arXiv:2603.28100v1 [cs.CG] 30 Mar 2026

平面度量中的最远邻居多项式核*

Kacper Kluk† Hung Le‡ Wojciech Nadara§ Marcin Pilipczuk¶ Hector Tierno‖Vinayak**

摘要

度量空间（V 上以 dist）为距离函数、针对集合 $P \subseteq V$ 的最远邻居数据结构，可回答如下查询：给定 $v \in V$，输出使 dist(v, p) 最大的 $p \in P$；在近似版本中，允许报告任意 $p \in P$，只要 $\mathrm{dist}(v, p) \geq (1-\varepsilon)\max_{p' \in P} \mathrm{dist}(v, p')$ 满足精度参数 $\varepsilon \in (0, 1)$。一种特殊类型的近似最远邻居数据结构是 ε-核心集：一个较小的子集 $Q \subseteq P$，使得对于每个查询 $v \in V$，都存在一个可行答案 $p \in Q$。

我们的主要结果是，在平面度量中，总存在一个 ε最远邻居核心集，其大小关于 $(1/\varepsilon)$是多项式有界的。这改进了 Bourneuf 和 Pilipczuk [9] 给出的指数级上界，并解决了 de Berg 和 Theocharous [20] 针对带孔多边形情形提出的开放问题。

在技术层面，我们建立了 ε-核心集与我们称为度量空间一个不变量的 ε-共匹配指数之间的联系——它是 ε-(半)梯子指数（又称 ε-散布维数）的兄弟节点，由 Abbasi 等人定义 [1]。尽管 ε-平面度量的(半)梯子指数具有指数级下界，但我们证明了 ε-平面度量的共匹配指数是多项式级的，且均为 $1/\varepsilon$。(半)梯子指数与 ε和ε共匹配指数之间的指数级分离颇为出人意料，而相关证明是我们工作的主要技术贡献。

基于我们新的技术思想，我们给出了两项扩展：

1. 我们证明存在一个 ε核心集，用于平面度量中的k-中心问题，其大小关于 $(1/\varepsilon)$ 为固定 k的多项式（最远邻核心集是k-中心在$k = 1$时的一种特殊情况）。我们以一个指数级核心集下界补充这一结果：当 $2^{\Omega(1/\varepsilon)}$ 为k-中心且$k = 1/\varepsilon$时，存在该下界。在固定k的情形下，我们的结果大幅改进了 Bourneuf 和 Pilipczuk 最近提出的 ε核心集，用于k-中心问题 [9]；他们证明核心集大小上界为$O(k)^{\mathrm{poly}(1/\varepsilon)}$。2. 我们将所有结果推广到由有界欧拉亏格图所诱导的度量，并且核心集大小上界对亏格呈多项式依赖。我们以一个下界构造补充这些上界，证明超出有界亏格图的范围（例如无小图图）后，共匹配指数以及用于最远邻居的 ε核心集必须关于 $1/\varepsilon$ 呈指数级增长。

*K.K. 和 Ma.P. 得到了波兰国家科学中心 SONATA BIS-12 资助，资助编号为 2022/46/E/ST6/00143。W.N. 得到了欧盟地平线 2020研究与创新计划的资助，协议编号为 948057——BOBR。H.L.、Vinayak 和 H.T. 得到了美国国家科学基金会资助，项目编号为 CCF-2517033，以及美国国家科学基金会职业奖 CCF-2237288。

†波兰华沙大学信息学院。 k.kluk@uw.edu.pl

‡美国马萨诸塞大学阿默斯特分校。 hungle@cs.umass.edu§波兰华沙大学信息学院。 w.nadara@uw.edu.pl

¶波兰华沙大学信息学院。 m.pilipczuk@uw.edu.pl

‖美国马萨诸塞大学阿默斯特分校。 htierno@umass.edu**美国马萨诸塞大学阿默斯特分校。 vvinayak@umass.edu

目录

1 引言 **1**
1.1 主要结果 .31.2 其他结果 .41.2.1 有界亏格图 .51.2.2 k-中心问题的核心集 .61.3 论文结构 .
9

2 定理 1.5 证明概述9

3 预备知识 **12**
3.1 VC 维数 .123.2 平面图的树分解.133.3 路由引理 .14

4 从　　从共匹配到核心集：定理 1.4 的证明 1 **5**
4.1 命中集合线性规划 .154.2 证明 .15

5 共匹配　平面度量中的匹配界：定理 1.5 的证明 1 **7**
5.1　距离剖面与分离工具箱　　. 19
5.2　化简为局部实例. 21
5.3　化简为相连的非交叉实例 . 21
5.3.1　树分解与分隔集 . 21
5.3.2　易覆盖生成树　　. 22
5.3.3　具有非交叉连边的良好点对　　. 23
5.4 相连的非交叉实例的界 .24
5.4.1 等距结构 .245.4.2 禁交 .255.4.3 围绕p''和q'' .255.4.4 盒子、A 型和 B 型点对 .
265.4.5 A 类和 B 类链.275.4.6 最终矛盾 .28

6 核心集用于 k-中心 30
6.1 k-共匹配到 k-中心　ε-核心集 .306.2 从 k-共匹配归约到双梯 .33

7 双梯的大小 34
7.1 距离剖面与分离工具箱 .357.2 化归到局部双梯子 .367.3 归约到相连非交叉双梯 .377.3.1 树分解与分隔集 .377.3.2 界定坏三元组 .377.3.3 具有非交叉连接的良好三元组 .387.4 界定相连非交叉双梯 .387.4.1 等距实例 .397.4.2 禁交 .407.4.3 肋条排序 .407.4.4 构造最终矛盾 .41

8 带孔多边形 **43**

9 有界亏格图 44

10 下界 46

10.1 超越有界亏格图：定理 1.7 的证明 .46 10.2 树中的大型共匹配：定理 1.12 的证明 .49 10.3 平面图中的更大共匹配：定理 1.13 的证明 .50

1 引言

最远邻居。最近邻居和最远邻居搜索是计算几何中基础且经过深入研究的邻近问题。在最远邻居问题中，目标是对度量空间 (V, dist) 中给定的点集 P 进行预处理，以便快速回答最远邻居查询：对于一个点 $v \in V$，返回一个点 $p \in P$，使 $\mathrm{dist}(v,p)$ [3, 42, 19, 46, 20] 最大。在近似版本中，给定精度参数 $\varepsilon > 0$，我们希望返回任意一个 $p \in P$，使得 $\mathrm{dist}(v,p) \geq (1-\varepsilon)\max_{p' \in P} \mathrm{dist}(v,p')$。最远邻居问题与计算点集的直径密切相关。在欧几里得空间中，计算近似最远邻居可以高效地归约为计算近似最近邻居 [36]。在图情形中，顶点到其最远邻居的距离称为该顶点的离心率。计算直径和离心率是一项基础的图问题，数十年来一直受到研究。

解决最远邻居问题的一种自然方法，是在预处理阶段找出一个较小的集合 $Q \subseteq P$，使其能够正确代表 P：对于任意 $v \in V$，都存在一个有效答案 $p \in Q$。这样，回答查询就归结为在 Q中搜索；如果Q 规模较小，即使穷举搜索也很高效。这样的集合Q 称为最远邻居问题的核心集。

定义 1.1（最远邻居 ε-核心集）。给定一个度量空间 $(V,\ \mathrm{dist})$、一个集合$P \subseteq V$ 以及一个实数$\varepsilon > 0$，最远邻居 ε-核心集是一个子集$Q \subseteq P$，满足对于每个$v \in V$，都存在$q \in Q$，使得：

$$\mathrm{dist}(v,q) \geq (1-\varepsilon)\max\{\mathrm{dist}(v,p) \mid p \in P\}.$$

一般而言，数据集的核心集是一个较小的子集，在该核心集上求得的问题解能够为原始数据集上的问题提供良好（近似）解。核心集是一个长期受到深入研究的课题，因为它为解决海量数据集上的问题提供了一种简单的方法：只需为（大型）输入构造一个核心集，然后在核心集上求解问题。一条成果尤为丰硕的研究路线，是针对聚类问题的核心集，尤其是k-均值、k-中位数和 (k,z)-聚类，涵盖所有经过深入研究的度量，例如一般度量 [32, 18, 11], 欧几里得度量 [32, 33, 18, 11, 17], 倍增度量 [32, 15, 37], 和平面/无 minor 度量 [4, 12, 17]。对于这些问题，已知存在良好的核心集（大小为多对数级或更小），且已知界限（几乎）是最优的 [4]。

遗憾的是，若不作任何额外假设，关于最远邻居问题核心集的问题便毫无意义：存在一个非常简单的 n 点集合，使得该点集的任意最远邻居核心集大小都为 $\Omega(n)$ [9]。对于欧几里得度量和倍增度量，一个简单的装填界即可给出大小为 $\varepsilon^{-O(d)}$ 的核心集；在指数上，这一结果仅相差一个较小的常数因子，因而是最优的 [14]。因此，与其他聚类问题不同，最远邻居核心集会受到维数灾难的影响：核心集的大小随维度呈指数增长。

在平面度量中，也就是边赋权平面图上的最短路径度量中，Bourneuf 和 Pilipczuk [9] 构造了一个 ε最远邻居的 -核心集[1]，其大小为 指数级，即 $2^{\mathrm{poly}(1/\varepsilon)}$其中 $\mathrm{poly}(\cdot)$ 是一个多项式函数。尽管其规模庞大，这一结果表明，构造一个 ε最远邻居的 -核心集是可能的，且其大小与 n 无关。正如我们将在下文详细讨论的，他们的方法存在一个关键瓶颈，而对 $1/\varepsilon$ 的指数依赖正是障碍。在本文中，我们克服了这一障碍，并构造出首个 ε大小关于 $1/\varepsilon$ 为多项式级的平面度量核心集。

定理 1.2. 给定平面度量 $(V$中的点集 $P\mathrm{dist})$，以及参数 $\varepsilon \in (0,1)$，存在一个大小为 多项式$(1/\varepsilon)$的 P 的最远邻核心集，且可以在多项式时间内构造。

定理1.2 对平面中的许多几何情形都推出了类似结果。最近，de Berg 和 Theocharous [20] 研究了 ε-核心集用于简单多边形，并构造了一个大小为的$O(1/\varepsilon^2)$-核心集。他们提出，带孔多边形是否也存在这样的核心集，并指出需要采用不同的

[1]他们的核心集结果针对的是k-中心问题，其中最远邻核心集是一个特例，具体来说，当$k =$ 1.

方法。定理1.2 肯定地回答了他们的问题。（我们将在第1.2 节正式讨论定理如何给出一个 ε-核心集，用于带孔多边形中的最远邻居，见第8节。）

度量空间的结构不变量。考虑以下非常简单的贪心算法，用于构造最远邻居 ε-核心集：只要存在一个点 $v \in V$，使得它在 Q 中没有$(1-\varepsilon)$-近似最远邻居，就将 v 在 P 中的最远邻居 q 加入 Q；v 称为 q（被加入时）的见证点。为了界定 Q 的大小，令 $\ell = |Q|$，并将 Q 中的点记为 $q_1, \ldots, q_\ell$，按贪心算法加入的顺序排列，即当 $i < j$ 时，q_j 在 q_i 之后加入。令 $L = \{(q_1, v_1), \ldots, (q_\ell, v_\ell)\}$ 为二元组序列，其中 v_i 是 q_i的见证点，$i \in [\ell]$。通过一个简单的分桶技巧，可以假设距离 $\mathrm{dist}(q_i, v_i)$ 大致相同；为简单起见，设其均为 R。（该技巧会使最终 ε-核心集的大小损失一个 $1/\varepsilon$ 因子，此处认为这一损失可以忽略。）由于 q_j 是在 $q_1, \ldots, q_{j-1}$之后加入的，对于每个 $i < j$，都有 $\mathrm{dist}(q_i, v_j) < (1-\varepsilon)R$。

Abbasi 等人 [1] 将这种结构的最大长度 L 确定为度量空间的一个关键不变量，它决定了一大类聚类问题中一种自然算法方法的复杂度，并将其称为 ε-散布。Bourneuf 和 Pilipczuk [9] 注意到，该结构L 与结构稀疏图理论中的 半梯 这一概念相似 [31, 48, 2]。

该理论主要关注这样一些图类：它们可以通过在稀疏图类上使用一阶逻辑来定义 [7, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 34, 35]，例如平面图、排除某个固定子式的图，或者更一般地，有界扩张图和无处稠密图 [43]。过去十年间，这一领域迅速发展，其主要目标是全面理解高效一阶模型检测算法的局限。我们推荐近期的一篇综述 [47]，以便更深入地了解相关背景。

让我们稍微岔开一下，探讨结构稀疏图的理论。设H 是一个简单无权图。设$L = (p_i, q_i)_{i=1}^{\ell}$ 是H中的一列顶点。我们称L 为

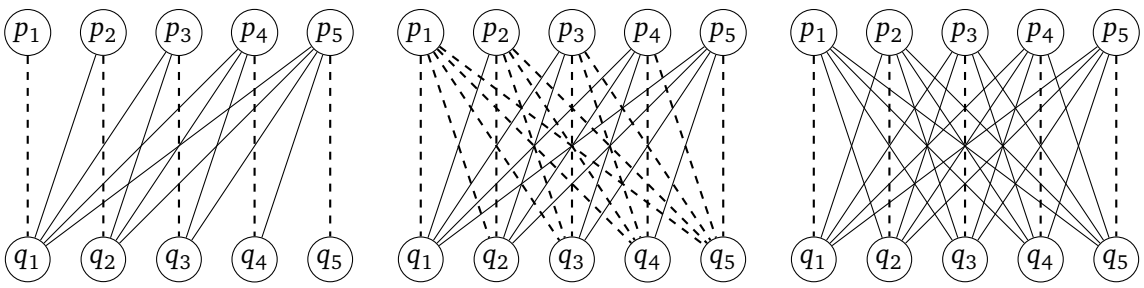
半梯，如果对每个$p_i q_i \notin E(H)$ 都成立，但对每个 $1 \le i < j \le \ell$，$p_i q_j \in E(H)$ 都不成立；

如果对任意$i, j \in [\ell]$，$p_i q_j \in E(H)$ 成立当且仅当$i < j$成立，则称为**梯子**；

如果对任意$i, j \in [\ell]$，$p_i q_j \in E(H)$ 成立当且仅当$i \neq j$成立，则称为**共匹配**。

注意，半梯没有规定p_i 与q_j 在$i > j$ 时是否相邻，而且上述定义都不涉及p顶点之间以及q顶点之间的邻接关系。一个简单的拉姆齐论证表明，一个很大的半梯中必然包含一个大梯子或一个大共匹配。

在结构稀疏图的情形下，图 H 在某个其他图 G中一阶解释，也就是说，它的边表示满足某个固定一阶公式的 (u, v)（G 的顶点二元组）$\phi(u, v)$。经典的“基准”公式是“u 与 v 之间的距离至多为 d”，其中d是常数。仿照这一思路，在我们的“度量”情形中，图 H 表示彼此“接近”的顶点二元组：它们之间的距离至多为 $(1-\varepsilon)R$。由此得到以下定义（见图 1）。



(a) ε-半梯　　(b) ε-梯子　　(c) ε-共匹配

图1：　虚线表示距离 $\ge R$，实线表示距离 $\le (1-\varepsilon)R$　.

定义 1.3（度量阶梯）。令 $\varepsilon > 0$ 为精度参数，并令 (V,dist) 为一个度量空间。点 V 中的序列 $L = (p_i,q_i)^{\ell}{}_{i=1}$ 是

一个 ε-半梯 是指，对每个 $i \in [\ell]$，都有 $\text{dist}(p_i,q_i) > R$；而对每个 $1 \le i < j \le \ell$，都有$\text{dist}(p_i, q_i) \le (1-\varepsilon)R$，其中某个 $R > 0$；

一个 ε-梯子 是指，对每个 i、$j \in [\ell]$，若 $i < j$，则有 $\text{dist}(p_i,q_j) \le (1-\varepsilon)R$；否则$\text{dist}(p_i,q_j) > R$，其中某个 $R > 0$；

一个 ε-共匹配 是指，对每个 $i \in [\ell]$，都有 $\text{dist}(p_i,q_i) > R$；而对每个 i、$j \in [\ell]$，若 $i \neq j$，则有 $\text{dist}(p_i,q_i) \le (1-\varepsilon)R$，其中某个 $R > 0$。

ε-半梯的概念与 ε-散布集的概念相同，[1]，但我们更倾向于使用前者这一名称，因为“半梯”一词在结构稀疏图理论中已广为人知。

沿用结构稀疏图领域的术语，我们将度量空间εV,dist) 中一个 ε-半梯、ε-梯子或 (-共匹配的最大长度 ε分别称为ε-半梯指数、ε-梯子指数或 ε-共匹配指数。（ε-半梯指数也称为 ε-散布维度。）

Bourneuf 和 Pilipczuk [9] 最先发现了 ε-散布与 [1] 之间的联系，以及它与前述结构稀疏图理论中的概念之间的联系。他们将后者中的关键工具应用于度量情形，并证明：对于任意真次闭图类 $\mathcal{G}$，由 $\mathcal{G}$ 中的边加权图所诱导的度量类，其 ε-半梯指数有界于[2] $2^{\text{poly}_{\mathcal{G}}(1/\varepsilon)}$。注意，该结果适用于平面图、可嵌入固定曲面的图以及有界树宽图的类，因为它们都是小图封闭的。它还立即推出，由前述简单贪心算法构造的平面度量最远邻核心集的大小具有 $2^{\text{poly}(1/\varepsilon)}$ 上界。遗憾的是，采用这种方法时，指数级大小已是最佳结果：Sokołowski ε构造了一个大小为 $2^{\Omega(1/\varepsilon)}$的平面度量 [48]-梯子。因此，要突破指数级障碍，我们必须摆脱贪心方法，因为它与 ε-半梯指数密切相关。

为说明我们新方法的动机，现在考虑以下特殊情况：度量空间 $(V,\text{距离})$ 由一个简单无权图给出，并且对每个 $v \in V$，都有 $\max_{p \in P} \text{距离}(v,p) = R$，其中某个整数 R 满足此条件。此外，$\varepsilon < {}^{1}{}_{R}$，也就是说，$(1-\varepsilon)R > R-1$。换句话说，最远邻居 ε-核心集Q 需要对每个$v \in v$，至少包含一个$p \in P$，使得$\text{距离}(v,p) = R$。

设Q 是此特殊情况下一个按包含关系极小的 ε-核心集。根据极小性，对每个$p \in Q$，都存在$v_p \in V$，使得p 是Q 中唯一一个距离恰好为R的点。我们注意到$(v_p, p)_{p \in Q}$ 是V中的一个 ε-共匹配！因此，平面度量的 ε-梯子指数 [48],可能呈指数级增长，但或许可以通过考察共匹配，为最远邻居找到更好的核心集？若要采用这种方法，会遇到两个主要障碍：

- **障碍 (i)**。说明 ε-共匹配指数与 ε-核心集之间存在多项式关系。
- **障碍 (ii)**。将 ε-共匹配指数的大小界定为关于 $1/\varepsilon$ 的多项式函数。

障碍 (ii) 显然是最难的：ε-共匹配与 ε-半梯非常相似（参见定义 1.3），目前也没有证据表明二者之间存在指数级分离。尽管如此，我们仍采用这一思路，并在此过程中解决这两个障碍。

1.1 我们的主要结果

我们的首个结果建立了 ε-共匹配指数与最远邻居核心集之间的正式联系，从而克服了障碍 (i)。遗憾的是，考虑权重时，上述极小性论证便不再成立。因此，我们提出了一种基于线性规划的新归约。具体而言，

[2] Tpoly$_{\mathcal{G}}$ 中的下标 $\mathcal{G}$ 表示其对图族 $\mathcal{G}$ 中被排除子式大小的依赖 .

我们对球集系统具有有界 VC 维数的度量空间中的类似集合覆盖的线性规划进行舍入。幸运的是，平面度量的球集系统的 VC 维数为 4。因此，我们从 ε-核心集到 ε-共匹配的归约，通过 VC 维数以关键方式利用了平面性。这与先前工作 ε中从 ε-核心集到 [9], -半梯的归约形成对比，后者适用于任意度量空间。

令 $B(v,r)=\{u\in V|\text{dist}(u,v)\le r\}$ 为一个半径为 $r\ge 0$、以 v为中心的球。令 $\mathcal{B}_V=(V,\{B(v,r)\}_{v\in V,r\in\mathbb{R}^+})$ 为底集为 V、以所有球为集合族的集合系统。

定理 1.4（从核到共匹配）。令 (V,dist) 为一个度量空间，$P\subseteq V$ 为一个点集，且 $\varepsilon\in(0,1)$为一个参数。令 $L(\varepsilon)$ 为 ε-共匹配指数，适用于 (V,dist)。令 d 为 $\mathcal{B}_V$ 的 VC 维数。那么，P 存在一个大小为 $O(d\varepsilon^{-2}\cdot L(\varepsilon^2/4)\log L(\varepsilon^2/4))$ 的最远邻居 ε-核心集，且可在多项式时间内计算。

如果 (V,dist) 是平面度量空间，则已知 $\mathcal{B}_V$ <style id='14}的 VC 维数至多为 4；更一般地，对于 K_h-子式无关度量，VC 维数至多为 $h-1$ [16, 39]。因此，定理 1.4 将寻找核心集的算法问题简化为一个纯粹的组合问题，即平面度量的 ε-共匹配指数。

我们的下一个结果表明，平面度量的 ε-共匹配指数具有关于$1/\varepsilon$的多项式上界，从而彻底解决了障碍 (ii)。鉴于 Sokołowski 给出的 ε-半梯指数的指数级下界 [48]，我们发现这一结果相当令人惊讶。

定理 1.5（平面度量中的共匹配）。存在一个多项式 L^{planar}，使得对于任意$\varepsilon\in(0,1)$ 以及任意平面度量空间 $(V,\ \text{dist})$，$(V,\ \text{dist})$ 的 ε-共匹配指数至多为 $L_{\text{planar}}(1/\varepsilon)$。

The定理1.4 和1.5 立即推出了本文的主要结果，即定理1.2 .

证明（定理1.2的证明）：根据定理1.5，有$L(\varepsilon)=$为多项式$(1/\varepsilon)$，因此$L(\varepsilon^2/4)=$为多项式$(1/\varepsilon)$。由于 $\mathcal{B}_V$ 在平面度量中的 VC 维数至多为 4，根据定理1.4，我们可以构造一个大小为$O(\varepsilon^{-2}L(\varepsilon^2/4)\log L(\varepsilon^2/4))=$的最远邻居核心集 $\varepsilon(1/\varepsilon)$。□

我们将在第1.5 节概述定理2的证明。

1.2 其他结果

我们将在第1.1节从两个不同方向扩展主要结果：

1. 我们研究其他次封闭图族。我们证明，有界亏格度量具有多项式 ε-共匹配指数。我们还为其他图族建立了指数级下界： ε-共匹配指数，包括有界树宽度量（因此也包括一般的无禁子式度量）。

我们将最远邻居的核心集扩展到k-中心问题，证明存在一个大小为 poly ε的$(1/\varepsilon)$ -核心集，适用于固定的 k，涵盖平面度量和有界亏格度量；并给出当k $2^{\Omega(1/\varepsilon)}$ 时的指数级下界。 $=1/\varepsilon$为得到上界，我们引入ε-共匹配的一种变体，称为 (k,ε)-共匹配。技术细节主要在于界定(k,ε)-共匹配的大小。对于 ε-共匹配，p个点与q个点之间具有明显的对称性。然而， (k,ε)-共匹配并不具备这种对称性，因此要界定其大小困难得多。

我们的结果总结于表 1。我们从有界亏格图开始。

问题	图类	界限（上界/下界）	参考文献
ε-共匹配 / 最远邻居 ε-核心集	简单多边形	$O(1/\varepsilon^2)$ (UB)	[20]
	平面	$\mathrm{poly}(1/\varepsilon)$ (UB)	定理 1.2
	有界亏格 g	多项式$(g, 1/\varepsilon)$ (上界)	定理 1.6
	树宽 ≤ 5	$2^{\Omega(1/\varepsilon)}$ (下界)	推论 1.8
	不含K-子式	$2^{\Omega(1/\varepsilon)}$ (下界)	推论 1.8
	不含H-子式	$2^{\mathrm{poly}_H(1/\varepsilon)}$ (上界)	[9]
ε-核心集，用于 k-中心	树	$\Omega(2^{1/\varepsilon})$ 当$k \sim 1/\varepsilon$ (下界)	定理 1.11
	平面	$(1/\varepsilon)^{2^{O(k)}}$ 对于固定的k (上界)	定理 1.10
		$\Omega(4^{1/\varepsilon})$ 当 $k \sim 1/\varepsilon$ (LB)	定理 1.11
	有界亏格 g	$\mathrm{poly}(g) \cdot (1/\varepsilon)^{2^{O(k)}}$ (上界)	定理 1.18
	H-子式自由	$k^{\mathrm{poly}_H(1/\varepsilon)}$ (上界)	[9]

表 1：不同图类中 ε-核心集的最远邻居和 k-中心的界总结。(上界)表示上界，(下界)表示下界。

1.2.1 有界亏格图

我们注意到，针对平面度量的结果可以推广到由可嵌入任意固定曲面的图所诱导的度量。

定理 1.6。 对于任意整数 $g \geq 0$， $\varepsilon \in (0,1)$以及度量空间 (V, dist) 由嵌入欧拉亏格至多为 g 的曲面中的图所诱导， ε-共匹配指数 (V, dist) 有如下上界：$\mathcal{O}(g^4\varepsilon^{-8}) \cdot L_{\mathrm{planar}}(1/\varepsilon)$，其中 L^{planar} 由定理 *1.5*给出。

定理 1.6 的证明遵循沿着 $\mathcal{O}(g)$ 条最短路径及单条边切割曲面的标准方法。

定理1.6与定理1.4将定理1.2推广到了由可嵌入固定曲面的图所诱导的度量空间；此时，核心集的大小依赖于 $1/\varepsilon$ 以及该曲面的欧拉亏格的多项式。

超越曲面嵌入图：下界。迄今讨论的结果揭示了一个令人惊讶的现象：在平面度量空间以及更一般的有界亏格度量空间中， ε-共匹配指标与 ε-梯子指标之间存在显著差异。自然会想到，这一现象的适用范围究竟有多广，尤其是它是否适用于任何真次闭图类。我们证明，实际上，我们的结果几乎完全穷尽了这一系列正面结果。

由于本文给出的所有下界均针对无权图，我们先给出一个便于使用的定义：对于一个（无权）图$G \geq 1$和一个整数d， $\mathcal{M}$ 是由G 的顶点构成的二元组族，满足

1. 对于每个 $(p、q) \in \mathcal{M}$，都有 距离$(p、q) > d$；2. 对于任意不同的 $(p、q)$、$(p'、q') \in \mathcal{M}$，都有 距离$(p、q') \leq d$。

显然， d-共匹配是一个 ε-共匹配，适用于任意 $\varepsilon < {}^{1}\!/_{d+1}$。首先，我们给出以下关于 d-共匹配大小的指数级下界。我们的构造是对 Sokołowski 的构造进行修改得到的 [48]，并对其性质进行了详细分析。

定理 1.7（最远邻居与共匹配的下界构造）。对于每个整数 $k \geq 3$，都存在一个图 G_k，具有以下性质：

1. G_k 包含一个大小为 2^k 的 $(2k-1)$-共匹配。 *2.* G_k 有一个树分解，其中每个袋的大小至多为 6，且每个粘合度至多为 2 （因此，特别地，其树宽为常数）；*3.* G_k 不含 $K_{3,4}$ 子式；*4.* G_k 不含 K_5 子式；*5.* G_k 的欧拉亏格介于 2^{k-3} 与 2^k 之间。

注意，若 $\mathcal{M}$ 是 d-共匹配，在 G 中，且 $P = \{p \mid (p,q) \in \mathcal{M}\}$，那么对于任意 $\varepsilon < {}^{1}\!/_{d+1}$，任何用于最远邻居的 ε-核心集都需要存储整个 P，因为对于查询 q，对于任意 $(p,q) \in \mathcal{M}$，p 是唯一有效的答案。因此，我们得到定理 1.7 的直接推论：

推论 1.8. 存在常数 $c > 0$，使得对于每个 $\varepsilon \in (0,1)$，都存在一个不含 K_5 子式、树宽至多为 5 的图，其中任何用于最远邻居问题的 ε-核心集大小都至少为 $2^{c/\varepsilon}$。

请注意，推论 1.8 为有界亏格图类之外的情形留下的空间很小 .

