AIII 型扭曲杨扬子代数与 C 型斯坦伯格簇

CHANGJIAN SU 和 YANG YANG

Abstract. 我们研究 C 型广义斯坦伯格簇的等变同调，并证明存在一个从 AIII 型扭 Yangian 到它的满射代数同态$^{(\tau)}_{2n}$ 。

arXiv:2603.28084v1 [math.RT] 30 Mar 2026

Contents

1. 引言 1
2. 卷积与 C 型斯坦伯格簇 4
3. 对应关系与算子 16
4. 主要结果 21
5. 扭曲杨扬子代数的表示 23
6. 验证关系 27
参考文献 38

1. Introduction

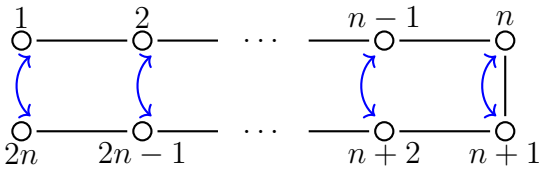
几何方法为研究代数的表示提供了强有力的工具。一个关键步骤是通过卷积在几何上实现这些代数；随后可以利用所得卷积代数的表示来构造所关注代数的表示，参见 [CG10]。Kazhdan 和 Lusztig 利用斯坦伯格簇的等变 K 群，为 Langlands 对偶群的仿射 Hecke 代数给出了几何实现，并通过 Springer 纤维对其不可约表示进行了分类 [KL87]（另见 [CG10, Xi07]）。这对量子仿射代数同样适用。Ginzburg–Vasserot 和 Vasserot 通过与 A 型 $\mathfrak{gl}_n$ 相应的广义斯坦伯格簇的等变 K 群，研究了 n-步偏旗簇对应的仿射量子群 [GV93, Vas98]。A 型偏旗簇的余切丛是 Nakajima 箭图簇的特殊情形。Nakajima 利用其箭图簇的等变 K 理论，实现了 ADE 型量子仿射代数 [Nak01]，而 Varagnolo 利用箭图簇的等变同调，实现了相应的 Yangian [Var00]。Nakajima 箭图簇是箭图规范理论的 Higgs 支。最近，Bravermann、Finkelberg 和 Nakajima 给出了 Coulomb 支的严格数学定义 [BFN18]。此外，移位 Yangian 和移位仿射量子代数可以通过量子化 Coulomb 支实现

相应箭图规范理论的量子化 Coulomb 支，参见 [BFN19、 FT19、 NW23、 Wee19]。在所有这些工作中，量子代数的 Drinfeld 新表示发挥了重要作用 [Dri87、 Bec94、 Dam12]。另一方面，Beilinson–Lusztig–MacPherson 利用有限域上的 A 型部分旗簇，也实现了 A 型量子群 [BLM90]。通过 Maulik–Okounkov 稳定包络，利用 RTT 形式，Yangian 和量子仿射代数也可以通过 Nakajima 箭图簇的几何实现，参见 [MO19 、 OS22]

i量子群源于将对称对（$\mathfrak{g}$、 $\mathfrak{g}^\sigma$）量子化为量子对称对，是 Drinfeld–Jimbo 量子群的自然推广。量子群的许多重要构造已推广到 i量子群，参见 [Wan23]。在 [BKLW18], 中，拟分裂 AIII 型 i量子群通过计算有限域上 B 型 N 步各向同性旗的点数得以实现；这一结果在 [FLL+20] 中推广到了仿射情形。得益于近期在 [LWZ24], 中获得的 AIII 型仿射 i 量子群的 Drinfeld 型新表示，该仿射 i 量子群可以通过 C 型广义斯坦伯格簇的等变 K 理论实现 [SW24] （另见 [FMX22]），从而推广了 Ginzburg–Vasserot 和 Vasserot 的工作 [GV93, Vas98]。经典型偏旗簇的余切丛是 Li 所定义的 σ-箭图簇的例子 [Li19], ；后者旨在研究（量子）对称对的几何表示论。特别地，Li 运用 Maulik–Okounkov 稳定包络的层论表述 [Nak17], ，为 σ-箭图簇构造了稳定包络，并由此定义了扭 Yangian——Maulik–Okounkov Yangian 的一个余理想子代数——它作用于箭图簇的上同调之上。在 [LWZ25a, LWZ25b], 的基础上，Lu 和 Zhang 建立了拟分裂 [LZ25] 型扭 Yangian 的 Drinfeld 新表示。基于此，我们可以利用箭图规范理论中对合不变部分的库仑支簇，对移位扭 Yangian 给出几何实现 [LWW25a, SSX25] （另见 [BPT25, LWW25b, Wan25]）。在 [DM24], 中，Dong 和 Ma 研究了 B 型和 C 型广义斯坦伯格簇的等变同调，定义了预扭 Yangian，并构造了从预扭 Yangian 到广义斯坦伯格簇等变同调的一个代数同态。预扭 Yangian 与 AIII 型扭 Yangian 密切相关。此外，Luo、Xu 和第二作者利用广义斯坦伯格簇给出了 Schur 代数的一个几何构造 [LXY24]。

现在陈述本文的主要结果。设 d 和 n 是两个正整数，并设 $N = 2n + 1$。设 $V := \mathbb{C}^{2d}$ 是一个辛向量空间， $G = \mathrm{Sp}(V)$，且 $\mathscr{F}$ 是 N 步部分旗簇，其余切丛为 $\mathscr{M} := T^*\mathscr{F}$。环面 $\mathbb{C}^*$ 通过缩放余切纤维作用于 $\mathscr{M}$ ，设 $\hbar$ 是其等变参数。 G 在 $\mathscr{F}$ 上的自然作用在辛簇 $\mathscr{M}$ 上诱导出哈密顿作用，其矩映射为 $\mathscr{M} \to \mathscr{N} \hookrightarrow \mathfrak{sp}_{2d}$，其中 $\mathscr{N}$ 是李代数 $\mathfrak{sp}_{2d}$ 的幂零锥。设 $Z := \mathscr{M} \times_{\mathscr{N}} \mathscr{M}$ 为广义斯坦伯格簇，且 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 为

具有复系数的等变博雷尔–摩尔同调。通过卷积，它是基环 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G[\hbar]$ 上的结合代数，参见 [CG10、AF24]。设 $\mathbf{Y}^\imath$ 为拟分裂 AIII 型的扭 Yangian$_{2n}^{(\tau)}$，它对应于下列 Satake图：



其中蓝色箭头表示图的对合 τ。以下是我们的主要结果。

Th定理 1.1 (定理4.5 和 5.1)。存在一个代数同态

$$\Psi : \mathbf{Y}^\imath \to H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z),$$

并且当我们将半单元$(s,t) \in \mathfrak{g}\times\mathbb{C}$ 特化为满足 $t \neq 0$ 的情形时，该同态是满射。

证明思路如下。对于扭曲 Yangian $\mathbf{Y}^\imath$ 的生成元，我们在等变同调群中关联一些显式元素 $\mathscr{H}_{i,r}$ 和 $\mathscr{B}_{i,r}$。为了证明这是一个代数同态，我们在 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 的忠实模 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{F})$ 上检验这些关系，见引理 2.7。在 [DM24、FMX22、SW24], 中，算子分为两类，因此检验关系时需要考虑许多情形。我们的方法的第一个优点是对所有算子都有统一的公式。此外，在斯坦伯格簇 Z 中，通过交换 $\mathscr{M}$ 的两个因子，$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 上存在一个显然的对合；它与卷积相容，并将与 $\mathbf{Y}^\imath$ 生成元对应的元素 $\mathscr{B}_{i,r}$ 互换，见引理 3.3。这两点显著简化了关系的验证。

借助 [CG10, Chapter 8], 中卷积代数表示的构造，我们能够构造扭 Yangian $\mathbf{Y}^\imath$ 的一些表示。另一方面，本文研究的扭 Yangian $\mathbf{Y}^\imath$ 与 Molev 和 Ragoucy 引入的反射代数密切相关；他们还完整描述了后者的有限维不可约表示，参见 [LZ25, Theorem 6.17] 和 [MR02]。特别是，我们在下文 (3.3) 和 (3.7) 中生成元 $\mathscr{H}_{i,r}$ 以及 $\mathscr{B}_{i,r}$ 的移位 $\frac{n-i}{2}\hbar + \frac{\hbar}{4}$，与 [LZ25, Equation (6.23) and (6.24)] 中的移位十分吻合。一个有趣的问题是，如何将几何构造的表示与 [MR02] 中的表示对应起来。

定理 1.1的一个直接推论是，扭 Yangian $\mathbf{Y}^\imath$ 作用于 N步 C 型偏旗簇的余切丛的等变上同调。Nakajima 在 [Nak25定理 7 中也得到了这一结果。4] 偏旗簇的余切丛是 σ箭图簇的特例。在 同上中，Nakajima 计算了相应的 K 矩阵，从而确定了通过稳定包络定义的扭 Yangian 与 Molev–Ragoucy 反射

代数。因此，这些余切丛的上同调承载着 Molev–Ragoucy 反射代数的一个表示。

让我们以概述本文结构作为引言的结尾。在第2节中，我们回顾卷积构造，并证明 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}$（$Z$的生成集。在第3节中，我们构造扭 Yangian $\mathbf{Y}^\prime$中与生成元相对应的显式同调元素。在第4节中，我们回顾 $\mathbf{Y}^\prime$的 Drinfeld 新表示，并陈述主要结果。在第5节中，我们证明特化同态是满射的，并通过 Spaltenstein 簇的几何构造 $\mathbf{Y}^\imath$ 的表示。最后，我们在第6节中证明主要定理。

致谢。我们感谢罗力、Hiraku Nakajima、王伟强、Zheming Xu 和 Weinan Zhang 的有益交流。C.S. 得到了国家重点研发计划（编号：2025YFA1017400）的支持。Y.Y. 得到了国家自然科学基金（编号：125B2001）的支持。

2. Convolutions and Steinberg varieties of type C

2.1. 等变博雷尔–摩尔同调中的卷积。对于连通复约化代数群 G 以及拟射影 G-簇 X，令 $H_*^G(X)$（分别为 $H_G^*(X)$）表示 X 的 G-等变博雷尔–摩尔同调（分别为 G-等变上同调），其系数为复数，并且是环 $H_*^G(\mathrm{pt})$ 上的模；参见 [AF24]。通过庞加莱对偶，我们有一个作用映射，记作点乘：$H_G^*(X)\otimes H_*^G(X)\to H_*^G(X)$。任意定义在 X 上的 G-等变向量丛 E 都有一个等变陈多项式 $\lambda_z(E):=\sum_i z^i c_i(E)\in H_G^*(X)[z]$，其中 $c_i(E)$ 表示 E 的第 i 个 G- 等变陈类。令 $K^G(X)$ 为 X 的 G- 等变 K 群，参见 [CG10]。那么，等变陈多项式 $\lambda_z(E)$ 仅取决于 E 在 $K^G(X)$ 中的类。

给定三个光滑的 G 代数簇 M_1，M_2，M_3，令

$$p_{ij}: M_1\times M_2\times M_3\to M_i\times M_j$$

为显然的投影映射。设 $Z_{12}\subseteq M_1\times M_2$ 和 $Z_{23}\subseteq M_2\times M_3$ 是 G 稳定的闭子簇。记

$$Z_{12}\circ Z_{23}=p_{13}(p_{12}^{-1}(Z_{12})\cap p_{23}^{-1}(Z_{23})).$$

若 p_{13} 到 $p_{12}^{-1}(Z_{12})\cap p_{23}^{-1}(Z_{23})$ 的限制是真映射，则我们定义卷积乘积如下（参见 [CG10]）：

$$\begin{aligned}\star:\quad H_*^G(Z_{12})\otimes H_*^G(Z_{23})&\longrightarrow H_*^G(Z_{12}\circ Z_{23}),\\ \gamma_1\otimes\gamma_2&\mapsto p_{13*}(p_{12}^*\gamma_1\cap p_{23}^*\gamma_2).\end{aligned}$$

设 $F_i(i=1,2)$ 为光滑的 G-簇，$M_i=T^*F_i$，且 π_i 表示投影 $M_i\to F_i$，s_i 表示零截面 F_i 到 M_i 的包含映射。环面 $\mathbb{C}^*$ 通过 $z\cdot(x,\xi)=(x,z^{-2}\xi)$ 作用于 M_i，其中 $x\in F_i$ 且 $\xi\in T_x^*F_i$。令 q 表示 $\mathbb{C}^*$ 的一次表示，并令 $\hbar:=c_1^{\mathbb{C}^*}(q^{-2})$。则 $H_*^{\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt})=\mathbb{C}[\hbar]$。

设 $\mathscr{O} \subset F_1 \times F_2$ 是光滑的闭 G-稳定子簇，且 $Z_{\mathscr{O}}$ 表示余法丛 $T^*_{\mathscr{O}}(F_1 \times F_2)$ $\subset M_1 \times M_2$。假设投影 $p_{i,\mathscr{O}}: \mathscr{O} \to F_i$ 是光滑纤维化，且 $p_{1,\mathscr{O}}$ 为真映射；我们还假设第一个投影 $p_1 : Z_{\mathscr{O}} \cap (M_1 \times F_2) \to M_1$ 为真映射（例如，当 F_2 为真映射时，此条件成立）。我们将卷积构造应用于情形 $M_3 =$pt、$Z_{12} = Z_{\mathscr{O}}$ 和 $Z_{23} = s_2(F_2)$。根据 $\mathcal{O}$ 的假设，

$$p_1(Z_{\mathscr{O}} \cap (M_1 \times F_2)) \subset s_1(F_1).$$

因此，卷积给出了一个态射

$$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathcal{O}}) \otimes H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(F_2) \to H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(F_1).$$

由 Thom 同构，$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathscr{O}}) \simeq H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{O})$。因此，任意 $\gamma \in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{O})$ 都定义了一个 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}$(pt)-模同态 $\rho_\gamma : H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(F_2) \to H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(F_1)$，我们需要以下有用公式。

引理 2.1. [Vas93, 引理 2] 对任意 $\gamma \in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{O})$ 和 $\gamma_2 \in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(F_2)$,

$$\rho_\gamma(\gamma_2) = p_{1,\mathscr{O}*}\Big(\mathrm{Eu}(q^{-2} \otimes T^*_{p_{1,\mathscr{O}}}) \cdot p^*_{2,\mathscr{O}}\gamma_2 \cap \gamma\Big) \in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(F_1),$$

其中 $T^*_{p_{1,\mathscr{O}}}$ 是相对余切丛，而 $\mathrm{Eu}(q^{-2}\otimes T^*_{p_{1,\mathscr{O}}})$ 是 $T\times\mathbb{C}^*$-等变欧拉类，它对应于 $T^*_{p_{1,\mathscr{O}}}$ 与带有 $\mathbb{C}^*$ 的非平凡q^{-2} 作用的平凡线丛的张量积。

在进行计算时，我们将频繁使用等变博雷尔–摩尔同调中的局部化公式。设 $T \subset G$ 为一个极大环面，并设 X 为一个光滑射影簇，且环面不动点集 X^T 是有限的。首先，我们有 $H_*^G(X) \simeq H_*^T(X)^W$，其中 W 是魏尔群。令 $\pi : X \to$ pt 为结构态射。那么对任意 $\gamma \in H_*^T(X)$，我们有如下局部化公式 [AB84]

$$\pi_*(\gamma) = \sum_{x\in X^T} \frac{\gamma|_x}{\mathrm{Eu}(T_xX)} \in H_*^T(\mathrm{pt}), \tag{2.1}$$

其中，$\gamma|_x \in H_*^T$(pt) 是将 γ 拉回到不动点 $x \in X^T$所得的结果，而 $\mathrm{Eu}(T_xX) = \prod_{\mu_i} \mu_i \in H_*^T$(pt) 是 T-向量空间T_xX中所有环面权 $\{\mu_i\}$ 的乘积。

2.2. C 型偏旗簇。设 $V := \mathbb{C}^{2d}$，其上配有一个由矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & J_d \\ -J_d & 0 \end{pmatrix}$, 给出的非退化斜对称双线性形式 $(-,-)$，其中

$$J_d = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}_{d\times d}.$$

在全文中，我们设

$$G = \mathrm{Sp}(V) \quad \text{and} \quad N = 2n+1,$$

n 为一个固定的正整数。对于 $1 \le i \le 2n$，令 $\tau i := N - i$。令

$$\Lambda_{\mathfrak{c},d} = \Big\{\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{N}^N \mid v_i = v_{N+1-i}, \quad \textstyle\sum_{i=1}^N v_i = 2d\Big\}. \tag{2.2}$$

对于任意子空间 $W \subseteq V$，令 $W^\perp = \{x \in V \mid (x, \ y) = 0, \quad \forall y \in W\}$。对于任意$\mathbf{v} \in \Lambda_{\mathfrak{c},\ d}$，定义

$$\mathscr{F}_{\mathbf{v}} = \{F = (0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_N = V) \ \mid \ V_i = V_{N-i}^\perp, \ \dim(V_i/V_{i-1}) = v_i, \ \forall i\}.$$

在 V 上的自然 G-作用诱导出 G 在 $\mathscr{F}_{\mathbf{v}}$上的自然传递作用，因此

$$\mathscr{F} = \bigsqcup_{\mathbf{v} \in \Lambda_{\mathfrak{c},d}} \mathscr{F}_{\mathbf{v}} \tag{2.3}$$

是一个 G-簇，称为 N步部分旗簇。令 $\{\epsilon_i \mid 1 \le i \le 2d\}$ 为 V的标准基。令 $F_{\mathbf{v}}$ 为 $\mathscr{F}_{\mathbf{v}}$ 中的旗，使得对于 $1 \le i \le n$， $V_i = \mathsf{Span}\{\epsilon_j \mid j \in [\mathbf{v}]_i\}$且 $V_{N-i} = V_i^\perp$。令 $P_{\mathbf{v}}$ 为 G中保持旗 $F_{\mathbf{v}}$ 不变的稳定子，则

$$G/P_{\mathbf{v}} \simeq \mathscr{F}_{\mathbf{v}}. \tag{2.4}$$

Let

$$\mathscr{M} := T^*\mathscr{F}$$

是 $\mathscr{F}$的余切丛。

令 $W_{\mathfrak{c}} = \mathbb{Z}_2^d \rtimes S_d$ 为类型 C_d的魏尔群，它自然作用于集合$\{1, 2, \ldots, 2d\}$上。对于任意$\mathbf{v} = (v_1, \ \cdots, \ v_N) \in \Lambda_{\mathfrak{c},\ d}$，令 $\bar{v}_i := v_1 + \cdots v_i$, $[\mathbf{v}]_i = [1 + \bar{v}_{i-1}, \bar{v}_i]$，其中 $1 \le i \le N$，且 $[\mathbf{v}]_{n+1}^{\mathfrak{c}} := [1 + \bar{v}_n, d]$。令

$$[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}} = ([\mathbf{v}]_1, \cdots, [\mathbf{v}]_n, [\mathbf{v}]_{n+1}^{\mathfrak{c}}),$$

and

$$W_{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}} := S_{[\mathbf{v}]_1} \times \cdots \times S_{[\mathbf{v}]_n} \times (\mathbb{Z}_2^{|[\mathbf{v}]_{n+1}^{\mathfrak{c}}|} \rtimes S_{[\mathbf{v}]_{n+1}^{\mathfrak{c}}}) \subset W_{\mathfrak{c}}.$$

