arXiv:2603.28087v1 [math.GN] 30 Mar 2026

主理想整环上的 Mac´ıas 空间的素元密度与分类

Souvik Mandal [a], * 和 Ankur Sarkar [a]

[a] *Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Chennai 600036, Tamil Nadu, India.*

摘要

最近，Mac´ıas 拓扑已推广到非域整环上，从而在单位集合有限或不是开集的假设下，为素元有无限多个提供了拓扑证明。本文利用 Jacobson 根，彻底取消了这一基数假设。我们证明，在任意半本原整环中，单位群在 Mac´ıas 拓扑下不是开集。因此，对于主理想整环，Jacobson 根的平凡性、素元集合的稠密性以及单位群在 Mac´ıas 拓扑下不是开集这三者等价。此外，我们根据这些整环中某些子集的基数，完整刻画了不同无限主理想整环上的 Mac´ıas 空间何时同胚。作为应用，我们解决了一个关于可数无限半本原主理想整环上的 Mac´ıas 空间同胚问题的未解决问题。

Keywords: Mac´ıas 拓扑，主理想整环，Jacobson 根，半本原环，素元稠密性，素元无穷性，同胚分类。

2020 *Mathematics Subject Classification:* 主要分类号：54A05、13F10、16N20；次要分类号：13G05。

1 引言

拓扑与数论的交汇有着悠久而丰富的历史，其中最著名的开端是 Fursten-berg 于 1955年给出的关于素数无穷性的拓扑证明 [1]。Furstenberg 在 $\mathbb{Z}$ 上构造的拓扑由等差数列生成，是豪斯多夫且可度量化的。与之相反，Golomb [2] 和 Kirch [3]探讨了 $\mathbb{N}$ 上的拓扑，这些拓扑是连通但非豪斯多夫的，凸显了开集的算术性质。

2024年，Mac´ıas 在 $\mathbb{N}$ 上引入了一种更粗的拓扑，该拓扑由与固定整数 [4] 互素的整数集生成。随后，这一概念被推广到任意整环 R，形成了如今称为 Mac´ıas 拓扑 [5]的拓扑。

这种拓扑在 [5] 中的一项主要应用，是在单位群有限的假设下，为主理想整环中素元有无穷多个提供拓扑证明。

本文借助 Jacobson 根，证明上述有限性假设可以完全去除。事实上，我们的贡献如下：

（i）我们为唯一分解整环上的 Mac´ıas 拓扑的基本开集建立了一个素支撑框架，从而衔接算术结构与拓扑结构（见第 2 节）。该框架是定理 3.1 和定理 4.1 证明中的关键工具。

（ii）我们证明，非域整环是半本原的（即其 Jacobson 根为零）当且仅当其单位群在 Mac´ıas 拓扑中不是开集。对于主理想整环，我们进一步证明，该条件等价于另外两个性质：素元相伴类集合的拓扑稠密性，以及素元有无穷多个（见第 3 节）。

(iii) 我们完整分类了无限主理想整环上的 Mac´ıas 空间，并证明两个这样的空间同胚，当且仅当它们的单位群具有相同的基数，且它们的素元相伴类集合具有相同的基数，从而解决了 [5]中提出的未解决问题4.1（见第4节）。

* *Corresponding author.E-mail addresses:* ma22d014@smail.iitm.ac.in, ssouvik.xyz@gmail.com (S. MANDAL);ankurimsc@gmail.com(A. SARKAR).

2 预备知识

本文中， R 表示一个含幺交换整环， $1 \neq 0$ 不是域，除非另有说明；特别地， R 必为无限集。对于任意子集 $X \subseteq R$，我们用$X^0 = X \setminus \{0\}$ 表示其中所有非零元素组成的集合。特别地， R^0 表示去心环 $R \setminus \{0\}$，而 $U(R)$表示其单位群。

称两个元素 $a, b \in R$为相伴元，记作 $a \sim b$，如果 $a = ub$对某个 $u \in U(R)$成立。我们用$\mathcal{P}_R$ 表示 R中所有素元的相伴类集合；对于一个素元 p，其类记作 $[p] \in \mathcal{P}_R$。我们用 Fin($\mathcal{P}_R$) 表示 $\mathcal{P}_R$的所有有限子集构成的集合。