1.2.2 k-中心的核心集

对于集合 $X \subseteq (V, \mathrm{dist})$，我们定义 $\mathrm{dist}(v, X) = \min_{x \in X} \mathrm{dist}(v, x)$。在 k-中心问题中，核心集保留了任意由 k 个中心点组成的集合到 P 中某一点的最大距离，具体定义如下。

定义 1.9（k-中心 ε-核心集）。给定度量空间 (V, dist) 中的点集 P，P 的一个 k-中心 ε-核心集是子集 $Q \subseteq P$，使得对于 V 中任意一个至多包含 k 个候选中心的集合 $X \subseteq$，都存在一点 $q \in Q$，使得

$$d(q,X) \geq (1-\varepsilon)\max\{\mathrm{dist}(p,X) \mid p \in P\}.$$

注意，对于 $k = 1$，k-中心 ε-核心集恰好是最远邻居的 ε-核心集。

Bourneuf 和 Pilipczuk [9] 证明了，k-中心在平面度量和无 minor 度量中存在一个大小为 ε 的核心集 $O(k)^{\mathrm{poly}(1/\varepsilon)}$；即使 $1/\varepsilon$，对 $k = 1$ 而言，其依赖关系也是指数级的。对于固定的 k，我们证明可以将对 $1/\varepsilon$ 的依赖关系降为多项式级。作为对上界的补充，我们证明，当 $k \sim 1/\varepsilon$ 时存在指数级下界；即使对于树度量，我们的下界仍然成立。

定理 1.10。给定平面度量 (V, dist) 中的一个点集 P、中心点数量 $k \in \mathbb{N}$ 以及参数 $\varepsilon \in (0,1)$，存在一个大小为 $1/\varepsilon^{2^{O(k)}}$ 的 P 的 k-中心 ε-核心集。

定理 1.11。对于每个 $\varepsilon \in (0, 1/2)$，对于 $k := \lceil {}^{1}\!/_{\varepsilon} \rceil - 2$，存在

1. 一种树度量空间，其中任何 k-中心 ε 核心集的大小都至少为 $2^{1/\varepsilon}_{4}$；*2.* 一种平面度量，其中任何 k-中心 ε 核心集的大小都至少为 $4^{1/\varepsilon}_{4}$。

我们通过引入 ε-共匹配和 d-匹配的变体来证明定理 1.10 和定理 1.11，分别称为 (k, ε)-共匹配和 (k, d)-共匹配。在 $(\mathrm{k}, \varepsilon)$-共匹配中，其中一侧不再是点，而是由大小为 k 的点集组成。更准确地说，$(\mathrm{k}, \varepsilon)$- 共匹配 $\mathcal{M}$ 中的每个（有序）对都具有 (p, X) 的形式，其中 X 是一个包含 k 个点的集合。(k, d)-共匹配与前面介绍的 d-共匹配类似，其中 d 是一个正整数，距离阈值为 d。注意，对于任意 $\varepsilon < {}^{1}\!/_{\mathrm{d}+1}$，(k, d)-共匹配都是一个 (k, ε)-共匹配。

下界： (k,d)**-共匹配**。我们的下界是通过在无权平面图中构造 (k,d)-共匹配得出的。具体而言，我们给出两种构造。第一种构造较为简单，所得下界较弱，但构造出的是一棵树；第二种构造则给出一个下界更强的平面图。这两种构造都排除了对k 和d 的完全多项式依赖。

定理 1.12。 对于每个整数 $k \geq 1$，都存在一棵树 G_k，其中有一个大小为 2^k 的 $(k,\ k)$-共匹配。

定理 1.13。 对于任意整数 $k,\ d \geq 1$，都存在一个平面图 $G_{k,\ d}$，其中有一个大小至少为 $(k,\ d)$-共匹配

$$\left(2\left\lfloor\frac{d}{k}\right\rfloor+2\right)^k \quad \text{if } k \leq d; \qquad \left(3\left\lfloor\frac{k}{d}\right\rfloor+1\right)^d \quad \text{if } d \leq k.$$

（注意，当 $k=d$ 时，这两个界都给出 4^k。）

注意，如果 $\mathcal{M}$ 是一个 (k,d)-共匹配，那么对于 $\mathrm{P}=\{\mathrm{p} \mid (\mathrm{p},\mathrm{X}) \in \mathcal{M}\}$，以及任意 $\varepsilon < {}^{1}\mathrm{d}_{+1}$，任何$\varepsilon$k-中心问题的核心集都必须保留整个 P，因为对于查询 X，p 是 $(\mathrm{p},\mathrm{X}) \in \mathcal{M}$ 的唯一有效答案。因此，通过令 $\mathrm{k}=\mathrm{d}=\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil-2$，我们有 $\varepsilon < {}^{1}\mathrm{k}_{+1}$，所以定理 1.12 中关于 (k,d)-共匹配的下界，意味着定理 1.11 中所述树度量的指数级下界 $2^{2^{1/\varepsilon}}_{4}$。对于平面度量，当 $\mathrm{k}=\mathrm{d}=\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil-2$（因此再次有 $\varepsilon < {}^{1}\mathrm{k}_{+1}$）时，定理 1.13 给出了稍好的下界 $4^{4^{1/\varepsilon}}_{4}$。

上界： $(k,\ \varepsilon)$**-共匹配**。定理1.10 的上界证明遵循与定理1.2证明相同的总体结构。通过与$k=1$情形类似的归约，并基于线性规划和 VC 维数，我们可以将k-中心核心集的构造归约为对 $(k,\ \varepsilon^2/4)$-共匹配最大规模的界定。

定理 1.14。设 $(V,\ \mathrm{dist})$ 为一个度量空间，$P \subseteq V$ 是一个点集合，且参数为 $\varepsilon \in (0,1)$。令 $L(k,\ \varepsilon)$ 表示 $(V,\ \mathrm{dist})$ 中最大规模的 $(k,\ \varepsilon)$- 共匹配的长度。设 d 为 $\mathcal{B}_V$ 的 VC 维数。那么，存在一个针对 P 的 k-中心 ε-核心集，其规模为 $O(dk\log k\varepsilon^{-2}\cdot L(k,\ \varepsilon^2/4)\log L(k,\ \varepsilon^2/4))$。

处理 (k,ε)-共匹配比处理定理 1.5 中的 ε-共匹配更具挑战性。这里的问题在于，如果采用相同的方法来界定 ε-共匹配的规模，(k,ε)-共匹配一侧的集合会由于缺乏对称性而带来诸多困难。具体而言，ε-共匹配证明技术充分利用了二元组之间的对称性：对于每个 $(\mathrm{p},\mathrm{q}) \in \mathcal{M}$，点 q 与其他每个 p_i 都“接近”，这对于建立一种填充型矛盾至关重要。然而，在 (k,ε)-共匹配 $\mathcal{M}'$ 中，这种对称性消失了；也就是说，对于某些 $(\mathrm{p},\mathrm{X}) \in \mathcal{M}'$，X 中的不同点可以分别充当与不同 p_is 接近的见证点，并且可能与所有其他点都相距甚远。这种缺乏对称性的情况使得难以将点-集合二元组限制在拓扑边界内，而为共匹配建立的工具在此处也不再适用。

我们使用 Ramsey 型论证重新建立这种对称性。幸运的是，我们研究的是 VC 维数有界的集合系统，因此可以利用 Nguyen、Scott 和 Seymour 最近针对有界 VC 维数图给出的多项式 Ramsey 界 [44]。我们证明，一个足够大的$(k,\ \varepsilon)$-共匹配必然包含一个大的（规则）$(\varepsilon/2)$-共匹配，或者一个大的 $(\varepsilon/2)$-双梯，其定义如下（示意见图2）。

定义 *1.15*（ε-双梯）。设 $\mathcal{D}=\{(p1,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{t}_1),(p2,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{t}_2),\ldots,(p_\ell,\mathfrak{b}_\ell,\mathfrak{t}_\ell)\} \subseteq V^3$ 是度量空间 $(V,dist)$ 中由 ℓ 个有序点三元组组成的序列，且 $\varepsilon \in (0,1)$ 是一个参数。若存在 $R>0$，使得：则称 $\mathcal{D}$ 是一个 ε- 双梯。

1. 对于每个 $1 \leq i \leq j \leq \ell$,

$$\mathrm{dist}(p_j,\mathfrak{t}_i) > R \quad \text{and} \quad \mathrm{dist}(p_i,\mathfrak{b}_j) > R;$$

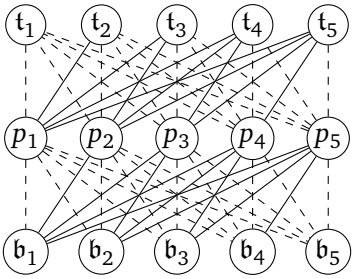


图2： ε-双梯。同样，虚线表示距离 $\geq R$，实线表示距离 $\leq (1-\varepsilon)R$。

2. 对每个 $1 \leq i < j \leq \ell$,

$$\mathrm{dist}(p_i, \mathfrak{t}_j) \leq (1-\varepsilon)R \quad \text{and} \quad \mathrm{dist}(p_j, \mathfrak{b}_i) \leq (1-\varepsilon)R.$$

点集 $\{\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_\ell\}$ 和 $\{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\ell\}$ 分别称为双梯的 顶端 和 底端[3]。

注意，一个 ε-双梯 $\mathcal{D} = (p_i, \mathfrak{t}_i, \mathfrak{b}_i)_{i=1}^{\ell}$ 是一个 $(k = 2, \varepsilon)$-共匹配 $(p_i, X_i)_{i=1}^{\ell}$，其中 $X_i = \{\mathfrak{t}_i, \mathfrak{b}_i\}$。顶点 $\mathfrak{t}_i$ 充当 p_j 的“靠近”顶点，即 X_i 对于 $j < i$ 的顶点，而 $\mathfrak{b}_i$ 则对 $j > i$ 发挥这一作用。

定理 1.16。设 (V, dist) 是一个度量空间，且球集系统 $\mathcal{B}_V$ 的 *VC* 维数至多为 d。设 $\varepsilon \in (0,1)$ 为一个参数。存在普适常数 c 和多项式 $f_{k,\,d}(x) = x^{(c\cdot d)^{4k}}$，使得如果 (V, dist) 包含一个大小至少为 $f_{k,\,d}(\ell)$ 的 (k, ε)-共匹配，那么它包含一个 $(\varepsilon/2)$-共匹配或一个大小为 ℓ 的 $(\varepsilon/2)$-双梯。

采用与定理 1.5 类似的通用方法（但在证明的最后阶段采用了显著不同的论证），我们为平面图中双梯的最大规模建立了一个多项式上界

定理 1.17（平面度量中的双梯）。存在一个多项式 $L'_{\text{平面}}$，使得对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$，平面度量中的任意 ε-双梯的规模至多为 $L'_{\text{平面}}(1/\varepsilon)$。

现在，定理 1.10是定理 1.5、1.14、1.16 和 1.17的简单推论。

证明（定理 1.10的证明）： 根据定理 1.5、1.16 和 1.17，(k, ε)-共匹配的最大规模至多为 $f_{k,4}$(多项式$(1/\varepsilon)) = (1/\varepsilon)^{2^{O(k)}}$。然后根据定理 1.14，我们可以构造一个$\varepsilon$-核心集，用于 k-中心，其规模为：

$$O(\varepsilon^{-2} f_{k,4}(\mathrm{poly}(1/\varepsilon)) \cdot \log f_{k,4}(\mathrm{poly}(1/\varepsilon)) = (1/\varepsilon)^{2^{O(k)}},$$

正如所声称的。 □

此外，我们注意到，将平面度量推广到有界亏格度量所用的技术在这里同样适用。

定理 1.18. 对于任意整数 $g \geq 0$，$\varepsilon \in (0,1)$以及度量空间 (V, dist) 由嵌入欧拉亏格至多为 g的曲面中的图所诱导，其中

与最远邻点的情形类似，定理1.18 将定理 k-中心核心集1.10 推广到了有界亏格图。

[3]我们将使用 `mathfrak` 字体来表示双梯的顶部点和底部点

1.3 论文组织结构

在第 2 节中，我们简要概述定理 1.5 的证明。在第 3 节介绍预备知识后，我们重点讨论定理 1.2：第 4 节证明定理 1.4，第 5 节证明定理 1.5。随后，我们转向 k-中心：第 6 节证明定理 1.14 和定理 1.16，第 7 节证明定理 1.17。在第 8 节中，我们简要讨论如何将带孔多边形转换为平面度量。第 9 节讨论向有界亏格图的扩展。最后，第 10 节证明我们的下界，即定理 1.7、定理 1.12 和定理 1.13。

2 定理 1.5 证明概述

本节将介绍我们关键技术结果的高层次思路：该结果将平面度量中ε-匹配的大小限制为 $1/\varepsilon$的一个多项式函数。我们的证明相当复杂，其中一些步骤严重依赖于图的平面嵌入，以缩小最短路径可能呈现的配置范围。由于 ε-共匹配指数的多项式界这一现象仅限于平面度量和有界亏格度量，而在有界树宽图等结构中并不存在，因此，我们证明中极具拓扑性质的特征很可能是不可避免的。

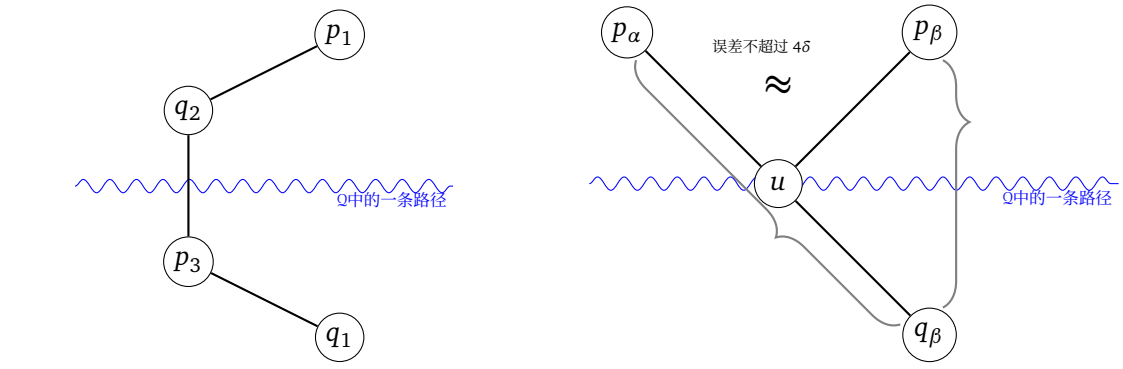
设 $L = (p_i, q_i)_{i=1}^{\ell}$ 是平面图 G 中的一个 ε-共匹配，并设 R 为见证距离，即 $\mathrm{dist}(p_i, q_i) > R$，而对于 $i \neq j$，有 $\mathrm{dist}(p_i, q_j) \le (1-\varepsilon)R$。对于每个 $i \neq j$，以一致的方式固定一条连接 $[\![p_i q_j]\!]$ 的最短路径 $_i\, p_j\, q$，也就是说，任意两条所选的最短路径要么不相交，要么沿一条子路径相交。不妨设 G 的每条边都位于某条路径 $[\![p_i q_j]\!]$ 上。容易看出，只要满足 $\ell \ge 3$，G 的直径就被 3R 所界定。

近似距离剖面。分析中的一个重要工具是所谓的近似距离剖面。记 $\delta = \frac{\varepsilon}{100}R$；我们将 δ 视为一个距离单位，因此相差几个 δ并不重要。对于顶点 $u, v \in V(G)$，令

$$\widehat{\mathrm{dist}}(u,v) = \lceil \mathrm{dist}(u,v)/\delta \rceil .$$

$\widehat{\ }$也就是说，$\mathrm{dist}(u,v)$ 表示从u 到v 的距离，以 δ的数量计量并向上取整。注意，$\widehat{\ }$由于G 的直径不超过 $3R$，因此有 $\mathrm{dist}(u,v) = \mathcal{O}(1/\varepsilon)$。

设Q 是G中长度为 $\mathcal{O}(R)$ 的路径。设P 是Q上的一组门户点，沿Q以距离δ 等距放置；注意，$|P| = \mathcal{O}(1/\varepsilon)$。顶点$v \in V(G)$ 的近似距离剖面 是一个函数$\widehat{\ }$，它将P 中的$p \mapsto$ 映射为$\mathrm{dist}(v,p) \in \mathbb{N}$。关于距离剖面有两个重要观察。首先，由于$P$ 沿Q放置，顶点v 的近似距离剖面使我们能够以不超过 2δ的误差推导出v 到Q上任意顶点的距离。其次，根据平面图球系的 VC 维数上界，不同距离剖面的数量至多为关于 $1/\varepsilon$ 的多项式（注意，朴素上界关于$|P| = \mathcal{O}(1/\varepsilon)$是指数级的）。



(a) 证明 Q 必须与某个 $[\![p_\alpha q_\beta]\!]$相交。　　(b) 最终矛盾。

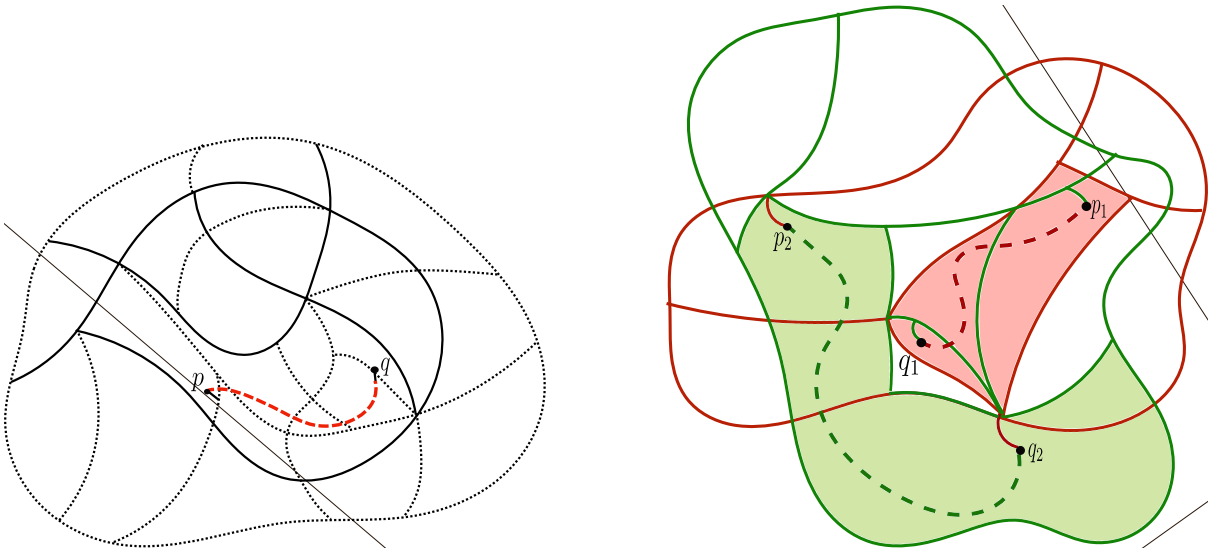
图3：分离引理证明示意图。

分离引理。设 $\mathcal{Q}$ 是G中由m条路径组成的族，每条路径的长度为 $\mathcal{O}(R)$；设I $\subseteq [\ell]$ 是满足以下条件的指标i的集合：p_i 和q_i 被V($\mathcal{Q}$)分隔，即它们不位于G $-$V($\mathcal{Q}$)的同一连通分量中，其中V ($\mathcal{Q}$)表示位于这些路径上的顶点。假设存在三个指标$i_1, i_2, i_3 \in I$，使得p^{i_1}、p^{i_2}和p^{i_3}对 $\mathcal{Q}$中的每条路径都具有相同的近似距离剖面。由于V($\mathcal{Q}$)将p^{i_1}与q^{i_1}分隔开，V ($\mathcal{Q}$)必定会与由 $[\![p^{i_1} q_{i_2}]\!]$、 $[\![q^{i_2} p_{i_3}]\!]$和 $[\![p^{i_3} q_{i_1}]\!]$ 拼接而成的游走在某处相交（见图3a）。也就是说，对某些α、$\beta \in [3]$、 $\alpha \neq \beta$，路径 $[\![p^{i_\alpha} q_{i_\beta}]\!]$必定与V($\mathcal{Q}$)相交；令u为交点处的一个顶点。我们如下导出矛盾（另见图3b）：

$$
\begin{aligned}
R < \mathrm{dist}(p_{i_\beta}, q_{i_\beta}) &\le \mathrm{dist}(p_{i_\beta}, u) + \mathrm{dist}(u, q_{i_\beta}) \\
&\le \mathrm{dist}(p_{i_\alpha}, u) + 4\delta + \mathrm{dist}(u, q_{i_\beta}) \\
&= \mathrm{dist}(p_{i_\alpha}, q_{i_\beta}) + 4\delta \le (1-\varepsilon)R + 4\delta < R \quad (\text{as } \delta = \frac{\varepsilon}{100} R)
\end{aligned}
$$

这里，第三个不等式源于假设p^{i_α} 和p^{i_β} 相对于 $\mathcal{Q}$的路径具有相同的近似距离剖面。

因此， $|I|$ 的大小至多为 $\mathcal{Q}$中路径可能的近似距离剖面数量的两倍；根据与单条路径相同的基于 VC 维数的论证，该数量关于m/ε 是多项式有界的。



(a) 局部实例　　(b) 连接的无交叉实例

图 4：(a) 中的平面图描绘了一个局部实例G，而局部性质由二元组 (p, q)示意。这里，G中属于路径 $[\![p_{j_1} q_{j_2}]\!]$的边（对应$p_{j_1}, q_{j_2} \neq p, q$）画为实线，其余边画为点线。我们可以在平面中画出一条连接 p 和q 的连接曲线（红色虚线曲线），使其不与任何实线相交，因此 (p,q) 确实具有局部性质。(b) 展示了关于二元组 (p_1, q_1) 和(p_2, q_2)的连接的无交叉实例。对于每个二元组，虚线表示的连接曲线都不与同色实线相交，以此类比 (a) 展示局部性质。此外，连接曲线彼此不能相交（同时保持局部性质），因为它们可以所在的区域互不相交，如图所示；这保证了无交叉性质。