它是与抛物子群 $P_{\mathbf{v}}$ 对应的魏尔子群。

记作

$$\Xi_d = \Big\{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbb{N}) \mid \sum_{i,j} a_{ij} = 2d, \ a_{ij} = a_{N+1-i,N+1-j}, \ \forall \ i, j\Big\}. \tag{2.5}$$

对于矩阵 $A \in \Xi_d$，我们关联到集合 $\{1, 2, \cdots, 2d\}$ 的一个划分

$$[A] = ([A]_{11}, \cdots [A]_{1N}, [A]_{21}, \cdots, [A]_{NN}),$$

其中 $[A]_{ij} = [\sum_{(h,\ k) < (i,\ j)} a_{hk} + 1, \quad \sum_{(h,\ k) < (i,\ j)} a_{hk} + a_{ij}] \subseteq \mathbb{N}$，而 $<$ 是字典序左序，即，

$$(h, k) < (i, j) \Leftrightarrow h < i \text{ or } (h = i \text{ and } k < j).$$

令$[A]_{n+1,\ n+1}^{\mathfrak{c}} = [\sum_{(h,\ k) \ < \ (n+1,\ n+1)} a_{hk} + 1, \quad d]$。定义 $[A]^{\mathfrak{c}}$ 为集合 $\{1, 2, \cdots, d\}$ 的如下划分，

$$[A]^{\mathfrak{c}} = ([A]_{11}, \cdots [A]_{1N}, [A]_{21}, \cdots, [A]_{n+1,n}, [A]_{n+1,n+1}^{\mathfrak{c}}).$$

并按如下方式定义魏尔群的子群:

$$W_{[A]^{\mathfrak{c}}} = S_{[A]_{11}} \times \cdots \times S_{[A]_{1,N}} \times S_{[A]_{21}} \times \cdots \times S_{[A]_{n+1,n}} \times (\mathbb{Z}_2^{|[A]^{\mathfrak{c}}_{n+1,n+1}|} \rtimes S_{[A]^{\mathfrak{c}}_{n+1,n+1}}).$$

对于任意矩阵 $A \in \Xi_d$，记

$$\mathrm{ro}(A) = (\sum_j a_{ij})_{i=1,2,\cdots,N} \in \Lambda_{\mathfrak{c}}, \quad \text{and } \mathrm{co}(A) = (\sum_i a_{ij})_{j=1,2,\cdots,N} \in \Lambda_{\mathfrak{c}}.$$

对于任意$\mathbf{v}$，$\mathbf{w} \in \Lambda_{\mathfrak{c}}$，令

$$\Xi_d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \{A \in \Xi_d \mid \mathrm{ro}(M) = \mathbf{v},\ \mathrm{co}(A) = \mathbf{w}\}.$$

对于一对 旗（F，F'）$\in \mathscr{F}_{\mathbf{v}} \times \mathscr{F}_{\mathbf{w}}$，定义一个 $N \times N$矩阵 $A = (a_{i,\ j})$，令其为

$$a_{i,j} = \dim \frac{V_i \cap V'_j}{V_{i-1} \cap V'_j + V_i \cap V'_{j-1}}. \tag{2.6}$$

那么容易证明

$$\dim(V_i \cap V'_j) = \sum_{s \le i, t \le j} a_{st}. \tag{2.7}$$

已在 [BKLW18 第 6] 节证明，这给出了 $\mathscr{F}_{\mathbf{v}} \times \mathscr{F}_{\mathbf{w}}$ 中对角G-轨道与 $\Xi_d(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 之间的一个双射。对于任意 $A \in \Xi_d$，记 $\mathscr{O}_A$ 为 $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ 上相应的G-轨道，并记 Z_A 为其在 $\mathscr{M} \times \mathscr{M}$ 中的余法丛。特别地，若对于某个 $\mathbf{v} \in \Xi_{\mathfrak{c},d}$，有 $A = \mathrm{diag}(\mathbf{v})$，则 $Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v})}$ 是 Z 内 $T^*\mathscr{F}_{\mathbf{v}}$ 的对角副本。另一方面，众所周知， $\mathscr{F}_{\mathbf{v}} \times \mathscr{F}_{\mathbf{w}}$ 上的对角 G- 轨道与双陪集 $W_{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}} \backslash W / W_{[\mathbf{w}]^{\mathfrak{c}}}$ 之间存在双射。

我们可以如下定义 Ξ_d 上的序 $\preceq$。对于任意 $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij}) \in \Xi_d$, $A \preceq B$，当且仅当

$$\mathrm{ro}(A) = \mathrm{ro}(B),\ \mathrm{co}(A) = \mathrm{co}(B),\ \text{and} \sum_{r \le i; s \ge j} a_{rs} \le \sum_{r \le i; s \ge j} b_{rs},\ \forall i < j. \tag{2.8}$$

Thi该序通过上述双射与 $W_{\mathfrak{c}}$ 上的布鲁哈特序相容 .

命题 2.2. [BKLW18] 对于任意 $A, B \in \Xi_d$, $A \preceq B$ 若 $\mathcal{O}_A \subseteq \mathcal{O}_B$. —

对于 $A, B \in \Xi_d$ 使得 $\mathrm{co}(A) = \mathrm{ro}(B)$，集合 $p_{12}^{-1}(\mathcal{O}_A) \cap p_{23}^{-1}(\mathcal{O}_B)$ 是 G-稳定的。令

$$\mathbf{M}(A, B) := \{C \in \Xi_d \mid \mathcal{O}_C \subset p_{13}(p_{12}^{-1}(\mathcal{O}_A) \cap p_{23}^{-1}(\mathcal{O}_B))\}.$$

根据与 [Vas98，命题 5(c)], 中相同的论证，我们得到

命题 2.3. 存在唯一的元素 $A \circ B \in \mathbf{M}(A, B)$，使得 $\mathbf{M}(A, B) \subset \{C \mid C \preceq A \circ B\}$。

令 E_{ij} 为在 (i, j)-位置上取值为 1 的标准 $N \times N$ 矩阵单位元。对于 $\mathbf{v} \in \Lambda_{\mathfrak{c},d-a}$，定义

$$E^{\theta}_{ij} := E_{ij} + E_{\tau i+1, \tau j+1}, \qquad E^{\theta}_{ij}(\mathbf{v}, a) := \mathrm{diag}(\mathbf{v}) + aE^{\theta}_{ij}. \tag{2.9}$$

于是 $E^\theta_{ij} = E^\theta_{\tau i+1,\tau j+1}$。令 $\mathbf{e}_i$ $(1 \le i \le N)$ 为 $\mathbb{C}^N$ 的标准基（视为行向量）。根据定义，我们得到

$$\mathcal{O}_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v},a)} = \Big\{(F,F') \mid F = (V_k)_{0\le k\le N}, F' = (V'_k)_{0\le k\le N}, \\ V'_i \overset{a}{\subset} V_i, V_k = V'_k \text{ if } k \ne i, \tau i\Big\} \subset \mathscr{F}_{\mathbf{v}+a\mathbf{e}_i+a\mathbf{e}_{\tau i+1}} \times \mathscr{F}_{\mathbf{v}+a\mathbf{e}_{i+1}+a\mathbf{e}_{\tau i}}, \tag{2.10}$$

且这是一个闭轨道。这里，$V'_i \overset{a}{\subset} V_i$ 表示 V_i 中的一个余维数为 a的向量子空间。

引理 2.4. 固定 $a \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，$\mathbf{v} \in \Lambda_{\mathfrak{c},\ d-a}$，并令$A = E^\theta_{h,\ h+1}(\mathbf{v}\ a)$。对于 $B \in \Xi_d$，若 $co(A) = ro(B)$，则若 $h \ne n$，

$$\mathbf{M}(A,B) = \Big\{B + \sum_{1\le j\le N} s_j(E^\theta_{hj} - E^\theta_{h+1,j}) \mid s_j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, s_j \le b_{h+1,j}, \sum_j s_j = a\Big\},$$

且若 $h = n$，

$$\mathbf{M}(A,B) = \Big\{B + \sum_{1\le j\le N} s_j(E^\theta_{nj} - E^\theta_{n+1,j}) \mid s_j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, s_j + s_{\tau j+1} \le b_{n+1,j}, \sum_j s_j = a\Big\}.$$

证明。取 $(F,\ F',\ F'') \in p_{12}^{-1}(\mathcal{O}_A) \cap p_{23}^{-1}(\mathcal{O}_B)$，并假设 $(F,\ F'') \in \mathcal{O}_C$对于某个矩阵$C$。那么由 (2.6) 及上述关于 $\mathcal{O}_A$, $c_{ij} = b_{ij}$，若 $i \ne h,\ h+1,\ \tau h,\ \tau h+1$。

我们首先假设 $h \ne n, n+1$，那么 $\tau h \ne h+1$和 $\tau h \ne h-1$。假设

$$\dim V_h \cap V''_j = \dim V'_h \cap V''_j + \sum_{1\le i\le j} s_i$$

对于某个 $s_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$。那么 $\sum_i s_i = a$。利用任意两个线性子空间$U_1, U_2 \subset V$这一事实，

$$\dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp) = \dim(U_1 + U_2)^\perp = 2d - \dim U_1 - \dim U_2 + \dim U_1 \cap U_2,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\dim V_{\tau h} \cap V''_{\tau j} =& 2d - \dim V_h - \dim V''_j + \dim V_h \cap V''_j \\ =& \dim V'_{\tau h} \cap V''_{\tau j} + \sum_{1\le i\le j} s_i - a.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}c_{h+1,j} =& \dim V_{h+1} \cap V''_j/(V_h \cap V''_j + V_{h+1} \cap V''_{j-1}) \\ =& \dim V'_{h+1} \cap V''_j - \dim V_h \cap V''_j - \dim V'_{h+1} \cap V''_{j-1} + \dim V_h \cap V''_{j-1} \\ =& b_{h+1,j} - s_j,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{h,j} =& \dim V_h \cap V''_j/(V_{h-1} \cap V''_j + V_h \cap V''_{j-1}) \\ =& \dim V_h \cap V''_j - \dim V'_{h-1} \cap V''_j - \dim V_h \cap V''_{j-1} + \dim V'_{h-1} \cap V''_{j-1} \\ =& b_{h,j} + s_j,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{\tau h+1,\tau j+1} =& \dim V_{\tau h+1} \cap V''_{\tau j+1}/(V_{\tau h} \cap V''_{\tau j+1} + V_{\tau h+1} \cap V''_{\tau j}) \\ =& \dim V'_{\tau h+1} \cap V''_{\tau j+1} - \dim V_{\tau h} \cap V''_{\tau j+1} - \dim V'_{\tau h+1} \cap V''_{\tau j} + \dim V_{\tau h} \cap V''_{\tau j} \\ =& b_{\tau h+1,\tau j+1} + s_j,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}c_{\tau h,\tau j+1} =& \dim V_{\tau h} \cap V''_{\tau j+1}/(V_{\tau h-1} \cap V''_{\tau j+1} + V_{\tau h} \cap V''_{\tau j}) \\ =& \dim V_{\tau h} \cap V''_{\tau j+1} - \dim V'_{\tau h-1} \cap V''_{\tau j+1} - \dim V_{\tau h} \cap V''_{\tau j} + \dim V'_{\tau h-1} \cap V''_{\tau j} \\ =& b_{\tau h,\tau j+1} - s_j.\end{aligned}$$

因此， $C = B + \sum_{1\le j\le N} s_j(E^\theta_{hj} - E^\theta_{h+1,\ j})$。

现在假设 $h = n$。设

$$\dim V_n \cap V''_j = \dim V'_n \cap V''_j + \sum_{1\le i\le j} s_i$$

对于某个 $s_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$。那么 $\sum_i s_i = a$，并且

$$\dim V_{n+1} \cap V''_{\tau j} = \dim V'_{n+1} \cap V''_{\tau j} + \sum_{1\le i\le j} s_i - a.$$

因此，

$$\begin{aligned}c_{n,j} =& \dim V_n \cap V''_j/(V_{n-1} \cap V''_j + V_n \cap V''_{j-1}) \\ =& \dim V_n \cap V''_j - \dim V'_{n-1} \cap V''_j - \dim V_n \cap V''_{j-1} + \dim V'_{n-1} \cap V''_{j-1} \\ =& b_{n,j} + s_j,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{n+2,\tau j+1} =& \dim V_{n+2} \cap V''_{\tau j+1}/(V_{n+1} \cap V''_{\tau j+1} + V_{n+2} \cap V''_{\tau j}) \\ =& \dim V'_{n+2} \cap V''_{\tau j+1} - \dim V_{n+1} \cap V''_{\tau j+1} - \dim V'_{n+2} \cap V''_{\tau j} + \dim V_{n+1} \cap V''_{\tau j} \\ =& b_{n+2,\tau j+1} + s_j,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}c_{n+1,j} =& \dim V_{n+1} \cap V''_j/(V_n \cap V''_j + V_{n+1} \cap V''_{j-1}) \\ =& \dim V_{n+1} \cap V''_j - \dim V_n \cap V''_j - \dim V_{n+1} \cap V''_{j-1} + \dim V_n \cap V''_{j-1} \\ =& b_{n+1,j} - s_j - s_{\tau j+1} \ge 0.\end{aligned}$$

由此，

$$\begin{aligned}C &= B + \sum_{1\le j\le N} s_j E^\theta_{nj} - \sum_{1\le j\le N} s_j E_{n+1,j} - \sum_{1\le j\le N} s_{\tau j+1} E_{n+1,j} \\ &= B + \sum_{1\le j\le N} s_j (E^\theta_{nj} - E^\theta_{n+1,j}).\end{aligned}$$

最后，让我们处理 $h = n+1$ 的情形。和之前一样，假设

$$\dim V_{n+1} \cap V''_j = \dim V'_{n+1} \cap V''_j + \sum_{1\le i\le j} s_i$$

对于某个 $s_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。那么 $\sum_i s_i = a$，并且

$$\dim V_n \cap V''_{\tau j} = \dim V'_n \cap V''_{\tau j} + \sum_{1\leq i\leq j} s_i - a.$$

因此,

$$\begin{aligned} c_{n,\tau j+1} =& \dim V_n \cap V''_{\tau j+1}/(V_{n-1} \cap V''_{\tau j+1} + V_n \cap V''_{\tau j}) \\ =& \dim V_n \cap V''_{\tau j+1} - \dim V'_{n-1} \cap V''_{\tau j+1} - \dim V_n \cap V''_{\tau j} + \dim V'_{n-1} \cap V''_{\tau j} \\ =& b_{n,\tau j} - s_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n+2,j} =& \dim V_{n+2} \cap V''_j/(V_{n+1} \cap V''_j + V_{n+2} \cap V''_{j-1}) \\ =& \dim V'_{n+2} \cap V''_j - \dim V_{n+1} \cap V''_j - \dim V'_{n+2} \cap V''_{j-1} + \dim V_{n+1} \cap V''_{j-1} \\ =& b_{n+2,j} - s_j, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} c_{n+1,j} =& \dim V_{n+1} \cap V''_j/(V_n \cap V''_j + V_{n+1} \cap V''_{j-1}) \\ =& \dim V_{n+1} \cap V''_j - \dim V_n \cap V''_j - \dim V_{n+1} \cap V''_{j-1} + \dim V_n \cap V''_{j-1} \\ =& b_{n+1,j} + s_j + s_{\tau j+1}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} C =& B - \sum_{1\leq j\leq N} s_j(E_{n,\tau j+1} + E_{n+2,j}) + \sum_{1\leq j\leq N} (s_j + s_{\tau j+1})E_{n+1,j} \\ =& B + \sum_{1\leq j\leq N} s_j(E^\theta_{n+1,j} - E^\theta_{n+2,j}). \end{aligned}$$

这就完成了引理的证明。 □

设 $C \in \Xi_d(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 为一个非对角矩阵，并设

$$(h,l) := \max\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq N, c_{ij} \neq 0\},$$

关于右字典序，即 $(i,j) < (k,l)$，若 $j < l$ 或 $j = l$ 且 $i < k$。设

$$B = C + c_{hl}(E^\theta_{h+1,l} - E^\theta_{hl}), \quad \text{and} \quad A = E^\theta_{h,h+1}(\mathbf{v} - c_{hl}\mathbf{e}_h - c_{hl}\mathbf{e}_{N+1-h}, c_{hl}).$$

因此，$\mathrm{co}(A) = \mathrm{ro}(B)$，因为对于任意 j,

$$\begin{aligned} \sum_i a_{ij} &= a_{jj} + \delta_{j,h+1}c_{h,l} + \delta_{j,N-h}c_{hl} \\ &= v_j - \delta_{j,h}c_{hl} - \delta_{j,N+1-h}c_{hl} + \delta_{j,h+1}c_{h,l} + \delta_{j,N-h}c_{hl} \\ &= \sum_i c_{ji} - \delta_{j,h}c_{hl} - \delta_{j,N+1-h}c_{hl} + \delta_{j,h+1}c_{h,l} + \delta_{j,N-h}c_{hl} = \sum_i b_{ji}. \end{aligned}$$

推论 2.5。设 A、B、C 如上，并设 $\mathcal{O}_T := p_{12}^{-1}(\mathcal{O}_A) \cap p_{23}^{-1}(\mathcal{O}_B) \cap p_{13}^{-1}(\mathcal{O}_C)$。则

（1） $A \circ B = C$; （2）投影 $p_{13}|_{\mathcal{O}_T}$： $\mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_C$ 是一个同构。

证明。 第一个结论由上述引理 2.4 和偏序（2.8）得出。矩阵 C对应于情形 $s_j = \delta_{j,l}c_{hl}$。注意，若（h,l） $=$ （$n,n+1$），则$b_{n+1,n+1} = c_{n+1,n+1} + 2c_{n,n+1} \geq 2s_{n+1}$。