定义 2.1 ([5])。 对于每个 $k \in R^0$，定义

$$\sigma_k^0 := \{s \in R^0 : \langle k \rangle + \langle s \rangle = R\},$$

其中 $\langle k \rangle$ 表示由 k生成的主理想。令， $\mathcal{B} = \{\sigma_k^0 : k \in R^0\}$。根据 [5, 定理 2.1]，集合 $\mathcal{B}$ 构成 R上某个拓扑的基。 R上的$Mac´$空间 R，记作 $M(R)$，是拓扑空间 (R^0, τ_{R^0})，其中 τ_{R^0} 是由基 $\mathcal{B}$生成的拓扑。

Maci´as 空间 $M(R)$ 的各种拓扑性质已在 [5] 中得到研究。特别地，它不是豪斯多夫空间，因此也不可度量化。注意， R^0 本身是一个基本开集，因为对于 R 的任意单位 u ，都有 $\sigma_u^0 = R^0$。

为了将代数结构与拓扑构造联系起来，我们引入素支撑的概念，该概念适用于 R 是唯一分解整环的情形。

定义 2.2。 设 R 为唯一分解整环。对于任意 $\alpha \in R^0$， α的素支撑 记为 supp(α)，它是所有整除 α 的素元的相伴类集合。特别地，对于每个单位 $u \in U$（R），supp(u) $= \emptyset$。

注 2.3。 当 R 是唯一分解整环时，每个非零非单位元都能唯一分解为有限个素元的乘积，从而确保对于所有 $\alpha \in R^0$，supp(α) $\in$Fin({v8)。我们注意到，在一个每个非单位元都能分解为有限个不可约元、但这些不可约元不一定是素元的整环中，即使对于非单位元，supp(α)也可能为空。

下面的两个引理阐明了唯一分解整环中素元支撑与 Mac´ıas 拓扑的基本开集之间的关系。

引理 2.4。 设 R 为唯一分解整环。对于任意 s、 $k \in R^0$，若 $s \in \sigma_k^0$，则 $\text{supp}(s) \cap \text{supp}(k) = \emptyset$。

证明。 由于 $s \in \sigma_k^0$，存在 x、 $y \in R$，使得 $xs + yk = 1$。若素元 p 同时整除 s 和 k，则 p整除 $xs + yk = 1$，这就产生了矛盾。因此，supp(s) $\cap$supp(k) $= \emptyset$。 □

注 2.5。 引理 2.4 的逆命题一般不成立。在 $\mathbb{Z}[x]$中，元素 2 和 x 都是素元，且 supp(2) $\cap \text{supp}(x) = \emptyset$，然而 $\langle 2 \rangle + \langle x \rangle = \langle 2, x \rangle \subsetneq \mathbb{Z}[x]$，所以 $2 \notin \sigma_x^0$。要证明逆命题，需要更强的代数结构，例如主理想整环。

引理 2.6. 设 R 是主理想整环。对于任意 $s, k \in R^0$，若 $\text{supp}(s) \cap \text{supp}(k) = \emptyset$，则$s \in \sigma_k^0$。

证明。 设 $d =$ 是s, k的最大公约数；由于 R 是主理想整环，这个最大公约数存在。若 d 不是单位，则存在一个素元 p 整除 d。因此， p 同时整除 s 和 k，从而 $[p] \in$ supp(s) $\cap$supp(k)，这与假设矛盾。因此， d 是单位。所以 $\langle s \rangle + \langle k \rangle = \langle d \rangle = R$，进而 $s \in \sigma_k^0$。 □

结合引理 2.4和2.6，我们得到主理想整环的如下等价关系。

推论 2.7. 设 R 是主理想整环。对于任意 $r, s \in R^0$， $r \in \sigma_s^0$ 成立，当且仅当$\text{supp}(r) \cap \text{supp}(s) = \emptyset$。特别地， $M(R)$ 的基本开集完全取决于素支撑。