第一阶段：归约为局部实例。分离引理引出了以下归约。对于 I $\subseteq [\ell]$ 和 i $\in [\ell] \setminus$ I，如果 p_i 和 q_i 被路径 $\{[\![p_{j_1} q_{j_2}]\!] \mid j_1, j_2 \in I, j_1 \neq j_2\}$ 分隔，我们就说 I 分隔 i。分离引理意味着 I 能分隔的指标数量以 $|I|/\varepsilon$ 的多项式为界。计数论证表明，如果 ℓ 很大，那么就存在一个大的子集 J $\subseteq [\ell]$，使得对于每个 i $\in$ J，J $\setminus$ {i} 都不分隔 i。

此后，我们只考虑 J 中的二元组。也就是说，我们假设对于每个 i $\in [\ell]$，集合 $[\ell]\setminus\{i\}$ 都不分隔 i。换言之，我们可以在平面中画一条连接 p_i 和 q_i 的连接曲线，且该曲线不与 G 中属于路径 $[\![p_{j_1}q_{j_2}]\!]$（其中 $j_1, j_2 \neq i$）的任何边相交。我们称这样的实例为局部实例（见图 4）。现在的目标是证明，在局部实例中，ℓ 以 $1/\varepsilon$ 的多项式为界。

第二阶段：归约为链接非交叉实例。 在第二阶段，我们希望梳理局部实例，使连线彼此不交叉。为此，我们再次在以下情形中运用分离引理。

一个众所周知的事实是，每个连通平面图都存在一个树分解，其中每个袋都是三条具有公共端点的最短路径的并集。这实际上是一个更一般命题的特例：对于平面图 T 的任意有根生成树 G，存在一个 G 的树分解，其中每个袋都是 T [40]中的三条向上路径的并集。（第一个命题只需将第二个命题应用于 G中的任意最短路径树即可。）我们不使用最短路径树，而是构造 T，它是 G 的一棵生成树，并且每条向上路径都可以由$\mathcal{O}(\log \ell)$条路径 $[\![p_iq_j]\!]$覆盖。换句话说，如果我们根据 G构造 T的树分解，那么只有极少数—— $\mathcal{O}(\log \ell)$ ——条连线会与分解中的同一个袋相交。通过利用所得树分解中的袋，以平衡的方式递归地分离图 G，我们可以得到大量指标 i，使得它们对应的连线被选定的袋分隔开，因此彼此不会相交。

因此，一个规模巨大的局部实例必然包含一个较大的集合 $I \subseteq [\ell]$，其中的连接曲线两两不相交。接下来，我们只关注 I：也就是说，我们假设所有连接曲线两两不相交，并将这样的实例称为链接非交叉实例 (见图4)，然后对这类实例中的ℓ进行界定。

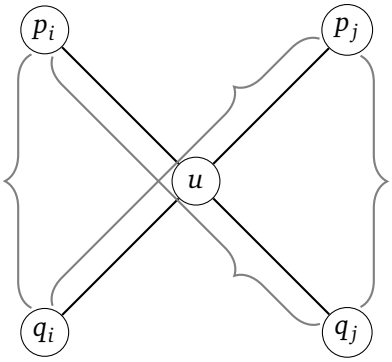


图 5：引理 2.1证明中的矛盾。

第三阶段：对链接非交叉实例进行拓扑研究。在链接非交叉实例中，我们终于拥有了足够的拓扑约束，可以针对这类图在平面上的形态进行细致的逐情况分析。除了来之不易的约束——连线两两不相交——之外，我们还会作出一些类似以下的观察（见图5）：

引理 2.1。 对于每个 $i \neq j$，路径 $[\![p_iq_j]\!]$ 与 $[\![p_jq_i]\!]$ 不相交。

证明： 反设顶点u 同时位于两条路径上。由此可得矛盾，如下所示：

$$\begin{aligned}
2(1-\varepsilon)R &\geq \mathsf{dist}(p_i,q_j)+\mathsf{dist}(p_j,q_i)\\
&= \big(\mathsf{dist}(p_i,u)+\mathsf{dist}(u,q_j)\big)+\big(\mathsf{dist}(p_j,u)+\mathsf{dist}(u,q_i)\big)\\
&= \big(\mathsf{dist}(p_i,u)+\mathsf{dist}(u,q_i)\big)+\big(\mathsf{dist}(p_j,u)+\mathsf{dist}(u,q_j)\big)\\
&\geq \mathsf{dist}(p_i,q_i)+\mathsf{dist}(p_j,q_j) > 2R.
\end{aligned}$$

□

事实证明，在链接非交叉实例中，共匹配中要包含相当多的二元组，唯一的方式就是像图 6 中那样排列。

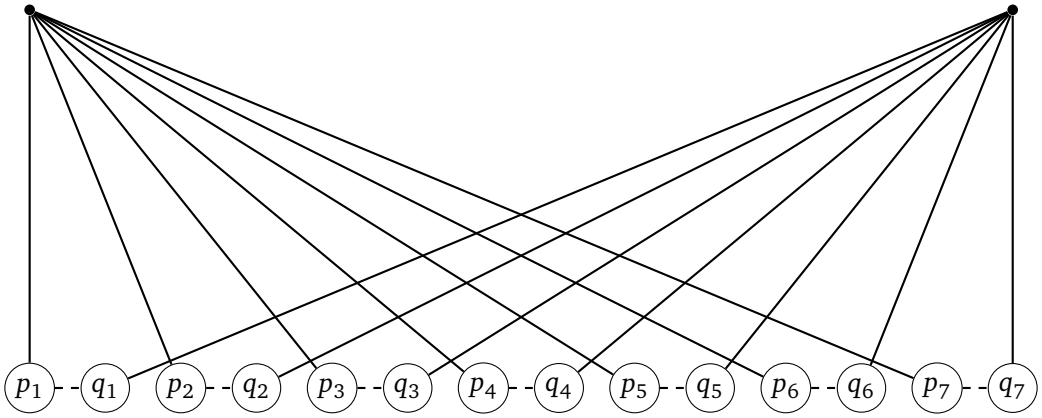


图 6：定理 1.7证明中的最终图景：大型链接非交叉实例应呈现的样子。

然而，可以证明，这样的排列最多只能容纳 $\ell = \mathcal{O}(1/\varepsilon)$。至此，定理 1.5 的证明概述结束。

关于双梯形的说明。 我们对双梯形大小的上界，即定理 1.17，遵循相同的总体思路。前两个阶段类似，只有一些细节上的差异。然而，第三阶段虽然同样可以概括为运用足够多的拓扑约束进行详细的逐案分析，但两者并不相同——具体论证和案例分析迥然不同。

关于推广至有界亏格图的说明。 对于定理 1.6 和 1.18，我们采用一种标准方法：通过切开 g 条最短路径和单条边，将欧拉亏格为 $\mathcal{O}(g)$ 的图变为平面图。值得注意的是，分离引理证明中使用的论证在此情形下也很有用：如果按照共匹配中顶点二元组（或双梯中顶点三元组）到割集的近似距离剖面，将它们划分到不同的桶中，那么在同一个桶内，所有最短路径 $[\![p_i q_j]\!]$ 都不会触及割集（否则会得到与分离引理中类似的矛盾），因而本质上会在平面图中形成一个共匹配（或双梯）。

3 预备知识

3.1 VC 维数

对于全集 U 以及由 U 的子集构成的集合系统 $\mathcal{A}$，其 *VC* 维数 是能够被 $\mathcal{A}$ 打散的子集 $X \subseteq U$ 的最大规模；若对于每个 $Y \subseteq X$，都存在 $A \in \mathcal{A}$，满足 $A \cap X = Y$，则称集合 X 被 $\mathcal{A}$ 打散。VC 维数有界的集合系统具有以下基本性质之一。

引理 3.1（Sauer-Shelah 引理）。在全集 U 上，*VC* 维数至多为 d 的集合系统 $\mathcal{A}$ 中集合的数量至多为

$$\sum_{i=0}^{d} \binom{|U|}{i} = \mathcal{O}(|U|^d).$$

设 (V,dist) 是一个度量空间。对于 $v \in V$ 和 $r > 0$，我们定义球 $B(v, r) = \{u \in V \mid \mathrm{dist}_G(v, u) \leq r\}$。V 的子集构成的集合系统 $\{B(v, r) \mid v \in V(G), r > 0\}$ 称为 (V,dist) 的球集系统。

带正边权的图通过最短路径距离，自然地在其顶点集合上诱导出一个度量空间。在这类度量空间中，如果底层图不含小子式，那么球集系统的 VC 维数就很小。

定理 3.2（[16, 10]）。设G 是一个不含K_h 子式的边加权图。那么，球集系统$\{B(v, r) \mid v \in V(G), r > 0\}$ 的 VC 维数至多为$h-1$。

对于度量空间 $(V、\mathrm{dist})$ 以及$Z \subseteq V(G)$，对于每个$v \in V$，我们将v 到 Z 的距离轮廓定义为函数 $\mathrm{prof}_Z[v]: Z \to \mathbb{R}$，其定义为$\mathrm{prof}_Z[v](z) = \mathrm{dist}(v, z)$。我们将集合与距离轮廓$\mathrm{prof}_Z[v]$相关联

$$\mathfrak{Z}_Z[v] = \{(z, x) \in Z \times \mathbb{R} \mid \mathrm{prof}_Z[v](z) \le x\}.$$

集合系统$\{\mathfrak{Z}_Z[v] \mid v \in V\}$的一个重要性质是：在排除固定子式的图中，它具有较小的 VC 维数。

定理 3.3（**定理 3** [39]）。设 G 是一个不含 K_h 子式的边加权图，且 $Z \subseteq V(G)$。那么，集合系统 $\{\mathfrak{Z}_Z[v] \mid v \in V(G)\}$ 的 VC 维数至多为 $h-1$。

设 $\mathcal{A}$ 为一个集合。我们将其 k 重集合交 定义为 $\mathcal{A}_\sqcap^k = \{A_1 \cap \ldots \cap A_k \mid A_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in [k]\}$。我们使用以下关于 k重集合交的 VC 维数界：

引理 3.4（**引理 3.2.3**。 [6]）。设 $(U, \mathcal{A})$ 是一个 VC 维数至多为 d的集合系统，则 $(U, \mathcal{A}_\sqcap^k)$ 的 VC 维数为 $O(dk \log k)$

3.2 平面图的树分解

下面的定理概括了导出著名的平面图 Lipton-Tarjan 分隔定理的主要构造。

定理 3.5（**参见** [40]）。设 G 是一个平面三角剖分（即嵌入平面中的简单连通图，其中每个面都是三角形），H 是 G 的一棵带有指定根 r 的生成树。设 T 是 G 的对偶图的一个子图，其中 $V(T)$ 是 G 的所有面的集合，$E(T)$ 是 $E(G) \setminus E(H)$中所有边的对偶边。此外，对每个 $t \in V(T)$，令 $\beta(t) \subseteq V(G)$ 由 H 中从面 t 的各顶点到根 r 的三条向上路径的顶点集组成。

那么，T 是一棵树，(T, β) 是 G 的一个树分解。特别地，对于每条边 $t_1 t_2 \in E(T)$，粘合度 $\beta(t_1) \cap \beta(t_2)$ 是 H 中从面 t_1 和 t_2 的公共边的两个端点到根 r 的两条向上路径的顶点集。

我们还需要以下标准论证。

引理 3.6。设 k，$n > 0$。设 G 是一个具有 n 个顶点的平面图，且 (T, β) 是 G 的一个树分解，其中 T 中每个顶点的度至多为3。那么，对于任意权重函数 $\chi: V(G) \to \{0,1\}$，以下情况之一成立：

- 存在一个袋 $b \in V(T)$，使得 $\chi(\beta(b)) \ge \frac{1}{4k}\chi(V(G))$，或者
- 存在一个子集 $F \subseteq E(T)$，包含 k 条边，使得 $T - F$ 的每个连通分量所对应的袋的并集，其权重至少为$\frac{1}{4k}\chi(V(G))$。

证明： 令 $W = \chi(V(G))$。现在，根据归纳法，我们假设不存在满足以下条件的袋 $b \in V(T)$：$\chi(\beta(b)) \ge W/4k$，并且我们已选取 $i-1$ 条边，使得 $T - F$的每个连通分量的权重至少为 $W/4k$。我们总能找到一个权重至少为 $W/i \ge W/k$的连通分量 C。

现在，我们按如下方式选取i^{th} 边：在C 中任意选取一条边 (u,v)，并检查它是否将C 分成两个大小均至少为$W/4k$ 的连通分量。若不是，则令H 表示与v 相连且权重较大的连通分量（不失一般性）。顶点v 的度不能为 1，否则H 就是一个权重至少为 $3W/4k$的单顶点。若v 的度为 2，则取这条潜在的割边

为 (v, w)（其中 w 是 v 的另一个邻居）。若 $\chi(V\ (C\ -H)\cup\{\beta(v)\})\geq W/4k$，则问题得解。否则，沿着通向 w 的方向继续检查下一条边。若 v 的度为 3，令 v_1,v_2 为 v 的另外两个邻居，并令 T_1, T_2 分别表示对应的子树。由于 $\chi(\beta(v))<W/4k$，因此有 $\chi(V\ (T_1)\cup V\ (T_2))\geq W/2k$。这意味着 T_1 或 T_2 中至少有一个的权重不小于 $W/4k$。假设$\chi(V\ (T_1))\geq W/4k$。若 $\chi(C\ -T_1)\geq W/4k$，则切断 (v, v_1)边。若不是，则继续朝 v_1 及其其他邻居的方向检查。注意，在整个过程中，较轻连通分量的权重严格递增。因此，必然存在一条割边，将 C 分成两个权重均至少为 $W/4k$ 的连通分量。我们重复此操作 k 次，得到所需的 k 条边组成的集合。□

3.3 路由引理

我们还需要下面这个路由引理。

引理 3.7. 设 G 是一个有 n 个顶点的图，且 $T_1,\ldots,T_k$ 是 G 的子图构成的树族，满足：

- $V(T_1)\cap V(T_i)\neq\emptyset$ 对每个 $i\in[k]$,
- $\bigcup_{i\in[k]}V(Ti)=V(G)$。

那么，存在一棵以某个顶点 r 为根的 G 的生成树 H，使得对于每个 $v\in V(G)$，从 v 到 r 的路径都可以划分为 $\mathcal{O}(\log k\cdot\log|V(G)|)$ 个部分，每个部分都是树 $T_1, T_2,\ldots, T_k$之一的子路径。

证明： 根据我们的假设，$\cup_i T_i$ 覆盖了 $V(G)$，且每个 T_i 与 T_1都有非空交集。我们首先展示一个随机化过程，它能生成一棵生成树 H，其期望值达到$\mathcal{O}(\log k)$ 界。

我们任意选择 r 作为 $V(T_1)$ 中的一个顶点，并将每棵树 T_i 的根设为 $V\ (T_1)\cap V(T_i)$中的一个任意顶点，其中 $i\in\{2,\ldots,k\}$。令 π 为集合 {2, . .., k} 的一个随机均匀排列$\pi=(\pi_2,\pi_3,\ldots,\pi_k)$。为简便起见，令 $\pi_1=1$。令 $<_\pi$为由 π在 $\{T_1,\ldots,T_k\}$ 上诱导的线性序，即 $T_i<_\pi T_j$ 当且仅当 $\pi^{-1}(i)<\pi^{-1}(j)$。

对于每个 $v\in V(G)$，令 T_v 为包含 v 的第 $<_\pi$ 小树 T_i。对于 $v\neq r$，令 e_v 为连接 v 与其在 T_v中的父节点的边。注意，这样的边总是存在，因为所有 T_i 的根都属于 $V(T_1)$，且 T_1 是最小的。我们将 H 定义为所有 $v\in V(G)-\{r\}$ 对应的边 e_v 的并集。不难看出，H 确实是 G 的一棵生成树。

最后，证明所需性质。任取 $v\in V(G)-\{r\}$，令 P_v 为 H 中从 v 到 r 的路径。（我们认为 P_v 的方向是从 v 指向 r。）令 $\mathcal{T}_v$ 为与 P_v 相交的树 T_i 的集合。按照各树与 P_v交点中最早顶点的顺序，将 $\mathcal{T}_v$排列为 $T_{i_1},\ldots,T_{i_\ell}$，若有并列则任意打破。若 T_{i_a} 在 $\{T_{i_1},\ldots,T_{i_a}\}$ 中是 $<_\pi$-最小的，则称索引 a 是重要的；若对某个 $u\in V(P_v)$，有 $T_{i_a}=T_u$，则称该索引已被使用。注意，已使用的索引必然是重要的。

考虑陈述 $A_{a,v}$：索引 a 对于顶点 v 是重要的。关键观察是

$$\Pr(A_{a,v})\leq\frac{1}{a}.$$

事实上，路径 P_v 直到与 T_{i_a} 相交为止的部分，不取决于树 T_{i_a}在顺序 π中的位置，因此 T_{i_a}相对于$\{T_{i_1},\ldots,T_{i_{a-1}}\}$ 在顺序 $<_\pi$ 中的所有 a 个位置出现的概率相同，而只有一个位置会使 a 对于 v 是重要的。

现在，令X_v 为覆盖P_v所需树T_i 数量的随机变量。注意，X_v 受v所用指标数量的限制，因为对于每个$u\in V(P_v)\setminus\{r\}$，我们都可以用$T_u$覆盖从$u$ 向上延伸的边。这个数量又受v的重要指标数量限制。因此，期望值$E_\pi[X_v]\leq\Sigma^{\ell}{}_{a=1}\Pr(A_{a,v})\leq\Sigma^{\ell}{}_{a=1}\frac{1}{a}$为调和级数；已知直到$L$ 为止的有限调和级数有上界 $\mathcal{O}(\log L)$。

现在，我们继续进行确定性构造。对于集合 $\emptyset\neq W\subseteq V(G)$，令 X_W 等于 X_v，假设我们从 W 中均匀随机地采样 v。同样，$E[X_W]=\mathcal{O}(\log k)$。根据马尔可夫

不等式，$P(X_W \geq 2E[X_W]) \leq \frac{1}{2}$，因此，对于至少一半的所有二元组 (π, v)，假设π时，X_v的值至多为 $2E[X_W]$。特别地，存在一个排列 π_0，使得 $\Pr(X_W \leq 2E[X_W] \mid \pi = \pi_0) \geq \frac{1}{2}$。因此，固定 $\pi = \pi_0$ 后，半数顶点 $v \in W$ 到 v 和 r 之间的路径将由少于 $2E[X_W] = \mathcal{O}(\log k)$ 棵树覆盖。

我们迭代地执行上述过程。首先，令 $W = V(G)$，找到 $\pi_{0,V(G)}$ 以及相应的H（根据我们的随机化过程），并针对每个能够在H 中用至多 $2E[X_W]$ 棵树覆盖v到r 路径的v，根据H 固定其父顶点。之后，我们将W限制为父节点尚未固定的顶点，并重复此步骤。

在每一步中，父节点已固定的顶点构成一棵包含r的连通子树。每一步至少固定尚未固定顶点的一半，因此总步数至多为 $\mathcal{O}(\log |V(G)|)$。由此得到的最终树中，任意v到r路径都可以分解为$\mathcal{O}(\log |V(G)|)$条子路径，每一步对应一条；每条子路径都可由 $\mathcal{O}(\log k)$棵树覆盖，从而得到所需的 $\mathcal{O}(\log k \cdot \log |V(G)|)$界。□

4 从共匹配到核心集：定理 1.4 的证明

本节旨在证明定理 1.4。我们将用到一个经典工具：针对 VC 维数有界的集合系统中击中集问题的线性规划舍入近似算法。

4.1 击中集线性规划

对于全集 U 的子集族 $\mathcal{A}$，若集合 $X \subseteq U$满足对 $\mathcal{A}$ 中的每个$A \in \mathcal{A}$，都有$X \cap A \neq \emptyset$，则称其为 $\mathcal{A}$ 的击中集。给定U和 $\mathcal{A}$，击中集问题要求找出大小尽可能小的击中集。

下面给出击中集问题的自然形式及其对偶（即集合打包问题）的线性规划松弛。

$$\begin{aligned} \min \sum_{u \in U} x_u & \\ \text{s.t.} \sum_{u \in A} x_u \geq 1 & \quad \forall_{A \in \mathcal{A}} \\ x_u \geq 0 & \quad \forall_{u \in U} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \sum_{A \in \mathcal{A}} y_A & \\ \text{s.t.} \sum_{A \in \mathcal{A} \mid u \in A} y_A \leq 1 & \quad \forall_{u \in U} \\ y_A \geq 0 & \quad \forall_{A \in \mathcal{A}} \end{aligned}$$

我们需要以下关于对 VC 维数有界的集合系统中击中集线性规划舍入的经典结果。

定理 4.1（[45, 41]）。存在一个普适常数 c，使得每个击中集实例$(U, \mathcal{A})$ 都存在一个大小至多为 $c \cdot d \cdot \tau^* \cdot \log(\tau^*)$ 的解，其中 d 是 $\mathcal{A}$ 的 *VC* 维数，τ^* 是线性规划松弛的最优值。此外，这样的解可以在多项式时间内找到。

4.2 证明

现在我们可以证明定理1.4了。固定 $\varepsilon > 0$。对于 $\varepsilon \geq 1$，寻找最远邻居的 ε-核心集是件容易的事（只需任取一个顶点），因此我们假设 $\varepsilon < 1$。设 (V, dist) 为一个度量空间，设$P \subseteq V(G)$，并设 d为 (V, dist) 的球集系统的 VC 维数。我们假设 $|P| > 1$，否则我们可以直接返回$Q = P$。设

$$\Delta := \max_{u,v \in P} \mathsf{dist}(u, v)$$

为P 在 $(V$中的直径，$\mathsf{dist})$ 并令

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4} \cdot \Delta.$$

对于每个$v \in V$，选取$z_v \in P$作为距离v最远的顶点，若有多个则任意选取。我们首先处理V中距离P非常远的顶点。选取$p_0 \in P$，并令$V_{\text{far}} = \{v \in V(G) \mid \text{dist}(v, p_0) > \varepsilon^{-1}\Delta\}$。注意，对于每个$v \in V_{\text{far}}$：

$$\text{dist}(v, z_v) - \text{dist}(v, p_0) \le \text{dist}(z_v, p_0) \le \Delta \le \varepsilon \text{dist}(v, p_0) \le \varepsilon \text{dist}(v, z_v).$$

因此，要满足V_{far}，只需将p_0添加到构造出的核心集中。

我们将$V \setminus V_{\text{far}}$划分为集合$V_i$，其中下标为非负整数$i$；顶点$v$属于$V_i$，当且仅当

$$i\delta \le \text{dist}(v, z_v) < (i+1)\delta.$$

注意，由于$\Delta/2 \le \text{dist}(v, z_v) \le \varepsilon^{-1}\Delta$，集合$V_i$仅当$\lfloor 2\varepsilon^{-1} \rfloor \le i \le \lfloor 4\varepsilon^{-2} \rfloor$时才非空。固定满足$V_i \neq \emptyset$的$i$。对于$v \in V_i$，定义

$$S_i^v = \{u \in P \mid \text{dist}(v, u) \ge (i-1)\delta\}.$$

显然，$z_v \in S^v{}_i$。我们考虑由$\mathcal{A}_i = \{S^v{}_i \mid v \in V_i\}$构成的$P$的子集集合系统。首先，我们注意到，只需找到$\mathcal{A}_i$的一个击中集即可。

命题 4.2。$\mathcal{A}_i$的任何击中集也是V_i的最远邻居的一个ε-核心集。

证明： 设X是$\mathcal{A}_i$的一个击中集。取$v \in V_i$，并取$x \in X \cap S^v{}_i$，由于X是击中集，这样的 x 存在。于是，根据$S^v{}_i$的定义，

$$\text{dist}(v, x) \ge (i-1)\delta.$$

因此，

$$\text{dist}(v, z_v) - \text{dist}(v, x) \le 2\delta.$$

另一方面，$\text{dist}(v, z_v) \ge \Delta/2$。因此，

$$\text{dist}(v, z_v) - \text{dist}(v, x) \le 2\delta \le 4 \cdot \frac{\delta}{\Delta} \cdot \text{dist}(v, z_v) \le \varepsilon \cdot \text{dist}(v, z_v).$$

因此，确实，X是V_i的最远邻居ε-核心集。 □

根据定理 4.1，要界定$\mathcal{A}_i$的击中集大小，只需界定其线性规划松弛的最优值；令$\tau^*{}_i$表示该最优值。我们通过以下简单的舍入过程，将$\tau^*{}_i$与$(V$中 dist$)$的共匹配大小上界联系起来。

引理 4.3。在(V,dist)中，存在一个大小为$\lfloor \tau^*{}_i/4 \rfloor$的$(\varepsilon^2/4)$-共匹配。

证明：考虑$\mathcal{A}_i$上 HITTING SET 的对偶线性规划的一个最优解；为使记号清晰，我们用$(\text{y}_v)_{v \in V_i}$表示对偶变量，而非$(\text{y}_{S^v\text{i}})_{v \in V_i}$。显然，$\sum_{\text{v} \in \text{V}_i} \text{y}_v = \tau^*\text{i}$。令$\mu$表示$\text{V}_i$上的一个概率分布，其中$\text{v} \in \text{V}_i$以概率$\text{y}_v/\tau^*\text{i}$被抽取。对于$\text{u}, \text{v} \in \text{V}_i$，若$\text{z}_v \in \text{S}^u\text{i}$，则称 u 威胁 v。注意，任意$\text{v} \in \text{V}_i$都威胁自身。固定$\text{v} \in \text{V}_i$，并根据$\mu$从$\text{V}_i$中抽取 u。于是，

$$\text{Prob}(v \text{ is threatened by } u) \le \sum_{u : z_v \in S_i^u} \frac{y_u}{\tau^*} \le \frac{1}{\tau_i^*}. \tag{1}$$

事实上，(1) 可直接由顶点z_v的对偶线性规划约束推出：

$$\sum_{w \in V_i \mid z_v \in S_i^w} y_w \le 1.$$

令 K := ⌊τ*i /4⌋，并令 v1，v2，。 . . , v2K 为从 Vi 中按照分布 μ独立地采样得到的顶点。于是，根据 (1)，满足以下条件的二元组 (i, j), 1 ≤ i, j ≤ 2K, i ≠ j 的期望数量至多为：vi威胁 vj

$$4K^2 \cdot \frac{1}{\tau_i^*} \le K.$$

因此，存在一种对$v_1, v_2, \ldots, v_{2K}$的选取，使得此类二元组 (i, j) 的数量至多为 K.

