主人]《数学消息》55（1），2019年，第197–215页

Institute of History, University of Rzeszów, al. Rejtana 16 c, 35-959 Rzeszów, Poland

电子邮箱地址：stanislawdomoradzki@gmail.com

AMS/Mathematical Reviews, 535 W. William St., Ste 2100, Ann Arbor, MI 48103, USA

电子邮箱地址：stawiska@umich.edu

Institute of Mathematics, University of Rzeszów, 1 Profesora Stanisława Pigonia Str, 35-310 Rzeszów, Poland

电子邮箱地址：mzarichnyy@ur.edu.pl