本节最后给出单位的一种刻画，这对于第4节中的分类定理至关重要。

引理 2.8. 在拓扑空间 $M(R)$中，元素 $x \in R^0$ 是单位，当且仅当单点集 $\{x\}$ 的闭包是整个空间，即 $\{x\} = R^0$。

证明。若 x 是单位，则对每个 $k \in R^0$都有 $\langle x\rangle + \langle k\rangle = R$，因此对所有 $k \in R^0$都有 $x \in \sigma_k^0$。由此可知，包含任意点 $y \in R^0$ 的每个基本开集也包含 x。因此 $\{x\} = R^0$。

反之，假设 $\{x\} = R^0$。那么 x 属于每个基本开集。特别地，$x \in \sigma_x^0$。这意味着 $\langle x\rangle + \langle x\rangle = R$。因此，$\langle x\rangle = R$，从而得到 $x \in U(R)$。证毕。 □

注记 2.9. 引理 2.8 的正向蕴含由 Mac´ıas 和 Ortiz 独立地在 [6, 定理 55]中利用理想的 Jacobson 根的闭包公式证明。

3 半本原性与素元稠密性

在 [5, 小节 3.16], 假设 $U(R)$ 有限，用以确保它在 $M(R)$ 中不是开集。在定理 3.3 中，我们在不施加基数条件的情况下，用一个代数条件刻画这一拓扑条件。

回顾一下，交换环的*Jacobson* 根 $\mathfrak{J}(R)$是其所有极大理想的交，而若 R 满足 $\mathfrak{J}(R) = \{0\}$，则称其为半本原。

本节证明以下定理 m.

定理 3.1。设 R 是一个非域的主理想整环。以下条件等价：

(a) $U(R)$在 $M(R)$中不是开集。(b) 素元集合 $\mathcal{P}_R$ 在 $M(R)$中稠密。(c) 素元集合 $\mathcal{P}_R$ 是无限集。(d) R 是半本原的。

备注3.2。半本原主理想整环这一类相当广泛。值得注意的例子包括整数环 $\mathbb{Z}$、任意域 F上的多项式环 $F[x]$，以及类数为一的数域 K 的整数环 $\mathcal{O}_K$，例如高斯整数 $\mathbb{Z}[i]$、艾森斯坦整数 $\mathbb{Z}[\omega]$和实二次环 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$。更一般地，定理3.1 表明，任何含有无限多个非相伴素元的主理想整环都是半本原的。特别地，具有平凡 S-类群的 S-整数环$\mathcal{O}_K$, S 以及对任意有限有理素数 S 集合 $\mathbb{Z}[S^{-1}]$ 取局部化所得的环，都提供了更多例子。

在证明定理3.1 之前，我们有以下定理3.3和引理3.4，它们将用于证明定理 3.1。

定理 3.3。设 R 是一个非域整环。环 R 是半本原的，当且仅当单位群 $U(R)$不是 $M(R)$中的开集。

证明。首先，假设 R 是半本原的。反设 $U(R)$ 是 $M(R)$ 中的开集。由于 $1 \in U(R)$，存在某个 $k \in R^0$ 使得 $\sigma_k^0 \subseteq U(R)$。注意，$k$ 必须是非单位元：若 k 是单位，则由定理 2.2], 可得 $\sigma_k^0 = R^0$，从而 $U(R) = R^0$，这与假设 R 不是域矛盾。因此，k 是非单位元。设 R 的任意一个极大理想为 $\mathfrak{m}$。若 $k \notin \mathfrak{m}$，则由 $\mathfrak{m}$ 的极大性可得 $\langle k\rangle + \mathfrak{m} = R$，这意味着存在元素 $x \in R$ 和 $s \in \mathfrak{m}$ 使得 $xk + s = 1$。因此，$\langle k\rangle + \langle s\rangle = R$。由于 k 不是单位，$s \neq 0$，即 $s \in \sigma_k^0$。根据我们的假设，$s \in U(R)$。然而，真理想不可能包含单位，这就产生了矛盾。因此，对每个极大理想 $\mathfrak{m}$，都有 $k \in \mathfrak{m}$，从而 $k \in \mathfrak{J}(R)$。由于 R 是半本原的，$\mathfrak{J}(R) = \{0\}$，这迫使 $k = 0$，与 $k \in R^0$ 矛盾。因此，$U(R)$ 不是开集。