选取这样一种方式，并对每个二元组 $(i, j), 1 \le i, j \le 2K, i \ne j$，若$v_i$ 威胁v_j，则删除v_i。剩下一个包含K 个顶点的集合 W，其中这些顶点属于V_i，且对每个$u, v \in W$，若$u \ne v$，则u 不会威胁v。

我们声称$\{(v, z_v) \mid v \in W\}$ 是 $R = i\delta$在G中的所需 $(\varepsilon^2/4)$-共匹配；显然其大小至少为K。由于 $W \subseteq V_i$，对每个$v \in W$，我们有

$$\mathrm{dist}(v, z_v) \ge i\delta.$$

O另一方面，对每个$u, v \in W$，若$u \ne v$，由于u 不威胁v，我们有$z_v \notin S^u{}_i$ s o

$$\mathrm{dist}(u, z_v) \le (i-1)\delta.$$

当 $i \le \lfloor 4\varepsilon^{-2} \rfloor$时，我们有

$$\frac{i-1}{i} \le 1 - \frac{1}{\lfloor 4\varepsilon^{-2} \rfloor} \le 1 - \frac{1}{4\varepsilon^{-2}} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

□

根据引理 4.3，$\tau^*i \le 4L+3$，其中 L 是 (V, dist) 中 $(\varepsilon/4)$共匹配的最大规模。$\mathcal{A}_i$ 中的每个元素都是一个球的补集，因此 $\mathcal{A}_i$ 的 VC 维数至多为 d。根据定理 4.1，存在一个击中集 Xi，它属于 $\mathcal{A}_i$，其规模为 $\mathcal{O}(d\,L \log L)$，并且我们可以在多项式时间内找到这样的击中集。命题 4.2 指出，Xi 是 Vi 的最远邻居 ε核心集。因此，对于整个 V 的 ε核心集，只需取 {p0} 与所有满足 Vi 非空的 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ 集合 Xi 的并集即可。定理 1.4 的证明到此结束。

5 平面度量中的共匹配界：定理 1.5 的证明

本节旨在证明定理 1.5，该定理给出了 ε-共匹配规模的上界。我们首先反复归约 ε-共匹配，每次付出关于 ε 的多项式代价，加入关于拓扑的新约束，从而隔离出二元组 (p, q)，其中 p，q 在某种意义上彼此接近。接着，我们从剩余二元组中选取一些标志点；再经过一步归约，仅保留与这些标志点距离相同的二元组后，我们将利用它们定义一个线性序。此时，我们已确立最终的情形。这里，我们将在这些二元组之间的最短路径交点网络上识别两种对称情形。最后，在每种情形下，重新排列这些交点之间的路径段，便可根据共匹配的定义，在二元组间最短路径的最小长度与最大长度之和上得到一个组合矛盾。

固定 $\varepsilon > 0$。我们需要一些记号。二元组 $(G, \mathcal{M})$ 若满足以下条件，则称为一个实例：G 是一个平面边加权图，且 $\mathcal{M}$ 是 ε-共匹配。也就是说，我们假设 G 带有一个固定的平面嵌入。对于 G 中的每个二元组 p 和 q，$(p, q) \in \mathcal{M}$ 中的 p、q称为终端。

我们假设所有简单路径的长度两两不同。可以通过假设在 G 的边上任意选定一种线性序 $\preceq$，并在总权重相同的路径之间，通过选择边集合按字典序 $\preceq$更小的路径来打破平局，从而实现这一点。在此假设下，任意一对终端 p_1, q_2（其中任意 (p_1, q_1)，$(p_2, q_2) \in \mathcal{M}$）之间的最短路径都是唯一的。我们将这条路径记为 $[\![p_1 q_2]\!]$ 或 $[\![q_2 p_1]\!]$。此外，对于任意顶点三元组 u、p、q，从 u 到 p 的最短路径与从 u 到 q 的最短路径只能共享一个初始段：它们第一次分支后便保持不相交。

这使我们能够为 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ 定义一个实例 $\mathcal{I}^{\mathcal{N}} = (G^{\mathcal{N}}, \mathcal{N})$，其中 $G^{\mathcal{N}}$ 是 G的子图，仅由路径 $[\![p_1 q_2]\!]$组成，其中 (p_1, q_1)、$(p_2, q_2) \in \mathcal{N}$、$(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$。对于一对 $\sigma \in \mathcal{M}$，我们使用$G^{\neg\sigma}$ 和 $\mathcal{I}^{\neg\sigma}$ 作为$G^{\mathcal{M}\setminus\{\sigma\}}$ 和 $\mathcal{I}^{\mathcal{M}\setminus\{\sigma\}}$ 的简写。

为了方便起见，我们希望路径 $[\![p_1 q_2]\!]$ 上除端点外不含其他终端。为此，我们可以进行如下修改：对于每个 $(p,q) \in \mathcal{M}$，新建两个顶点 p'和 q'，每个顶点的度均为 1，并分别通过权重无穷小的边 pp' 和 qq' 连接；然后将 (p,q) 替换为 (p',q')，并放入 $\mathcal{M}$ 中。对于任意 $\varepsilon' < \varepsilon$，所得实例都是一个 (ε')-共匹配（严格地说，对于任意 $\varepsilon' < \varepsilon$，我们可以为新建的边选取足够小的权重，从而得到一个 (ε')-共匹配）。

考虑如下收缩操作：任选一个度为 2 的顶点u，它通过边与顶点x_1, x_2 相连，这两条边的权重分别为 w_1 和 w_2；将该顶点替换为一条直接连接x_1 和x_2、权重为 $w_1 + w_2$的边。此操作会保留任意一对剩余顶点之间的距离。特别地，如果我们的实例是一个 ε-共匹配，且所有终端的度均为 1，那么以这种方式收缩所有度为 2 的顶点后，所得实例仍是一个 ε-共匹配。此修改将使我们能够将图的规模限制为关于 $\mathcal{M}$ 的多项式，这将在后续章节中用到。

这些观察使我们能够引入以下定义：实例 $\mathcal{I} = (G, \mathcal{M})$ 若满足以下条件，则称其为干净：

- 各终端两两不同，且度均为 1；
- G 不包含度为 2 的顶点；
- $G = G^{\mathcal{M}}$，也就是说，G的每条边都位于某条路径 $[\![p_1 q_2]\!]$ 上，其中 (p_1, q_1)、$(p_2$ 和 $q_2) \in \mathcal{M}$彼此不同。

只需证明 $\mathcal{M}$ 定理 1.5 的规模界时，仅考虑干净实例 s.

注意，端点两两不同的两条路径 $[\![p_a q_b]\!]$ 和 $[\![p_c q_d]\!]$ 可能出现以下情形：(a) 完全不相交；(b) 共享一条子路径，但不交叉（即 $[\![p_c q_d]\!]$ 在同一侧两次离开 $[\![p_a q_b]\!]$）；在这种情况下，我们称它们相切；(c) 共享一条子路径，且交叉（即 $[\![p_c q_d]\!]$ 在另一侧离开 $[\![p_a q_b]\!]$）；在这种情况下，我们称它们横截相交。更正式地说，若 $[\![p_a q_b]\!]$ 与$[\![p_c q_d]\!]$相交，令 σ为任意一条包含 $[\![p_a q_b]\!]$且不与 $[\![p_c q_d]\!] \setminus [\![p_a q_b]\!]$相交的闭合环路。当且仅当 p_c 和 q_d 中恰有一个位于 σ的内部时，我们称 $[\![p_a q_b]\!]$ 与 $[\![p_c q_d]\!]$ 横截相交。注意，由于 p_c 和 q_d 的度为 1，它们不能位于 σ 上；并且总存在合适的 σ，且由于 p_a 和 q_b 的度为 1，此定义不依赖于 σ 的选择。

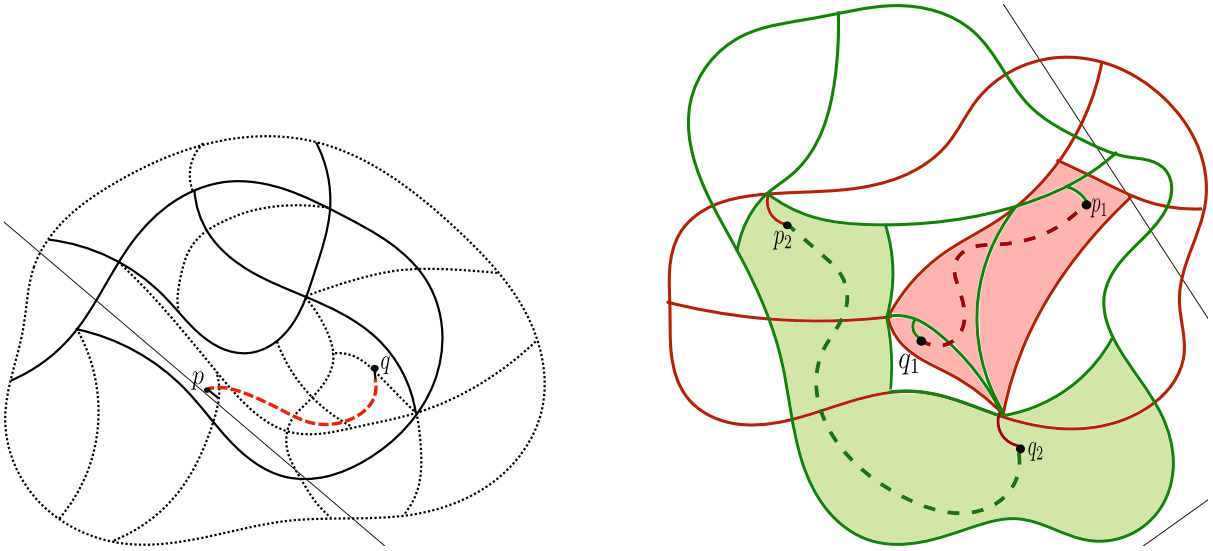
设 $\mathcal{I} = (G, \mathcal{M})$是一个干净实例。注意，对于一对 $\sigma = (p, q) \in \mathcal{M}$，终端 p和q 不属于 $G^{\neg\sigma}$，且它们在 G 中的绘图位于 $G^{\neg\sigma}$的某些面内。若一个干净实例 $\mathcal{I}$ 是局部的，则称其为局部实例；如果对每个 $\sigma \in \mathcal{M}$，σ 的终端都位于 $G^{\neg\sigma}$的同一个面内。定理 1.5 证明的第一步是进行归约，从而只需考虑局部实例。该归约将在第 5.2 节介绍。

引理 5.1。给定一个实数 $\varepsilon > 0$，令 $L_{\text{local}}(\varepsilon)$ 为局部实例中 ε-共匹配的最大规模。那么，任意实例中 ε-共匹配的最大规模为 $\mathcal{O}(L_{\text{local}}(\varepsilon)^9 \varepsilon^{-8})$。

设 $\mathcal{I} = (\mathrm{G}, \mathcal{M})$ 是一个局部实例。若曲线 γ 的起点和终点均为终端，除端点外仅与 G 的绘图在边的内部相交，并且对于每条边 $\mathrm{e} \in \mathrm{E}(\mathrm{G})$，$\gamma$，与 e 的绘图至多相交于一个点，且交点总是横截的，则称该曲线相对于 G 处于良好位置。对于一对 $\sigma \in \mathcal{M}$，连接曲线是指一条相对于 G 处于良好位置的曲线 γ_σ，其两个端点分别位于 σ 的两个终端，且不与 G 的任何边相交$^{\neg\sigma}$（即，γ_σ 完全位于 $\mathrm{G}^{\neg\sigma}$ 中包含 σ 的终端的面内）。

一个带连接曲线的实例是一对 $(\mathcal{I}, \Gamma)$ 其中 $\mathcal{I} = (G, \mathcal{M})$ 是一个局部实例，而 Γ是一个函数，为每个 $\Gamma(\sigma)$ 指定一条连接曲线 $\sigma \in \mathcal{M}$。带连接曲线的实例是无交叉的，如果这些连接曲线$\{\Gamma(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{M})$ 两两不相交（作为平面的子集）。

定理1.5证明的第二步是将一个局部实例归约为一个链接非交叉实例。该归约在第5.3节中给出。



(a) 局部实例　　(b) 链接非交叉实例

图 7：在 (a) 中，相对于点对 $\sigma = \{p,q\}$ 描绘了局部实例。图 $G^{-\sigma}$ 以红色叠加显示在图 G 上。链接非交叉实例如 (b) 所示。请注意，连线γ_1 和 γ_2 彼此不相交，并且分别不与图 $G^{-\sigma_1}$ 和图 $G^{-\sigma_2}$ 相交。

引理 5.2。对于一个实数 $\varepsilon > 0$，设 $L_{\succsim}(\varepsilon)$ 为一个链接无交叉实例中共匹配的最大规模。那么，局部实例中共匹配的最大规模为 $\mathcal{O}(L_{\succsim}(\varepsilon)^2 \log^8 L_{\succsim}(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{-8})$。

最后一步是通过仔细分析此类实例中路径的拓扑，给出关于连接曲线ε^{-1} 的多项式上界，限制链接非交叉实例的最大规模。相关内容见第 5.4节。

引理 5.3。对于一个实数 $\varepsilon > 0$，链接非交叉实例中 ε-共匹配的最大规模至多为 ε^{-14}。

结合上述引理，我们可以证明下文重述的定理 1.5 。

定理 1.5（平面度量中的共匹配）。存在一个多项式 L^{planar}，使得对于每个$\varepsilon \in (0,1)$ 以及每个平面度量 $(V,\ \text{距离})$，ε-共匹配指数不超过 $L_{\text{planar}}(1/\varepsilon)$。

证明：任取一个实例 $\mathcal{I} = (\mathrm{G}, \mathcal{M})$。如上所述，我们可以假设 $\mathcal{I}$ 是干净的。令 L 表示其最大 ε-共匹配的大小。由引理 5.1，$\mathrm{L} = \mathcal{O}(\mathrm{L}_{\text{local}}(\varepsilon)^9 \varepsilon^{-8})$。由引理 5.2，$\mathrm{L} = \mathcal{O}(\mathrm{L}_{\succsim}(\varepsilon)^{18} \log^{72} \mathrm{L}_{\succsim}(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{-80})$。最后，由引理 5.3，$\mathrm{L} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-332} \log^{72}(\varepsilon^{-1}))$，证明完毕。□

5.1 距离剖面与分离工具箱

在以下所有小节中，我们都隐式地将 $\mathcal{I} = (G, \mathcal{M})$ 定义为一个干净的 ε-共匹配实例，且至少有三对终端。令 $L = |\mathcal{M}|$，并将 $\mathcal{M} = \{(p_1,q_1), \ldots (p_L,q_L)\}$编号。我们将记作

$$R := \min_{(p,q)\in\mathcal{M}} \mathrm{dist}(p,q)$$

和集合

$$\delta := \frac{\varepsilon}{100} R.$$

直观地说，δ 将作为一个“距离单位”，而几个 δs 量级的差异无关紧要。特别是，对于任意不同的 $(p_i、\ q_i)$，$(p_j、\ q_j) \in \mathcal{M}$，我们有

$$\mathrm{dist}(p_i, q_j) \le (1-\varepsilon)R = R - 100\delta.$$

$\widehat{\text{dist}}(u, v)$ 对于两个顶点 $u、v \in V(G)$，我们用 $\text{dist}(u、v)$ 表示满足以下条件的唯一整数 i：$i \cdot \delta \le \text{dist}_G(u、v) < (i+1) \cdot \delta$，也就是说，$\widehat{\text{dist}}(u、v) = \lfloor \text{dist}_G(u、v_\delta) \rfloor$。

命题 5.4。G 的直径至多为 $3R$。

证明：任取两个顶点 $v_1, v_2 \in V(G)$。由于我们的实例是干净的，它们分别包含于某些路径 $[\![p_{i_1} q_{j_1}]\!]$ 和 $[\![p_{i_2}, q_{j_2}]\!]$ 中。由于 $\text{dist}(p_{i_1}, q_{j_1}) + \text{dist}(p_{i_2}, q_{j_2}) < 2R$，因此 $\text{dist}(v_1, p_{i_1}) + \text{dist}(v_2, p_{i_2}) < R$ 或 $\text{dist}(v_1, q_{i_1}) + \text{dist}(v_2, q_{i_2}) < R$。无妨假设前者成立。

任取某个 $i_3 \notin \{i_1, i_2\}$ 下的任意一对 $(p_{i_3}, q_{i_3}) \in \mathcal{M}$。存在一条形如 $v_1 \to p_{i_1} \to q_{i_3} \to p_{i_2} \to v_2$ 的路径，沿着相应路径在端点之间移动 $\mathcal{M}$。该路径的总长度至多为 $3R$，从而完成引理的证明。□

作为直接推论，我们得到，对于每个 $u、v \in V(G)$，都有 $\widehat{\text{dist}}(u、v) \le 3R \cdot \delta^{-1} = 300\varepsilon^{-1}$。

给定集合 $Z \subseteq V(G)$，顶点 $v \in V(G)$ 的取整距离剖面 $\widehat{\text{prof}}_Z[v]$ 是函数 $Z \to \mathbb{Z}$ 定义为 $\widehat{\text{prof}}_Z[v](z) = \widehat{\text{dist}}(v, z)$。定理 3.3 立即推出以下结论。

引理 5.5. 设 $Z \subseteq V(G)$。对于 $v \in V(G)$，令

$$\widehat{\mathcal{Z}}_Z[v] = \{(z, i) \in Z \times \{0, 1, \ldots, \lfloor 300\varepsilon^{-1} \rfloor\} \mid \widehat{\text{prof}}_Z[v](z) \le i\}.$$

那么，集合系统 $\{\widehat{\mathcal{Z}}_Z[v] \mid v \in V(G)\}$ 的 *VC* 维数至多为 4。特别地，根据 *Sauer–Shelah* 引理，其大小有界于 $\mathcal{O}(|Z|^4 \varepsilon^{-4})$。

我们需要以下观察结果。

引理 5.6. 设 $Z \subseteq V(G)$，且 $(p_i, q_i), (p_j, q_j) \in \mathcal{M}$ 是两个不同的二元组，使得 p_i 和 p_j 到 Z 的取整距离剖面相同。那么，$[\![p_i q_j]\!]$ 中不包含与 Z 的距离为 δ 的顶点。

证明： 反设结论不成立：设 u 是 $[\![p_i q_j]\!]$ 上的一个顶点，且存在 $z \in Z$，使得 $\text{dist}(z,u) \le \delta$.

由于 $\widehat{\text{prof}}_Z[p_i] = \widehat{\text{prof}}_Z[p_j]$，因此有 $|\text{dist}(p_i, z) - \text{dist}(p_j, z)| < \delta$。因此，

$$|\text{dist}(p_i, u) - \text{dist}(p_j, u)| \le |\text{dist}(p_i, z) - \text{dist}(p_j, z)| + 2\text{dist}(u, z) \le 3\delta.$$

由于 u 位于 $[\![p_i q_j]\!]$ 上，而该路径是从 p_i 到 q_j 的最短路径，我们可推得 $\text{dist}(p_j, q_j) \le \text{dist}(p_j, u) + \text{dist}(u, q_j) \le \text{dist}(p_i, u) + \text{dist}(u, q_j) + 3\delta = \text{dist}(p_i, q_j) + 3\delta$，这与 $\text{dist}(p_j, q_j) \ge R$ 和 $\text{dist}(p_i, q_j) \le R - 100\delta$ 矛盾。□

我们称二元组 (p_i, q_i) 被集合 $X \subseteq V(G)$ 分离，如果 p 和 q 不在 $G - X$ 的同一个连通分量中。

引理 5.7. 设 $X, Z \subseteq V(G)$ 满足 X 中每个顶点到 Z 中某个顶点的距离不超过 δ，并设 $(p_i, q_i), (p_j, q_j), (p_k, q_k) \in \mathcal{M}$ 为三对两两不同的二元组。如果 p_i, p_j, p_k 这三个顶点到 Z 的取整距离剖面都相同，那么这三对二元组都不会被 X 分离。

证明：反设，不妨设 (p_i, q_i) 被 X 分离。考虑 G 中由 $[\![p_i q_j]\!]$, $[\![q_j p_k]\!]$ 和 $[\![p_k q_i]\!]$ 拼接而成的一条游走。由于 (p_i, q_i) 被 X 分离，这些路径中必有一条与 X 相交，也就是说，它包含一个到 Z 的距离不超过 δ 的顶点。这与引理 5.6 矛盾。□

断言 5.8。设 $X \subseteq V(G)$，且 X 包含于至多 α 条路径的并集中，每条路径的长度至多为 βR，其中 α，$\beta > 0$。那么，被 X 分隔的二元组数量为 $\mathcal{O}(\alpha^4 \varepsilon^{-4}(1 + \beta\varepsilon^{-1})^4)$。

证明：由于 X 包含于至多 α 条路径的并集中，且每条路径的长度至多为 βR，因此存在一个大小为 $\mathcal{O}(\alpha(1 + \beta\varepsilon^{-1}))$ 的集合 $Z \subseteq V(G)$，使得 X 中的每个顶点到 Z 中某个顶点的距离均不超过 δ。根据引理 5.5，相对于 Z 存在 $\mathcal{O}(|Z|^4\varepsilon^{-4}) = \mathcal{O}(\alpha^4\varepsilon^{-4}(1 + \beta\varepsilon^{-1})^4)$ 个不同的取整距离剖面。根据点 p（和 q_i）$\in \mathcal{M}$ 相对于 Z 的取整距离剖面，对二元组 i 进行分组。引理 5.7 表明，对于包含至少三个二元组的组，这些二元组不会被 X 分离。因此，被 X 分离的二元组数量为 $\mathcal{O}(\alpha^4\varepsilon^{-4}(1 + \beta\varepsilon^{-1})^4)$。□

5.2 化简为局部实例

在本小节中，我们给出引理 5.1 的证明。考虑一个函数 Λ，该函数将来自 $\mathcal{M}$ 的点的 $(I \text{ of } (L_{\text{local}}(\varepsilon)+1)$ 个二元组的任意子集映射到 $L_{\text{local}}(\varepsilon)$ 个点的二元组的一个子集。映射定义如下：给定一个大小为 $L_{\text{local}}(\varepsilon)+1$ 的子集 I，令 $\Lambda(I)=I-\{(p_a、q_a)\{\text{style id='36'>}\}$，其中 $(p_a、q_a)\in\mathcal{M}$ 是任意固定的一个二元组，满足 p_a 和 q_a 位于 G 的不同面上$_{q_a)}\}$。由于 $L_{\text{local}}(\varepsilon)$ 是局部实例的最大规模，因此这样的二元组总是存在。

根据抽屉原理，存在一个集合 $S\in\binom{\mathcal{M}}{L_{\text{local}}(\varepsilon)}$，使得

$$|\Lambda^{-1}(S)|\geq\binom{L}{L_{\text{local}}(\varepsilon)+1}/\binom{L}{L_{\text{local}}(\varepsilon)}=\frac{L-L_{\text{local}}(\varepsilon)}{L_{\text{local}}(\varepsilon)+1}>\frac{L}{L_{\text{local}}(\varepsilon)+1}-1$$

将这个量记为 $C=_{L\,L_{\text{local}}(\varepsilon)+1}-1$。~~至少存在~~ C 个指标 $\{a_1,a_2,\ldots,a_C\}$，使得 $\{p^{a_i},q^{a_i}\}\notin S$，且 G^S 将 p^{a_i} 和 q^{a_i} 分隔开。

由于 G^S 是至多由 $L_{\text{local}}(\varepsilon)^2$ 条路径构成的并集，且每条路径的长度至多为R，我们可以应用断言 5.8 得到 $C=\mathcal{O}(L_{\text{local}}(\varepsilon)^8\varepsilon^{-8})$。这又意味着 $L=\mathcal{O}(L_{\text{local}}(\varepsilon)^9\varepsilon^{-8})$，由此完成引理的证明。

5.3 化简为链接非交叉实例

假设 $\mathcal{I}$ 是局部的。我们希望 G 是一个三角剖分，因此反复在所有非三角形面内部任意添加有限权重为无穷大的新边，将它们细分。我们将此类边称为虚拟边。此操作保留了 G中的所有距离和最短路径，但请注意，经过此操作后，$\mathcal{I}$ 不再是干净的。