让我们证明第二个结论。设（F,F',F''） $\in \mathcal{O}$。那么，只需证明F'由（F,F''）唯一确定。由于（F,F'） $\in \mathcal{O}_A$，我们只需证明V'_h由（F,F''）唯一确定。回忆一下，矩阵 C对应于对$s_j = \delta_{jl}c_{hl}$的选择。因此，

$$V'_h \overset{c_{hl}}{\subset} V_h, \ \ and \ \ \dim V_h \cap V''_j = \dim V'_h \cap V''_j + c_{hl}\delta_{j\geq l}.$$

注意 $\dim V_h = v_1 + \cdots + v_h$，且 $\dim V'_h = v_1 + \cdots + v_h - c_{hl}$。回想 (h, l) = max{(i, j) | 1 ≤ i < j ≤ n, c_ij ≠ 0},

由（2.7）可得

$$\dim V_h \cap V''_l = v_1 + \cdots + v_h = \dim V_h.$$

因此， $V_h \cap V''_l = V_h$。另一方面，

$$\dim V'_h \cap V''_l = \dim V_h \cap V''_l - c_{hl} = \dim V_h - c_{hl} = \dim V'_h.$$

我们得到 $V'_h \cap V''_l = V'_h$。注意到 $b_{hl} = 0$，可得

$$V'_h = V'_h \cap V''_l = V_{h-1} \cap V''_l + V'_h \cap V''_{l-1} = V_{h-1} \cap V''_l + V_h \cap V''_{l-1}.$$

因此， V'_h由（F， F''）唯一确定。 □

2.3. **一个推前公式**。设

$$\mathbf{R} := \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_d] \simeq H^G_*(G/B),$$

其中 B 是 G的一个博雷尔子群。下面我们将定义魏尔群 $W_{\mathfrak{c}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的一个自然作用，该作用通过限制导出子群 $W_{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}$ 和 $W_{[A]^{\mathfrak{c}}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的作用。 $\sigma \in S_d$ 在 $\mathbf{R}$ 上的作用定义为

$$\sigma : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \qquad f(x_1, x_2, \cdots, x_d) \mapsto f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(d)}).$$

对于任意 $m \in [1,d]$， $\mathbb{Z}_2^d$ 中 $\mathbb{Z}_2$ 的第 m 个副本里的生成元 ι_m 在$\mathbf{R}$ 上的作用为

$$\iota_m : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},$$
$$f(x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \cdots x_d) \mapsto f(x_1, \cdots, x_{m-1}, -x_m, x_{m+1}, \cdots x_d).$$

对于魏尔群 $W_1 \subset W_2 \subset W_{\mathfrak{c}}$的两个子群，我们定义映射

$$W_2/W_1 : \mathbf{R}^{W_1} \longrightarrow \mathbf{R}^{W_2}, \qquad f \mapsto \sum_{\sigma \in W_2/W_1} \sigma(f).$$

为简化记号，我们将$\mathbf{R}^{W_{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}}$ 记为$\mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}$，将$\mathbf{R}^{W_{[A]^{\mathfrak{c}}}}$ 记为$\mathbf{R}^{[A]^{\mathfrak{c}}}$。

命题 2.6。令 $\mathbf{v}$,$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \Lambda_{\mathfrak{c},d}$，且 $A \in \Xi_d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$。

(1) 存在同构 $H^G_*(\mathscr{Z}_{\mathbf{v}}) \cong \mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}$和 $H^G_*(\mathcal{O}_A) \cong \mathbf{R}^{[A]^{\mathfrak{c}}}$。

(2) 两个投影映射 $p_{i,A}:\mathcal{O}_A\to\mathscr{F}_{\mathbf{v}_i}$ 都是光滑纤维化。此外，若$\mathcal{O}_A$ 是闭的，则直接像态射$p_{1,A*}$ 由下式给出

$$p_{1,A*}(\gamma)=W_{[\mathbf{v}_1]^\epsilon}/W_{[A]^\epsilon}\Big(\frac{\gamma}{\mathrm{Eu}(T_{p_{1,A}})}\Big),$$

其中 $\gamma\in H^G_*(\mathcal{O}_A)$ 和 $T_{p_{1,A}}$ 是相对切丛。

*Pro*的。 由同构 (2.4) 以及等变上同调中的约化 ，

$$H^G_*(\mathscr{F}_{\mathbf{v}})\simeq H^G_*(G/P_{\mathbf{v}})\simeq H^*_{P_{\mathbf{v}}}(\mathrm{pt})\simeq\mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^\epsilon},$$

且该同构由下式给出

$$H^G_*(\mathscr{F}_{\mathbf{v}})\ni\gamma\mapsto\gamma|_{F_{\mathbf{v}}}\in\mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^\epsilon},$$

其中 $\gamma|_{F_{\mathbf{v}}}$ 表示 γ 在环面不动点 $F_{\mathbf{v}}\in G/P_{\mathbf{v}}$处的限制。

给定 $A\in\Xi_d(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$，定义分解 $V=\bigoplus_{1\le i,j\le N}V_{ij}$ 如下

$$V_{ij}=\mathrm{Span}\{\epsilon_k\mid k\in[A]_{ij}\}.$$

令 $F_\circ=(V_k)_{1\le k\le N}$ 为具有 $V_k=\bigoplus V_{ij}$ 的旗，并令 $F'_\circ=(V'_k)_{1\le k\le N}$ 为具有 $V'_k=\bigoplus V_{ij}$ 的$_{1\le i\le k,\ 1\le j\le N}$旗。那么 $F_\circ\in\mathscr{F}_{\mathrm{ro}(A)}$, $F'_\circ\in\mathscr{F}_{\mathrm{co}(A)}$和 $(F_\circ,\ F'_\circ)\in\mathscr{O}_A$。令 $P_{F_\circ}{}_{1\le j\le k,\ 1\le i\le N}$（分别为 $P_{F'_\circ}$）表示 $F_\circ$（分别为 $F'_\circ$）的稳定子。我们有 $\mathscr{O}_A\simeq G/(P_{F_\circ}\cap P_{F'_\circ})$。 $P_{F_\circ}\cap P_{F'_\circ}$ 的约化部分同构于

$$GL(V_{11})\times\cdots\times GL(V_{N1})\times GL(V_{21})\times\cdots\times GL(V_{n+1,n})\times\mathrm{Sp}(V_{n+1,n+1}),$$

其魏尔群为 $W_{[A]^\epsilon}$。因此我们有一个同构

$$H^G_*(\mathcal{O}_A)\cong\mathbf{R}^{[A]^\epsilon},$$

由 $\gamma\mapsto\gamma|_{(F_\circ,F'_\circ)}$给出。这就完成了第（1）部分的证明。根据定义， $P_{F_\circ}=P_{\mathbf{v}_1\circ}$ 因此，投影 $p_{1,A}:\ \mathcal{O}_A\simeq G/(P_{F_\circ}\cap P_{F'_\circ})\to\mathscr{F}_{\mathbf{v}_1}\simeq G/P_{F_\circ}$ 是一个光滑纤维化。另一个投影也同样如此。根据构造，$(\mathcal{O}_A)^T\cap p_{1\,A}^{-1}$,($F_{\mathbf{v}_1}$中的环面不动点与陪集 $W_{[\mathbf{v}_1]^\epsilon}/W_{[A]^\epsilon}$一一对应，其中 $T\subset G$ 是极大对角环面。于是，投影 $p_{1,A*}$ 的公式由此事实和局部化公式（2.1）得出。□

2.4. **斯坦伯格簇**。 设 $\mathscr{M}=T^*\mathscr{F}$是 N步部分旗簇 $\mathscr{F}$ 在（2.3）中的余切丛。更明确地说， $\mathscr{M}$ 可写为

$$\mathscr{M}=T^*\mathscr{F}=\{(F,x)\in\mathscr{F}\times\mathfrak{sp}_{2d}\mid x(F_i)\subseteq F_{i-1},\ \forall i\}\subseteq\mathscr{F}\times\mathfrak{sp}_{2d},$$

其中 $\mathfrak{sp}_{2d}$ 是 G 的李代数。 G 对 $\mathscr{M}$ 有一个由 G 对 $\mathscr{F}$ 的作用诱导的自然作用。定义 $G\times\mathbb{C}^*$ 对 $\mathscr{M}$ 的作用如下:

$$(g,z)\cdot(F,x)=(gF,z^{-2}gxg^{-1}),\quad\forall(g,z)\in G\times\mathbb{C}^*.$$

与前文一样，令 q 表示 $\mathbb{C}^*$ 和 $\hbar:=c_1(q^{-2})$ 的一次表示。

令 $\mathscr{N}$为李代数 $\mathfrak{sp}_{2d}$的幂零簇。根据定义，我们有 $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F} \times \mathscr{N}$。投影映射 π: $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$，$(F,\ x) \mapsto x$是真且 $G\times\mathbb{C}^*$-等变的。令

$$Z := \mathscr{M} \times_{\mathscr{N}} \mathscr{M} \subset \mathscr{M} \times \mathscr{M} \tag{2.11}$$

是 C 型（广义）斯坦伯格簇。群 $G\times\mathbb{C}^*$ 以对角方式作用于 Z，而 $(H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)\ \star)$ 是一个带单位元的卷积 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}$(pt)-代数，见第 2.1 节。

通过卷积，代数 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 作用于

$$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{M}) \simeq \bigoplus_{\mathbf{v}\in\Lambda_{\mathfrak{c},d}} \mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}[\hbar]. \tag{2.12}$$

根据 [CG10，命题 7.6，7], 我们有如下引理。

引理 2.7。 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 对 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{F})$ 的卷积作用是忠实的。

注 2.8。 更确切地说，同上文献 证明了 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 对 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{M})$ 的作用是忠实的。由 Thom 同构，$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{M}) \simeq H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{F}) \simeq H_*^G(\mathscr{F})[\hbar]$，且它是一个自由的 $\mathbb{C}[\hbar]$ 模。令 ι: $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{M}$ 表示自然嵌入。然后在关于 $\mathbb{C}^*$ 作用进行局部化后，任意类 $\gamma \in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{M})$ 都可以写成

$$\gamma = \iota_*\left(\frac{\iota^*\gamma}{\mathrm{Eu}(T^*\mathscr{M})}\right).$$

因此，$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{F})$ 也必须是忠实模。

2.5. **卷积代数的生成集**。 本节中，我们为卷积代数 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 建立一个生成集。令 $Z_{\mathbf{v},\ \mathbf{w}} := T^*\mathscr{F}_{\mathbf{v}} \times_{\mathscr{N}} T^*\mathscr{F}_{\mathbf{w}}$。 $\mathscr{F}_{\mathbf{v}} \times \mathscr{F}_{\mathbf{w}}$ 上的对角 G-轨道由 $\Xi_d(\mathbf{v},\ \mathbf{w})$ 索引，且

$$Z_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = \bigsqcup_{A\in\Xi_d(\mathbf{v},\mathbf{w})} Z_A,$$

其中 $Z_A := T^*_{\mathcal{O}_A}(\mathscr{F}_{\mathbf{v}} \times \mathscr{F}_{\mathbf{w}})$ 是对应于 G-轨道$A \in \Xi_d(\mathbf{v},\ \mathbf{w})$ 的余法丛。于是，Z 的所有不可约分支均具有如下形式：Z_A。对于任意$A \in \Xi_d$，令 $Z_{\preceq A} := \overline{\bigcup_{B\preceq A} Z_B}$，它是 Z 的一个闭子簇。根据胞腔纤维化引理 [CG10，引理 5.5，1], 开浸入 $Z_{\prec A} \hookrightarrow Z_{\preceq A}$ 给出如下短正合序列

$$0 \to H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\prec A}) \to H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\preceq A}) \to H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_A) \to 0, \tag{2.13}$$

其中 $Z_{\prec A} := Z_{\preceq A}\backslash Z_A$。此外，所有奇次同调均消失，见 [DR08]。因此，诱导映射 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\preceq A}) \to H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 是单射，其像构成由 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 按 Ξ_d 编号的滤子。此外，命题 2.3 推出 $Z_{\preceq A} \circ Z_{\preceq A} \subset Z_{\preceq A\circ B}$。因此，$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\preceq A}) \star H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\preceq B}) \subset H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\preceq A\circ B})$。下面的映射

$$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\preceq A}) \twoheadrightarrow H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\preceq A})/H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\prec A}) \xrightarrow{\sim} H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_A) \xrightarrow{\sim} H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathcal{O}_A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^{[A]^{\mathfrak{c}}}[\hbar]$$

将 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 的伴随分次与 $\bigoplus_{A\in\Xi_d}\mathbf{R}^{[A]^{\mathfrak{c}}}[\hbar]$ 相对应。

引理 2.9。 对于 $1 \leq i \leq N-1$ 和 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$， $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}\left(Z_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}\, a)}\right)$ 在$(H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)\star)$中的像，可以通过卷积由 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}\left(Z_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}',k)}\right)$ 在各种 $\mathbf{v}'$ 和 $0\leq k\leq a-1$. 下的像得到

证明。 情形 $i\neq n+1$ 可以完全按照 [Vas98，第 280] 页中的例子来证明。设 $i=n+1$。只需证明 $n=1$ 的情形。取非负整数 a， v，使得 $a+v+1\leq d$。令

$$A=\begin{pmatrix} d-v-a-1 & 0 & 0\\ 1 & 2v+2a & 1\\ 0 & 0 & d-v-a-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} d-v-a & 0 & 0\\ a & 2v & a\\ 0 & 0 & d-v-a\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} d-v-a-1 & 0 & 0\\ a+1 & 2v & a+1\\ 0 & 0 & d-v-a-1\end{pmatrix}.$$

由（2.10），得到 $A\circ B=C$。根据定义，

$$[A]^{\mathfrak{c}}=([1,d-v-a-1],[d-v-a,d-v-a],[d-v-a+1,d]),$$

$$[B]^{\mathfrak{c}}=([1,d-v-a],[d-v-a+1,d-v],[d-v+1,d]),$$

and

$$[C]^{\mathfrak{c}}=([1,d-v-a-1],[d-v-a,d-v],[d-v+1,d]).$$

Set

$$I_1=[1,d-v-a-1],I_2=[d-v-a+1,d],I_3=[1,d-v-a],$$
$$I_4=[d-v-a+1,d-v],I_5=[d-v-a,d-v],I_6=[d-v+1,d].$$

因此，

$$W_{[A]^{\mathfrak{c}}}=S_{I_1}\times(\mathbb{Z}_2^{|I_2|}\rtimes S_{I_2}),W_{[B]^{\mathfrak{c}}}=S_{I_3}\times S_{I_4}\times(\mathbb{Z}_2^{|I_6|}\rtimes S_{I_6}),$$
$$W_{[C]^{\mathfrak{c}}}=S_{I_1}\times S_{I_5}\times(\mathbb{Z}_2^{|I_6|}\rtimes S_{I_6}).$$

所以，

$$W_{[C]^{\mathfrak{c}}}/(W_{[A]^{\mathfrak{c}}}\cap W_{[B]^{\mathfrak{c}}})=S_{I_5}/S_{I_4}.$$

设 $\mathcal{O}_T:=p_{12}^{-1}(\mathcal{O}_A)\cap p_{23}^{-1}(\mathcal{O}_B)\cap p_{13}^{-1}(\mathcal{O}_{A\circ B})$，并设 $p_{13,\ T}$为 p_{13} 到$\mathcal{O}_T$的限制。由（2.10），$p_{13,\ T}$是一个光滑且真纤维化，其在 $(F,\ F'')\in\mathcal{O}_{A\circ B}$ 上的纤维为

$$\{V_1'\mid V_1\overset{1}{\subset}V_1'\overset{a}{\subset}V_1''\}\simeq \mathrm{Gr}(1,V_1''/V_1),$$

其中 $F=(0=V_0\subset V_1\subset V_2\subset V_3=V)$ 和 $F''=(0=V_0''\subset V_1''\subset V_2''\subset V_3''=V)$。令 $f\in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_A)\simeq\mathbf{R}^{[A]^{\mathfrak{c}}}[\hbar]$ 和 $g\in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_A)\simeq\mathbf{R}^{[B]^{\mathfrak{c}}}[\hbar]$。根据 [Vas98的同调版本、推论 3] 和局部化公式（2.1），可得

$$f\star g=S_{I_5}/S_{I_4}\Big(\frac{\mathrm{Eu}(q^{-2}T^*_{p_{13,T}})}{\mathrm{Eu}(T_{p_{13,T}})}\cdot fg\Big),$$

其中 $T_{p_{13,\ T}}$ 是 $p_{13,\ T}$的相对切丛。由于 $\mathbf{R}^{[A]^{\mathfrak{c}}}[\hbar]$ 和 $\mathbf{R}^{[B]^{\mathfrak{c}}}[\hbar]$ 生成$\mathbf{R}^{[C]^{\mathfrak{c}}}[\hbar]$，只需证明映射

$$\psi : \mathbf{R}^{[C]^{\mathfrak{c}}}[\hbar] \to \mathbf{R}^{[C]^{\mathfrak{c}}}[\hbar], \quad f \mapsto S_{I_5}/S_{I_4}\Big(\frac{\mathrm{Eu}(q^{-2}T^*_{p_{13,T}})}{\mathrm{Eu}(T_{p_{13,T}})}\Big)\cdot f$$

是满射。令 $t = d - v - a$，则

$$\frac{\mathrm{Eu}(q^{-2}T^*_{p_{13,T}})}{\mathrm{Eu}(T_{p_{13,T}})} = \prod_{t+1\le j\le d-v} \frac{\hbar - x_j + x_t}{x_j - x_t}.$$

由留数公式，

$$\begin{aligned} S_{I_5}/S_{I_4}\Big(\frac{\mathrm{Eu}(q^{-2}T^*_{p_{13,T}})}{\mathrm{Eu}(T_{p_{13,T}})}\Big) =& \sum_{t\le k\le d-v}(t,k)\cdot\Big(\prod_{t+1\le j\le d-v}\frac{\hbar - x_j + x_t}{x_j - x_t}\Big)\\ =& \sum_{t\le k\le d-v}\prod_{\substack{t\le j\le d-v\\ j\ne k}}\frac{\hbar - x_j + x_k}{x_j - x_k}\\ =& \hbar^{-1}\mathrm{Res}(\prod_{t\le j\le d-v}\frac{\hbar - x_j + z}{x_j - z}, \infty)\\ =& (-1)^a(a+1), \end{aligned}$$