反过来，假设 R 不是半本原的。我们将证明 $U(R)$ 在 $M(R)$ 中是开集。由于 $\mathfrak{J}(R) \neq \{0\}$，存在一个非零元素 $k \in \mathfrak{J}(R)$。考虑基本开集 σ_k^0。令 s 为 σ_k^0 中的任意元素，按定义，这意味着 $\langle k\rangle + \langle s\rangle = R$。如果 s 是非单位元，那么根据克鲁尔定理，s 包含在 R 的某个极大理想 $\mathfrak{m}$ 中。此外，由于 $k \in \mathfrak{J}(R)$，元素 k 属于 R 的所有极大理想，包括 $\mathfrak{m}$。这意味着 $\langle k\rangle + \langle s\rangle \subseteq \mathfrak{m} \subsetneq R$，与 $\langle k\rangle + \langle s\rangle = R$ 直接矛盾。因此，元素 s 必须是单位。由于这对每个 $s \in \sigma_k^0$ 都成立，我们推得 $\sigma_k^0 \subseteq U(R)$。因此，对于所有 $u \in U(R)$，都有 $u \in \sigma_k^0 \subseteq U(R)$。于是 $U(R)$ 是一个开集。由此得证二者等价。 □

在 [5, 定理 3.18、推论 3.21], 中证明了，若主理想整环 R 的单位群有限（因而不是开集） $U(R)$，则集合 $\mathcal{P}_R$ 必为无限集。然而，引理 3.4表明，对于任意唯一分解整环，这一推论都成立。

引理 3.4。 设 R 是一个非域的唯一分解整环。若 $\mathcal{P}_R$ 是有限集，则 $U(R)$ 在 $M(R)$ 中是开集，并且 $\mathcal{P}_R$ 在 $M(R)$ 中不稠密。

证明。 设 $\{p_1, \ldots, p_n\}$ 是 $\mathcal{P}_R$ 的一组完备代表元，并令 $\alpha = p_1 \cdots p_n$。若 $x \in \sigma^0_\alpha$，则由引理 2.4，$\text{supp}(x) \cap \text{supp}(\alpha) = \emptyset$。由于 $\text{supp}(\alpha) = \mathcal{P}_R$，元素 x 没有素因子，因此是一个单位。故 $\sigma^0_\alpha \subseteq U(R)$，且由于 $1 \in \sigma^0_\alpha$，集合 $U(R)$ 是开集。

此外，每个素元都是非单位元，因此 $\sigma^0_\alpha \cap \mathcal{P}_R = \emptyset$。故 $\mathcal{P}_R$ 不稠密。 □

注 3.5。 引理 3.4 的逆命题对一般的唯一分解整环并不成立，正如注释3.6中所说明的。

定理 *3.1*的证明。 (b) $\Rightarrow$ (a)。若 $\mathcal{P}_R$ 稠密，则每个基本开集 σ^0_k 都包含一个素元。由于素元都是非单位元，没有基本开集包含于 $U(R$中，因此 $U(R$不是开集。

（a） $\Rightarrow$ （c）。这是引理3.4的逆否命题：若 $\mathcal{P}_R$ 是有限集，则 U（R）是开集。

（c） $\Rightarrow$ （b）。设 σ^0_k 是任意一个非空基本开集。由于 R 是主理想整环， k只有有限多个素因子。因为 $\mathcal{P}_R$ 是无限集，所以存在一个素元 p 满足 $[p] \notin \text{supp}(k)$ 。由推论2.7， $p \in \sigma^0_k$，从而 $\sigma^0_k \cap \mathcal{P}_R \neq \emptyset$。 （d） $\Leftrightarrow$ （a）由定理3.3得出。 □