任取一对 $\sigma=(p_i,q_i)$，并考察对偶图 G^*。令 F_p、F_q 分别表示 G 中任意与 p_i 和 q_i 相邻的面（因此也是 G^* 中的顶点）。由于我们的实例是局部的，F_p 与 F_q 之间存在一条 G^* 中的路径，且该路径不会与 $G^{\neg\sigma}$ 的任何边交叉。令 γ_σ 为这条路径的绘制，并在两端分别于 F_p、F_q 内延伸，直至分别到达 p_i 和 q_i。对每一对 σ 执行此操作，即可得到一个带连接曲线的实例。此外，在该实例中，每条连接曲线 γ_σ 至多经过 G 的每个面一次。

在化简为相连的非交叉实例的第一步中，我们将采用一种经典的树分解方法。

5.3.1 树分解与分隔集

我们希望采用定理 *3.5* 中所述的 G 的树分解。每个粘合度都会导出一个分隔集。其思路是利用若干这样的分隔集划分平面，得到互不相交的区域，并论证每个区域中都存在一条完全包含于其中的连接曲线。将实例限制为每个区域仅保留一条这样的连接曲线，就能得到一个无交叉实例。

假设我们有 G 的一棵生成树 H，其中只包含 G 的非虚拟边（因此属于某个 $[\![p_iq_j]\!]$）。考虑根据定理 3.5 为 H 得到的树分解 (T,β)。设 S 是由该分解中边 $e\in E(T)$ 的粘合度所诱导的分隔集。如上所述，S 由 H 的两条向上路径构成，其端点通过 G 中一条不属于 H 的闭合边相连。为方便起见，我们用 S 指代 G 的一个子图，该子图包含分隔集的顶点，且其边仅限于这两条向上路径（不包括闭合边）。

用 ξ_S 表示由两条向上路径的绘图以及闭合边构成的平面闭环。考虑移除 T 中的 e 后得到的两个连通分量。包含在 ξ_S 内部的所有顶点都属于其中一个连通分量内的袋，而包含在 ξ_S 外部的所有顶点都属于另一个连通分量内的袋。

如果连接曲线 γ_σ 与 ξ_S相交，我们就称二元组 $\sigma\in\mathcal{M}$ 相对于 S 是坏的。我们的目标是说明，可以选择 H，使得相对于任何此类分隔集 S，坏二元组所占比例都非常小。

我们考虑两种坏对。若二元组 σ 的端点被 S分隔，我们就称它被分隔。如果对于某条边 $e \in S$，有 $e \notin G^{\neg\sigma}$，我们就称 σ 污染 S。这两种情况确实涵盖了所有情形，以下命题将对此予以证明。

Claim 5.9. 关于 S 的每个坏对 σ，要么被 S 分隔，要么污染 S。

证明： 假设 σ 是坏对，但没有被 S 分隔。这意味着 σ 的两个端点位于平面上环 ξ_S 的同一侧，但连接曲线 γ_σ 仍与 ξ_S 相交。根据我们的构造，它必须至少与 ξ_S 中两条不同的边相交，其中至多一条可以是未包含在 S 中的闭合边。因此，对于某个 $e \in E(S)$，γ_σ 与 e 相交，故 $e \notin G^{\neg\sigma}$。□

5.3.2 易于覆盖的生成树

为了界定两类坏对的数量，我们给出一棵特定生成树 H 的构造，它具有这样的性质：其每条子路径都可以用少量路径 $[\![p_i q_j]\!]$ 覆盖。更正式地，对于每个 $i \in [L]$, ，我们将树 T_i 定义为路径 $\cup_{j:j\neq i}[\![p_i q_j]\!]$ 的并集。鉴于我们保证任意两条最短路径在首次分支后仍然不相交，这样的并集确实是一棵树。在展示构造之前，我们需要以下引理。

Claim 5.10. G 的顶点数为 $\mathcal{O}(L^4)$。

证明： 设 G' 为三角剖分之前的 G。显然，我们有 $|V(G)| = |V(G')|$。由于对应于 G' 的实例是干净的，根据干净的定义，我们有 G' 恰好是所有树 T_i 的并集。度为 1 的顶点（终端）有 $2L$ 个，其余顶点的度至少为 3（同样，这是因为我们的实例是干净的）。每个度至少为 3 的顶点，要么在某棵树 T_i 中的度至少为 3，要么位于两条不同的终端间最短路径的交点处，且这两条路径没有共同终端。

第一种情况下，众所周知，在任意一棵树中，度至少为 3 的顶点数不超过其叶子数。由于我们有 L 棵树，且每棵树至多有 L 个叶子，因此这类顶点总数为 L^2。

在第二种情况下，至多有L^2 条可能相交的不同路径。根据唯一路径假设，任意两条路径的交集都是一条子路径，因此这样的路径对至多只能在G'中产生 2 个度为 3 的顶点，即该公共子路径的两个端点。由此可知，这样的顶点总数至多为 $2L^4$。□

假设 $L \geq 3$，这些树 T_i 满足引理 3.7的条件：令 H 为根据该引理得到的生成树。根据断言 5.10，$\log |V(G)| = \mathcal{O}(\log L)$，因此，$H$中的任意路径实际上都可以分解为 $\mathcal{O}(\log^2 L)$ 条路径，每条路径都包含在一棵树 T_i中。

我们将说明，对于由我们的树分解诱导出的任意分隔集，都可以轻易地界定坏二元组的数量。注意，由H 中的粘合度诱导出的任意分隔集S，现在都可以用G中的$\mathcal{O}(\log^2 L)$ 条最短路径覆盖，其中每条路径都是某个T_i的子路径。这是因为此类分隔集的所有边在H中总是构成两条从顶点到根的路径。

断言 5.11。 其中被 S 分隔的二元组至多有 $\mathcal{O}(\log^8 L \cdot \varepsilon^{-8})$ 个。

证明： 任意 T_i 的每条子路径长度至多为 2R。令 α表示能够覆盖 T_i的整个 S 的子路径集合的最小可能大小（$\alpha = \mathcal{O}(\log^2 L)$），根据我们之前的观察）。现在将断言 5.8 应用于上述 α 和 $\beta = 2$，即可得出该断言。 □

引理 5.12. 在 $\mathcal{M}$ 中，最多有 $\mathcal{O}(\log^2 L)$ 个二元组会污染 S。

证明： 令 $\mathcal{T}$ 表示 $(T_i)^L{}_{i=1}$ 中覆盖整个 S 的最小子集。树 T_i 中的每条路径，至多由端点间路径（例如 $[\![p_i q_j]\!]$）的两个子路径组成，其中某个 j $\neq i$；因此，存在一个由 $\mathcal{O}(\log^2 L)$ 条端点间路径构成的集合 $\mathcal{P}$，覆盖整个 S。

对于任意污染对 σ，都存在一条边 $e_\sigma \in E(S)$，使得 $e_\sigma \notin G^{\neg\sigma}$。边 e_σ 需要由一条端点位于 σ 的路径覆盖 $\mathcal{P}$。由于端点位于 $\mathcal{P}$ 的二元组 σ 至多有 $2|\mathcal{P}| = \mathcal{O}(\log^2 L)$ 个，结论得证。□

剩余的二元组相对于 S 是良的，也就是说，它们既不被 S 分隔，也不污染 S。

5.3.3 无交叉连接曲线的良对

现在我们可以证明本小节的主要引理了。证明的核心思路如下：由于相对于任意分隔集，坏对的数量都很少，因此，如果 $\mathcal{M}$ 中的二元组足够多，我们就能选取一个平衡分隔集 S，将 T 分隔开，使得 ξ_S 内部存在一对良对。此外，根据我们的定义，这一对的连接曲线必定完全包含在 ξ_S 内。

在下面的证明中，我们希望找到足够多的良对，使它们的连接曲线彼此不相交。并且，直接由上述观察可知，如果我们能找到位于某些分隔集不同面上的良对，那么所需条件就能满足。

证明（引理 5.2的证明）： 考虑由引理 H 生成的生成树 (T, β) 并考虑定理 3.5 为 H给出的树分解。

定义权重函数 χ：$V(G) \to \{0, 1\}$，将所有二元组中终端的权重设为 1，并将其他所有顶点的权重设为 0。所有顶点的总权重因此为 $2L$。由于只有叶顶点被赋予正权重，每个袋的权重至多为 3。我们将固定一个参数 α，其数量级约为 $L^{1/2}$，该参数的值稍后推导。

我们使用引理 3.6，按照 χ 以平衡方式划分 T。也就是说，我们找到一个集合 $F \subseteq E(T)$，其中包含 α 条边，使得 $T - F$的每个连通分量中所有袋的并集，其权重至少为 $\chi(V(\ ))_{4\alpha} = GL2\alpha$。如~~果 L 足够大，~~则另一种情况——某个袋的权重至少为 $\frac{1}{4\alpha}\chi(V(G))$——不可能成立。

对于$f \in F$，令S_f 为由f 的粘合度所诱导的分隔集，定义见本小节开头。令$X = \bigcup_{f \in F} V(S_f)$。固定$C$为$T - F$的任意一个连通分量。考察集合$V_C$，它由$C$ 中各袋的并集去掉X中的顶点构成。我们证明V_C 同时包含至少一对好对中的两个终端。

根据断言5.11 和5.12，对于任何S_f，至多有 $\alpha \cdot \mathcal{O}(\log^8 L \cdot \varepsilon^{-8})$ 个二元组不是好对，因此属于此类二元组的终端顶点至多是其两倍。此外，每个集合$V(S_f)$都是由非虚拟边构成的两条路径的并集，因此至多包含2个原始度为1的顶点，也就至多包含2个终端。因此，V_C 中既是坏的或属于X的终端顶点总数至多为 $\alpha \cdot c \cdot \log^8 L \cdot \varepsilon^{-8}$，其中$c$ 是某个普适常数。V_C中的终端顶点总数为 $\chi(V_C) \geq L2\alpha$，因此若我们令 α 使得

$$4 \cdot \alpha^2 \cdot c \leq L \log^{-8} L \cdot \varepsilon^8,$$

比以往任何时候都 y $V_C - X$ 将至少包含某个二元组的一个终端，例如 σ_C；相对于所有 S，它都是良好的 $_f$.

现在，考虑任意两个连通分量 C_1, C_2 及其对应的二元组 $\sigma_{C_1}, \sigma_{C_2}$。存在一条边 $f' \in F$ 在 T 中将它们分隔开，因此它们位于环 $\xi_{f'}$的不同侧。特别地，连接曲线 $\sigma_{C_1}, \sigma_{C_2}$ 被 $\xi_{f'}$分隔开，因此彼此不相交。

这样，我们选出了 $\alpha = \Theta(L^{1/2} \log^{-4} L \cdot \varepsilon^4)$ 个二元组，每个连通分量中各有一个，且它们的连接曲线两两不相交。将实例限制为这些二元组后，得到一个无交叉实例，因此 $\alpha \leq L_{\asymp}(\varepsilon)$，进而有 $L = \mathcal{O}(L_{\asymp}(\varepsilon)^2 \log^8 L_{\asymp}(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{-8})$，证明完毕。□

5.4 有界连接曲线无交叉实例

设 $\mathcal{I}=(G,\mathcal{M})$ 是一个连接的无交叉实例。我们将经常使用以下解交叉论证。

Clai引理 5.13. 设 $\sigma_a,\sigma_b,\sigma_c,\sigma_d\in\mathcal{M}$ 不一定互不相同。若 $[\![p_aq_b]\!]\cap[\![p_cq_d]\!]\neq\emptyset$，则

$$\mathrm{dist}(p_a,q_b)+\mathrm{dist}(p_c,q_d)\geq\mathrm{dist}(p_a,q_d)+\mathrm{dist}(p_c,q_b).$$

证明：设 u 是 $[\![p_aq_b]\!]$ 与 $[\![p_cq_d]\!]$ 的交点中的一个顶点。将 $[\![p_aq_b]\!]$ 和 $[\![p_cq_d]\!]$ 都在 u 处分割，并注意到 $[\![p_aq_b]\!]$ 中从 p_a 到 u 的子路径与 $[\![p_cq_d]\!]$ 中从 u 到 q_d 的子路径构成一条从 p_a 到 q_d 的游走；剩余部分，即 $[\![p_cq_d]\!]$ 中从 p_c 到 u 的子路径与 $[\![p_aq_b]\!]$ 中从 u 到 q_b 的子路径，构成一条从 p_c 到 q_b 的游走。由此即得所述结论。□

第一个直接推论如下：

命题 5.14. $[\![p_iq_j]\!]\cap[\![p_jq_i]\!]=\emptyset,\ \forall\sigma_i,\ \sigma_j\in\mathcal{M}$。

证明： 假设，为了导出矛盾，$[\![p_iq_j]\!]$ 与 $[\![p_jq_i]\!]$相交。那么，根据命题 5.13，

$$2(1-\varepsilon)R\geq\mathrm{dist}(p_i,q_j)+\mathrm{dist}(p_j,q_i)\geq\mathrm{dist}(p_i,q_i)+\mathrm{dist}(p_j,q_j)\geq 2R.$$

这就产生了矛盾。 □

5.4.1 等距结构

现在我们对 $\mathcal{M}$ 进行筛选，以得到以下子结构。

定义 5.15. $\mathcal{I}$ 中的等距结构是一个三元组 $(\sigma'=(p',\ q'),\ \sigma''=(p'',\ q''),\ \mathcal{N})$ 其中$\sigma',\ \sigma''\in\mathcal{M}$、$\sigma'\neq\sigma''$、$\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}\setminus\{\sigma',\ \sigma''\}$，且满足以下条件：

1. 对每个 $\sigma=(p,\ q)\in\mathcal{N}$，

$$\widehat{\mathrm{dist}}(p,q')=\widehat{\mathrm{dist}}(p'',q')\qquad\text{and}\qquad\widehat{\mathrm{dist}}(q,p')=\widehat{\mathrm{dist}}(q'',p').$$

2. 对每个 $\sigma_1=(p_1,q_1),\ \sigma_2=(p_2,q_2)\in\mathcal{N}$，

$$\widehat{\mathrm{dist}}(p_1,q'')=\widehat{\mathrm{dist}}(p_2,q'')\qquad\text{and}\qquad\widehat{\mathrm{dist}}(q_1,p'')=\widehat{\mathrm{dist}}(q_2,p'').$$

3. 对任意不同的 $\sigma_1=(p_1,q_1),\ \sigma_2=(p_2,q_2)\in\mathcal{N}$，路径 $[\![p_1q_2]\!]$ 既不与 $[\![p'q'']\!]$相交，也不与 $[\![p''q']\!]$相交。

等距结构 $(\sigma',\sigma'',\mathcal{N})$ 的大小为 $|\mathcal{N}|$。

引理5.16。 假设 $\mathcal{I}$ 不包含大小大于 L 的等距结构。那么，$|\mathcal{M}|=\mathcal{O}(L\varepsilon^{-12})$。

证明： 任取 $\sigma'=(p'、q')\in\mathcal{M}$。用以下元组为每个 $\sigma=(p、q)\in\mathcal{M}\setminus\{\sigma'\}$ 标记：($\overset{\frown}{\mathrm{dist}}(p、q')$, $\overset{\frown}{\mathrm{dist}}(q、p')$)。共有 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ 种可能的标记。令 $\mathcal{M}_1\subseteq\mathcal{M}\setminus\{\sigma'\}$ 为具有相同标记的二元组的一个子集。

任取 $\sigma''=(p''、q'')\in\mathcal{M}_1$，并使用新元组 ($\overset{\frown}{\mathrm{dist}}(p、q'')$, $\overset{\frown}{\mathrm{dist}}(q、p'')$)重新标记每个二元组 $\sigma=(p、q)\in\mathcal{M}_1\setminus\{\sigma''\}$。同样，共有 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ 种可能的标记，并令 $\mathcal{M}_2\subseteq\mathcal{M}_1\setminus\{\sigma''\}$ 为具有相同标记的二元组的一个子集。

令 Z 为一个包含 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ 顶点的集合，使得 $[\![p'q'']\!]\cup[\![p''q']\!]$ 中的每个顶点到 Z 中某个顶点的距离均不超过 δ。根据引理 5.5，Z 的取整距离剖面有 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-8})$ 种可能。根据引理 5.6，若 $\sigma_1=(p_1、q_1)$、$\sigma_2=(p_2、q_2)\in\mathcal{M}_2$ 满足 p_1 和 p_2 到 Z 的取整距离剖面相同，则 $[\![p_1q_2]\!]$ 既不与 $[\![p'q'']\!]$ 相交，也不与 $[\![p''q']\!]$相交。因此，若 $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}_2$ 是一个二元组集合(p, q)，其中 p 到 Z 的取整距离剖面相同，则 $(\sigma',\sigma'',\mathcal{N})$ 是一个等距结构。引理得证。 □

固定等距结构 $(\sigma'=(p'、q')、\sigma''=(p''、q'')、\mathcal{N})$ 于 $\mathcal{I}$ 中。我们的目标是将 $L=|\mathcal{N}|$ 界定为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$。

5.4.2 禁交

现在，我们对等距结构中的一些路径的不相交性作出若干观察$(\sigma', \sigma'', \mathcal{N})$。注意，$[\![p'q'']\!] \cap [\![q'p'']\!] = \emptyset$根据断言 5.14。

命题 5.17。对于任意 $\sigma = (p, q) \in \mathcal{N}$，都有 $[\![q''p]\!] \cap [\![q'p'']\!] = \emptyset$且 $[\![p''q]\!] \cap [\![p'q'']\!] = \emptyset$。

证明： 反设 $[\![q''p]\!]$与 $[\![q'p'']\!]$相交。根据命题 5.13，

$$(1-\varepsilon)R + \mathrm{dist}(q', p'') \geq \mathrm{dist}(q'', p) + \mathrm{dist}(q', p'') \geq \mathrm{dist}(q'', p'') + \mathrm{dist}(q', p) \geq R + \mathrm{dist}(q', p).$$

然而，根据等距结构的定义，$\overset{\frown}{\text{距离}}(q', p'') = \overset{\frown}{\text{距离}}(q', p)$，这意味着$|\text{距离}(q', p'') - \text{距离}(q', p)| < \delta$，矛盾。

$[\![p''q]\!] \cap [\![p'q'']\!] = \emptyset$的证明是对称的。 □

命题 5.17 引出了以下定义。设 $\hat{\gamma}'$ 是 σ' 的连接曲线中的一个最小部分，它连接 $[\![p'q'']\!]$ 与 $[\![q'p'']\!]$；设 γ' 是一条从 q'' 到 p'' 的曲线，由 $[\![p'q'']\!]$中从 q'' 到 $\hat{\gamma}'$ 的端点的子路径、曲线 $\hat{\gamma}'$，以及 $[\![q'p'']\!]$ 中从 $\hat{\gamma}'$ 的端点到 p'' 的子路径组成。对于 $(p, q) \in \mathcal{N}$，我们知道 $[\![q''p]\!]$ 与 $[\![q''p']\!]$ 仅在其前缀上相交，不与 $\hat{\gamma}'$ 相交（因为 σ' 的连接曲线不与 $G^{\neg\sigma'}$ 相交，而 $G^{\neg\sigma'}$ 包含 $[\![q''p]\!]$），且不与 $[\![q'p'']\!]$ 相交（根据命题 5.17），因此我们得出结论：$[\![q''p]\!]$ 与 γ' 的唯一交点是$[\![q''p]\!]$和 $[\![q''p']\!]$的公共前缀。类似地，$[\![p''q]\!]$ 与 γ' 的唯一交点是 $[\![p''q]\!]$和 $[\![p''q']\!]$的公共前缀。此外，等距结构的定义保证，对于每一对不同的 $\sigma_1 = (p_1, q_1)$、$\sigma_2 = (p_2, q_2) \in \mathcal{N}$，路径 $[\![p_1q_2]\!]$ 与 γ' 不相交。

直观地说，在接下来的讨论中，应将 γ' 视为平面上的一条“裂缝”，它连接q''和p''。请注意，我们将 γ' 定义为这样，而没有采用可能更自然的连接方式，即由 $[\![q''p']\!]$（σ'的连接曲线）以及 $[\![q'p'']\!]$组成的连接曲线，因为后一种方式可能会出现自交，而 γ'则不会。我们将讨论相对于 γ'而言不同对象之间的相对位置。

在继续之前，我们再作一项观察。

命题 5.18。对于任意不同的 $\sigma_1 = (p_1, q_1)$，$\sigma_2 = (p_2, q_2) \in \mathcal{N}$，路径 $[\![p_1q_2]\!]$ 既不与$[\![q''p_2]\!]$ 相交，也不与 $[\![p''q_1]\!]$相交。

证明： 反证法，假设 $[\![p_1q_2]\!]$ 和 $[\![q''p_2]\!]$ 相交。根据断言 5.13，

$$(1-\varepsilon)R + \mathrm{dist}(q'', p_2) \geq \mathrm{dist}(p_1, q_2) + \mathrm{dist}(q'', p_2) \geq \mathrm{dist}(q'', p_1) + \mathrm{dist}(p_2, q_2) \geq \mathrm{dist}(q'', p_1) + R.$$

然而，根据等距结构的定义，$\overset{\frown}{\mathrm{dist}}(q'', p_1) = \overset{\frown}{\mathrm{dist}}(q'', p_2)$，这意味着$|\mathrm{dist}(q'', p_1) - \mathrm{dist}(q'', p_2)| < \delta$，产生矛盾。

$[\![p''q_1]\!]$ 的证明是对称的。 □

5.4.3 p'' 和q''周围的顺序

到目前为止，我们已经具备了足够的工具来推理 $\mathcal{N}$ 上二元组的顺序。考虑以 q'' 为根、叶子为 $\{p \mid (p, q) \in \mathcal{N}\} \cup \{p'\}$ 的最短路径树。由于每个终端都只有一条有限权重的关联边（即不是虚拟边），叶子 $\{p \mid (p,q) \in \mathcal{N}\} \cup \{p'\}$ 存在定义良好的顺时针循环次序。我们将这个循环顺序转换为线性序，规定 p' 为第一个元素，然后从该顺序中删除 p'，从而得到 $\{p \mid (p,q) \in \mathcal{N}\}$ 的顺时针线性顺序；我们将 $\mathcal{N}$ 的诱导次序记为 $\pi_{q''}$。我们以类似方式定义顺序 $\pi_{q''}$。以下断言统一了这两种顺序：

命题 5.19。$\pi_{p''} = \pi_{q''}$。

证明： 反设命题不成立，即 $\pi_{p''} \neq \pi_{q''}$。设 $\sigma_1 = (p_1, q_1)$、$\sigma_2 = (p_2, q_2) \in \mathcal{N}$，使得 σ_1 在 $\pi_{p''}$ 中位于 σ_2 之前，而 σ_1 在 $\pi_{q''}$ 中位于 σ_2 之后。

我们考虑一条由以下路径组成的闭曲线：

$$[\![q'' p_1]\!], [\![p_1 q_2]\!], [\![q_2 p'']\!],$$

以及曲线 γ'。由于 $\mathcal{J}$ 是一个链接非交叉实例，σ' 的连接曲线不与路径 $[\![q''p_1]\!]$、$[\![p_1q_2]\!]$、$[\![q_2p'']\!]$ 相交。等距结构的性质保证 $[\![p_1q_2]\!]$ 不与 $[\![p'q'']\!] \cup [\![p''q']\!]$ 相交。由此可知，路径 $[\![q''p_1]\!]$、$[\![p_1q_2]\!]$、$[\![q_2p'']\!]$ 与曲线 γ' 构成一条没有自交的闭曲线，我们将其称为 γ。

注意，路径 $[\![q''p_2]\!]$ 不与 $[\![p_1q_2]\!]$ 相交（命题 5.18），也不与 $[\![q_2p'']\!]$ 相交（命题 5.14），不与 $[\![p''q']\!]$ 相交（命题 5.17），也不与 σ' 的连接曲线相交。此外，它可能与 $[\![q''p_1]\!]$ 和 $[\![q''p']\!]$ 共享一段从 q'' 开始的前缀，但随后会分开，使得以 q'' 为根的最短路径树中的顺时针顺序为 p_2, p_1, p'。

对称地，路径 $[\![p''q_1]\!]$ 不与 $[\![p_1q_2]\!]$ 相交（命题 5.18），也不与 $[\![p_1q'']\!]$ 相交（命题 5.14），也不与 $[\![q''p']\!]$ 相交（命题 5.17），也不与 σ' 的连接曲线相交。此外，它可能与 $[\![p''q']\!]$ 和 $[\![p''q_2]\!]$ 共享一段以 p'' 为起点的前缀，但随后会离开，使得以 p'' 为根的最短路径树中的顺时针顺序为 q', q_1, q_2。

这 意味着 q_1 和 p_2 位于这条无自交闭曲线的不同侧 γ.