它是可逆的。因此，ψ 是满射。 □

定理 2.10。卷积代数 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 由 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v})})$（其中$\mathbf{v}\in\Lambda_{\mathfrak{c},d}$）以及 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}',1)})$（其中 $\mathbf{v}'\in\Lambda_{\mathfrak{c},d-1}$ 和 $1\le i\le N-1$）生成。

证明。对于矩阵 $C\in\Xi_d(\mathbf{v},\mathbf{w})$，令

$$\ell(C) := \sum_{i<j}\binom{j-i+1}{2}c_{ij}.$$

我们将对 $\ell(C)$ 使用归纳法证明：模去较低的分次部分 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\prec C})$ 后，$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\preceq C})$ 可由 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_A)$ 中满足 $A\in\Xi_d$ 为对角矩阵或 $E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}',1)$ 型矩阵（其中 $1\le i\le N-1$）的类通过卷积得到。

若 $\ell(C)=0$，则 C 为对角矩阵。若 $\ell(C)=1$，则对于某个 i 及 $\mathbf{v}'$，$C = E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}',1)$。这两种情况下都无需证明。设 $\ell(C)>1$。令

$$(h,l) := \max\{(i,j)\mid 1\le i<j\le N, c_{ij}\ne 0\},$$

关于右字典序。令

$$B = C + c_{hl}(E^\theta_{h+1,l} - E^\theta_{hl}), \quad \text{and} \quad A = E^\theta_{h,h+1}(\mathbf{v} - c_{hl}\mathbf{e}_h - c_{hl}\mathbf{e}_{N+1-h}, c_{hl}).$$

因此，我们处于推论 2.5 的情形。因此，$A\circ B = C$。我们证明映射

$$\varphi : H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\preceq A})\otimes H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\preceq B}) \to H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\preceq C}) \twoheadrightarrow H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_C)$$

是满射。对于（h，l）$\ne$（n，$n+1$），可以完全按照 [Vas98，命题 10] 中的方法证明。现在假设（h，l）$=$（n，$n+1$）。由推论 2.5 以及同调

对于任意 $f \in \mathbf{R}^{[A]^{\mathfrak{c}}}$ 和 $g \in \mathbf{R}^{[B]^{\mathfrak{c}}}$, $\varphi(f \otimes g) = fg \in \mathbf{R}^{[C]^{\mathfrak{c}}}$, 这与 [Vas98, Proposition 2], 类似。由于 $b_{ij} = c_{ij}$若 $(i,j) \notin \{(n,n+1), (n+1,n+1), (n+2,n+1)\}$, $a_{n,n+1} = c_{n,n+1}$, $a_{n+1,n+1} = c_{n+1,n+1}$, 且 $a_{ij} = c_{ij} = 0$ 对于 $(i,j) \in \{(n,n+2) \cdots, (n,N), (n+1,1) \cdots, (n+1,n)\}$, 映射 φ 显然是满射。最后, 注意到 $\ell(B) < \ell(C)$。我们用引理 2.9 得出证明。□

3. The correspondences and operators

本节中, 我们将在斯坦伯格簇的等变博雷尔–摩尔同调中引入一些特殊元素, 并写出它们在引理 2.7 中的忠实表示下的显式公式。

3.1. 组合算子。 首先引入一些记号。令 $x_1, x_2, \cdots, x_{2d}$ 为 G 中极大环面 T 的李代数上的标准对偶坐标。对于 $1 \leq r \leq 2d$, 定义 $r' := 2d + 1 - r$。那么 $x_r = -x_{r'}$。令 $\varphi(x) := 1 + \frac{\hbar}{x}$。对于任意子集 $I \subset [1, 2d]$, 定义 $\Phi_I(z) := \prod_{s \in I} \varphi(x_s - z)$。对于满足 $r \in I_j$ 当且仅当 $r' \in I_{N+1-j} = I_{\tau j+1}$的 $\{1, 2, \ldots, 2d\}$ 的任意划分 $I = (I_1, I_2, \cdots, I_N)$, 令 (x_I) 表示这些变量

$$(x_{i_{1,1}}, \ldots, x_{i_1,j_1}, x_{i_{2,1}}, \ldots, x_{i_2,j_2}, \ldots, x_{i_N,1}, \ldots, x_{i_N,j_N}),$$

其中 $I_k = \{i_{k,1}, i_{k,2}, \ldots, i_{k,j_k}\}$。对于任意 $r \in I_s$, 令 $\tau_r^+ I$为 $\{1, 2, \ldots, 2d\}$的划分, 其中 r 从 I_s 移至 I_{s+1}, 而 r' 从 $I_{\tau s+1}$ 移至 $I_{\tau s}$。例如, 考虑 $d = 3$和 $N = 3$的情形。令 $I = (\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\})$ 为$\{1,2,3,4,5,6\}$的一个划分。那么

$$f(x_{\tau_1^+ I}) = f(x_2, x_1, x_3, x_4, x_6, x_5),$$

回忆一下, 对于任意 $\mathbf{v} \in \Lambda_{\mathfrak{c},\, d}$, 我们有 $\{1, 2, \ldots, 2d\}$的划分 $[\mathbf{v}] := ([\mathbf{v}]_1, \cdots, [\mathbf{v}]_N)$。我们用记号 $f(x_{[\mathbf{v}]})$ 表示 $H_*^{G \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{F}_{\mathbf{v}}) \simeq \mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}[\hbar]$中的一个元素, 并令

$$\mathbf{P} := \bigoplus_{\mathbf{v} \in \Lambda_{\mathfrak{c},d}} \mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}[\hbar] \simeq H_*^{G \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{F}).$$

我们将在 $\mathbf{P}$ 上定义一些显式算子。

对于 $1 \leq i \leq 2n$ 和 $\mathbf{v} \in \Lambda_{\mathfrak{c},d}$, 令

$$H_{i,\mathbf{v}}(u) := (1 - \frac{\delta_{i,n} - \delta_{i,n+1}}{4u}\hbar) \cdot \Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-u - \frac{n-i}{2}\hbar - \frac{\hbar}{4}) \cdot \Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(u + \frac{n-i}{2}\hbar + \frac{\hbar}{4}). \tag{3.1}$$

Then

$$H_{\tau i,\mathbf{v}}(-u) = H_{i,\mathbf{v}}(u).$$

将 $H_{i,\mathbf{v}}(u)$ 视为关于 u^{-1} 的级数, 则其常数项为 1, 并令 $H^{\circ}_{i,\mathbf{v}}(u) := H_{i,\mathbf{v}}(u) - 1$。令 $\mathbf{H}_i(u)$ 为作用于 $\mathbf{P}$ 上的算子, 它的作用是在 $\mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}$ 上乘以$H_{i,\mathbf{v}}(u)$。对于 $r \geq 0$, 令$H_{i,r}$ 为 $\mathbf{H}_i(u)$ 的 $\hbar u^{-r-1}$ 的系数。

对于 $1 \leq i \leq 2n$, 定义算子 $B_{i,r}$ 在 $\mathbf{P}$ 上如下:

$$(B_{i,r} f)(x_{[\mathbf{v}]}) := \sqrt{-1} \sum_{j \in [\mathbf{v}]_i} (-x_j - \frac{n-i}{2}\hbar - \frac{\hbar}{4})^r \cdot \Phi_{[\mathbf{v}]_i \setminus \{j\}}(x_j) \cdot f(x_{\tau_j^+ [\mathbf{v}]}). \tag{3.2}$$

我们将在 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 中构造一些元素，它们对 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{F}) \simeq \mathbf{P}$ 的卷积作用由上述$H_{i,r}$ 和$B_{i,r}$给出。

3.2. 几何 H 算子。在旗簇 $\mathscr{F}_{\mathbf{v}}$ 上，我们有典范向量丛，其在点 $F=(0=V_0\subset\cdots\subset V_N=V)\in\mathscr{F}_{\mathbf{v}}$ 处的纤维为 V_i，并令 $\mathcal{V}_{i,\mathbf{v}}$ 表示其在 $T^*\mathscr{F}_{\mathbf{v}}$ 上的拉回向量丛。对于 $1\le i\le 2n$，令 $E_{i,\mathbf{v}}$ 为虚向量丛 [1]

$$\begin{aligned}E_{i,\mathbf{v}} =&(q^{-\frac{5}{2}-n+i}-q^{-\frac{1}{2}-n+i})(\mathcal{V}_{i,\mathbf{v}}-\mathcal{V}_{i-1,\mathbf{v}})\\ &+(q^{\frac{3}{2}-n+i}-q^{-\frac{1}{2}-n+i})(\mathcal{V}_{i+1,\mathbf{v}}-\mathcal{V}_{i,\mathbf{v}})+q^{\frac{\delta_{i,n}-\delta_{i,n+1}}{2}}\in K^{G\times\mathbb{C}^*}(T^*\mathscr{F}_{\mathbf{v}})\end{aligned}$$

令 $\mathscr{H}_{i,\mathbf{v},r}\in H^*_{G\times\mathbb{C}^*}(T^*\mathscr{F}_{\mathbf{v}})$ 为陈多项式$\lambda_{u^{-1}}(E_{i,\mathbf{v}})$ 中 $\hbar u^{-r-1}$ 的系数，并设

$$\mathscr{H}_{i,r}=\sum_{v\in\Lambda_{\mathfrak{c},d}}\mathscr{H}_{i,\mathbf{v},r}\cdot[T^*\mathscr{F}_{\mathbf{v}}]\in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(T^*\mathscr{F}). \tag{3.3}$$

由于斯坦伯格簇 Z包含 $T^*\mathscr{F}$ 的对角副本，因此我们可以将类 $\mathscr{H}_{i,r}$ 视为 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z$ 中的元素。这将使算子 $H_{i,r}$ （见 3.1 ）几何化。

命题 3.1。 在命题 2.6中的同构下，$\mathscr{H}_{i,r}\in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 在 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{F})\simeq\mathbf{P}$ 上的卷积作用由第 $H_{i,r}$ 节中的算子 $H_{i,r}$ 给出3.1。

证明。 令 $f\in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{F}_{\mathbf{v}})\simeq\mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}[\hbar]$。由于 $\mathscr{H}_{i,r}$ 支持在斯坦伯格簇 Z 内的$T^*\mathscr{F}$ 对角副本上，

$$\mathscr{H}_{i,r}\star f=(\mathscr{H}_{i,\mathbf{v},r}\cdot[Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v})}])\star f=\mathscr{H}_{i,\mathbf{v},r}\cdot f,$$

其中 $Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v})}=T^*\mathscr{F}_{\mathbf{v}}$是 $T^*\mathscr{F}_{\mathbf{v}}$在 Z中的对角副本，而 $\cdot$是等变上同调在等变博雷尔–摩尔同调上的作用（见第2.1节）。

现在我们计算 $\lambda_{u^{-1}}(E_{i,\mathbf{v}})$。我们使用以下基本事实。回顾命题 2.6 的证明，$F_{\mathbf{v}}\in\mathscr{F}_{\mathbf{v}}$ 是基点。若 E 是 G-等变向量丛，定义在$\mathscr{F}_{\mathbf{v}}$ 上，且纤维 $E|_{F_{\mathbf{v}}}$ 的环面权为 $\{w_j\}$，则

$$\lambda_{u^{-1}}(E)=\prod_j(1+u^{-1}w_j)\in\mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}[u^{-1}]\cong H_*^G(\mathscr{F}_{\mathbf{v}})[u^{-1}].$$

因此，

$$\begin{aligned}&\lambda_{u^{-1}}\Big((q^{-\frac{5}{2}-n+i}-q^{-\frac{1}{2}-n+i})(\mathcal{V}_{i,\mathbf{v}}-\mathcal{V}_{i-1,\mathbf{v}})+(q^{\frac{3}{2}-n+i}-q^{-\frac{1}{2}-n+i})(\mathcal{V}_{i+1,\mathbf{v}}-\mathcal{V}_{i,\mathbf{v}})\Big)\\ =&\frac{\lambda_{u^{-1}}(q^{-\frac{5}{2}-n+i}(\mathcal{V}_{i,\mathbf{v}}-\mathcal{V}_{i-1,\mathbf{v}}))\cdot\lambda_{u^{-1}}(q^{\frac{3}{2}-n+i}(\mathcal{V}_{i+1,\mathbf{v}}-\mathcal{V}_{i,\mathbf{v}}))}{\lambda_{u^{-1}}(q^{-\frac{1}{2}-n+i}(\mathcal{V}_{i,\mathbf{v}}-\mathcal{V}_{i-1,\mathbf{v}}))\cdot\lambda_{u^{-1}}(q^{-\frac{1}{2}-n+i}(\mathcal{V}_{i+1,\mathbf{v}}-\mathcal{V}_{i,\mathbf{v}}))}\\ =&\prod_{t\in[\mathbf{v}]_i}\frac{1+u^{-1}(x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{5\hbar}{4})}{1+u^{-1}(x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})}\prod_{r\in[\mathbf{v}]_{i+1}}\frac{1+u^{-1}(x_r+\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{3\hbar}{4})}{1+u^{-1}(x_r+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})}\end{aligned}$$

[1]通过对环面 $\mathbb{C}^*$ 取双覆盖，我们可以定义 $q^{\frac{1}{2}}$。

$$= \prod_{t\in[\mathbf{v}]_i} \frac{1+u^{-1}(x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{5\hbar}{4})}{1+u^{-1}(x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})} \prod_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}} \frac{1+u^{-1}(-x_s+\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{3\hbar}{4})}{1+u^{-1}(-x_s+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})}$$

$$=\Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-u-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4})\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(u+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}),$$

其中 第三个等式由变量替换 $s=r'$ 得出。注意,

$$\lambda_{u^{-1}}(q^{\frac{1}{2}}) = 1-\frac{\hbar}{4u}.$$

因此，对于任意 $\mathbf{v}\in\Lambda_{\mathfrak{c},\ d}$ 和 $f\in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{F}_{\mathbf{v}})$,

$$\lambda_{u^{-1}}(E_{i,\mathbf{v}})\cdot f = \mathbf{H}_i(u)f.$$

这就完成了证明。 □

3.3. 几何 B算子。 回顾广义斯坦伯格簇

$$Z := T^*\mathscr{F}\times_{\mathscr{N}} T^*\mathscr{F} = \bigsqcup_{\mathbf{v},\mathbf{w}\in\Lambda_{\mathfrak{c},d}} T^*\mathscr{F}_{\mathbf{v}}\times_{\mathscr{N}} T^*\mathscr{F}_{\mathbf{w}}.$$

设 $Z_{\mathbf{v},\ \mathbf{w}}:=\ T^*\mathscr{F}_{\mathbf{v}}\times_{\mathscr{N}} T^*\mathscr{F}_{\mathbf{w}}$。 $\mathscr{F}_{\mathbf{v}}\times\mathscr{F}_{\mathbf{w}}$上的对角 G-轨道由$\Xi_d(\mathbf{v},\ \mathbf{w})$编号，且

$$Z_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = \bigsqcup_{A\in\Xi_d(\mathbf{v},\mathbf{w})} Z_A,$$

其中 $Z_A := T^*_{\mathcal{O}_A}(\mathscr{F}_{\mathbf{v}}\times\mathscr{F}_{\mathbf{w}})$ 是与$A\in\Xi_d(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 对应的 G-轨道的余法丛。

对于任意 $\mathbf{v}\in\Xi_{\mathfrak{c},d}$ 以及任意 $1\le i\le 2n$, 令

$$\mathbf{v}'' := \mathbf{v}-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_{\tau i+1},\ \ and\ \mathbf{v}' := \mathbf{v}-\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{i+1}+\mathbf{e}_{\tau i}-\mathbf{e}_{\tau i+1}. \tag{3.4}$$

矩阵 $E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}'',\mathbf{1})$ 在 (2.9) 中关于序 (2.8) 是极小的。因此， G-轨道$\mathcal{O}_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)}$ 在 $\mathscr{F}\times\mathscr{F}$ 中是闭的，且由下式给出

$$\mathcal{O}_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)} = \left\{(F,F')\mid \substack{F=(V_k)_{0\le k\le N}\in\mathscr{F}_{\mathbf{v}}\\ F'=(V'_k)_{0\le k\le N}\in\mathscr{F}_{\mathbf{v}'}}, V'_i\overset{1}{\subset}V_i, V_k=V'_k\ if\ k\neq i,\tau i\right\}.$$

我们用 $\mathcal{L}_{\mathbf{v},i}$ 表示$\mathcal{O}_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)}$ 上的典范线丛，其在上述点 (F,F') 处的茎由 V_i/V'_i 给出。在命题 2.6 中的同构 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathcal{O}_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)})\ \simeq\mathbf{R}^{[E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)]^{\mathfrak{c}}}$ 下， $c_1(\mathcal{L}_{\mathbf{v},i})=x_{\bar v_i}$。

我们将从轨道 $\mathcal{O}_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)}$ 到 $\mathscr{F}_v$ 和 $\mathscr{F}_{v'}$ 的两个投影分别记为 p_1 和 p_2。对于 $i\neq n+1$, 纤维 $p_1^{-1}(F)$ 是格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}(v_i,V_i/V_{i-1})$。因此,

$$\mathrm{Eu}(T^*_{p_1}) = \prod_{\bar v_{i-1}<t<\bar v_i}(x_t-x_{\bar v_i})\in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathcal{O}_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)})\simeq\mathbf{R}^{[E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)]^{\mathfrak{c}}}. \tag{3.5}$$

若 $i=n+1$, 则纤维 $p_1^{-1}(F)$ 为

$$\left\{F'=(V'_k)_{0\le k\le N}\in\mathscr{F}_{\mathbf{v}'}\mid V_n\overset{1}{\subset}V'_n\subset V'_{n+1}=(V'_n)^\perp\subset V_{n+1}=V_n^\perp,\right.$$

$$V_k = V'_k \ if\ k \neq n, n+1\Big\}.$$

因此,

$$\mathrm{Eu}(T^*_{p_1}) = \prod_{\bar{v}_n+1<t\leq\bar{v}_{n+1}} (x_{\bar{v}_n+1} - x_t) \in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathcal{O}_{E^\theta_{n+1,n+2}(\mathbf{v}'',1)}) \simeq \mathbf{R}^{[E^\theta_{n+1,n+2}(\mathbf{v}'',1)]^\mathfrak{c}}. \tag{3.6}$$

回顾, $Z_{E^\theta_{i,\ i+1}(\mathbf{v}'',\ 1)} \subset Z$ 是 G-轨道 $\mathcal{O}_{E^\theta_{i,\ i+1}(\mathbf{v}'',\ 1)}$ 在$\mathscr{F} \times \mathscr{F}$中的余法丛。根据以下公式定义 $\mathscr{B}_{i,\ \mathbf{v},\ r} \in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$

$$\mathscr{B}_{i,\mathbf{v},r} := \sqrt{-1}(-1)^{v_i-1+r}\pi^*\bigg(c_1(\mathcal{L}_{\mathbf{v},i}) + \frac{n-i}{2}\hbar + \frac{\hbar}{4}\bigg)^r \cdot [Z_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)}],$$