注3.6。一个自然的问题是，定理3.1 的哪些推论可以推广到主理想整环之外。我们将针对唯一分解整环研究这一问题。

(i) 等价关系（d） $\Leftrightarrow$ （a）对任意整环都成立。这由定理3.3得出。

(ii) 蕴含关系 (a) $\Rightarrow$(c) 对任意唯一分解整环都成立。这可由引理 3.4 得出。

(iii) 蕴含关系 (b) $\Rightarrow$ (a) 对任意整环都成立。定理 (b) $\Rightarrow$ (a) 的证明中3.1 所用的相同论证同样适用。

(iv) 对于唯一分解整环，蕴含关系 (c) $\Rightarrow$ (b)、(c) $\Rightarrow$ (a) 和(c) $\Rightarrow$ (d) 一般而言均不成立。

考虑形式幂级数环 $R = \mathbb{C}[[x, y]]$。该环是一个唯一分解整环（因为它是正则局部环），并且含有无穷多个两两非相伴的素元，包括 x， y，以及对每个 $c \in \mathbb{C}^\times$ 和 $n \geq 1$。因此 (c) 成立。

然而， R 是一个局部环，其唯一的极大理想为 $\mathfrak{m} = \langle x, y \rangle$，因此 $\mathfrak{J}(R) = \mathfrak{m} \neq \{0\}$。所以命题(d) 不成立。

为验证 (a) 和 (b)不成立，注意到 $R/\langle x \rangle \cong \mathbb{C}[[y]]$，它是一个局部整环，其单位恰好是常数项非零的幂级数。因此， $s \in \sigma^0_x$ 当且仅当 s 在 $\mathbb{C}[[y]]$ 中的像是一个单位时成立；这恰好发生在 s 的常数项非零时，也就是说，当 $s \in U(R)$ 时成立。因此 $\sigma^0_x = U(R)$，且 $U(R)$ 是开集，所以 (a)不成立。由于 R 中的每个素元都属于 $\mathfrak{m}$，因而其常数项为零，我们得到 $\sigma^0_x \cap \mathcal{P}_R = \emptyset$，所以 (b) 也不成立。

4 主理想整环上 Mac´ıas 空间的分类

本节中，我们将建立两个主理想整环的 Mac´ıas 空间同胚的充要代数条件。在 [5, 问题 4 中， 1], Mac´ıas 提出了以下未解决问题。

问题([5]). 设 R 和 S 是可数无限的半本原整环。判断 $M(R)$和 $M(S)$ 是否同胚。

我们通过在推论 ´4.2 中给出任意无限主理想整环的 Mac´ıas 空间在同胚意义下的完整分类，解决了这个问题。推论4.3 回答了 Mac´ıas 在 [5]中提出的问题4.1。事实上，更一般地，我们证明以下分类定理。

定理 4.1。 设 R 和 S 是非域的无限主理想整环。当且仅当 $|U(R)| = |U(S)|$和 $|\mathcal{P}_R| = |\mathcal{P}_S|$时，拓扑空间 $M(R)$与 $M(S)$ 同胚。

推论 4.2. 设 R 和 S 是可数无限的半本原主理想整环，且它们都不是域。那么 $M(R)$与 $M(S)$ 同胚，当且仅当 $|U(R)| = |U(S)|$。

证明。 由定理 3.1可知，二者 $\mathcal{P}_R$ 和 $\mathcal{P}_S$ 都是无限的。由于 R 和 S 都是可数无限的，因此两个素元集合都是可数无限的，所以 $|\mathcal{P}_R| = |\mathcal{P}_S| = \aleph_0$。结论现由定理 4.1得出。 □

推论 4.3。 存在可数无限的半本原整环 R 和 S，使得 $M(R)$ 与 $M(S)$ 不同胚。

证明。 取 $R = \mathbb{Z}$ 和 $S = \mathbb{F}_2[x]$。二者都是可数无限的半本原主理想整环，但 $|U(\mathbb{Z})| = 2$，而 $|U(\mathbb{F}_2[x])| = 1$。由推论 4.2， $M(\mathbb{Z})$ 和 $M(\mathbb{F}_2[x])$ 不同胚。 □