现在考虑路径 $[\![q_1 p_2]\!]$。它不与 $[\![p_1q_2]\!]$ 相交（命题 5.14），也不与 $[\![p''q_2]\!]$ 相交，也不与 $[\![q''p_1]\!]$ 相交（命题 5.18），也不与 $[\![p'q'']\!]$ 或 $[\![q'p'']\!]$ 相交（等距结构），也不与 σ' 的连接曲线相交（链接非交叉实例 $\mathcal{J}$）。因此，它不可能与 γ 相交。这就产生了矛盾。□

命题 5.19 使我们能够枚举 $\mathcal{N}$，按照 σ_1、σ_2、……、σ_L 进行 $\pi_{p''} = \pi_{q''}$。为简洁起见，令 $\sigma_i = (p_i, q_i)$ 表示 $1 \leq i \leq L$。

5.4.4 盒子、A 型和 B 型对

令 $1 \leq i \leq L$。令 $\hat{\gamma}_i$ 为 σ_i 的连接曲线中的一个最小部分，它连接 $[\![p_iq'']\!]$ 与 $[\![q_ip'']\!]$。令 γ_i 为一条曲线，它由 $[\![q''p_i]\!]$ 中从 q'' 到 $\hat{\gamma}_i$ 端点的子路径、曲线 $\hat{\gamma}_i$，以及 $[\![p''q_i]\!]$ 中从 $\hat{\gamma}_i$ 端点到 p'' 的子路径拼接而成。最后，令 $\gamma^\circ i$ 为 γ' 和 γ_i 的拼接。根据命题 5.17、命题 5.14，以及我们的实例是一个链接非交叉实例这一假设，我们可以推知 $\gamma^\circ i$ 是一条没有自交的闭曲线（只有 $[\![q''p']\!]$ 与 $[\![q''p_i]\!]$ 的部分可能共享一个前缀，并且 $[\![p''q']\!]$ 与 $[\![p''q_i]\!]$ 可能共享一个前缀）。我们称 $\gamma^\circ i$ 为 i 的盒子。

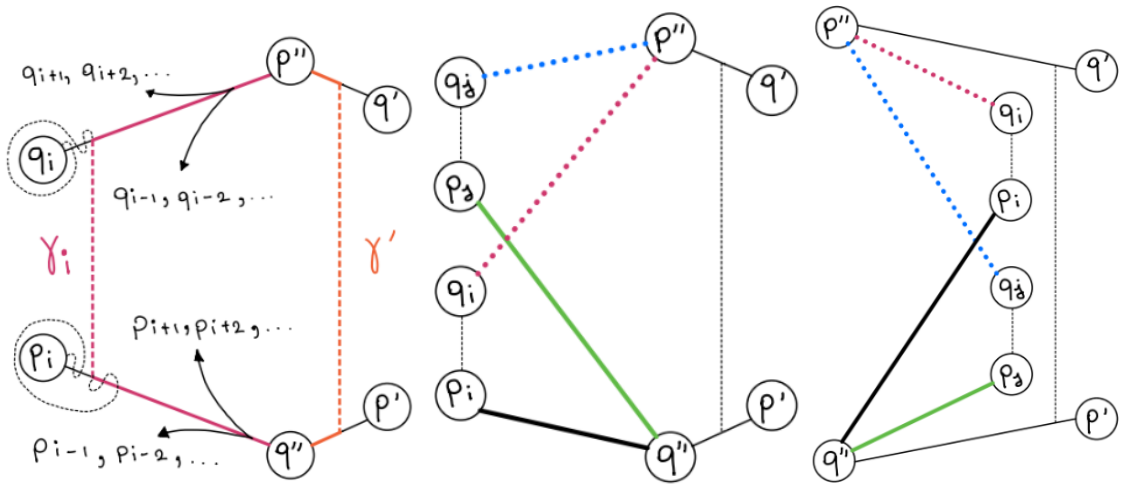
由于 $\gamma^\circ{}_i$ 是一条无自交的闭曲线，它将平面分成两个区域。不失一般性，固定从 q'' 观察时，紧接在 $[\![q''p']\!]$ 的第一条边之后沿顺时针方向的面作为该嵌入的外面；这就定义了 $\gamma^\circ{}_i$ 的内部 和外部 。（这样做只是为了让“内部”和“外部”这两个名称显得自然；也可以称为“与所述面同侧的一侧”和“与所述面异侧的一侧”。）

注意，对于每个 $j \neq i$，路径 $[\![q''p_j]\!]$ 必须在 $\hat{\gamma}_i$ 的端点之前离开 $[\![q''p_i]\!]$，因为我们的实例是链接非交叉的。注意，对于 $j > i$，路径 $[\![q''p_j]\!]$ 离开 $[\![q''p_i]\!]$，朝向 $\gamma^\circ i$ 的内部；对于 $j < i$，则朝向其外部。类似地，对于 $j < i$，路径 $[\![p''q_j]\!]$ 离开 $[\![p''q_i]\!]$，朝向 $\gamma^\circ i$ 的内部；对于 $j > i$，则朝向其外部。

我们注意到，σ_j 的连接曲线无法与盒 $\gamma^\circ i$ 相交，因为它既不与 σ' 和 σ_i 的连线相交（因为我们的实例是链接非交叉的），也不与 $[\![p'q'']\!]$、$[\![q''p_i]\!]$、$[\![q_ip'']\!]$ 以及 $[\![p''q']\!]$ 相交，因为这些路径都包含在 $G^{\neg\sigma_j}$ 内。这得出结论：对于 $i < j$，二元组 σ_i, σ_j 有两种画法，我们称之为 A 型和 B 型；参见图 8。

1. 如果 σ_j 的连接曲线位于盒 $\gamma^\circ{}_i$ 的外部，则关系 $i < j$ 属于 A 型，记作 $i <_A j$。 2. 如果 σ_j 的连接曲线位于盒 $\gamma^\circ{}_i$ 的内部，则关系 $i < j$ 属于 B 型，记作 $i <_B j$。

我们作出如下观察：



(a) σ_i的盒　　(b) A 型关系　　(c) B 型关系

图 8：虚线表示连线。(a) γ_i 是粉色右开梯形，γ' 是橙色左开梯形，γ° i 是二者的拼接。γ_i 围绕 p_i、q_i 画成曲线，以说明为何取盒的最小交叉连通分量，而不是整个连接曲线。从 p″ 到较后的 q 的最短路径会离开 γ° i 到外部，而到较早的 q 的最短路径则会离开到内部。同样，从 q″ 出发到较后的 p、较早的 p 的最短路径，分别离开 γ° i 到内部、外部。(b) σ_i、σ_j 是两个二元组，且 i $<_A$ j。注意，$[\![q''p_j]\!]$（绿色）与 $[\![p''q_i]\!]$（粉色虚线）横截相交，而 $[\![p''q_j]\!]$（蓝色虚线）不与 $[\![q''p_i]\!]$（黑色）相交。(c) 这里则是 i $<_B$ j。对称地，$[\![p''q_j]\!]$（蓝色）与 $[\![q''p_i]\!]$（黑色）横截相交，而 $[\![q''p_j]\!]$（绿色）不与 $[\![p''q_i]\!]$（粉色）相交。

命题 5.20. 设 $1 \le i < j \le L$。若 $i <_A j$，则 $[\![q''p_j]\!]$ 与 $[\![p''q_i]\!]$ 横截相交，而 $[\![p''q_j]\!]$ 与 $[\![q''p_i]\!]$ 不横截相交（即二者相切或不相交）。对称地，若 $i <_B j$，则 $[\![p''q_j]\!]$ 与 $[\![q''p_i]\!]$ 横截相交，而 $[\![q''p_j]\!]$ 与 $[\![p''q_i]\!]$ 不横截相交。

证明：假设 i $<_A$ j，即 σ_j 的连接曲线位于 γ° i 的外部。路径 $[\![q''p_j]\!]$ 离开 $[\![q''p_i]\!]$，进入 γ° i 的内部；它不与 $[\![q''p']\!]$ 横截相交，不与 σ' 的连接曲线或 σ_i 的连接曲线相交，也不与 $[\![p''q']\!]$ 相交（命题 5.17）。因此，要到达 γ° i 外部的 p_j，它必须与 $[\![p''q_i]\!]$ 横截相交。类似地，$[\![p''q_j]\!]$ 离开 $[\![p''q_i]\!]$，到达 γ° i 的外部；它不与 $[\![p''q']\!]$ 横截相交，也不与 σ'、σ_i 或 $[\![q''p']\!]$ 的连接曲线相交（命题 5.17）。因此，要到达 γ° i 外部的 q_j，路径 $[\![p''q_j]\!]$ 不能与 $[\![q''p_i]\!]$ 横截相交。

$i <_B j$ 的证明是对称的。 □

5.4.5 A 型链与 B 型链

现在我们证明，A 型和 B 型无法很好地混合。

命题 5.21。若 $1 \le i < j < k \le L$，则：

1. $i <_A j <_A k \implies i <_A k$,
2. $i <_B j <_B k \implies i <_B k$.

证明： 先来看第一个点。反设 $i <_A j <_A k$ 成立，但 **不** $i <_A k$ 成立。路径 $[\![q''p_k]\!]$ 离开 $[\![q''p_j]\!]$，进入 $\gamma^\circ{}_j$ 的内部，并离开 $[\![q''p_i]\!]$，进入 $\gamma^\circ{}_i$ 的内部。根据命题 5.20 ：

- 路径 $[\![p''q_j]\!]$ 不包含 $\gamma_{\circ i}$ 内部的任何点（因为 $i <_A j$），
- 路径 $[\![q''p_k]\!]$ 不包含位于 $\gamma_{\circ i}$ 之外的任何点（因为 $i <_B k$），

- 路径 $[\![q''p_k]\!]$ 需要与 $[\![p''q_j]\!]$ 横截地相交（因为 $j <_A k$）。

这是一个矛盾。

第二个点具有对称性，但为了完整起见，我们仍将其概述一下。反设 $i <_B j <_B k$，但不 $i <_B k$。路径 $[\![p''q_k]\!]$ 离开 $[\![p''q_j]\!]$，到达 $\gamma^\circ{}_j$ 的外部，并离开 $[\![p''q_i]\!]$，到达 $\gamma^\circ{}_i$ 的外部。根据断言5.20：

- 路径 $[\![q''p_j]\!]$ 不包含任何位于 $\gamma_{\circ i}$ 外部的点（因为 $i <_B j$），
- 路径 $[\![p''q_k]\!]$ 不包含任何位于 $\gamma_{\circ i}$ 内部的点（因为 $i <_A k$），
- 路径 $[\![p''q_k]\!]$ 需要与 $[\![q''p_j]\!]$ 横截相交（因为 $j <_B k$）。

这再次构成了一个矛盾。 □

令 $\mathcal{S} = \{(i,i) \mid 1 \le i \le L\} \cup \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le L \wedge i <_A j\}$。此处任意选择 A 型（选 B 型也同样适用）。命题 5.21 推出如下结论。

命题 5.22。 $\mathcal{S}$ 是集合 $\{1,2,\ldots,L\}$ 上的偏序。

证明： 显然，$\le_A$ 是一个齐次关系。接下来只需验证三个公理：自反性、反对称性和传递性。

- **自反性：** 这是显然的，因为我们明确地将 $\{(i,i) \mid 1 \le i \le L\}$ 加入了 $\mathcal{S}$。
- **反对称性：** 这是显然的，因为 $(i,j) \in \mathcal{S}$ 蕴含 $i \le j$。
- **传递性：** 该公理等价于断言 5.21。（在此情形下，具体而言是 1。，而对于类似的 B 型论证则是 2。

□

本小节论证的其余部分依赖于迪尔沃斯定理，这是偏序集理论中的一项基本结果，现陈述如下。若集合 $I \subseteq \{1,\ldots,L\}$ 满足以下条件之一，则称其为类型齐次：对于每个 $i,j \in I$，若 $i < j$，则有 $i <_A j$；或者对于每个 $i,j \in I$，若 $i < j$，则有 $i <_B j$。

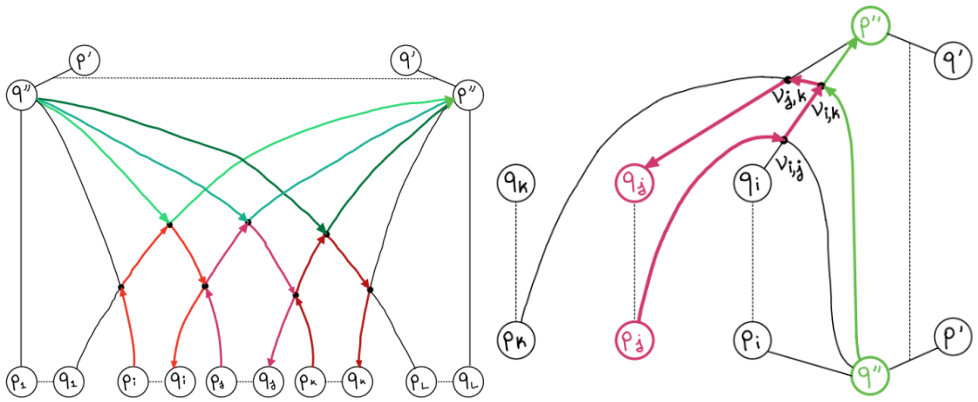
定理 5.23（迪尔沃斯定理）。 在每个有限偏序集中，极大反链的大小等于最小链覆盖的大小。

断言 5.24。 若 $|\mathcal{N}| = L \ge 1 + (K-1)^2$ 对某个整数 K 成立，则存在一个大小为 K 的集合 $I \subseteq \{1,\ldots,L\}$，该集合是类型齐次的。

证明： 考虑偏序集 $(\{1,\ldots,L\}, \mathcal{S})$。如果其中包含一条长度至少为 K 的链，那么从这条链中任取 K 个元素，就可构成集合 I，使得对于任意 $i,j \in I$，若 $i < j$，则有 $i <_A j$。否则，任何最小链覆盖都至少需要 $\lceil L/(K-1) \rceil \ge K$ 条链。根据迪尔沃斯定理，存在一个大小至少为 K 的反链。于是，从该反链中任取 K 个元素，就可构成集合 I，使得对于任意 $i,j \in I$，若 $i < j$，则有 $i <_B j$。□

5.4.6 最终矛盾

现在该揭示最终矛盾，从而完成引理5.3的证明了。下面的断言给出了类型齐次集大小的上界。主要思路如下：断言5.20 意味着路径 $[\![q''p_i]\!]$ 与 $[\![p''q_i]\!]$ 的交点如图9 所示（对于 A 型；B 型的情况对称）。我们展示如何切割 $2|I|$ 条长度至多为 $(1-\varepsilon)R$的路径，并将它们排列成 $2|I|-4$ 条连接同一对终端的路径；因此它们的长度至少为R。这就意味着 $|I| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$，正如所需。



(a) 路径的交点 $[\![q''p_i]\!]$ 和 $[\![p''q_i]\!]$　　(b) 断言的关键构造5.25

图 9：$i <_A j <_A k$ 是 I 中三个连续指标。(a) 路径 $[\![q''p_i]\!]$、$[\![p''q_i]\!]$ 构成一种网状结构，其大部分可以由长路径（长度至少为 R）覆盖，此处以绿色和红色表示。箭头的含义将在下文说明：(b) 长路径 P_j（粉色）连接 p_j 和 q_j，长路径 Q_j（绿色）连接 p'' 和 q''，它们按照箭头方向在断言 5.25 中构造。显然，从图中可以看出，连续指标对应的交点 $v_{i,j}$、$v_{i,k}$和 $v_{j,k}$ 可以相同，而不会破坏 P_j 或 Q_j。

断言 5.25. 设 $I \subseteq \{1,\dots,L\}$ 是一个类型齐次集。那么，$|I| = O(\varepsilon^{-1})$。

证明：我们考虑 A 型的情况，也就是说，对于每个$i,j \in I$，若$i < j$，则$i <_A j$。B 型的情况是对称的（交换终端p 和终端q的角色即可）。

根据命题 5.20，对于任意 i、$j \in I$，其中 $i < j$，路径 $[\![q''p_j]\!]$ 和 $[\![p''q_i]\!]$ 横截相交。设 $v_{i,j}$ 为这个交点中的任意一个顶点。

任取 i、j、k ∈I，满足 i ＜j ＜k。回顾一下，根据命题 5.20，$[\![q''p_j]\!]$和 $[\![q''p_k]\!]$都与 $[\![p''q_i]\!]$ 横截相交，并且 $[\![q''p_k]\!]$ 与 $[\![p''q_j]\!]$ 横截相交。

由于以 q'' 为根的最短路径树的叶子按顺时针顺序排列为 p_i、p_j、p_k（然后是曲线 γ'），在路径 $[\![p''q_i]\!]$ 上，与 $[\![q''p_j]\!]$ 的交点比与 $[\![q''p_k]\!]$ 的交点更靠近 q_i（这两个交点可能是同一个顶点）。因此，在 $[\![p''q_i]\!]$ 上，对于 j ＞i、j ∈I，顶点 $v_{i,j}$ 按指标 j 递增的顺序排列；若沿路径从 p_i 走向 q''，则会依次经过这些顶点（对于连续指标 j ∈I，顶点 $v_{i,j}$ 可能相同）。

类似地，由于以 p'' 为根的最短路径树的叶子按顺时针顺序排列为 q_i、q_j、q_k（然后是曲线 γ'），在路径 $[\![q''p_k]\!]$ 上，与 $[\![p''q_j]\!]$ 的交点比与 $[\![p''q_i]\!]$ 的交点更靠近 p_k（这两个交点可能是同一个顶点）。因此，在$[\![q''p_k]\!]$ 上，对于 i ＜k、i ∈I，顶点 $v_{i,k}$ 按指标 i 递增的顺序排列；若沿路径从 q'' 走向 p_k，则会依次经过这些顶点（对于连续指标 i ∈I，顶点 $v_{i,k}$ 可能相同）。

现在我们进行重排。设 i ＜j ＜k 是 I 中三个连续指标。我们按如下方式构造一条连接 p_j 和 q_j 的路径 P_j：从 p_j 出发，沿 $[\![p_jq'']\!]$ 前进至 $v_{i,j}$，然后沿 $[\![q_ip'']\!]$朝 p'' 的方向前进至 $v_{i,k}$，再沿 $[\![q''p_k]\!]$ 朝 p_k 的方向前进至 $v_{j,k}$，最后沿 $[\![p''q_j]\!]$前进至 q_j。我们按如下方式构造一条连接 p'' 和 q'' 的路径 Q j：从 q'' 出发，沿 $[\![q''p_k]\!]$ 前进至 $v_{i,k}$，然后沿 $[\![p''q_i]\!]$ 前进至 p''。共有 $|I|-2$ 条路径 P_j 和 $|I|-2$ 条路径 Q j，且每条路径 P_j 或 Q_j 的长度至少为 R。

在重排中，我们只使用了对于$i \in I$ 的路径 $[\![p''q_i]\!]$ 和 $[\![q''p_i]\!]$ 上的边，并且没有重复使用同一条边。这些路径的长度都不超过 $(1-\varepsilon)R$。因此，

$$2|I| \cdot (1-\varepsilon)R \geq (2|I|-4) \cdot R.$$

这意味着 $|I| \leq 2\varepsilon^{-1}$，如所需。 □

这就完成了引理 5.3的证明。

6 k-中心核心集

本节将基于目前为止发展出的思路，给出 k-CENTER 的一个核心集。我们首先证明 (k,ε)-共匹配到 k-中心 ε-核心集的归约，方法是仿照第 1.4 定理的证明，该证明见第 4 节。不过，(k,ε)-共匹配仍然不是一种结构足够清晰、可以直接分析的对象。为此，我们采用类 Ramsey 论证，从一个较大的 (k,ε)-共匹配中提取共匹配或双梯。由于我们已经分析过共匹配的大小，因此在第 7 节中，我们将给出双梯大小的上界。

现在我们回顾k-中心 ε-核心集的概念，这里采用一种稍微方便些的表述。该定义等价于定义 1.9，因为 $(1-\varepsilon)^{-1}\approx 1+\varepsilon$，对于较小的 $\varepsilon>0$。

定义 6.1（k-中心 ε-核心集）。度量空间 (V,dist) 中的 k-中心 ε-核心集是 V 的一个子集 C，使得对于任意至多包含 k 个候选中心的集合 X，均有

$$\max_{v\in V}\mathrm{dist}(v,X)\le(1+\varepsilon)\max_{v\in C}\mathrm{dist}(v,X)$$

6.1 k-共匹配到k-中心 ε-核心集

本节将证明下面重述的定理 1.14 。

定理 1.14。设 (V,dist) 为一个度量空间，$P\subseteq V$ 是一个点集，且 $\varepsilon\in(0,1)$为一个参数。令 $L(k,\varepsilon)$ 为 (V,dist)中最大 (k,ε)-共匹配的长度。令 d 为 $\mathcal{B}_V$的 VC 维数。则存在一个 P 的 k-中心 ε-核心集，其大小为 $O(dk\log k\varepsilon^{-2}\cdot L(k,\varepsilon^2/4)\log L(k,\varepsilon^2/4))$。

我们首先仿照定理 1.4的证明，将核心集的大小与经过适当调整的共匹配概念联系起来。

定义 6.2（(k,ε)-共匹配）。对于一个实数 $\varepsilon>0$，度量空间 (V,dist)中的一个 (k,ε)-共匹配是一个集合 $\mathcal{M}\subseteq V\times V^k$，且存在一个实数 $R>0$ 使得：

1. 对于每个 $(p,X)\in\mathcal{M}$，都有 $\mathrm{dist}(p,X)>R$；*2.* 对于任意不同的 $(p_1,X_1),(p_2,X_2)\in\mathcal{M}$，都有 $\mathrm{dist}(p_1,X_2)\le(1-\varepsilon)R$，且 $\mathrm{dist}(p_2,X_1)\le(1-\varepsilon)R$。

证明（定理 1.14的证明）：该证明与定理 1.4的证明非常相似。由于我们现在研究的是 k-中心的核心集，一些单独的顶点会变成至多包含 个顶点的集合；将它们视为由 k 个顶点组成的有序元组，也就是 V^k中的元素，会更方便。

固定 $0<\varepsilon<1$ 以及正整数 k、d。设 $(V$、$\mathrm{dist})$ 是一个度量空间，且 $(V$、$\mathrm{dist})$的球集系统的 VC 维数至多为 d。令 $P\subseteq V$。不失一般性，假设 $|P|>k+1$；否则，我们可以直接取整个P 作为核心集。

对于V的每个顶点元组，选取$z_\alpha\in P$ 中的一个顶点，使其到 α的距离最大；若有并列，则任意选择。

我们首先处理证明定理 1.4 中集合 V_{far} 的对应情形，即由 k 个顶点构成的糟糕的 k 中心。按如下方式构造元组 $\alpha^0=(v_1^0,v_2^0,\ldots,v^0{}_{k+1})$。任取 $v_1^0\in P$。对于 $i=2$、3、…、$k+1$，令 $v^0{}_i=z_{(v_1^0,\ldots,v^0{}_{i-1})}$。令 $\Delta=\mathrm{dist}(\alpha^0,z_{\alpha^0})$。注意，$\Delta>0$as $|P|>k+1$。

根据 α^0 的构造，对于每个 $1\le a<b\le k+1$，$\mathrm{dist}(v^0{}_a,v^0{}_b)\ge\Delta$。因此，半径小于 $\Delta/2$ 的每个球至多包含 α^0 的一个顶点，所以对于每个 $\alpha\in V^k$，我们都有 $\mathrm{dist}(\alpha,z_\alpha)\ge\Delta/2$。另一方面，对于每个 $v\in P$，都存在 $i\in[k+1]$，使得 $\mathrm{dist}(v,v^0{}_i)\le\Delta$，因此对于每个 $\alpha\in V^k$，我们有

$$\max_{v\in P}\mathrm{dist}(v,\alpha)\le\Delta+\max_{i\in[k+1]}\mathrm{dist}(v_i^0,\alpha).$$

Let

$$\mathcal{V} = \{\alpha \in V^k \mid \mathrm{dist}(\alpha, z_\alpha) \le \varepsilon^{-1}\Delta\}.$$

我们推知，对于每个 $\alpha \in V^k \setminus \mathcal{V}$,

$$\max_{i\in[k+1]} \mathrm{dist}(v_i^0, \alpha) \ge \max_{v\in P} \mathrm{dist}(v, \alpha) - \Delta \ge (1-\varepsilon) \max_{v\in P} \mathrm{dist}(v, \alpha).$$

因此，$\{v^0{}_i \mid i \in [k+1]\}$ 是一个针对不在 $\mathcal{V}$ 中的元组、大小为 $k+1$ 的k-中心 ε-核心集。

在证明的其余部分，我们聚焦于 $\mathcal{V}$ 的元组。令

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4} \cdot \Delta.$$

我们将 $\mathcal{V}$ 划分为集合 $\mathcal{V}_i$，其中 i 为非负整数；元组 α 属于 $\mathcal{V}_i$，当且仅当

$$i\delta \le \mathrm{dist}(\alpha, z_\alpha) < (i+1)\delta.$$

注意，由于对于 $\alpha \in \mathcal{V}$，$\Delta/2 \le \mathrm{dist}(\alpha, z_\alpha) \le \varepsilon^{-1}\Delta$，集合 $\mathcal{V}_i$ 仅在 $\lfloor 2\varepsilon^{-1} \rfloor \le i \le \lfloor 4\varepsilon^{-2} \rfloor$时非空。固定一个满足 $\mathcal{V}_i \neq \emptyset$ 的 i。对于 $\alpha \in \mathcal{V}_i$，定义

$$S_i^\alpha = \{u \in P \mid \mathrm{dist}(\alpha, u) \ge (i-1)\delta\}.$$

显然，$z_\alpha \in S^\alpha{}_i$。我们考虑由 V 的子集构成的集合系统 $\mathcal{A}_i = \{S^\alpha{}_i \mid \alpha \in \mathcal{V}_i\}$。首先，我们注意到只需找到 $\mathcal{A}_i$ 的一个击中集。