并令

$$\mathscr{B}_{i,r} = \sum_{\mathbf{v}''\in\Lambda_{\mathfrak{c},d-1}} \mathscr{B}_{i,\mathbf{v},r} \in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z). \tag{3.7}$$

这将使算子 $B_{i,\ r}$ 在 (3.2) 中几何化。回顾 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 在$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{F})$ 上忠实作用, 见引理 2.7。

命题 3.2。 在命题 2.6中的同构下, $\mathscr{B}_{i,\ r} \in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 在 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{F}) \simeq \mathbf{P}$ 上的卷积作用由上述算子 $B_{i,\ r}$ 在 (3.2)中给出。

证明。 对任意 $f \in \mathbf{R}^{[\mathbf{v}']}[\hbar]$, $\mathscr{B}_{i,\ r} \star f = \mathscr{B}_{i,\ \mathbf{v},\ r} \star f$。由命题 2.6的证明可知, p_2^* 是命题 2.6(1) 中同构下的自然包含映射。因此, $p_2^*(f) = f$。先假设 $i \neq n+1$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathscr{B}_{i,\mathbf{v},r} \star f\\
=&\sqrt{-1}(-1)^{v_i-1}p_{1*}\bigg(\mathrm{Eu}(q^{-2}T^*_{p_1})\cdot(-c_1(\mathcal{L}_{\mathbf{v},i}) - \frac{n-i}{2}\hbar - \frac{\hbar}{4})^r \cdot p_2^* f\bigg)\\
=&\sqrt{-1}(-1)^{v_i-1}W_{[\mathbf{v}^\mathfrak{c}]}/W_{[E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)]^\mathfrak{c}}\bigg(\frac{\mathrm{Eu}(q^{-2}T^*_{p_1})}{\mathrm{Eu}(T_{p_1})}\cdot(-x_{\bar{v}_i} - \frac{n-i}{2}\hbar - \frac{\hbar}{4})^r \cdot f\bigg)\\
=&\sqrt{-1}S_{[\bar{v}_{i-1}+1,\bar{v}_i]}/S_{[\bar{v}_{i-1}+1,\bar{v}_i-1]}\bigg(\prod_{\bar{v}_{i-1}<t\leq\bar{v}_i-1}\frac{\hbar+x_t-x_{\bar{v}_i}}{x_t-x_{\bar{v}_i}}\cdot(-x_{\bar{v}_i} - \frac{n-i}{2}\hbar - \frac{\hbar}{4})^r \cdot f\bigg)\\
=&\sqrt{-1}\sum_{j\in[\mathbf{v}]_i}(j,\bar{v}_i)\bigg(\prod_{\bar{v}_{i-1}<t\leq\bar{v}_i-1}\frac{\hbar+x_t-x_{\bar{v}_i}}{x_t-x_{\bar{v}_i}}\cdot(-x_{\bar{v}_i} - \frac{n-i}{2}\hbar - \frac{\hbar}{4})^r \cdot f\bigg)\\
=&\sqrt{-1}\sum_{j\in[\mathbf{v}]_i}\prod_{\bar{v}_{i-1}<t\leq\bar{v}_i,t\neq j}\frac{\hbar+x_t-x_j}{x_t-x_j}\cdot(-x_j - \frac{n-i}{2}\hbar - \frac{\hbar}{4})^r \cdot (j,\bar{v}_i)f\\
=&\sqrt{-1}\sum_{j\in[\mathbf{v}]_i}(-x_j - \frac{n-i}{2}\hbar - \frac{\hbar}{4})^r \cdot \Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{j\}}(x_j)\cdot(j,\bar{v}_i)f.
\end{aligned}$$

由于 $f \in \mathbf{R}^{[\mathbf{v}']}[\hbar]$, 对于 $j \in [\mathbf{v}]_i$,

$$((j,\bar{v}_i)f)(x_{[\mathbf{v}]}) = f(x_{\tau_j^+[\mathbf{v}]}).$$

这就完成了 $i \neq n+1$ 情形的证明。

考虑情形 $i = n+1$。根据定义，$E^{\theta}_{n+1,n+2}(\mathbf{v}'',\mathbf{1}) = E^{\theta}_{n+1,n}(\mathbf{v}'',\mathbf{1})$。因此，按照与上文相同的论证，

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{B}_{n+1,r} \star f)(x_{[\mathbf{v}]}) \\
=&(\mathscr{B}_{n+1,\mathbf{v},r} \star f)(x_{[\mathbf{v}]}) \\
=&\sqrt{-1}(-1)^{v_{n+1}-1} W_{[\mathbf{v}^{\mathfrak{c}}]}/W_{[E^{\theta}_{n+1,n}(\mathbf{v}'',1)]^{\mathfrak{c}}} \Big(\frac{\mathrm{Eu}(q^{-2}T^*_{p_1})}{\mathrm{Eu}(T_{p_1})} \cdot (-x_{\bar{v}_{n+1}} + \frac{\hbar}{4})^r \cdot f \Big)(x_{[\mathbf{v}]}) \\
=&\sqrt{-1} \sum_{j \in [\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}_{n+1}} (j, 1+\bar{v}_n) \Big(\prod_{\bar{v}_n+1<t\leq \bar{v}_{n+1}} \frac{\hbar + x_{\bar{v}_n+1} - x_t}{x_{\bar{v}_n+1} - x_t} \cdot (x_{1+\bar{v}_n} + \frac{\hbar}{4})^r \cdot f \Big)(x_{[\mathbf{v}]}) \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{j \in [\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}_{n+1}} \iota_j(j, 1+\bar{v}_n) \Big(\prod_{\bar{v}_n+1<t\leq \bar{v}_{n+1}} \frac{\hbar + x_{\bar{v}_n+1} - x_t}{x_{\bar{v}_n+1} - x_t} \cdot (x_{1+\bar{v}_n} + \frac{\hbar}{4})^r \cdot f \Big)(x_{[\mathbf{v}]}) \\
=&\sqrt{-1} \sum_{j \in [\mathbf{v}]_{n+1}} \prod_{\bar{v}_n+1\leq t\leq \bar{v}_{n+1}, t\neq j} \frac{\hbar + x_j - x_t}{x_j - x_t} \cdot (x_j + \frac{\hbar}{4})^r \cdot f(x_{\tau_j^-[\mathbf{v}]}) \\
=&\sqrt{-1} \sum_{j \in [\mathbf{v}]_{n+1}} \prod_{\bar{v}_n+1\leq t\leq \bar{v}_{n+1}, t\neq j} \frac{\hbar + x_{j'} - x_{t'}}{x_{j'} - x_{t'}} \cdot (x_{j'} + \frac{\hbar}{4})^r \cdot f(x_{\tau_{j'}^-[\mathbf{v}]}) \\
=&\sqrt{-1} \sum_{j \in [\mathbf{v}]_{n+1}} (-x_j + \frac{\hbar}{4})^r \cdot \Phi_{[\mathbf{v}_{n+1}]\setminus\{j\}}(x_j) \cdot f(x_{\tau_j^+[\mathbf{v}]}).
\end{aligned}$$

这里的第三个等号由（3.6）、$x_{1+\bar{v}_n} = -x_{\bar{v}_{n+1}}$以及以下事实得出：$W_{[\mathbf{v}^{\mathfrak{c}}]}/W_{[E^{\theta}_{n+1,n}(\mathbf{v}'',1)]^{\mathfrak{c}}}$ 的一个代表元集为

$$\{(1+\bar{v}_n, j), \iota_j(1+\bar{v}_n, j)) \mid 1+\bar{v}_n \leq j \leq d\}.$$

第四个等号来自对第二个加项进行变量替换 $j \mapsto 2d+1-j = j'$，并且

$$((\bar{v}_n+1, j)f)(x_{[\mathbf{v}]}) = f(x_{\tau_j^-[\mathbf{v}]}), \quad \text{and } (\iota_j(\bar{v}_n+1, j)f)(x_{[\mathbf{v}]}) = f(x_{\tau^-_{2d+1-j}[\mathbf{v}]}),$$

对任意 $j \in [\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}_{n+1}$, $f \in \mathbf{R}^{[\mathbf{v}']^{\mathfrak{c}}}[\hbar]$ 都成立。最后，第五个等号来自变量替换 $j \mapsto j'$ 和 $t \mapsto t'$。证明至此完成。□

3.4. **对合**。在 Z 上存在一个对合，其通过交换两个因子$\mathscr{M} \times \mathscr{M}$诱导出映射 φ：$\gamma \mapsto \gamma^t$ 在 $H^{G\times\mathbb{C}^*}_*(Z)$ 上。对于卷积乘积，我们有（见 [CG10]）

$$(\gamma_1 \star \gamma_2)^t = \gamma_2^t \star \gamma_1^t.$$

因此，这定义了一个代数反对合 φ 在 $H^{G\times\mathbb{C}^*}_*(Z)$ 上。回顾在（**3.4**）中定义的 $\mathbf{v}'$ 和 $\mathbf{v}''$。

引理 3.3. 以下结论成立

$$\varphi(\mathscr{H}_{i,r}) = \mathscr{H}_{i,r}, \text{ and } \varphi(\mathscr{B}_{i,\mathbf{v},r}) = (-1)^{v_i + v_{\tau i} + r} \mathscr{B}_{\tau i, \mathbf{v}', r}.$$

证明。第一个结论成立，因为类 $\mathscr{H}_{i,r}$ 位于对角副本 $T^*\mathscr{F}$ 上。下面证明第二个等式。首先，$E^{\theta}_{i,i+1}(\mathbf{v}'', 1) = E^{\theta}_{\tau i+1,\tau i}(\mathbf{v}'', 1)$。注意，在交换因子后，$G$-轨道 $\mathcal{O}_{E^{\theta}_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)} \subset \mathscr{F}_{\mathbf{v}} \times \mathscr{F}_{\mathbf{v}'}$ 变为 $\mathcal{O}_{E^{\theta}_{\tau i,\tau i+1}(\mathbf{v}'',1)} \subset \mathscr{F}_{\mathbf{v}'} \times \mathscr{F}_{\mathbf{v}}$，而典范线丛 $\mathcal{L}_{\mathbf{v},i}$ 在 $\mathcal{O}_{E^{\theta}_{i,i+1}(\mathbf{v}'',1)}$ 上变为 $\mathcal{O}_{E^{\theta}_{\tau i,\tau i+1}(\mathbf{v}'',1)}$ 上的线丛，其在点 $(F' = (V'_k)\ F = (V_k))$ 处的纤维为 V_i/V'_i。回忆一下，在 $\mathscr{B}_{\tau i,\mathbf{v}',r}$ 的定义中，我们使用了线丛 $\mathcal{L}_{\mathbf{v}',\tau i}$，其在点 $(F' = (V'_k)\ F = (V_k))$ 处的纤维为 $V'_{\tau i}/V_{\tau i}$。由于 $V_i^{\perp} = V_{\tau i}$ 和 $(V'_i)^{\perp} = V'_{\tau i}$。因此，

$$\varphi(c_1(\mathcal{L}_{\mathbf{v},i})) = -c_1(\mathcal{L}_{\mathbf{v}',\tau i}).$$

因此，引理得证。 □

4. Main results

本节将表述本文的主要结果，即给出拟分裂 $\mathbf{Y}^{\imath}$ AIII 型$^{(\tau)}_{2n}$ 扭 Yangian 2.4的几何实现，该实现通过第 2.4 节中的斯坦伯格簇的2.4等变博雷尔–摩尔同调给出。

4.1. **扭曲杨扬子代数。** 设 $c_{ij}\ _{2n\times 2n}$ 为 A_{2n} 型的 Cartan 矩阵。与之前一样，对于 $1 \le i \le 2n$，$\tau i := N - i = 2n + 1 - i$以下是拟分裂 AIII 型扭曲杨扬子代数的 Drinfeld 新表示$^{(\tau)}_{2n}$，参见 [LZ25]。记 $\{x, y\} = xy + yx$。

定义 4.1。 拟分裂 AIII 型扭 Yangian$^{(\tau)}_{2n}$ 记为 $\mathbf{Y}^{\imath}$，是由 $h_{i,\ r}$、$b_{i,\ r}$、$1 \le i \le 2n$、$r \in \mathbb{N}$ 生成的$\mathbb{C}[\hbar]$-代数，并满足以下关系

$$\begin{aligned}
&[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0, \qquad h_{\tau i,0} = -h_{i,0},\\
&[h_{i,0}, b_{j,r}] = (c_{ij} - c_{\tau i,j})b_{j,r},\\
&[h_{i,1}, b_{j,r}] = (c_{ij} + c_{\tau i,j})b_{j,r+1} + \frac{\hbar(c_{ij} - c_{\tau i,j})}{2}\{h_{i,0}, b_{j,r}\},\\
&[h_{i,r+2}, b_{j,s}] - [h_{i,r}, b_{j,s+2}]\\
&= \frac{c_{ij} - c_{\tau i,j}}{2}\hbar\{h_{i,r+1}, b_{j,s}\} + \frac{c_{ij} + c_{\tau i,j}}{2}\hbar\{h_{i,r}, b_{j,s+1}\} + \frac{c_{ij}c_{\tau i,j}}{4}\hbar^2[h_{i,r}, b_{j,s}],\\
&[b_{i,r+1}, b_{j,s}] - [b_{i,r}, b_{j,s+1}] = \frac{c_{ij}}{2}\hbar\{b_{i,r}, b_{j,s}\} - 2\delta_{\tau i,j}(-1)^r h_{j,r+s+1},
\end{aligned}$$

以及 Serre 关系：对于 $c_{ij} = 0$,

$$[b_{i,r}, b_{j,s}] = \delta_{\tau i,j}(-1)^r h_{j,r+s},$$

以及对于 $c_{ij} = -1,\ j \ne \tau i \ne i$,

$$\mathrm{Sym}_{k_1,k_2}[b_{i,k_1}, [b_{i,k_2}, b_{j,r}]] = 0,$$

以及对于 $c_{i,\ \tau i} = -1$,

$$\mathrm{Sym}_{k_1,k_2}[b_{i,k}, [b_{i,k_2}, b_{\tau i,r}]] = \frac{4}{3}\mathrm{Sym}_{k_1,k_2}(-1)^{k_1}\sum_{p=0}^{k_1+r} 3^{-p}[b_{i,k_2+p}, h_{\tau i,k_1+r-p}],$$

其中 $h_{i,s} = 0$ 若 $s < 0$。

根据定义可知，对于任意的 $r \geq 0$, $h_{\tau i,r} = (-1)^{r+1} h_{i,r}$。现在我们用生成函数的形式重述这些关系。设

$$b_i(u) := \hbar \sum_{r\geq 0} b_{i,r} u^{-r-1}, \quad h_i(u) := 1 + \hbar \sum_{r\geq 0} h_{i,r} u^{-r-1}, \quad h_i^\circ(u) := h_i(u) - 1.$$

命题 4.2。 [LZ25，定理 3。9] 扭 *Yangian* $\mathbf{Y}^\imath$ 准分裂型 $\mathrm{AIII}_{2n}^{(\tau)}$ 的定义关系可改写如下：

$$[h_i(u), h_j(v)] = 0, \qquad h_{\tau i}(u) = h_i(-u),$$

$$\begin{aligned}(u-v)[b_i(u), b_j(v)] =& \frac{c_{ij}}{2}\hbar\{b_i(u), b_j(v)\} + \hbar([b_{i,0}, b_j(v)] - [b_i(u), b_{j,0}]) \\ & - \delta_{\tau i,j}\hbar\Big(\frac{2u}{u+v} h_i^\circ(u) + \frac{2v}{u+v} h_j^\circ(v)\Big),\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}(u^2-v^2)[h_i(u), b_j(v)] =& \frac{c_{ij} - c_{\tau i,j}}{2}\hbar u\{h_i(u), b_j(v)\} + \frac{c_{ij} + c_{\tau i,j}}{2}\hbar v\{h_i(u), b_j(v)\} \\ & + \frac{c_{ij}c_{\tau i,j}}{2}\hbar^2[h_i(u), b_j(v)] - \hbar[h_i(u), b_{j,1}] \\ & - \hbar v[h_i(u), b_{j,0}] - \frac{c_{ij} + c_{\tau i,j}}{2}\hbar^2\{h_i(u), b_{j,0}\},\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$(u+v)[b_i(u), b_j(v)] = \delta_{\tau i,j}\hbar(h_j(v) - h_i(u)), \qquad (c_{ij} = 0), \tag{4.3}$$

$$[b_{i,0}, [b_{i,0}, b_{j,0}]] = 0, \qquad (c_{ij} = -1, j \neq \tau i), \tag{4.4}$$

$$[b_{i,0}, [b_{i,0}, b_{\tau i,0}]] = 4b_{i,0}, \qquad (i = n, \ or \ n+1). \tag{4.5}$$

注 4.3。 LZ25 中证明了 [LZ25，命题 3。12] 关系（4.5）和其他关系将推出定义 4.1中的最后一个关系。

4.2. 代数同态。回顾 $\mathbf{P} := \bigoplus_{\mathbf{v}\in\Lambda_{\mathfrak{c},d}} \mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}[\hbar] \simeq H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{F})$。在第 3 节中，我们定义了作用于 $\mathbf{P}$ 上的算子 $B_{i,r}, H_{i,r}$，并且还定义了 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 中的元素 $\mathscr{B}_{i,r}, \mathscr{H}_{i,r}$，见 (3.1)、(3.2)、(3.3) 和 (3.7)。

定理 4.4。 以下赋值：

$$b_{i,r} \mapsto B_{i,r}, \quad h_{i,r} \mapsto H_{i,r}, \quad for\ 1 \leq i \leq 2n, r \geq 0$$

在空间$\mathbf{P}$上定义了准分裂型$\mathrm{AIII}_{2n}^{(\tau)}$ 的扭 *Yangian* $\mathbf{Y}^\imath$ 的一个表示。

我们将在下文第6 节证明此定理，方法是验证相应的算子满足命题 4.2中的关系。这一表示称为 $\mathbf{Y}^\imath$的多项式表示。由此，我们可以证明本文的主要结果。

定理 4.5。 存在唯一的代数同态

$$\Psi : \mathbf{Y}^{\imath} \to H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$$