为了证明定理 4.1，我们需要了解主理想整环中单点集的闭包结构。我们有以下引理，它由 [5, 推论 3.2、3.5] 得出，可用于此目的。

引理 4.4。 设 R 是一个主理想整环， $p \in R$ 是一个素元。则 $\{p\} = \langle p\rangle^0$。更一般地，若 $\overline{x \in R^0 \setminus U(R)}$ 具有素因子分解 $x = u\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$，其中 $u \in U(R)$、 $a_i \geq 1$，且这些素元两两非相伴，则

$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{i=1}^{k} \langle p_i\rangle^0.$$

注 4.5。值得注意的是，引理 4.4 通常不适用于唯一分解整环。为说明这一点，考虑形式幂级数环 $R = \mathbb{C}[[x, y]]$，它是一个局部唯一分解整环，其唯一的极大理想为 $\mathfrak{m} = \langle x, y\rangle$。注意， x 和 y 是 R 中互不相同且不相伴的素元。若引理 4.4 中的公式成立，则 $\{x\} = \langle x\rangle^0$，进而$y \notin \{x\}$。然而，假设 σ_k^0 是一个包含 y的任意基本开集。那么 $\langle k\rangle + \langle y\rangle = R$。由于 y 是一个非单位元， $y \in \mathfrak{m}$。若 k 也不是单位元，则 $k \in \mathfrak{m}$，这将迫使 $\langle k\rangle + \langle y\rangle \subseteq \mathfrak{m} \subsetneq R$，与$\langle k\rangle + \langle y\rangle = R$矛盾。因此， k 必为单位，这意味着 $\sigma_k^0 = R^0$。因此，唯一一个包含 y 的基本开集就是整个空间 R^0，它显然包含 x。这表明 ~~$y \in$~~ $\{x\}$，从而$\{x\} \neq \langle x\rangle^0$。

现在我们引入 Macıas 空间中的极大真单点闭包这一概念，它将在定理4.1的证明中用到。

定义 4.6。若存在 $x \in R^0$ 满足 $C = \{x\}$，且在 R^0 中没有单点闭包真包含 C，则称子集 $C \subsetneq R^0$ 是 $M(R)$ 中的极大真单点闭包。

我们用 $\mathcal{C}_R$ 表示所有这类子集的集合。

本节余下部分将用于证明定理4.1。

定理*4.1*的证明。我们分别证明两个方向。

设 $H\colon M(R) \to M(S)$ 是一个同胚。我们证明 $|U(R)| = |U(S)|$ 和 $|\mathcal{P}_R| = |\mathcal{P}_S|$.

由于 H 是一个同胚，我们有 $\{H(x)\} = H\big(\{x\}\big)$。因此，根据引理 2.8，若 $x \in U(R)$，则$\{H(x)\} = H(R^0) = S^0$。由同一引理可得， $H(x) \in U(S)$。于是 $H(U(R)) \subseteq U(S)$。对 H^{-1}应用相同的论证可知， $H^{-1}(U(S)) \subseteq U(R)$。因此 $H(U(R)) = U(S)$，并且由于 H 是一个双射， $|U(R)| = |U(S)|$。由引理 2.8 和 4.4 可知， $M(R)$中的可能单点闭包为:

- $\overline{\{x\}} = R^0$ 当 x 是单位时，以及
- $\overline{\{x\}} = \bigcap_{i=1}^{k}\langle p_i\rangle^0$ 当 x 是满足 $\mathrm{supp}(x) = \{[p_1], \ldots, [p_k]\}$的非单位元时。

在真单点闭包（严格包含于 R^0的那些闭包）中，按集合包含关系而言的极大者，正是形如 $\langle p\rangle^0$ 的集合，其中 p为一个素元。为说明这一点，注意若 $k > 1$，则对于每个 j，都有严格包含关系 $\bigcap_{i=1}^{k}\langle p_i\rangle^0 \subsetneq \langle p_j\rangle^0$，因为一个仅被 p_j 整除（而不被 p_i 整除，对于$i \neq j$而言）的元素属于 $\langle p_j\rangle^0$ ，但不属于 $\bigcap_i \langle p_i\rangle^0$。