命题 6.3. *$\mathcal{A}_i$ 的任意击中集也是一个针对 $\mathcal{V}_i$的最远邻居的 k-中心 ε-核心集。*

证明： 该证明与命题 4.2的证明完全相同。为完整起见，现将其复制如下。

令X为 $\mathcal{A}_i$ 的击中集。令 $\alpha \in \mathcal{V}_i$，并令$x \in X \cap S^\alpha{}_i$，由于$X$是击中集，该对象存在。于是，根据$S^\alpha{}_i$ 的定义，

$$\mathrm{dist}(\alpha, x) \ge (i-1)\delta.$$

因此，

$$\mathrm{dist}(\alpha, z_\alpha) - \mathrm{dist}(\alpha, x) \le 2\delta.$$

另一方面，$\mathrm{dist}(\alpha, z_\alpha) \ge \Delta/2$。因此，

$$\mathrm{dist}(\alpha, z_\alpha) - \mathrm{dist}(\alpha, x) \le 2\delta \le 4 \cdot \frac{\delta}{\Delta} \cdot \mathrm{dist}(\alpha, z_\alpha) \le \varepsilon \cdot \mathrm{dist}(\alpha, z_\alpha).$$

因此，X 确实是 ε 的最远邻居k-核心集。 □

为了使用定理 4.1，我们需要界定 $\mathcal{A}_i$的 VC 维数。

命题 6.4。 *$\mathcal{A}_i$ 的 VC 维数为 $O(dk \log k)$。*

证明： 注意到，$\mathcal{A}_i$ 中的每个集合都是k 个球在 (V、dist)中的补集的交点。对集合系统中的所有集合取补集不会改变其 VC 维数，因此结论由引理3.4得证。 □

因此，根据定理 4.1，要界定 $\mathcal{A}_i$ 的击中集大小，只需界定其线性规划松弛的最优值；令 $\tau^*{}_i$ 为该最优值。我们通过以下简单的舍入方法，将 $\tau^*{}_i$ 与 (k、ε)-共匹配在 (V、dist) 中的大小界联系起来。

命题 6.5。 *存在一个大小为 $\lfloor \tau^*{}_i/4 \rfloor$ 的 (k, $\varepsilon^2/4$)-共匹配于 (V, dist) 中。*

证明： T 证明与命题 4.3 的证明相同。为完整起见，我们将其复制粘贴如下。

考虑 HITTING SET 在 $\mathcal{A}_i$上的一个最优对偶线性规划解；为清楚起见，我们用$(y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{V}_i}$表示对偶变量，而不是 $(y_{S^{\alpha}{}_i})_{\alpha\in\mathcal{V}_i}$。显然，$\sum_{\alpha\in\mathcal{V}_i} y_\alpha = \tau^*{}_i$。令 μ 为 $\mathcal{V}_i$上的一个概率分布，其中以$y_\alpha/\tau^*{}_i$的概率抽取 $\alpha\in\mathcal{V}_i$。

对于 β、$\alpha\in\mathcal{V}_i$，若$z_\alpha\in S^{\beta}{}_i$，则称 β 威胁 α。注意，任何 $\alpha\in\mathcal{V}_i$ 都会威胁自身。固定 $\alpha\in\mathcal{V}_i$，并根据 μ从 $\mathcal{V}_i$ 中抽取 β。于是，

$$\text{Prob}(\alpha \text{ is threatened by } \beta) \le \sum_{\beta: z_\alpha\in S_\beta} \frac{y_\beta}{\tau_i^*} \le \frac{1}{\tau_i^*}. \tag{2}$$

事实上，式（2）直接来自顶点 z_α:对应的对偶线性规划约束：

$$\sum_{\beta\in\mathcal{V}_i | z_\alpha\in S_i^\beta} y_\beta \le 1.$$

令 $K:=\lfloor\tau^*{}_i/4\rfloor$并令 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2K}$为从 $\mathcal{V}_i$中根据概率分布 μ独立抽取的顶点。于是，根据式（2），满足 $(i,j), 1\le i,j\le 2K, i\ne j$ 使得 α_i威胁 α_j 的二元组数量的期望至多为

$$4K^2\cdot\frac{1}{\tau_i^*}\le K.$$

因此，存在一种对 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2K}$的选取，使得此类二元组 (i,j)的数量至多为K。选取这样一种方式，并对每一对 $(i,j), 1\le i,j\le 2K, i\ne j$，只要 α_i 威胁 α_j，就将其丢弃。剩下一个W集合，其中至少有K个 $\mathcal{V}_i$元组，并且对任意 $\beta,\alpha\in W$，$\beta\ne\alpha$, β 都不威胁 α。

我们声称，$\{(z_\alpha,\alpha)\mid\alpha\in W\}$是所需的 $(k,\varepsilon^2/4)$-共匹配，且位于G中；显然其大小至少为K。由于$W\subseteq\mathcal{V}_i$，对于每个 $\alpha\in W$

$$\text{dist}(\alpha,z_\alpha)\ge i\delta.$$

另一方面，对于每个 $\beta,\alpha\in W$，$\beta\ne\alpha$，由于 β不威胁 α，我们有$z_\alpha\notin S^{\beta}{}_i$，因此

$$\text{dist}(z_\alpha,\beta)\le(i-1)\delta.$$

如$i\le\lfloor 4\varepsilon^{-2}\rfloor$，我们有

$$\frac{i-1}{i}\le 1-\frac{1}{\lfloor 4\varepsilon^{-2}\rfloor}\le 1-\frac{1}{4\varepsilon^{-2}}=1-\frac{\varepsilon^2}{4}.$$

□

由命题 6.5，$\tau^*\text{i}\le 4\text{L}+3$，其中 L 是 (V, dist) 中 $(\varepsilon^2/4)$-共匹配的最大规模。由定理 4.1 和命题 6.4，存在一个 $\mathcal{A}_i$ 的击中集 Xi，其规模为 $\mathcal{O}(\text{d k log k}\cdot\text{L log L})$。命题 6.3 断言，Xi 是 $\mathcal{V}_i$ 最远邻居的 k-中心 ε-核心集。因此，对于整个 V k 的 k-中心 ε-核心集，只需取 $\{\text{v}_1^0,\ldots,\text{v}^0\text{k+1}\}$，再与所有满足 $\mathcal{V}_i$ 非空的 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$集合 Xi 取并集。定理 1.14 的证明到此结束。

注 1. 定理*1.14* 的构造运行时间为 $n^{O(k)}$，因为我们需要求解一个 命中集集 线性规划（*LP*），其中有 $n^{O(k)}$ 个约束，每个约束对应一个 k-元组。我们可以通过应用 *Bourneuf* 和 *Pilipczuk* 提出的平面度量空间中 n 的 $k^{O(\text{poly}(1/\varepsilon))}$-中心核心集，将其缩减为 k-；该核心集可在 $n^{O(1)}$ 时间内构造。现在，我们在 *Bourneuf* 和 *Pilipczuk* 的核心集所诱导的平面度量上运行我们的算法。此时运行时间为 $(2^{O(\text{poly}(k/\varepsilon))}+n^{O(1)})$。

6.2 从k-共匹配到双梯的归约

本节将k-共匹配的规模归约到双梯规模的上界，如定理 1.16所述。

定理 1.16。 设 (V,dist) 是一个度量空间，且球集系统 $\mathcal{B}_V$ 的 VC 维数至多为 d。设 $\varepsilon \in (0,1)$ 为一个参数。存在一个普适常数 c 和一个多项式 $f_{k,d}(x) = x^{(c\cdot d)^{4k}}$，使得如果 (V,dist) 包含一个大小至少为 $f_{k,d}(\ell)$ 的 (k,ε)-共匹配，那么它要么包含一个 $(\varepsilon/2)$-共匹配，要么包含一个大小为 ℓ 的 $(\varepsilon/2)$-双梯。

首先，我们回顾双梯的定义。

定义 *1.15*（ε-双梯）。设 $\mathcal{D} = \{(p1,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{t}_1),(p2,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{t}_2),\ldots,(p_\ell,\mathfrak{b}_\ell,\mathfrak{t}_\ell)\} \subseteq V^3$ 是度量空间 $(V,dist)$ 中由 ℓ 个点的有序三元组组成的序列，并设 $\varepsilon \in (0,1)$ 为一个参数。若存在 $R>0$ 使得：我们称$\mathcal{D}$ 为一个 ε-双梯。

1. 对每个 $1 \le i \le j \le \ell$,

$$\text{dist}(p_j,\mathfrak{t}_i) > R \quad \text{and} \quad \text{dist}(p_i,\mathfrak{b}_j) > R;$$

2. 对每个 $1 \le i < j \le \ell$,

$$\text{dist}(p_i,\mathfrak{t}_j) \le (1-\varepsilon)R \quad \text{and} \quad \text{dist}(p_j,\mathfrak{b}_i) \le (1-\varepsilon)R.$$

点集 $\{\mathfrak{t}_1,\ldots,\mathfrak{t}_\ell\}$ 和 $\{\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_\ell\}$ 分别称为双梯的 顶端 和 底端 [4]。

为证明定理 1.16，我们将使用 Nguyen、Scott 和 Seymour 关于有界 VC 维数图的多项式 Ramsey 界 [44]。图的 VC 维数 （对于无向简单图）G 是其开邻域集合系统的 VC 维数，即 $\{N_G(v) \mid v \in V(G)\}$。

定理 6.6（[44]中的定理 1.2）。 对每个 $d \ge 1$，存在 $\delta > 0$，使得每个 VC 维数至多为 d 的 n 顶点图 G 都包含一个团或一个大小至少为 n^δ 的独立集。

证明（定理 1.16的证明）： 固定正整数 k、d和一个实数 $\varepsilon > 0$。令 $(V$、dist$)$ 为一个度量空间，其球集系统的 VC 维数至多为 d，并令 $\mathcal{M}$ 为 $(k$、$\varepsilon)$-共匹配，位于 $(V$、dist$)$中，大小为 $L > 1$。将 $\mathcal{M}$ 枚举为

$$\mathcal{M} = \{(p_1,X_1),(p_2,X_2),\ldots,(p_L,X_L)\}.$$

此外，对于每个$j \in [L],$，将X_j枚举为 $(q^1{}_j$、$q^2{}_j$、……、$q^k{}_j)$。令R为 $(k$、$\varepsilon)$-共匹配 $\mathcal{M}$ 定义中的距离。

- 对于每个 i $\in$[k],，我们定义四个图 $H^{\rightarrow}$i、$H^{\leftarrow}$i、$H^{\rightarrow}$i、$H^{\leftarrow}$i，如下所示。这四个图的顶点集均为 [L]。对于 $1 \le$a $<$b $\le$L，当且仅当 dist(p$_a$, q^{i}b) $\le (1-\varepsilon)$R 时，ab $\in$E($H^{\rightarrow}$i)；当且仅当 dist(p$_a$, q^{i}b) $\le (1-\varepsilon/2)$R 时，ab $\in$E($\bar{H}^{\rightarrow}$i)。类似地，对于 $1 \le$a $<$b $\le$L，当且仅当 dist(p$_b$, q^{i}a) $\le (1-\varepsilon)$R 时，ab $\in$E($H^{\leftarrow}$i)；当且仅当 dist(p$_b$, q^{i}a) $\le (1-\varepsilon/2)$R 时，ab $\in$E($\bar{H}^{\leftarrow}$i)（注意 H 与 H 之间的 vs 差异）。

- **命题 6.7**。 对于每个 $i \in [k],$，$H^{\leftarrow}{}_i$、$H^{\rightarrow}{}_i$、$H^{\leftarrow}{}_i$、$H^{\rightarrow}{}_i$ 的 VC 维数为 $\mathcal{O}(d)$。

证明： 注意，前述四个图中的任意一个图的每个邻域，都可以通过基本集合运算，由常数个集合构造而成；这些集合要么是 $(V$ 中的球，dist$)$（其 VC 维数为 d），要么是 $[L]$，中的连续指标集合，而这类集合族的 VC 维数为 $\mathcal{O}(1)$。根据基本集合运算下 VC 维数的界，命题即可得证，相关结果见 [6]。□

[4]我们将使用 mathfrak 字体来表示双梯的顶部点和底部点

令 $\delta = \delta(\mathrm{d})$ 为定理 6.6 中用于命题 6.7 的 VC 维数上界的指数。对每个 $\mathrm{H}^{\leftarrow}\mathrm{i}$、$\mathrm{H}^{\rightarrow}\mathrm{i}$、$\bar{\mathrm{H}}^{\leftarrow}\mathrm{i}$、$\bar{\mathrm{H}}^{\rightarrow}\mathrm{i}$ 反复应用定理 6.6，可得到一个集合 $\mathrm{I} \subseteq [\mathrm{L}]$，其大小至少为 $\mathrm{L}^{\delta^{4k}}$，使得对于每个 $\mathrm{i} \in [\mathrm{k}]$,，图 $\mathrm{H}^{\leftarrow}\mathrm{i}[\mathrm{I}], \mathrm{H}^{\rightarrow}\mathrm{i}[\mathrm{I}], \mathrm{H}^{\leftarrow}\mathrm{i}[\mathrm{I}], \mathrm{H}^{\rightarrow}\mathrm{i}[\mathrm{I}]$, 均为团或独立集。

在证明的其余部分，我们将证明 (V,dist) 包含一个大小为 $|I| \geq L^{\delta^{4k}}$ 的 $(\varepsilon/2)$-共匹配或 $(\varepsilon/2)$-双梯。这就完成了证明。注意，由于 $L > 1$，我们有$|I| > 1$。

首先考虑存在 $i \in [k]$，使得 $H^{\leftarrow}{}_i[I]$ 和 $H^{\rightarrow}{}_i[I]$ 都是团的情形。此时，$\{(p^j, q^i{}_j) \mid j \in I\}$ 是一个大小为 $|I| \geq L^{\delta^{4k}}$ 的 $(\varepsilon/2)$-共匹配，问题就解决了。因此，假设不存在这样的 i。

根据共匹配的定义，对于每个 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{I}, \mathrm{a} < \mathrm{b}$，我们都有 $\mathrm{dist}(\mathrm{p}_a, \mathrm{X}\,\mathrm{b}) \leq (1-\varepsilon)\mathrm{R}$ 和 $\mathrm{dist}(\mathrm{p}_b, \mathrm{X}_a) \leq (1-\varepsilon)\mathrm{R}$。由于 $|\mathrm{I}| > 1$，这意味着存在 $\mathrm{i}^{\rightarrow} \in [\mathrm{k}]$，使得 $\mathrm{H}^{\rightarrow}\mathrm{i}_{\rightarrow}[\mathrm{I}]$ 是一个团，并且存在 $\mathrm{i}^{\leftarrow} \in [\mathrm{k}]$，使得 $\mathrm{H}^{\leftarrow}\mathrm{i}_{\leftarrow}[\mathrm{I}]$ 是一个团。显然，$\mathrm{H}^{\rightarrow}\mathrm{i}_{\rightarrow}[\mathrm{I}]$ 和 $\mathrm{H}^{\leftarrow}\mathrm{i}_{\leftarrow}[\mathrm{I}]$ 也都是团。根据上一段排除的情形，$\mathrm{i}^{\leftarrow} \neq \mathrm{i}^{\rightarrow}$，此外，$\bar{\mathrm{H}}^{\rightarrow}\mathrm{i}_{\leftarrow}[\mathrm{I}]$ 和 $\bar{\mathrm{H}}^{\leftarrow}\mathrm{i}_{\rightarrow}[\mathrm{I}]$ 都是独立集。换言之，对于每个 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{I}, \mathrm{a} < \mathrm{b}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dist}(p_b, q_a^{i^{\leftarrow}}) \leq (1-\varepsilon)R,\\
&\mathrm{dist}(p_b, q_a^{i^{\rightarrow}}) > (1-\varepsilon/2)R,\\
&\mathrm{dist}(p_a, q_b^{i^{\rightarrow}}) \leq (1-\varepsilon)R,\\
&\mathrm{dist}(p_a, q_b^{i^{\leftarrow}}) > (1-\varepsilon/2)R.
\end{aligned}$$

回顾一下，根据 (k,ε)-共匹配的定义，对于每个 $a \in I$，我们有

$$\mathrm{dist}(p_a, q_a^{i^{\leftarrow}}) > R \quad \text{and} \quad \mathrm{dist}(p_a, q_a^{i^{\rightarrow}}) > R.$$

这意味着序列

$$\left((p_a, q_a^{i^{\leftarrow}}, q_a^{i^{\rightarrow}}) \mid a \in I\right)$$

构成一个 $(\varepsilon/2)$-双梯（距离为 $(1-\varepsilon/2)R$）其规模为 $|I| \geq L^{\delta^{4k}}$，位于 $(V$ 中，dist).

至此，定理 1.16 的证明完成。 □

注意，定理 *1.16*$_k$ 的多项式 d 的度 δ^{-4k}为 δ，其中 δ 是 VC 维数为 6.6 时定理的度 $\mathcal{O}(d)$。仔细考察 [44] 可知，δ^{-1} 对 VC 维数的依赖是指数级的；因此，$f_{k,d}$ 的度数对 k 和 d呈指数级依赖。

7 双梯子的规模

本节旨在证明定理1.17，该定理给出了ε-双梯规模的上界。本节的结构与第5节非常相似，大多数论证都针对三元组集合 $\mathcal{D} = \{(p_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{t}_i)\}^L{}_{i=1}$ 展开，而不是针对二元组 $\mathcal{M} = \{(p_i, q_i)\}^L{}_{i=1}$。涉及某些拓扑情形分析的最终矛盾中，分析过程略有不同，但总体策略保持不变。因此，所得上界与 ε-共匹配的上界相差一个多项式(ε^{-1})因子。

固定 $\varepsilon > 0$。我们将采用与第 ε节中为5-共匹配引入的记号和定义类似的记号与定义。一对 $(G,\ \mathcal{D})$ 是一个实例，如果G 是一个平面边加权图，且 $\mathcal{D}$ 是一个 ε-双梯。同样，我们假设G带有平面上的一个固定嵌入。对于任意三元组$p,\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{t}$，顶点 $(p,\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{t}) \in \mathcal{D}$ 称为终端。

与共匹配的证明类似，我们假设所有路径的长度两两不同，并且任意终端二元组之间的最短路径 $(p_1, \mathfrak{t}_2)$和 $(p_1, \mathfrak{b}_2)$ 都是唯一的。同样，我们假设实例是干净的，即所有终端的度均为 1，且G

不含度为 2 的顶点，并且每条边都位于某条最短路径上，该路径连接以下某个二元组： $(p_i, \mathfrak{t}_j)$或 $(p_j, \mathfrak{b}_i)$；其中的三元组为 $(p_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{t}_i), (p_j, \mathfrak{b}_j, \mathfrak{t}_j) \in \mathcal{D}$，且 $i < j$。

我们使用相同的记号： $[\![p_1\mathfrak{t}_2]\!], [\![p_1\mathfrak{b}_2]\!]$ 表示终端之间的最短路径；$G^{\mathcal{D}_0}$表示 $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$ 的子图，该子图仅由 $\mathcal{D}_0$ 的终端之间的最短路径组成；$G^{\neg\sigma}$ 则是 $G^{\mathcal{D}-\{\sigma\}}$ 的简写，其中 $\sigma \in \mathcal{D}$ 任意。

若对于每个 $\sigma \in \mathcal{D}$，实例 $(\mathrm{G}, \mathcal{D})$ 中的终端都位于 $\mathrm{G}^{\neg\sigma}$ 的同一个面内，则称该实例为局部实例。对于三元组 $\sigma = (\mathrm{p}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}) \in \mathcal{D}$，连接曲线是在相对于 G 处于良好位置的曲线，它将 p 与 $\mathfrak{b}$ 或 $\mathfrak{t}$ 相连，且不与 $\mathrm{G}^{\neg\sigma}$ 的任何边相交。带连接曲线的实例是实例 $(\mathrm{G}, \mathcal{D})$，其中两条连接曲线分别连接 p 与 $\mathfrak{t}$、p 与 $\mathfrak{b}$；对于每个 $(\mathrm{p}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}) \in \mathcal{D}$，这两条连接曲线都是固定的。如果所有连接曲线两两不相交，则称该带连接曲线的实例为无交叉的。

定理 1.17 的证明与 comathing 情况类似，将由以下三个步骤组成。

引理 7.1. 对于一个实数 $\varepsilon > 0$，令 $L^{\#}{}_{\text{局部}}(\varepsilon)$ 表示局部实例中 ε-双梯的最大规模。那么，任意实例中 ε-双梯的最大规模为 $\mathcal{O}(L^{\#}{}_{\text{局部}}(\varepsilon)^9 \varepsilon^{-8})$。

引理7.2. 对于一个实数 $\varepsilon > 0$，令 $L^{\#}_{\gtrsim}(\varepsilon)$ 表示链接非交叉实例中 ε-双梯的最大规模。那么，局部实例中 ε-双梯的最大规模为$\mathcal{O}(L^{\#}_{\gtrsim}(\varepsilon)^2 \log^8 L^{\#}_{\gtrsim}(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{-8})$。

引理 7.3. 对于一个实数 $\varepsilon > 0$，链接非交叉实例中 ε-双梯的最大规模至多为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-4})$。

将这三个引理结合起来，便可立即证明定理 1.17。

7.1 距离轮廓与分离工具箱

我们首先介绍用于基于距离的论证的记号，这与共匹配情形中使用的记号类似。此外，我们重新陈述并证明一些适用于当前设定的分离引理。在证明的其余部分，$(G, \mathcal{D})$ 是一个干净的 ε双梯实例，且至少有三个终端三元组。令$L = |\mathcal{D}|$，枚举 $\mathcal{D} = \{(p1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{t}_1), \ldots, (p_L, \mathfrak{b}_L, \mathfrak{t}_L)\}$ 并令

$$R := \min_{(p,\mathfrak{b},\mathfrak{t})\in\mathcal{D}} \min(\mathsf{dist}(p, \mathfrak{t}), \mathsf{dist}(p, \mathfrak{b})), \qquad \delta := \frac{\varepsilon}{100} R.$$

回想一下，δ 作为一个距离“单位”，而相差几个 δ的量级并不重要。

命题 7.4。若 $L \geq 3$，则 G 的直径至多为 $8(1-\varepsilon)R$。

证明： 回想一下，该实例是干净的，也就是说，每个顶点都位于某个路径上：$[\![p_{i_1}\mathfrak{t}_{i_2}]\!]$ 或 $[\![\mathfrak{b}_{i_1}p_{i_2}]\!]$，其中某个$i_1 < i_2$。

固定 $1 \leq \mathrm{i}_1 < \mathrm{i}_2 \leq \mathrm{L}$。$[\![\mathrm{p}_{i_1}\mathfrak{t}_{i_2}]\!]$ 上的每个顶点到 p_1，的距离至多为 $2(1-\varepsilon)\mathrm{R}$，因为 $[\![\mathrm{p}_{i_1}\mathfrak{t}_{i_2}]\!]$ 和 $[\![\mathrm{p}_1\mathfrak{t}_{i_2}]\!]$ 的长度都至多为 $(1-\varepsilon)\mathrm{R}$。类似地，$[\![\mathfrak{b}_{i_1}\mathrm{p}_{i_2}]\!]$ 上的每个顶点到 L 的距离至多为 $2(1-\varepsilon)\mathrm{R}$，因为 $[\![\mathfrak{b}_{i_1}\mathrm{p}_{i_2}]\!]$ 和 $[\![\mathfrak{b}_{i_1}\mathrm{p}_L]\!]$ 的长度都至多为 $(1-\varepsilon)\mathrm{R}$。最后，$\mathrm{p}_1$ 与 p_L 之间的距离至多为 $4(1-\varepsilon)\mathrm{R}$，因为它们由路径 $[\![\mathrm{p}_1\mathfrak{t}_3]\!]$、$[\![\mathfrak{t}_3\mathrm{p}_2]\!]$、$[\![\mathrm{p}_2\mathfrak{b}_1]\!]$、$[\![\mathfrak{b}_1\mathrm{p}_L]\!]$连接，且每条路径的长度至多为 $(1-\varepsilon)\mathrm{R}$。□

作为 直接推论，我们得到，对于每个u、$v \in V(G)$，$\overset{\frown}{\mathsf{dist}}(u, v) \leq 8R \cdot \delta^{-1} = 800\varepsilon^{-1}$。

与互补匹配情形类似，对于集合 $\mathrm{Z} \subseteq \mathrm{V}(\mathrm{G})$，顶点 $\overset{\frown}{\mathrm{v}} \in \mathrm{V}(\mathrm{G})$ 的取整距离剖面是函数 $\mathrm{profZ}[\mathrm{v}]: \mathrm{Z} \to \mathbb{Z}$，定义为 $\mathrm{profZ}[\mathrm{v}](\mathrm{z}) = \mathsf{dist}(\mathrm{v}, \mathrm{z})$。同样，定理 3.3 立即推出以下结论。

引理 7.5。设 $Z \subseteq V(G)$。对于 $v \in V(G)$，令

$$\widehat{\mathcal{Z}}_Z[v] = \{(z,i) \in Z \times \{0,1,\ldots,\lfloor 800\varepsilon^{-1} \rfloor\} \mid \widehat{\mathrm{prof}}_Z[v](z) \le i\}.$$

于是，集合系统 $\{\widehat{\mathcal{Z}}_Z[v] \mid v \in V(G)\}$ 的 *VC* 维数至多为4。特别地，根据 *Sauer-Shelah* 引理，其大小有上界 $\mathcal{O}(|Z|^4\varepsilon^{-4})$。