通过映射

$$b_{i,r} \mapsto \mathscr{B}_{i,r}, \quad h_{i,r} \mapsto \mathscr{H}_{i,r}, \ for\ 1 \le i \le 2n, r \ge 0.$$

证明。 由定理4.4、引理 2.7以及命题3.1 和3.2中的显式公式可直接得到。 □

5. Representations of twisted Yangian

本节中，我们证明在某些特殊化下，定理 Ψ 4.5中的同态在这些特殊化下的满射性。然后，通过 [CG10], 中卷积代数表示的一般构造，我们从偏旗簇余切丛的几何出发，得到扭 Yangian $\mathbf{Y}^{\imath}$的某些表示。 $\mathscr{M}$ 。

5.1. 同态 Ψ_a的满射性。 等变的 Borel–Moore 同调群 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ 是基环 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt}) \simeq \mathbf{R}^W[\hbar]$ 上的一个模，其特征对应于 $\mathfrak{g}\times\mathbb{C}$ 中的半单共轭类。设 $a := (s,t) \in \mathfrak{g}\times\mathbb{C}$ 是一个半单元，设 $\mathbb{C}_a$ 是 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G[\hbar]$ 通过在 a 处求值所得的一维模，并令

$$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)_a := H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z) \otimes_{H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt})} \mathbb{C}_a.$$

将定理 Ψ 4.5 中的 在 $\hbar = t$ 处特化，得到一个代数同态

$$\Psi_a : \mathbf{Y}_t^{\imath} \to H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)_a. \tag{5.1}$$

定理 5.1。 设 $t \neq 0$。那么，式 Ψ_a 中的 (5.1) 所给出的同态是满射。

本小节余下部分将用于证明定理 5.1。从现在起，我们假设 $t \neq 0$ 。为此，我们考虑 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$（及其局部化）在 $\hbar = t \neq 0$处的特化，记为 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)_t$，以及特化态射$\Psi_t$。

对于任意$\mathbf{v} \in \Lambda_{\mathfrak{c},\,d}$，令

$$\mathbf{I}_{\mathbf{v}} := \Big(\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{m=-d \\ m\neq v_i - v_{i+1}}}^{d} \frac{h_{i,0} - m\hbar}{(v_i - v_{i+1} - m)\hbar}\Big) \cdot \prod_{\substack{m=-d \\ m\neq v_n - v_{n+1}}}^{d} \frac{h_{n,0} - (m - \frac{\hbar}{4})\hbar}{(v_n - v_{n+1} - m)\hbar} \in \mathbf{Y}_t^{\imath}.$$

引理 5.2. 对于任意 $\mathbf{u},\mathbf{v},\ \mathbf{w} \in \Lambda_{\mathfrak{c},d}$, $\Psi_t(\mathbf{I}_{\mathbf{v}}) \star H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathbf{uw}}) \neq 0$ 当且仅当 $\mathbf{v} = \mathbf{u}$。

证明。 注意，对于 $1 \le i \le n$, $\mathscr{H}_{i,0}$ 在 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathbf{uw}})$ 上的作用是按 $(u_i - u_{i+1} - \frac{1}{4}\delta_{i,n})\hbar$ 进行标量乘法。因此，对于任意 $\gamma \in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathbf{uv}})_t$,

$$\Psi_t(\mathbf{I_v}) \star \gamma = \Big(\prod_{i=1}^{n} \prod_{\substack{m=-d \\ m\neq v_i - v_{i+1}}}^{d} \frac{u_i - u_{i+1} - m}{v_i - v_{i+1} - m}\Big) \cdot \gamma. \tag{5.2}$$

因此，如果 $\mathbf{v} = \mathbf{u}$，则（5.2）的右端等于 γ。如果 $\Psi_t(\mathbf{I_v}) \star \gamma \neq 0$，则对于 $1 \le i \le n$，必须有 $u_i - u_{i+1} = v_i - v_{i+1}$。由于 $\sum_{i=1}^n u_i + \frac{u_{n+1}}{2} = \sum_{i=1}^n v_i + \frac{v_{n+1}}{2} = d$，我们得到 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$。 □

因此，t 第 $\mathscr{B}_{i,\mathbf{v},r}$ 和 $\mathscr{H}_{i,\mathbf{v},r}$ 定义于第 3节的类属于 Ψ_t的像 .

引理 5.3。 固定 $\mathbf{v} \in \Lambda_{\mathfrak{c},\, d}$ 和 $t \neq 0$。则，对于 $1 \le i \le n$ 和 $k \ge 1$，元素 $\mathscr{H}_{i,\mathbf{v},k} \cdot [Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v})}]$ 和 $\sum_{j=1}^d x_j^{2k}$生成代数 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v})})_t \simeq \mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}$。

证明。 按以下恒等式定义类 $\mathscr{H}_{i,r}$：

$$\mathscr{H}_i(z) = 1 + \hbar \sum_{r\ge 0} \mathscr{H}_{i,r} z^{-r-1} = \exp\Big(\hbar \sum_{r\ge 0} \hat{\mathscr{H}}_{i,r}(-z - \frac{n-i}{2}\hbar - \frac{\hbar}{4})^{-r-1}\Big).$$

因此，$\mathscr{H}_{i,r}$ 是关于 $\{\mathscr{H}_{i,k}\}$ 的多项式。回忆一下，对于 $1 \le i \le n$，类 $\mathscr{H}_i(z)$ 在 $\mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}[\hbar]$ 上的作用是标量乘法，其标量为

$$(1 - \frac{\delta_{i,n}}{4z}\hbar) \cdot \Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-z - \frac{n-i}{2}\hbar - \frac{\hbar}{4}) \cdot \Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(z + \frac{n-i}{2}\hbar + \frac{\hbar}{4}).$$

直接计算可知，类 $\hat{\mathscr{H}}_{i,k}$ 在 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v})})_t \simeq \mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}$ 上的作用对应以下标量乘法

$$\hat{\mathscr{H}}_{i,\mathbf{v},k} = \begin{cases} -\sum_{j\in[\mathbf{v}]_i} x_j^k + \sum_{j\in[\mathbf{v}]_{i+1}} x_j^k + \text{lower terms}, & \text{for } 1 \le i \le n-1; \\ -\sum_{j\in[\mathbf{v}]_n} x_j^k + \sum_{j\in[\mathbf{v}]_{n+1}^{\mathfrak{c}}} (x_j^k + (-x_j)^k) + \text{lower terms}, & \text{for } i = n. \end{cases}$$

设 $\mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}_{\le k} := \{f \in \mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}} \mid \deg(f) \le k\}$。我们断言

$$\mathfrak{U}_k = \Big\{\hat{\mathscr{H}}_{i,\mathbf{v},r} \mid 1 \le r \le k,\ 1 \le i \le n\Big\} \cup \Big\{\sum_{j=1}^d x_j^{2l} \mid l \in \mathbb{N},\ 1 \le l \le [\frac{k}{2}]\Big\}$$

生成向量空间 $\mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}_{\le k}$。我们用关于 k 的归纳法证明这一断言。当 $k = 0$ 时，无需证明。假设该结论对 $k-1$ 成立。由于 $\mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}}_{\le k}$ 由

$$\Big\{\sum_{j\in[\mathbf{v}]_i} x_j^s \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le s \le k\Big\} \cup \Big\{\sum_{j\in[\mathbf{v}]_{n+1}^{\mathfrak{c}}} x_j^{2l} \mid 1 \le l \le [\frac{k}{2}]\Big\},$$

还需证明 $\mathfrak{U}_k$ 生成

$$\Big\{\sum_{j\in[\mathbf{v}]_i} x_j^k \mid 1 \le i \le n\Big\} \cup \Big\{\frac{1+(-1)^k}{2} \sum_{j\in[\mathbf{v}]_{n+1}^{\mathfrak{c}}} x_j^k\Big\}.$$

Let

$$\hat{\mathscr{H}}'_{i,\mathbf{v},k}=\begin{cases}-\sum\limits_{j\in[\mathbf{v}]_i}x_j^k+\sum\limits_{j\in[\mathbf{v}]_{i+1}}x_j^k, & \text{for } 1\le i\le n-1;\\ -\sum\limits_{j\in[\mathbf{v}]_n}x_j^k+\sum\limits_{j\in[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}_{n+1}}(x_j^k+(-x_j)^k), & \text{for } i=n,\end{cases}$$

^^这是 $\mathscr{H}_{i,\mathbf{v},k}$ 的首项。由于 $\mathfrak{U}_{k-1}\subset\mathfrak{U}_k$，根据归纳法，$\mathscr{H}'_{i,\mathbf{v},k}$ 可由 $\mathfrak{U}_k$ 生成。若 k 为奇数，则对于 $1\le i\le n$，$\sum\limits_{j\in[\mathbf{v}]_i}x_j^k=-\sum\limits_{s=i}^{n}\hat{\mathscr{H}}'_{s,\mathbf{v},k}$。若 k 为偶数，

那么列向量

$$(\hat{\mathscr{H}}'_{1,\mathbf{v},k},\cdots,\hat{\mathscr{H}}'_{n,\mathbf{v},k},\sum_{j=1}^{d}x_j^k)^T$$

与向量

$$(\sum_{j\in[\mathbf{v}]_i}x_j^k,\cdots,\sum_{j\in[\mathbf{v}]_n}x_j^k,\sum_{j\in[\mathbf{v}]^{\mathfrak{c}}_{n+1}}x_j^k)^T$$

通过矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&&&&&\\&-1&1&&&&\\&&-1&1&&&\\&&&\ddots&\ddots&&\\&&&&-1&1&\\&&&&&-1&2\\1&1&1&\cdots&1&1&1\end{pmatrix}$$

由于 $\det(A)=(-1)^n(2n+1)\neq 0$，这就完成了该断言的证明，从而也完成了引理的证明。□

引理 5.4。设 $\mathbf{v}\in\Lambda_{\mathfrak{c},d-1}$。对于 $1\le i\le 2n$，$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v},1)})$ 包含在由 $\mathscr{B}_{i,\mathbf{v},0}$ 以及支撑在对角轨道上的类所生成的代数中。

证明。只需证明 $1\le i\le n$ 的情形，其他情形可用类似方法证明。首先，轨道 $\mathcal{O}_{E^\theta_{i+1,\,i}(\mathbf{v},1)}$ 是闭的。根据命题 2.6，我们有

$$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v},1)})\simeq\mathbf{R}^{[E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v},1)]^{\mathfrak{c}}}[\hbar],$$

其中 $W_{[E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v},1)]^{\mathfrak{c}}}$

$$=\begin{cases}S_{[1,\bar v_1]}\times\cdots\times S_{[\bar v_{i-1}+1,\bar v_i]}\times S_{[\bar v_i+2,\bar v_{i+1}]}\times\cdots\times(\mathbb{Z}_2^{\frac{v_{n+1}}{2}}\rtimes S_{[\bar v_n+1,d]}) & \text{for } 1\le i\le n-1,\\ S_{[1,\bar v_1]}\times\cdots\times S_{[\bar v_{n-1}+1,\bar v_n]}\times(\mathbb{Z}_2^{\frac{v_{n+1}}{2}-1}\rtimes S_{[\bar v_n+2,d]}) & \text{for } i=n.\end{cases}$$

根据$\mathbf{v}$的假设，$\mathbf{v}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{N+1-i}\in\Lambda_{\mathfrak{c},d}$。此外，我们有

$$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{N+1-i})})$$

$$\simeq \begin{cases} \mathbf{R}^{S_{[1,\bar{v}_1]}\times\cdots\times S_{[\bar{v}_{i-1}+1,\bar{v}_i+1]}\times S_{[\bar{v}_i+2,\bar{v}_{i+1}]}\times\cdots\times(\mathbb{Z}_2^{\frac{v_{n+1}}{2}}\rtimes S_{[\bar{v}_n+1,d]})}[\hbar] & \text{if } 1\le i\le n-1, \\ \mathbf{R}^{S_{[1,\bar{v}_1]}\times\cdots\times S_{[\bar{v}_{n-1}+1,\bar{v}_n+1]}\times(\mathbb{Z}_2^{\frac{v_{n+1}}{2}-1}\rtimes S_{[\bar{v}_n+2,d]})}[\hbar] & \text{if } i=n. \end{cases}$$

与类$\mathscr{B}_{i,\mathbf{v},0}$作卷积，我们得到

$$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{N+1-i})})\subset H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v},1)}).$$

同理，$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v}+\mathbf{e}_{i+1}+\mathbf{e}_{N-i})})\subset H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v},1)})$。由于

$$\sum_{j\in[\bar{v}_{i-1}+1,\bar{v}_i+1]} x_j^k\in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{N+1-i})})$$

and

$$\sum_{j\in[\bar{v}_{i-1}+1,\bar{v}_i]} x_j^k\in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v}+\mathbf{e}_{i+1}+\mathbf{e}_{N-i})}),$$

我们有 $x^k_{\bar{v}_i+1}\in H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{E^\theta_{i+1,i}(\mathbf{v},1)})$。结合上述讨论，由于 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{E^\theta_{i,i+1}(\mathbf{v},1)})$ 由 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_{\mathrm{diag}(\mathbf{v}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{N+1-i})})$ 和 $x^k_{\bar{v}_i+1}$ $(k\ge 0)$ 生成，故引理得证。□

现在我们可以完成定理 5.1 的证明。

证明。 在 $s\in\mathfrak{g}$ 处取特化后，引理 $\sum_{j=1}^d x_j^{2k}$ 中的元素 5.3 特化为标量。现在定理 5.1 由定理 2.10、引理 5.2、引理5.3以及引理5.4 得证。 □

5.2. **表示的构造**。 通过 [CG10 第 8], 中关于卷积的表示的一般构造，我们可以通过同态（$\mathbf{Y}^\imath$，利用（5.1）得到一些表示，如下所示。

令 A 为由 $\exp(a)$ 生成的 $G\times\mathbb{C}^*$ 的闭子群。则 A 是一个代数环面，并且有自然同构 $H_*^A(\mathrm{pt})\simeq\mathbb{C}[\mathrm{Lie}(A)]$。假设 $\mathcal{T}$ 是包含 A 的 $G\times\mathbb{C}^*$ 的极大环面，则 $\mathrm{Lie}(A)\subset\mathrm{Lie}(\mathcal{T})$。自然映射 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt})\simeq\mathbb{C}[\mathrm{Lie}(\mathcal{T})]^W\hookrightarrow\mathbb{C}[\mathrm{Lie}(\mathcal{T})]\overset{res}{\to}\mathbb{C}[\mathrm{Lie}(A)]\simeq H^A(\mathrm{pt})$ 使 $H_*^A(\mathrm{pt})$ 成为一个 $H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt})$-代数。于是，$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt})$-模 $\mathbb{C}_a$ 可通过在 a 处求值视为一个 $H_*^A(\mathrm{pt})$-模。我们有代数同构

$$H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)_a:=H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)\otimes_{H_*^{G\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt})}\mathbb{C}_a\simeq H_*^A(Z)\otimes_{H_*^A(\mathrm{pt})}\mathbb{C}_a\simeq H_*(Z^A).$$

这里 $H_*(Z^A)$ 表示 Z^A 的（非等变）Borel–Moore 同调，取复系数；它也具有卷积代数结构，参见 [CG10，第 2]章。第一个同构源自 [CG10 的同调版本，定理 6.2。10], 而第二个同构是双变定位映射的同调版本，参见 [CG10，定理 5.11。10]。与定理 Ψ_a 中的满射代数同态5.1复合后，我们得到一个满射代数同态

$$\mathbf{Y}_t^\imath\twoheadrightarrow H_*(Z^A). \tag{5.3}$$

因此，卷积代数 $H_*(Z^A)$ 的每个表示都会拉回为 $\mathbf{Y}_t^\imath$ 的一个表示。由于（5.3）中的同态是满射的，不可约表示的拉回仍然不可约。

回忆一下，$a=(s,t)\in\mathfrak{g}\times\mathbb{C}$ 是一个满足 $t\neq 0$ 的半单元。令 $G(s)$ 为 s 的中心化子。令 $\mathscr{M}^A:=\bigsqcup_{\mathbf{v}}(T^*\mathscr{F}_{\mathbf{v}})^A$ 为不动点集。那么映射 $\pi\colon \mathscr{M}^A\to\mathscr{N}^A$ 是 $G(s)$-等变的。对任意 $x\in\mathscr{N}^A$，令 $\mathscr{M}_x^A$ 为该纤维，这些纤维称为 Spaltenstein 簇。等变版本的分解定理给出

$$\pi_*\underline{\mathbb{C}}_{\mathscr{M}^A}=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z},\phi=(\mathcal{O}_\phi\subset\mathscr{N}^A,\chi_\phi)} L_\phi(k)\otimes \mathrm{IC}_\phi[k].$$

这里，$\mathcal{O}_\phi$ 是 $\mathscr{N}^A$ 上的一个 $G(s)$-轨道，χ_ϕ 是 $\mathcal{O}_\phi$ 上的一个 $G(s)$-等变局部系统，IC_ϕ 是相应的交叉同调复形，而 $L_\phi(k)$ 是某个向量空间。令 $L_\phi=\oplus_k L_\phi(k)$；若非零，它是一个简单的 $H_*(Z^A)$-模，参见 [CG10，定理 8.6.12]。对任意 $x\in\mathcal{O}_\phi$，令 $H_*(\mathscr{M}_x^A)_\phi$ 为 $H_*(\mathscr{M}_x^A)$ 的 ϕ-等型分量，它通过卷积成为 $H_*(Z^A)$ 的一个模。通过拉回 (5.1)，$H_*(\mathscr{M}_x^A)_\phi$ 也是 $\mathbf{Y}_t^\imath$ 的一个模，称为标准模。我们也可以用这种方式将 L_ϕ 视为一个 $\mathbf{Y}_t^\imath$-模。于是，[CG10 第 8] 章中的构造给出以下结果。

定理 5.5。设 $t\neq 0$。

(1) $\mathbf{Y}_t^\imath$-模 L_ϕ 若非零则为单模。(2) 对于任意 $\phi=(\mathcal{O}_\phi,\chi_\phi)$ 和 $\psi=(\mathcal{O}_\psi,\chi_\psi)$ 以及 $x\in\mathcal{O}_\phi$，

$$[H_*(\mathscr{M}_x^A)_\phi : L_\psi]=\sum_k \dim H^k(i_x^!\mathrm{IC}_\psi)_\phi.$$

正如引言中所提到的，本文研究的扭 Yangian $\mathbf{Y}^\imath$ 与 Molev 和 Ragoucy 引入的反射代数密切相关，见 [LZ25，定理 6。17] 以及 [MR02]。一个有趣的问题是，将上文构造的表示与 [MR02]中的表示对应起来。

6. Checking relations

在本文的其余部分，我们通过验证算子满足关于扭 Yangian $\mathrm{Y}^\imath$的命题 4.2 中的关系，来证明定理 **4.4** 。

6.1. 算子。 我们先回顾第 3 节中的算子。对于 $1\le i\le 2n$ 和$\mathbf{v}\in\Lambda_{\mathfrak{c},\ d}$,

$$H_{i,\mathbf{v}}(u):=(1-\frac{\delta_{i,n}-\delta_{i,n+1}}{4u}\hbar)\cdot\Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-u-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4})\cdot\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(u+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}).$$

将 $H_{i,\mathbf{v}}(u)$ 视为关于 u^{-1} 的级数，则其常数项为 1，并设 $H^\circ_{i,\mathbf{v}}(u):=H_{i,\mathbf{v}}(u)-1$。回忆一下，$\mathbf{H}_i(u)$ 是作用于 $\mathbf{P}$ 上的算子，它通过乘以 $H_{i,\mathbf{v}}(u)$ 作用于 $\mathbf{R}^{[\mathbf{v}]^\mathfrak{c}}$ 。

对于 $1\le i\le 2n$,

$$(B_{i,r}f)(x_{[\mathbf{v}]}):=\sqrt{-1}\sum_{j\in[\mathbf{v}]_i}(-x_j-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4})^r\cdot\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{j\}}(x_j)\cdot f(x_{\tau_j^+[\mathbf{v}]}),$$

并令

$$\mathbf{B}_i(u) := \hbar \sum_{r\geq 0} B_{i,r} u^{-r-1}.$$

Then

$$(\mathbf{B}_i(u)f)(x_{[\mathbf{v}]}) = \sqrt{-1} \sum_{t\in[\mathbf{v}]_i} \frac{\hbar}{u + x_t + \frac{n-i}{2}\hbar + \frac{\hbar}{4}} \Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t) \cdot f(x_{\tau_t^+[\mathbf{v}]}).$$

那么在 ma p 在定理 4.4 , $h_i(u)$ (resp. $b_i(u)$) 被映射到$\mathbf{H}_i$ (u) (resp. $\mathbf{B}_i(u)$.