前面的分析表明，集合 $\mathcal{C}_R$ （在定义4.6 中引入）可以写成

$$\mathcal{C}_R = \big\{\langle p\rangle^0 : [p] \in \mathcal{P}_R\big\},$$

从而在 $\mathcal{C}_R$ 与 $\mathcal{P}_R$之间建立典范双射，因为在主理想整环中，两个素元生成同一个理想，当且仅当它们是相伴元。

由于 H 保持闭包和集合包含，因此它将 $M(R)$ 中的极大真单点闭包映射到 $M(S)$ 中的极大真单点闭包。也就是说， H 诱导出一个双射 $\mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$。将其与典范双射 $\mathcal{C}_R \leftrightarrow \mathcal{P}_R$ 和 $\mathcal{C}_S \leftrightarrow \mathcal{P}_S$ 复合，可得 $|\mathcal{P}_R| = |\mathcal{P}_S|$。

反过来，我们假设 $|U(R)| = |U(S)|$ 且 $|\mathcal{P}_R| = |\mathcal{P}_S|$。我们证明 $M(R)$ 与 $M(S)$ 同胚。

固定一个双射 $\varphi\colon \mathcal{P}_R \to \mathcal{P}_S$。这自然诱导出一个双射 $\hat{\varphi}\colon \mathrm{Fin}(\mathcal{P}_R) \to \mathrm{Fin}(\mathcal{P}_S)$。

由于 R 是主理想整环（因而也是唯一分解整环），每个元素 $x \in R^0$ 都有定义良好的素支撑 $\mathrm{supp}(x) \in \mathrm{Fin}(\mathcal{P}_R)$。这诱导出一个划分 $\mathcal{F} = \{F_A : A \in \mathrm{Fin}(\mathcal{P}_R)\}$，将 R^0 划分为若干部分，其中 $F_A := \{x \in R^0 : \mathrm{supp}(x) = A\}$。类似地，令 $G_B := \{y \in S^0 : \mathrm{supp}(y) = B\}$，集合 $\mathcal{G} = \{G_B : B \in \mathrm{Fin}(\mathcal{P}_S)\}$ 将 S^0 划分为若干部分。

对于任意非空的 $A = \{[p_1], \ldots, [p_k]\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{P}_R)$，引理 4.4 表明，$F_A$ 中的每个元素都可以唯一地写成

$$x = u\, p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k},$$

其中 $u \in U(R)$，且对所有 i，$a_i \geq 1$ 均为整数。单位 u 的选择数为 $|U(R)|$，而指数元组 $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ 的选择数为 $|\mathbb{N}^k| = \aleph_0$。由于 R 是主理想整环（因而也是唯一分解整环），不同的选择会产生不同的元素，从而得到

$$|F_A| \;=\; |U(R)| \times \aleph_0, \text{ for every non-empty } A \in \mathrm{Fin}(\mathcal{P}_R).$$

对主理想整环 S 运用类似的论证可得，对于每个非空的 $B \in \mathrm{Fin}(\mathcal{P}_S)$，都有 $|G_B| = |U(S)| \times \aleph_0$。

注意到 $|F_\emptyset| = |U(R)|$ 且 $|G_\emptyset| = |U(S)|$。由于 $|U(R)| = |U(S)|$，因此可得 $|F_\emptyset| = |G_\emptyset|$。此外，对于每个非空的 $A \in \mathrm{Fin}(\mathcal{P}_R)$，我们有

$$|F_A| = |U(R)| \times \aleph_0 = |U(S)| \times \aleph_0 = |G_{\hat{\varphi}(A)}|.$$

根据选择公理，对于每个 $A \in \mathrm{Fin}(\mathcal{P}_R)$，我们固定一个双射 $h_A\colon F_A \to G_{\hat{\varphi}(A)}$。由于集合族 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 分别将 R^0 和 S^0 划分为两两不相交的子集，因此我们得到一个定义良好的全局双射

$$H\colon R^0 \longrightarrow S^0, \qquad H(x) \;:=\; h_{\mathrm{supp}(x)}(x).$$

根据构造，$\mathrm{supp}(H(x)) = \hat{\varphi}(\mathrm{supp}(x))$ 对每个 $x \in R^0$ 都成立。现在要证明 H 是一个同胚，只需验证 H 和 H^{-1} 都将基本开集映射为基本开集。令 $r \in R^0$。根据推论 2.7，基本开集 σ_r^0 可表示为

$$\sigma_r^0 \;=\; \{x \in R^0 : \mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(r) = \emptyset\}.$$

由于 $\mathrm{supp}(H(x)) = \hat{\varphi}(\mathrm{supp}(x))$ 且 $\hat{\varphi}$ 是一个双射，我们有

$$\begin{aligned} H(\sigma_r^0) &= \big\{H(x) \in S^0 : \mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(r) = \emptyset\big\} \\ &= \big\{y \in S^0 : \hat{\varphi}^{-1}(\mathrm{supp}(y)) \cap \mathrm{supp}(r) = \emptyset\big\} \\ &= \big\{y \in S^0 : \mathrm{supp}(y) \cap \hat{\varphi}(\mathrm{supp}(r)) = \emptyset\big\} \\ &= \sigma_s^0, \end{aligned}$$

其中 $s \in S^0$ 是满足 $\mathrm{supp}(s) = \hat{\varphi}(\mathrm{supp}(r))$ 的任意元素。因此，H 将 $M(R)$ 中的基本开集映射到 $M(S)$ 中的基本开集。由对称性（将 φ 替换为 φ^{-1}），H^{-1} 也将基本开集映射为基本开集。因此，H 是一个同胚。

证明至此完成。 □

5 结论

值得强调的是，主理想整环这一假设对本文的方法至关重要，因为它同时保证了两个关键的代数性质：克鲁尔维数为一以及平凡的理想类群。

克鲁尔维数为一这一条件意味着每个非零素理想都是极大理想，并保证由素支撑不相交的两个元素生成的理想之和等于整个环（引理 2.6）。这一性质确保单点集的闭包可分解为由其素因子生成的主理想的交（引理 4.4）；正如备注4.5所指出的，这种分解在高维唯一分解整环中并不成立。

另一方面，理想类群的平凡性保证能够分解为素元，而不只是分解为素理想。这一性质确保素支撑框架

在第 2 节中引入，是定义良好的，并构成定理4.1中基数计算的基础，而这些计算又构成同胚分类的基础。

虽然定理3.1 和定理4.1 对主理想整环的情形已得到完全解决，但将这些结果推广至更广泛的一维整环类（其中元素可能不满足唯一分解）仍是一项重大挑战。我们提出以下未解决问题。

问题。若 R 是一个戴德金整环（其克鲁尔维数必为一），且其理想类群非平凡，那么类群的结构如何影响 $M(R)$ 的同胚类型？

致谢。第一作者感谢印度政府提供总理研究奖学金（PMRF/2502403）资助。第二作者获教育部通过印度理工学院马德拉斯分校设立的算子代数、几何、物质与时空中心资助（项目编号 SB22231267MAETWO008573）。

参考文献

[1] H. Furstenberg. 关于素数无穷性的研究。《美国数学月刊》，62:353，1955年。https://doi.org/10.2307/2307043。[2] S. W. Golomb. 整数上的一种连通拓扑。《美国数学月刊》，66:663–665，1959。https://doi.org/10.2307/2309340。[3] A. M. Kirch. 一个可数、连通、局部连通的豪斯多夫空间。《美国数学月刊》，76:169–171，1969。https://doi.org/10.2307/2317265。[4] J. Mac´ıas. 关于素数无穷性的另一种拓扑证明。Integers，24：论文编号 A47，4，2024年。https://doi.org/10.5281/zenodo.11221653。[5] J. Mac´ıas. 整环上的 Mac´ıas 拓扑。《拓扑学及其应用》，357：论文编号 109070，9，2024年。https://doi.org/10.1016/j.topol.2024.109070。[6] J. Mac´ıas 和 R. Ortiz. 关于 Mac´ıas 拓扑的一则注记，2024年。https://arxiv.org/abs/2411.06670。