) 命题 4.2 中的第一个关系直接由定义得出。在检查其他关系之前，我们需要做一些准备。对于洛朗级数 $p(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i z^i$ 中z^{-1}，我们记截断为

$$\big(p(z)\big)^\circ := \sum_{i<0} a_i z^i.$$

如果 $\tilde{p}(z) := p(z)/z$，那么

$$u\big(\tilde{p}(u)\big)^\circ + v\big(\tilde{p}(-v)\big)^\circ = u\sum_{i<1} a_i u^{i-1} - (-v)\sum_{i<1} a_i(-v)^{i-1} = \big(p(u)\big)^\circ - \big(p(-v)\big)^\circ. \tag{6.1}$$

引理 6.1。 [SSX25] 设 $p(z) = q(z)\prod_{i=1}^n (z - z_i)$，其中 $z_1, \ldots, z_n$ 互不相同，且$q(z) \in \mathbb{C}[z]$。则

$$(p(z))^\circ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - z_i} \frac{q(z_i)}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - z_i} \operatorname{Res}(p(z), z_i).$$

将此引理应用于 $H_{i,\,\mathbf{v}}(u)$（见（3.1））。由于它是一个常数项为 1 的级数，$H^\circ_{i,\,\mathbf{v}}(u)$ 是其截断 $(H_{i,\,\mathbf{v}}(u))^\circ$，定义如上。

引理 6.2。 对于 $i \neq n, n+1$，以下恒等式成立：

$$\begin{aligned} H^\circ_{i,\mathbf{v}}(u) = &\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i} \frac{\hbar}{u + x_t + \frac{n-i}{2}\hbar + \frac{\hbar}{4}} \Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(-x_t) \\ &- \sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}} \frac{\hbar}{u - x_s + \frac{n-i}{2}\hbar + \frac{\hbar}{4}} \Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\setminus\{s\}}(x_s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u\cdot H_{i,\mathbf{v}}(u))^\circ = &-\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i} \frac{\hbar(x_t + \frac{n-i}{2}\hbar + \frac{\hbar}{4})}{u + x_t + \frac{n-i}{2}\hbar + \frac{\hbar}{4}} \Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(-x_t) \\ &- \sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}} \frac{\hbar(x_s - \frac{n-i}{2}\hbar - \frac{\hbar}{4})}{u - x_s + \frac{n-i}{2}\hbar + \frac{\hbar}{4}} \Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\setminus\{s\}}(x_s), \end{aligned}$$

且对于 $i = n$,

$$(u\cdot H_{n,\mathbf{v}}(u))^\circ = -\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n} \frac{\hbar(x_t + \frac{\hbar}{2})}{u + x_t + \frac{\hbar}{4}} \Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}}(-x_t)$$

$$-\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\frac{\hbar(x_s-\frac{\hbar}{2})}{u-x_s+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{s\}}(x_s).$$

证明。 回顾一下，对于 $i\neq n,\ n+1$,

$$\begin{aligned}H_{i,\mathbf{v}}(u):=&\Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-u-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4})\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(u+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\\=&\prod_{t\in[\mathbf{v}]_i}\left(1+\frac{\hbar}{x_t+u+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\right)\prod_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}}\left(1+\frac{\hbar}{x_s-u-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\right).\end{aligned}$$

它在 $\{-x_t-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}\mid t\in[\mathbf{v}]_i\}$和 $\{x_s-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}\mid s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}\}$处有简单极点。因此，前两个恒等式由引理 6.1得出。同样的论证也适用于

$$u\cdot H_{n,\mathbf{v}}(u)=(u-\frac{\hbar}{4})\Phi_{[\mathbf{v}]_n}(-u-\frac{\hbar}{4})\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau n}}(u+\frac{\hbar}{4})$$

从而得到最后一个恒等式。 □

6.2. **关系式** (4.1)**.** 我们需要验证关系式

$$\begin{aligned}(u-v)[b_i(u),b_j(v)]-\frac{c_{ij}}{2}\hbar\{b_i(u),b_j(v)\}-\hbar([b_{i,0},b_j(v)]-[b_i(u),b_{j,0}])\\=-\delta_{\tau i,j}\hbar\Big(\frac{2u}{u+v}h_i^\circ(u)+\frac{2v}{u+v}h_j^\circ(v)\Big).\end{aligned}\tag{6.2}$$

若 $j\neq\tau i$ 且 $c_{ij}=0$，则由下文第 $[\mathbf{B}_i(u),\ \mathbf{B}j(v)]=0$ 节中验证的关系式可知6.4 。因此，只需考虑 $j=\tau i$ 或 $c_{ij}\neq 0$ 的情形，而这又可进一步分解为以下几种情形:

- $j\neq\tau i$, $c_{ij}=2$;
- $j\neq\tau i$, $c_{ij}=-1$;
- $j=\tau i$。

6.2.1. 情形 $j\neq\tau i,\ i=j$. 根据定义,

$$\begin{aligned}&(\mathbf{B}_i(u)\mathbf{B}_i(v)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\=&-\sum_{t\neq s\in[\mathbf{v}]_i}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t,s\}}(x_s)\cdot(\mathbf{B}_i(v)f)(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]}),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&(\mathbf{B}_i(v)\mathbf{B}_i(u)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\=&-\sum_{t\neq s\in[\mathbf{v}]_i}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{s\}}(x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t,s\}}(x_t)\cdot(\mathbf{B}_i(v)f)(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]}).\end{aligned}$$

于是，式（6.2）成立，因为其系数为

$$\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t,s\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t,s\}}(x_s)\cdot(\mathbf{B}_i(v)f)(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]})$$

在式（6.2）左边的是

$$\begin{aligned}
&-(u-v-\hbar)\varphi(x_s-x_t)+(u-v+\hbar)\varphi(x_t-x_s)\\
&+(u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\varphi(x_s-x_t)-(v+x_s+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\varphi(x_s-x_t)\\
&-(u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t-x_s)+(v+x_s+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t-x_s)=0.
\end{aligned}$$

6.2.2. 情形 $j\neq\tau i,\ \ c_{i,\ j}=-1$。在此情形下，$j=i\pm1$。由引理 3.3，我们可以假设 $j=i+1$。由于 $j\neq\tau i$，得到 $i\neq n$。然后

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{B}_i(u)\mathbf{B}_{i+1}(v)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\
&=-\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i}\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{i+1}\cup\{t\}}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s+\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\backslash\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{i+1}\cup\{t\}\backslash\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]}),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{B}_{i+1}(v)\mathbf{B}_i(u)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\
&=-\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i}\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{i+1}}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s+\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\backslash\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{i+1}\backslash\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]}),
\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s+\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\backslash\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{i+1}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_t^-\tau_t^-[\mathbf{v}]})$$

（6.2）左边的系数为

$$-(u-v+\frac{\hbar}{2})+(u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})-(v+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4})=0.$$

另一方面，对于 $t\in[\mathbf{v}]_i$ 和 $s\in[\mathbf{v}]_{i+1}$，系数为

$$\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s+\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\backslash\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{i+1}\backslash\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]})$$

（6.2）左边的系数为

$$\begin{aligned}
&-(u-v+\frac{\hbar}{2})\varphi(x_t-x_s)+(u-v-\frac{\hbar}{2})\\
&+(u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t-x_s)-(u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\\
&-(v+x_s+\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t-x_s)+(v+x_s+\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4})=0.
\end{aligned}$$

因此，在这种情况下，式（6.2）成立。

6.2.3. 情形 $j=\tau i$。 我们先考虑情形 $c_{i,\ \tau i}=0$。于是

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{B}_i(u)\mathbf{B}_{\tau i}(v)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\
=&-\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i}\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}\cup\{t'\}}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\cup\{t'\}\setminus\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]}),
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{B}_{\tau i}(v)\mathbf{B}_i(u)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\
=&-\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}}\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i\cup\{s'\}}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\cup\{s'\}\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\setminus\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]}).
\end{aligned}
$$

显然，对于 $t\in[\mathbf{v}]_i$，$s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}$，$f(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]})$ 在左侧（6.2）中的系数为 0。因此，左侧（$f(x_{[\mathbf{v}]})$ 在6.2）中的系数为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(-x_t)\\
&\Big(-(u-v)\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v-x_t-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}+\hbar\frac{\hbar}{v-x_t-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}-\hbar\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\Big)\\
&+\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\setminus\{s\}}(x_s)\\
&\Big((u-v)\frac{\hbar}{u-x_s+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}-\hbar\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}+\hbar\frac{\hbar}{u-x_s+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\Big)\\
=&\frac{2\hbar}{u+v}\Big(\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(-x_t)\frac{\hbar(x_t+\frac{(n-i)\hbar}{2}+\frac{\hbar}{4})}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\\
&+\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\setminus\{s\}}(x_s)\frac{\hbar(x_s-\frac{(n-i)\hbar}{2}-\frac{\hbar}{4})}{u-x_s+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\Big)\\
&+\frac{2\hbar}{u+v}\Big(\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(-x_t)\frac{\hbar(x_t+\frac{(n-i)\hbar}{2}+\frac{\hbar}{4})}{v-x_t-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\\
&+\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\setminus\{s\}}(x_s)\frac{\hbar(x_s-\frac{(n-i)\hbar}{2}-\frac{\hbar}{4})}{v+x_s-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Big)\\
=&-\frac{2\hbar}{u+v}\Big((uH_{i,\mathbf{v}}(u))^\circ-((-v)H_{i,\mathbf{v}}(-v))^\circ\Big)\\
=&-\frac{2\hbar}{u+v}(uH^\circ_{i,\mathbf{v}}(u)+vH^\circ_{\tau i,\mathbf{v}}(v)).
\end{aligned}
$$

这里第二个等式由引理 6.2得出，而最后一个等式由（6.1）得出。最后，我们来检查 $j=\tau i$和 $c_{i,\ j}\neq 0$的情形。于是（$i,\ j$）$=$（$n,\ n+1$）或（$i,\ j$）$=$（$n+1,\ n$）。由引理 3.3可知，只需检查第一种情形。

根据定义,

$$(\mathbf{B}_n(u)\mathbf{B}_{n+1}(v)f)(x_{[\mathbf{v}]})$$
$$=-\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n}\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{t,t'\}}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{t,t'\}\setminus\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]}),$$

and

$$(\mathbf{B}_{n+1}(v)\mathbf{B}_n(u)f)(x_{[\mathbf{v}]})$$
$$=-\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n\cup\{s'\}}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\cup\{s'\}\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_t^+\tau_s^+[\mathbf{v}]}).$$

因此，对于 $t\in[\mathbf{v}]_n$ 和 $s\in[\mathbf{v}]_{n+1}$,

$$\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\cup\{s'\}\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_t^+\tau_s^+[\mathbf{v}]})$$

左边（6.2）中的系数为

$$-(u-v+\frac{\hbar}{2})\varphi(x_t-x_s)+(u-v-\frac{\hbar}{2})+(u+x_t+\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t-x_s)$$
$$-(v+x_s-\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t-x_s)-(u+x_t+\frac{\hbar}{4})+(v+x_s-\frac{\hbar}{4})=0.$$

类似地，对于 $t\in[\mathbf{v}]_n$,

$$\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_t-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{t'\}}(x_t)\cdot f(x_{\tau_t^+\tau_t^+[\mathbf{v}]})$$

左边（6.2）中的系数为

$$-(u-v+\frac{\hbar}{2})+(u+x_t+\frac{\hbar}{4})-(v+x_t-\frac{\hbar}{4})=0.$$

因此，左边（ $f(x_{[\mathbf{v}]})$ 中 6.2）的系数为

$$-(u-v+\frac{\hbar}{2})\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v-x_t-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{t\}}(-x_t)$$
$$+(u-v-\frac{\hbar}{2})\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\frac{\hbar}{u-x_s+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{s\}}(x_s)$$
$$+\hbar\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n}\frac{\hbar}{v-x_t-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{t\}}(-x_t)$$
$$-\hbar\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{t\}}(-x_t)$$
$$-\hbar\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{s\}}(x_s)$$

$$
\begin{aligned}
&+\hbar\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\frac{\hbar}{u-x_s+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{s\}}(x_s)\\
=&\frac{2\hbar}{u+v}\Big(\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n}\frac{\hbar(x_t+\frac{\hbar}{2})}{u+x_t+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}}(-x_t)\\
&+\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\frac{\hbar(x_s-\frac{\hbar}{2})}{u-x_s+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{s\}}(x_s)\Big)\\
&+\frac{2\hbar}{u+v}\Big(\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n}\frac{\hbar(x_t+\frac{\hbar}{2})}{v-x_t-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}}(-x_t)\\
&+\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\frac{\hbar(x_s-\frac{\hbar}{2})}{v+x_s-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{s\}}(x_s)\Big)\\
=&-\frac{2\hbar}{u+v}\Big((uH_{n,\mathbf{v}}(u))^\circ-((-v)H_{n,\mathbf{v}}(-v))^\circ\Big)\\
=&-\frac{2\hbar}{u+v}\Big(uH^\circ_{n,\mathbf{v}}(u)+vH^\circ_{n,\mathbf{v}}(-v)\Big).
\end{aligned}
$$

这里的第二 nd 等式由引理 6.2 得出，而最后一个等式由（6.1） .

6.3. **关系** (4.2)**.** 我们需要验证

(6.3)

$$
\begin{aligned}
&\Big(u^2-v^2-\frac{c_{ij}c_{\tau i,j}}{4}\hbar^2\Big)\left[h_i(u),b_j(v)\right]-\Big(\frac{c_{ij}-c_{\tau i,j}}{2}\hbar u+\frac{c_{ij}+c_{\tau i,j}}{2}\hbar v\Big)\left\{h_i(u),b_j(v)\right\}\\
&+\hbar\left[h_i(u),b_{j,1}\right]+\hbar v\left[h_i(u),b_{j,0}\right]+\frac{c_{ij}+c_{\tau i,j}}{2}\hbar^2\left\{h_i(u),b_{j,0}\right\}=0.
\end{aligned}
$$

由于 $H_{\tau i}(u)=H_i(-u)$，若（6.3）对 $h_i(u)$ 成立，则对 $h_{\tau i}(u)$ 也成立。因此，我们可以假设 $1\le i\le n$。另一方面，根据引理 3.3，我们还可以假设 $1\le j\le n$。根据算子的定义，只需研究以下情形： $j=i,j=i-1$，以及$j=i+1$。

6.3.1. 情形 $j=i+1\le n$。 根据定义，

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{B}_j(v)\mathbf{H}_{j-1}(u)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\
=&\sqrt{-1}\sum_{t\in[\mathbf{v}]_j}\frac{\hbar}{v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_j\setminus\{t\}}(x_t)H_{j-1,\mathbf{v}}(u)\cdot f(x_{\tau_t^+[\mathbf{v}]})\\
&\cdot\varphi(-x_t-u-\frac{n-j}{2}\hbar-\frac{3\hbar}{4})^{-1}.
\end{aligned}
$$

于是（6.3）成立，因为

$$
\Big((u^2-v^2)-(v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})(x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})+v(v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\Big)
$$

$$\cdot(1-\varphi(-x_t-u-\frac{n-j}{2}\hbar-\frac{3\hbar}{4})^{-1})$$
$$+\Big(\frac{\hbar(u+v)}{2}-\frac{\hbar}{2}(v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\Big)$$
$$\cdot(1+\varphi(-x_t-u-\frac{n-j}{2}\hbar-\frac{3\hbar}{4})^{-1})=0.$$

6.3.2. 情形 $j=i\leq n$。 我们先假设 $j=i\leq n-1$。于是

$$\begin{aligned}&(\mathbf{B}_j(v)\mathbf{H}_j(u)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\=&\sqrt{-1}\sum_{t\in[\mathbf{v}]_j}\frac{\hbar}{v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_j\backslash\{t\}}(x_t)H_{j,\mathbf{v}}(u)\cdot f(x_{\tau_t^+[\mathbf{v}]})\\&\cdot\varphi(-x_t-u-\frac{n-j}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t+u+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})^{-1},\end{aligned}$$

并且（6.3）成立，因为

$$\Big((u^2-v^2)-(v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})(x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})+v(v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\Big)$$
$$\cdot\Big(1-\varphi(-x_t-u-\frac{n-j}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t+u+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})^{-1}\Big)$$
$$+\Big(-\hbar(u+v)+\hbar(v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\Big)$$
$$\Big(1+\varphi(-x_t-u-\frac{n-j}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t+u+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})^{-1}\Big)=0.$$

现在考虑 $j=i=n$ 的情形。于是

$$\begin{aligned}&(\mathbf{B}_n(v)\mathbf{H}_n(u)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\=&\sqrt{-1}\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n}\frac{\hbar}{v+x_t+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\backslash\{t\}}(x_t)H_{n,\mathbf{v}}(u)\cdot f(x_{\tau_t^+[\mathbf{v}]})\\&\cdot\varphi(x_t-u-\frac{\hbar}{4})\varphi(-x_t-u-\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t+u+\frac{\hbar}{4})^{-1},\end{aligned}$$

且（6.3）成立，因为

$$\Big((u^2-v^2+\frac{\hbar^2}{2})-(v+x_t+\frac{\hbar}{4})(x_t+\frac{\hbar}{4})+v(v+x_t+\frac{\hbar}{4})\Big)$$
$$\cdot\Big(1-\varphi(x_t-u-\frac{\hbar}{4})\varphi(-x_t-u-\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t+u+\frac{\hbar}{4})^{-1}\Big)$$
$$+\Big(-\hbar(\frac{3u}{2}+\frac{v}{2})+\frac{\hbar}{2}(v+x_t+\frac{\hbar}{4})\Big)$$
$$\Big(1+\varphi(x_t-u-\frac{\hbar}{4})\varphi(-x_t-u-\frac{\hbar}{4})\varphi(x_t+u+\frac{\hbar}{4})^{-1}\Big)=0.$$

6.3.3. 情形 $j+1=i\le n$。 与上文相同,

$$\begin{aligned}&(\mathbf{B}_j(v)\mathbf{H}_{j+1}(u)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\=&\sqrt{-1}\sum_{t\in[\mathbf{v}]_j}\frac{\hbar}{v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_j\setminus\{t\}}(x_t)H_{j+1,\mathbf{v}}(u)\cdot f(x_{\tau_t^+[\mathbf{v}]})\\&\cdot\varphi(x_t+u+\frac{n-j}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}),\end{aligned}$$

且（6.3）成立，因为

$$\begin{aligned}&\Big((u^2-v^2)-(v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})(x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})+v(v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\Big)\\&\cdot(1-\varphi(x_t+u+\frac{n-j}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}))\\&+\Big(\frac{\hbar(u+v)}{2}-\frac{\hbar}{2}(v+x_t+\frac{n-j}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4})\Big)(1+\varphi(x_t+u+\frac{n-j}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}))=0.\end{aligned}$$

6.4. **关系** （4.3）。 本节中，我们检验

$$(u+v)[b_i(u),b_j(v)]=\delta_{\tau i,j}\hbar(h_j(v)-h_i(u)),\qquad c_{ij}=0.$$

由于 $c_{ij}=0$，显然，如果 $j\neq\tau i$，$\mathbf{B}_i(u)$ 与 $\mathbf{B}_j(v)$ 可交换。因此 re, 我们只需证明 $j=\tau i$ 的情形。根据定义，如果 $j=\tau i$ 且 $c_{i,\ \tau i}=0$,

$$\begin{aligned}&(\mathbf{B}_i(u)\mathbf{B}_{\tau i}(v)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\=&-\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i}\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}\cup\{t'\}}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\cup\{t'\}\setminus\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]}),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&(\mathbf{B}_{\tau i}(v)\mathbf{B}_i(u)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\=&-\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}}\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i\cup\{s'\}}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\cup\{s'\}\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\setminus\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_s^+\tau_t^+[\mathbf{v}]}).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&(u+v)(\mathbf{B}_i(u)\mathbf{B}_{\tau i}(v)f-\mathbf{B}_{\tau i}(v)\mathbf{B}_i(u)f)(x_{[\mathbf{v}]})\\=&-(u+v)\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v-x_t-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(-x_t)\cdot f(x_{[\mathbf{v}]})\\&+(u+v)\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}}\frac{\hbar}{u-x_s+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\setminus\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{[\mathbf{v}]})\\=&\hbar f(x_{[\mathbf{v}]})\Big(\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}}\frac{\hbar}{v+x_s-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\setminus\{s\}}(x_s)\\&-\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i}\frac{\hbar}{v-x_t-\frac{n-i}{2}\hbar-\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(-x_t)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\hbar f(x_{[\mathbf{v}]})\Big(\sum_{t\in[\mathbf{v}]_i}\frac{\hbar}{u+x_t+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}}(-x_t)\\
&-\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{\tau i}}\frac{\hbar}{u-x_s+\frac{n-i}{2}\hbar+\frac{\hbar}{4}}\Phi_{[\mathbf{v}]_i}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{\tau i}\setminus\{s\}}(x_s)\Big)\\
=&\hbar\Big(\mathbf{H}_{\tau i}(v)f-\mathbf{H}_i(u)f\Big)(x_{[\mathbf{v}]}).
\end{aligned}
$$

这里最后一个等式由引理 6.2 得出。

6.5. **Serre 关系**。在本节中，我们检验（4.5）。另一个 Serre 关系（4.4）可以用更简单的方法检验，因此略去。我们需要证明

$$[b_{n,0},[b_{n,0},b_{n+1,0}]]=4b_{n,0},\ \ and\ [b_{n+1,0},[b_{n+1,0},b_{n,0}]]=4b_{n+1,0}.$$

根据引理 3.3，我们只需检验第一个。回顾

$$(B_{n,0}f)(x_{[\mathbf{v}]}):=\sqrt{-1}\sum_{r\in[\mathbf{v}]_n}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{r\}}(x_r)\cdot f(x_{\tau_r^+[\mathbf{v}]}),$$

and

$$(B_{n+1,0}f)(x_{[\mathbf{v}]}):=\sqrt{-1}\sum_{s\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_s^+[\mathbf{v}]}).$$

我们需要证明

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{-1}(B_{n,0}B_{n,0}B_{n+1,0}f-2B_{n,0}B_{n+1,0}B_{n,0}f+B_{n+1,0}B_{n,0}B_{n,0}f)(x_{[\mathbf{v}]})\\
=&\sqrt{-1}(4B_{n,0}f)(x_{[\mathbf{v}]}).
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

根据定义，

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{-1}(B_{n,0}B_{n,0}B_{n+1,0}f)(x_{[\mathbf{v}]})\\
=&\sum_{s\in[\mathbf{v}]_n}\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}\sum_{r\in[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{s,t,s',t'\}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s,t\}}(x_t)\\
&\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{s,t,s',t'\}\setminus\{r\}}(x_r)\cdot f(x_{\tau_r^+\tau_t^+\tau_s^+[\mathbf{v}]}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{-1}(B_{n,0}B_{n+1,0}B_{n,0}f)(x_{[\mathbf{v}]})\\
=&\sum_{s\in[\mathbf{v}]_n}\sum_{r\in[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{s,s'\}}\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n\cup\{r'\}\setminus\{s\}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_n\cup\{r'\}\setminus\{s,t\}}(x_t)\\
&\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{s,s'\}\setminus\{r\}}(x_r)\cdot f(x_{\tau_t^+\tau_r^+\tau_s^+[\mathbf{v}]}),
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{-1}(B_{n+1,0}B_{n,0}B_{n,0}f)(x_{[\mathbf{v}]})\\
=&\sum_{r\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\sum_{s\in[\mathbf{v}]_n\cup\{r'\}}\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n\cup\{r'\}\setminus\{s\}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\cup\{r'\}\setminus\{s\}}(x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_n\cup\{r'\}\setminus\{s,t\}}(x_t)\\
&\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{r\}}(x_r)\cdot f(x_{\tau_t^+\tau_s^+\tau_r^+[\mathbf{v}]}).
\end{aligned}
$$

因此，对于 $s \neq t \in [\mathbf{v}]_n$ 和 $r \in [\mathbf{v}]_{n+1}$，等式左边 ($f(x_{\tau_t^+\tau_s^+\tau_r^+[\mathbf{v}]}$) 中的系数（6.4）为

$$\begin{aligned}
&\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s,t\}}(x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s,t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{r\}}(x_r)\varphi(-x_r-x_s)\varphi(-x_r-x_t)\\
&\cdot\Big(\varphi(x_s-x_r)\varphi(x_t-x_r)\varphi(x_t-x_s)+\varphi(x_s-x_r)\varphi(x_t-x_r)\varphi(x_s-x_t)\\
&-2\varphi(x_t-x_s)\varphi(x_s-x_r)-2\varphi(x_s-x_t)\varphi(x_t-x_r)+\varphi(x_t-x_s)+\varphi(x_s-x_t)\Big)\\
=&0.
\end{aligned}$$

此外，对于 $s \neq t \in [\mathbf{v}]_n$，其系数为

$$\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_n\cup\{s'\}\setminus\{s,t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{s'\}}(x_s)f(x_{\tau_s^+\tau_t^+\tau_s^+[\mathbf{v}]})$$

等式 (6.4) 左端中的项为

$$\varphi(x_t-x_s)+\varphi(x_s-x_t)-2=0.$$

因此，(6.4) 左端的项均具有如下形式： $\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(x_s)\cdot f(x_{\tau_s^+[\mathbf{v}]})$，其中 $s \in [\mathbf{v}]_n$，其系数为

$$\begin{aligned}
&\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{t,s\}}(-x_t)+\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s,t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{s,t,s'\}}(-x_t)\\
&-2\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{s'\}}(x_s)\\
&-2\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{t\}}(-x_t)-2\sum_{r\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(-x_r)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{s,s'\}\setminus\{r\}}(x_r)\\
&+\sum_{r\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n}(-x_r)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{r\}}(x_r)+\sum_{r\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\varphi(-x_r-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(-x_r)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{r\}}(x_r)\\
=&2\sum_{t\in[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s,t\}}(x_t)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}}(-x_t)\frac{\hbar(\hbar+2x_t)}{x_t^2-x_s^2}\\
&-2\sum_{r\in[\mathbf{v}]_{n+1}}\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(-x_r)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\setminus\{r\}}(x_r)\frac{\hbar(\hbar-2x_r)}{x_r^2-x_s^2}\\
&-2\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(-x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{s'\}}(x_s)-2\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(x_s)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}\cup\{s\}}(-x_s)\\
=&2\operatorname{Res}(f(x),\infty)\\
=&-4,
\end{aligned}$$

其中第二个等式由函数的留数定理得出

$$\begin{aligned}
f(x):=&\Phi_{[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(x)\Phi_{[\mathbf{v}]_{n+1}}(-x)\frac{\hbar+2x}{(x+x_s)(x-x_s)}\\
=&\prod_{t\in[\mathbf{v}]_n\setminus\{s\}}(1+\frac{\hbar}{x_t-x})\prod_{r\in[\mathbf{v}]_{n+1}}(1+\frac{\hbar}{x+x_r})\cdot\frac{\hbar+2x}{(x+x_s)(x-x_s)}.
\end{aligned}$$

因此，式（6.4）成立，由此完成了定理 4.4 的证明。

References

[AB84] M. F. Atiyah 和 R. Bott. 矩映射与等变上同调. Topology, 23(1):1– 28, 1984.[AF24] David Anderson 和 William Fulton. 代数几何中的等变上同调，载于 Cambridge Studies in Advanced Mathematics 第 210 卷. 剑桥大学出版社，Cam- bridge, 2024.[Bec94] Jonathan Beck. 辫群作用与量子仿射代数. Comm. Math. Phys., 165(3):555–568, 1994.[BFN18] Alexander Braverman, Michael Finkelberg 和 Hiraku Nakajima. 迈向三维规范理论中 Coulomb 支的数学定义，II. Adv. Theor. Math. Phys., 22(5):1071–1147, 2018.[BFN19] Alexander Braverman, Michael Finkelberg 和 Hiraku Nakajima. 箭图规范理论的 Coulomb 支与仿射格拉斯曼流形中的切片. Adv. Theor. Math. Phys., 23(1):75–166, 2019. 附有 Braverman、Finkelberg、Joel Kamnitzer、Ryosuke Kodera、Nakajima、Ben Webster 和 Alex Weekes 撰写的两个附录.[BKLW18] Huanchen Bao, Jonathan Kujawa, Yiqiang Li 和 王伟强. 经典型的几何舒尔对偶. Transform. Groups, 23(2):329–389, 2018.[BLM90] Alexander Beilinson, George Lusztig 和 Robert MacPherson. GL 的量子变形的几何框架. Duke Math. J., 61(2):655–677, 1990.[BPT25] Robin Bartlett, Tomasz Przezdziecki 和 Lukas Tappeiner. AI 型扭 Yangian 的 GKLO 表示与仿射格拉斯曼流形对称商的量子化. arXiv 预印本 arXiv:2510.12706, 2025.[CG10] Neil Chriss 和 Victor Ginzburg. 表示论与复几何. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2010. 1997 年版重印.[Dam12] Ilaria Damiani. 仿射量子代数的 Drinfeld 实现：关系. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 48(3):661–733, 2012.[DM24] 董志杰 和 马海涛. B/C 型旗簇与扭 Yangian. Algebra Colloq., 31(1):129–148, 2024.[DR08] J. Matthew Douglass 和 Gerhard Röhrle. 广义斯坦伯格簇的同调与 Weyl 群不变量. Trans. Amer. Math. Soc., 360(11):5959–5998, 2008.[Dri87] Vladimir Drinfeld. Yangian 与量子仿射代数的一种新实现. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 296(1):13–17, 1987.[FLL+20] 范兆兵, Chun-Ju Lai, 李益强, 罗力 和 王伟强. 仿射旗簇与量子对称对. Mem. Amer. Math. Soc., 265(1285):v+123, 2020.[FMX22] 范兆兵, 马海涛 和 肖呼思楞. 通过等变 K 理论研究 $\imath$-量子群. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 58(3):635–668, 2022.[FT19] Michael Finkelberg 和 Alexander Tsymbaliuk. 乘法切片、相对论 Toda 与移位仿射量子代数. 载于《李代数系统的表示与幂零轨道》，Progr. Math. 第 330 卷，第 133–304 页. Birkhäuser/Springer, Cham, 2019.[GV93] Victor Ginzburg 和 ´Eric Vasserot. A 型仿射量子群的 Langlands 互反性. Internat. Math. Res. Notices, (3):67–85, 1993.[KL87] David Kazhdan 和 George Lusztig. Hecke 代数的 Deligne-Langlands 猜想的证明. Invent. Math., 87(1):153–215, 1987.[Li19] 李益强. 箭图簇与对称对. Represent. Theory, 23:1–56, 2019.[LWW25a] Kang Lu, 王伟强 和 Alex Weekes. 移位扭 Yangian 与仿射格拉斯曼流形切片. arXiv 预印本 arXiv:2510.10652, 2025.[LWW25b] Kang Lu, 王伟强 和 Alex Weekes. 准分裂 ADE 型的移位扭 Yangian. arXiv 预印本 arXiv:2512.19998, 2025.

[LWZ24] Ming Lu、王伟强和 Weinan Zhang. 辫群作用与拟分裂仿射$\imath$量子群 II：高秩情形. Comm. Math. Phys., 405(6):Paper No. 142, 2024.[LWZ25a] Kang Lu、王伟强和 WeinanZhang. 仿射 $\imath$量子群与 Drinfeld 表示中的扭 Yangian. Comm. Math. Phys., 406(5):Paper No. 98, 36, 2025.[LWZ25b] Kang Lu、王伟强和 Weinan Zhang. 扭 Yangian 的 Drinfeld 型表示. Represent. Theory, 29:838–870, 2025.[LXY24] 罗力、Zheming Xu 和 YANG YANG. 舒尔代数的几何构造. arXiv 预印本 arXiv:2411.18273, 2024.[LZ25] Kang Lu 和 Weinan Zhang. 拟分裂型扭 Yangian 的 Drinfeld 型表示. Communications in Contemporary Mathematics, 2025.[MO19] Davesh Maulik 和 Andrei Okounkov. 量子群与量子上同调. Ast ´erisque, (408):ix+209, 2019.[MR02] A. I. Molev 和 E. Ragoucy. 反射代数表示. Rev. Math. Phys., 14(3):317–342, 2002.[Nak01] Hiraku Nakajima. 箭图簇与量子仿射代数的有限维表示. J. Amer. Math. Soc., 14(1):145–238, 2001.[Nak17] Hiraku Nakajima. 瞬子模空间上的层讲义. 载于《模空间几何与表示论》，IAS/Park City Math. Ser. 第24卷, 第381–436页. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.[Nak25] Hiraku Nakajima. 经典群在 ALE 空间上的瞬子、箭图簇上的对合以及量子对称对. arXiv 预印本 arXiv:2510.13007, 2025.[NW23] Hiraku Nakajima 和 Alex Weekes. 带对称因子的箭图规范理论的 Coulomb 支. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 25(1):203–230, 2023.[OS22] A. Okounkov 和 A. Smirnov. 中岛簇的量子差分方程. Invent. Math., 229(3):1203–1299, 2022.[SSX25] Yaolong Shen、CHANGJIAN SU 和 Rui Xiong. 通过 Coulomb 支构造带对合的箭图与移位扭 Yangian. arXiv 预印本 arXiv:2510.12118, 2025.[SW24] C Su 和 W Wang. 仿射 $\imath$量子群与 C 型斯坦伯格簇. Selecta Mathematica，即将发表，arXiv 预印本 arXiv:2407.06865, 2024.[Var00] Michela Varagnolo. 箭图簇与 Yangian. Lett. Math. Phys., 53(4):273–283, 2000.[Vas93] ´Eric Vasserot. 量子群的表示与置换. Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4), 26(6):747–773, 1993.[Vas98] ´Eric Vasserot. 仿射量子群与等变 K-理论. Transform. Groups, 3(3):269–299, 1998.[Wan23] 王伟强. 量子对称对. 载于《ICM——国际数学家大会》第4卷, 第5–8节，第3080–3102页. EMS Press, Berlin, 2023.[Wan25] Zichang Wang. 通过 Coulomb 支构造带对合的箭图与移位扭 Yangian II. arXiv 预印本 arXiv:2601.00039, 2025.[Wee19] Alex Weekes. 箭图规范理论 Coulomb 支的生成元. arXiv 预印本 arXiv:1903.07734, 2019.[Xi07] Nanhua Xi. 仿射 Hecke 代数的表示与仿射魏尔群的基环. J. Amer. Math. Soc., 20(1):211–217, 2007.

(ChangjianSu) Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing, China电子邮箱地址: changjiansu@mail.tsinghua.edu.cn

（Yang Yang） School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of MEA (Ministry of Education) & Shanghai Key Laboratory of PMMP, East China Normal University, Shanghai 200241, China

电子邮箱地址：52275500011@stu.ecnu.edu.cn