以下观察结论会再次陈述，但在我们的新设定中，需要采用不同的论证来证明。

引理 7.6. 设 $Z \subseteq V(G)$ 和 $(p_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{t}_i), (p_j, \mathfrak{b}_j, \mathfrak{t}_j)$ 是两个不同的三元组 $\mathcal{D}$，且 $i < j$。那么，$[\![p_i \mathfrak{t}_j]\!]$ 和 $[\![p_j \mathfrak{b}_i]\!]$ 均不包含距 Z δ 以内的顶点。

证明： 反设，令 u 为 $[\![p_i \mathfrak{t}_j]\!]$ 上的一个顶点，且存在 $z \in Z$，使得 $\widehat{\mathrm{dist}}(z,u) \le \delta$。由于 $\widehat{\mathrm{prof}}_z[p_i] = \widehat{\mathrm{prof}}_z[p_j]$，我们有 $|\mathrm{dist}(p_i, z) - \mathrm{dist}(p_j, z)| < \delta$。因此，

$$|\mathrm{dist}(p_i,u) - \mathrm{dist}(p_j,u)| \le |\mathrm{dist}(p_i,z) - \mathrm{dist}(p_j,z)| + 2\mathrm{dist}(u,z) \le 3\delta.$$

由此可推得 $\mathrm{dist}(p_j, \mathfrak{t}_j) \le \mathrm{dist}(p_i, \mathfrak{t}_j) + 3\delta$，这与 $\mathrm{dist}(p_j, \mathfrak{t}_j) \ge R$ and $\mathrm{dist}(p_i, \mathfrak{t}_j) \le R - 100\delta$ 矛盾。□

引理 7.7. 设 $X, Z \subseteq V(G)$，且 X 中的每个顶点到 Z 中某个顶点的距离都不超过 δ，并设 $(p_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{t}_i), (p_j, \mathfrak{b}_j, \mathfrak{t}_j), (p_k, \mathfrak{b}_k, \mathfrak{t}_k) \in \mathcal{D}$ 是三个不同的三元组，且 $i < j < k$。若 p_i, p_j, p_k 到 Z 的取整距离轮廓都相同，则 $(p_j, \mathfrak{b}_j, \mathfrak{t}_j)$ 不会被 X 分离。

证明：p_i 不能被 X 与 $\mathfrak{t}_j, \mathfrak{t}_k$ 中任一个分离，因为否则 $[\![\mathrm{p}_i \mathfrak{t}_j]\!]$（同理，$[\![\mathrm{p}_i \mathfrak{t}_k]\!]$）会与 X 相交，这与引理 7.6 矛盾。根据同样的推理，p_j 不能被 X 与 $\mathfrak{b}_i, \mathfrak{t}_k$ 分离，p_k 也不能被 X 与 $\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j$ 分离。综上，$\mathrm{p}_i, \mathfrak{b}_i$、$\mathrm{p}_j, \mathfrak{t}_j, \mathfrak{b}_j$、$\mathrm{p}_k, \mathfrak{t}_k$ 位于 G − X 的同一个连通分量中，以下记作 C。因此，只有 $\mathfrak{t}_i$ and/ 或 $\mathfrak{b}_k$ 能被 X 与 C 分离。□

断言 7.8. 设 $X \subseteq V(G)$ 满足：X 包含于至多 α 条路径的并集中，每条路径的长度至多为某个 α，$\beta > 0$ 对应的 βR。那么，被 X 分隔的三元组数量为 $\mathcal{O}(\alpha^4\varepsilon^{-4}(1+\beta\varepsilon^{-1})^4)$。

证明：由于 X 包含于至多 α 条路径的并集中，且每条路径的长度至多为 βR，因此存在一个大小为 $\mathcal{O}(\alpha(1+\beta\varepsilon^{-1}))$ 的集合 Z $\subseteq$ V(G)，使得 X 中的每个顶点到 Z 中某个顶点的距离至多为 δ。根据引理 5.5，存在 $\mathcal{O}(|\mathrm{Z}|^4\varepsilon^{-4}) = \mathcal{O}(\alpha^4\varepsilon^{-4}(1+\beta\varepsilon^{-1})^4)$ 个不同的取整距离剖面。按照 p_i 到 Z 的取整距离剖面对三元组 $(\mathrm{p}_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{t}_i) \in \mathcal{D}$ 分组。对于任意包含至少三个三元组的组，设其包含 s 个三元组，按指标顺序排列，并将它们重新标记为 $\cup_{1 \le i \le s}(\mathrm{p}_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{t}_i)$。对于 k $\in$s、s − 1、.....、3，考虑集合 $\{(\mathrm{p}_{k-2}, \mathfrak{b}_{k-2}, \mathfrak{t}_{k-2}), (\mathrm{p}_{k-1}, \mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{t}_{k-1}), (\mathrm{p}_k, \mathfrak{b}_k, \mathfrak{t}_k)\}$。在第 k 步，引理 7.7 表明，$(\mathrm{p}_{k-1}, \mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{t}_{k-1})$ 不能被 X 分隔。因此，在该组中，只有 $(\mathrm{p}1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{t}_1)$ 和 $(\mathrm{p}_s, \mathfrak{b}_s, \mathfrak{t}_s)$ 能被 X 分隔。于是，被 X 分隔的二元组数量为 $\mathcal{O}(\alpha^4\varepsilon^{-4}(1+\beta\varepsilon^{-1})^4)$。□

7.2 化归到局部双梯

在本小节中，我们给出引理7.1的证明。该证明与引理5.1的证明基本相同，唯一的细微技术差别是，我们考察的是三元组，而非终端的二元组，因此需要将路径分离引理替换为其针对三元组的推广，即断言7.8。证明的其余部分完全相同。为完整起见，我们在此重述。

考虑一个函数 Λ，它将来自 $\mathcal{D}$ 的任意点的 $(L^{\#}\text{局部}(\varepsilon)+1)$ 三元组子集 I 映射到点的 $L^{\#}$ 局部(ε) 三元组子集。该映射定义如下：给定一个大小为 $L^{\#}$ 局部$(\varepsilon)+1$ 的子集 I，我们令 $\Lambda(I) = I - \{\sigma_a\}$，其中 $\sigma_a \in \mathcal{D}$ 是任意固定的三元组，使得 σ_a 被 $G^{I-\{\sigma_a\}}$ 的顶点分隔。由于 $L^{\#}$ 局部(ε) 是局部实例的最大规模，因此这样的点对总是存在。

根据抽屉原理，存在一个集合 $S \in \binom{\mathcal{D}}{\#\ L_{\text{局部}}(\varepsilon)}$，使得

$$|\Lambda^{-1}(S)| \geq \binom{L^{\#}}{L^{\#}_{\text{local}}(\varepsilon)+1} \Big/ \binom{L^{\#}}{L^{\#}_{\text{local}}(\varepsilon)} = \frac{L^{\#} - L^{\#}_{\text{local}}(\varepsilon)}{L^{\#}_{\text{local}}(\varepsilon)+1} > \frac{L^{\#}}{L^{\#}_{\text{local}}(\varepsilon)+1} - 1$$

将这个量记为$C = L^{\#} L^{\#}{}_{\text{local}}(\varepsilon)+1 \quad -1$。至少存在$C$个指标$\{a_1, a_2, \ldots, a_C\}$，使得 $\sigma_a \notin S$ 且G^S 对每个 σ_a 都进行分隔，其中$i \in [C]$。

由于G^S 是由不超过$L^{\#}{}_{\text{local}}(\varepsilon)^2$ 条路径组成，且每条路径的长度至多为R，我们可以应用断言 7.8 得到$C = \mathcal{O}(L^{\#}\,\text{local}(\varepsilon)^8 \varepsilon^{-8})$。进而可推出$L^{\#} = \mathcal{O}(L^{\#}\,\text{local}(\varepsilon)^9 \varepsilon^{-8})$，从而完成引理的证明。

7.3 归约到连接的无交叉双梯

在本小节中，我们证明引理7.2。以下许多论证直接借鉴或改编自引理5.2的证明；鉴于此，我们通常只会重述断言或引理而省略其证明，并简要讨论，直到遇到与先前工作不同之处。

设 $(G, \mathcal{D})$ 为一个局部双梯实例。在 G' 上固定一个通过反复在 G 的非三角形面中任意添加虚拟边而得到的三角剖分。

为了使我们的实例具有连接曲线，我们通过以下过程迭代地为每个三元组分配一条连接曲线。任取一个尚未分配的 $\sigma = (\mathrm{p}、\mathfrak{b}、\mathfrak{t})$，并令 F_{p}、$F_{\mathfrak{t}}$ 和 $F_{\mathfrak{b}}$ 分别表示与 p、$\mathfrak{t}$、$\mathfrak{b}$相邻的 G 的任意面。在 G^* 中从 $F_{\mathfrak{t}}$到 F_{p} 追踪一条不与 $G^{\neg\sigma}$ 的任何边交叉的路径（其存在性由局部性保证），并延伸 $F_{\mathfrak{t}}$、F_{p} 内图形的端点，使其分别到达 $\mathfrak{t}$ 和 p。以这种方式追踪的曲线$\gamma_{\mathrm{p},\mathfrak{t}}$就是 σ的一条连接曲线。我们以完全相同的方式在 p 与 $\mathfrak{b}$ 之间追踪 $\gamma_{\mathrm{p},\mathfrak{b}}$。两条路径在 p 处共享一个端点，因此可以绘制 $\gamma_{\mathrm{p},\mathfrak{t}}$、$\gamma_{\mathrm{p},\mathfrak{b}}$，使得它们的交点恰好是点 p。

7.3.1 树分解与分隔集

对于每个 $\mathrm{i} \in [\mathrm{L}]$,，定义树 T_i 为路径 $\left(\cup_{j:j<i} [\![\mathrm{p}_i \mathfrak{b}_j]\!]\right) \cup \left(\cup_{j:j>i} [\![\mathrm{p}_i \mathfrak{t}_j]\!]\right)$的并集。对于 $\mathrm{L} \geq 3$，树 T_i 满足引理 3.7 的假设，只要我们将 T_2 视为第一棵树：树 T_2 与 T_1 在 t_L 处相交，而每棵 $\mathrm{i} \geq 3$ 的树 T_i 都在 b_1处与其相交。令 H 为应用引理 3.7 后得到的图。将定理 3.5 应用于三角剖分 G'，得到 (T, β)，它是 G 的一个树分解。回想一下，以这种方式得到的分解中，每个粘合度都是一个分隔集，它由 H 的两条向上路径的并集构成，且这两条路径的端点通过 $\mathrm{E}(\mathrm{G}') - \mathrm{E}(\mathrm{H})$中的一条闭合边相连。为方便起见，我们用 S 指代 G 的一个子图，它包含该分隔集的顶点，且边仅限于这两条路径上的边。用 ξ_S 表示由两条路径的绘图加上闭合边所形成的平面闭环。

我们称三元组 $\sigma = (p, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}) \in \mathcal{D}$ 相对于坏集合S为坏，当且仅当连线 $\gamma_{p,\mathfrak{t}}, \gamma_{p,\mathfrak{b}}$ 与 ξ_S 相交。三元组变坏只有两种情况：一是它被分隔集S分隔，这里指其中任意一对终端都被S分隔；二是它污染S（$\exists e \in S$，使得$e \notin G^{\neg\sigma}$）。这两种情况确实涵盖了所有情形：这可由命题5.9的类似结论推出，其在双梯形情形下的证明仍然相同，唯一的区别在于，我们不再为每对考虑一条连接曲线 γ_σ，而是考察两条连接曲线 $\gamma_{p,\mathfrak{b}}, \gamma_{p,\mathfrak{t}}$ 的并集。

和之前一样，我们的目标是界定相对于分隔集而言的坏二元组数量，这样我们就可以选取若干分隔集，从每个连通分量中挑选一个好对，最终得到一个规模合理的无交叉实例。

7.3.2 界定坏三元组

我们继续沿用引理5.2 的证明思路，现在要界定各类坏三元组的数量。由于我们的实例是干净的，我们可以论证G 有 $O(L^4)$个顶点。论证逐行遵循命题5.10 的证明，唯一的区别在于，树T_i 现在有 $2L$ 个叶子，

而不是L个；并且度为 1 的顶点有 $3L$ 个，而不是 $2L$个。渐近界仍然相同。

我们再次使用引理 5.12 来界定污染S的三元组数量。为完整起见，我们在此重述该引理。证明完全相同，因为我们仍保留了如下性质：每个分隔集 S 都由一族 $\mathcal{O}(\log^2 L)$ 条端点间路径覆盖。

引理 7.9。 $\mathcal{O}(\log^2 L)$ 中至多有 $\mathcal{D}$ 个污染 S 的三元组。

分　离三元组数量的上界可由我们之前的分离引理直接得到。　s.

引理 7.10。 $\mathcal{O}(\log^8 L \cdot \varepsilon^{-8})$ $\mathcal{D}$ 中有 个被 S 分隔的三元组。

证明： T_i 的每条子路径长度至多为 $2R$。根据引理 3.7，S 可由 $\alpha = \mathcal{O}(\log^2 L)$条某个 T_i的子路径覆盖。因此，该结论可由引理 7.8 结合 α 和 $\beta = 2$直接推出。□

7.3.3 具有无交叉连线的良好三元组

我们终于可以证明引理 7.2了。这里的直觉仍与互补匹配情形相同，证明也与引理 5.2 的证明十分相似。为求完整起见，我们在此重述证明，不过表述得更加简洁。更详细的解释请参见引理 5.2 的证明。

引理7.2。 对于实数 $\varepsilon > 0$，令 $L^{\#}_{\gtrsim}(\varepsilon)$ 为链接非交叉实例中 ε-双梯的最大规模。那么，局部实例中 ε-双梯的最大规模为$\mathcal{O}(L^{\#}_{\gtrsim}(\varepsilon)^2 \log^8 L^{\#}_{\gtrsim}(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{-8})$。

证明（引理 7.2的证明）： 我们定义权重函数 $\chi : V(G) \to \{0,1\}$ 它为所有三元组的终端赋值 1 $\mathcal{D}$，其他情况赋值 0。我们固定参数 α，其量级大致为 $L^{1/2}$。

我们使用引理 3.6 得到一个集合 $F \subseteq E(T)$，它以平衡方式划分 T，相对于 χ。任取一个连通分量 C，它属于 $T - F$，并考察集合 V_C，该集合由 C 中各袋的并集减去所有分隔集 S_f 构成，这些分隔集对应于所有 $f \in F$的粘合度。

根据断言 7.9和断言 7.10，不是相对于某个 $\alpha \cdot \mathcal{O}(\log^8 L \cdot \varepsilon^{-8})$ 三元组的数目至多为S_f。此外，根据我们的分隔集结构，属于某个 $\mathcal{O}(\alpha)$ 终端的数目至多为S_f。因此，在 C 的袋并集中，属于坏项或某个 S_f的终端顶点总数至多为 $\alpha \cdot c \cdot \log^8 L \cdot \varepsilon^{-8}$，其中 c 是某个普适常数。

这种并集中的终端顶点总数至少为 $L/2\alpha$，这是由引理 3.6得出的。令 α使得 $4\alpha^2 \cdot c \leq L \log^{-8} L \cdot \varepsilon^8$，则每个这样的连通分量 C 都包含一个三元组 σ_C，该三元组相对于所有分隔集 S_f都是好的。

这类三元组的连接曲线两两不相交，因此将实例限制为仅包含这些三元组，可得到一个规模为 α 的无交叉实例，从而完成证明。□

7.4 有链接无交叉双梯的界

本节将推导以下界。

引理 7.3. 对于一个实数 $\varepsilon > 0$，链接非交叉实例中 ε-双梯的最大规模至多为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-4})$。

设 $\mathcal{I} = (G, \mathcal{D})$ 是一个链接非交叉双梯实例，其中 $\mathcal{D} = (\sigma_i \mid 1 \leq i \leq L)$，且 $\sigma_i = (p_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{t}_i)$ 对于 $i \in [L]$。

我们有以下初步观察。

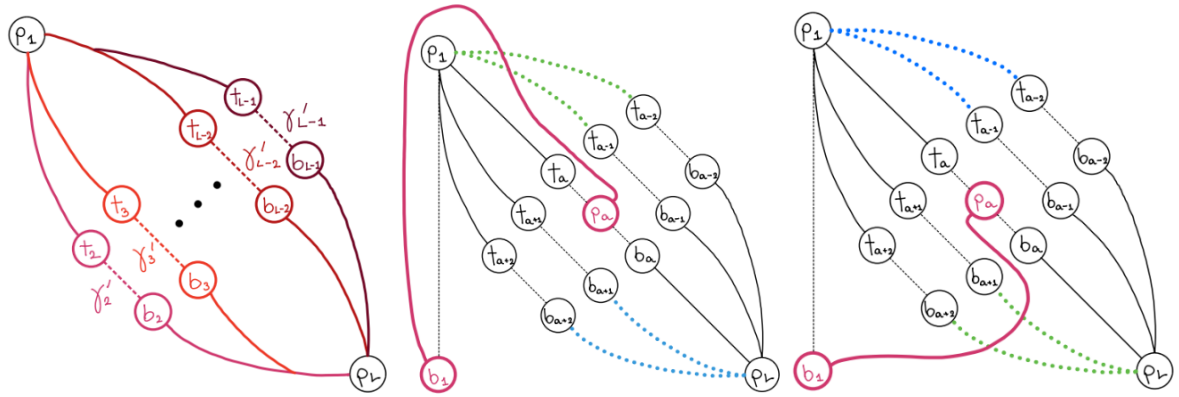
断言 7.11. 设 a、b、c、$d \in [L]$，其中 $a < b \leq d$ 且 $a \leq c < d$。那么，$[\![p_a \mathfrak{t}_b]\!]$和 $[\![\mathfrak{b}_c p_d]\!]$不相交。

证明： 如果这两条路径相交，那么

$$2(1-\varepsilon)R \geq \mathrm{dist}(p_a, \mathfrak{t}_b) + \mathrm{dist}(\mathfrak{b}_c, p_d) \geq \mathrm{dist}(p_a, \mathfrak{b}_c) + \mathrm{dist}(p_d, \mathfrak{t}_b) \geq 2R.$$

这是一个矛盾。 □

7.4.1 等距实例



(a) 肋骨笼 (b) T 型 (c) B 型

图10：虚线表示连线。为便于观察，我们假设这些连接曲线不会与任何路径相交（$\gamma'_{\mathrm{a}} = \Gamma(\sigma_a)$）。(a) 每个二元组 σ_a 都构成一根肋骨，其由以下部分拼接而成：$[\![\mathrm{p}_1\mathfrak{t}_a]\!]$ 中从 p_1 到 γ'_{a} 端点的子路径、曲线 γ'_{a}，以及 $[\![\mathfrak{b}_a\mathrm{p}_L]\!]$ 中从 γ'_{a} 的第二个端点到 p_L 的子路径。肋骨可以共享前缀或后缀；在此图中，肋骨 γ_{L-1} 和 γ_{L-2} 共享前缀，而 γ_1 和 γ_2 共享后缀。(b) σ_a 是一对满足 T 型条件的二元组，即 $[\![\mathfrak{b}_1\mathrm{p}_a]\!]$（粗粉色线）与每条满足 $\mathrm{a} < \mathrm{b} < \mathrm{L}$ 的路径 $[\![\mathrm{p}_1\mathfrak{t}_b]\!]$ 横截相交（绿色点线），且按指标 b 递减的顺序排列；它与任何满足 $1 < \mathrm{b} < \mathrm{a}$ 的路径 $[\![\mathrm{p}_L\mathfrak{b}_b]\!]$ 都不横截相交。（此处除了 σ_1 和 σ_L 外，只画出了 5 对。）(c) 此处 σ_a 则是一对满足 B 型条件的二元组，也就是说，$[\![\mathfrak{b}_1\mathrm{p}_a]\!]$（粗粉色线）与每条满足 $\mathrm{a} < \mathrm{b} < \mathrm{L}$ 的路径 $[\![\mathrm{p}_1\mathfrak{t}_b]\!]$ 横截相交（绿色点线），且与任何满足 $1 < \mathrm{b} < \mathrm{a}$ 的路径 $[\![\mathrm{p}_L\mathfrak{b}_b]\!]$ 都不横截相交（蓝色点线）。

现在对 $\mathcal{D}$ 进行筛选，得到以下子结构。

定义 7.12. 如果对每个 $1 < i < L'$ 都满足以下条件，则称双梯 $\mathcal{D}' = (\sigma'_i)_{i\in[L']}$（其中 $\sigma'_i = (p_{i'}, \mathfrak{b}_{i'}, \mathfrak{t}_{i'})$）为等距的：

$$\widehat{\mathrm{dist}}(p'_1, \mathfrak{t}'_i) = \widehat{\mathrm{dist}}(p'_1, \mathfrak{t}'_{L'}) \quad \text{and} \quad \widehat{\mathrm{dist}}(\mathfrak{b}'_1, p'_i) = \widehat{\mathrm{dist}}(\mathfrak{b}'_1, p'_{L'}).$$

注意，对每个 $I \subseteq [L],$，将双梯 $\mathcal{D}$ 限制为仅包含 $i \in I$ 对应的三元组后，仍然是一个双梯（且具有相同的 R）。我们将其称为由 I 诱导的双梯，记作 $\mathcal{D}[I]$。

引理 7.13. 令 L' 表示满足 $\mathcal{D}[I]$ 为等距的集合 $I \subseteq [L]$ 的最大规模。$|\mathcal{D}| = \mathcal{O}(L'\varepsilon^{-2})$.

证明： 用以下元组标记每个 $1 < i \leq |\mathcal{D}|$：$(\widehat{\mathrm{dist}}(p1, \mathfrak{t}_i), \widehat{\mathrm{dist}}(\mathfrak{b}_1, p_i))$。共有 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ 种可能的标记。令 $I_1 \subseteq \{2, 3, \ldots, L\}$ 为一个非空的、由具有相同标记的二元组组成的子集。令 r 为 I_1 的最大元素。现在注意，$I := \{1, r\} \cup I_1$ 诱导出一个等距结构。引理得证。□

引理 7.13 使我们可以将讨论限制在 $\mathcal{D}$ 等距的情形（并力求得到 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ 界）。因此，在下文中，我们假设 $\mathcal{D}$ 是等距的。

7.4.2 禁交

命题 7.11 的一个特例是：

命题 7.14. 对于每个 $1 < a \le L$ 和 $1 \le b < L$，我们都有 $[\![p_1 t_a]\!] \cap [\![b_b p_L]\!] = \emptyset$。

命题 7.14 引出了以下定义。对于 $1 < a < L$，令 $\gamma' a$ 为连接 $[\![p_1 t_a]\!]$ 与 $[\![b_a p_L]\!]$ 的 $\Gamma(\sigma_a)$ 的连接曲线中的最小部分，并令 γ_a 为以下路径的拼接：$[\![p_1 t_a]\!]$ 中从 p_1 到 $\gamma' a$ 端点的子路径、曲线 $\gamma' a$，以及 $[\![b_a p_L]\!]$ 中从 $\gamma' a$ 的第二个端点到 p_L 的子路径。于是，对于 $1 < a < b < L$，两条曲线 γ_a 和 γ_b 只能共享一段以 p_1 为起点的前缀，或一段以 p_L 为终点的后缀；除此之外，它们彼此不相交，并形成“肋骨笼”结构；见图 10a。

在继续清理肋骨笼之前，我们从 $\mathcal{D}$ 等距这一事实推知，还有一些路径二元组不相交。

命题 7.15。 对于每个 $1 < a \le b < L$，我们有 $[\![p_1 t_a]\!] \cap [\![p_b t_L]\!] = \emptyset$ 和 $[\![b_1 p_a]\!] \cap [\![b_b p_L]\!] = \emptyset$

证明： 我们证明第一个结论；第二个结论的证明类似。

用矛盾法，假设 $[\![p_1 t_a]\!]$ 和 $[\![p_b t_L]\!]$ 相交。由命题 5.13，

$$(1-\varepsilon)R + \mathrm{dist}(p_1, t_a) \ge \mathrm{dist}(p_b, t_L) + \mathrm{dist}(p_1, t_a) \ge \mathrm{dist}(p_b, t_a) + \mathrm{dist}(p_1, t_L) \ge R + \mathrm{dist}(p_1, t_L).$$

然而，根据等距结构的定义，$\mathrm{dist}(\overset{\frown}{p1}, t_a) = \mathrm{dist}(\overset{\frown}{p1}, t_L)$，这意味着$|\mathrm{dist}(p1, t_a) - \mathrm{dist}(p1, t_L)| \le \delta$，这就产生了矛盾。□

7.4.3 肋条排序

回想一下，双梯 $\mathcal{D}$ 假设为等距的。还要回想，所有路径 $[\![p_1 t_a]\!]$，其中$1 < a \le L$，构成一棵以p_1，为根的最短路径树，且所有终端 t_a 在G中的度均为 1，因此这棵树在指标$\{2, 3, \ldots, L\}$上确定一个循环顺序（例如顺时针顺序）。对所有路径 $[\![b_1 p_a]\!]$，其中 $1 < a \le L$，也有类似的结论。肋骨 γ_a 不会横截交叉，且只能共享前缀或后缀；由此可知，将这些顺序限制在$\{2, 3, \ldots, L-1\}$上后，它们互为逆序。

经典的 Erd˝os-Szekeres 定理使我们能够在这个顺序中找到一个较长的单调子序列。

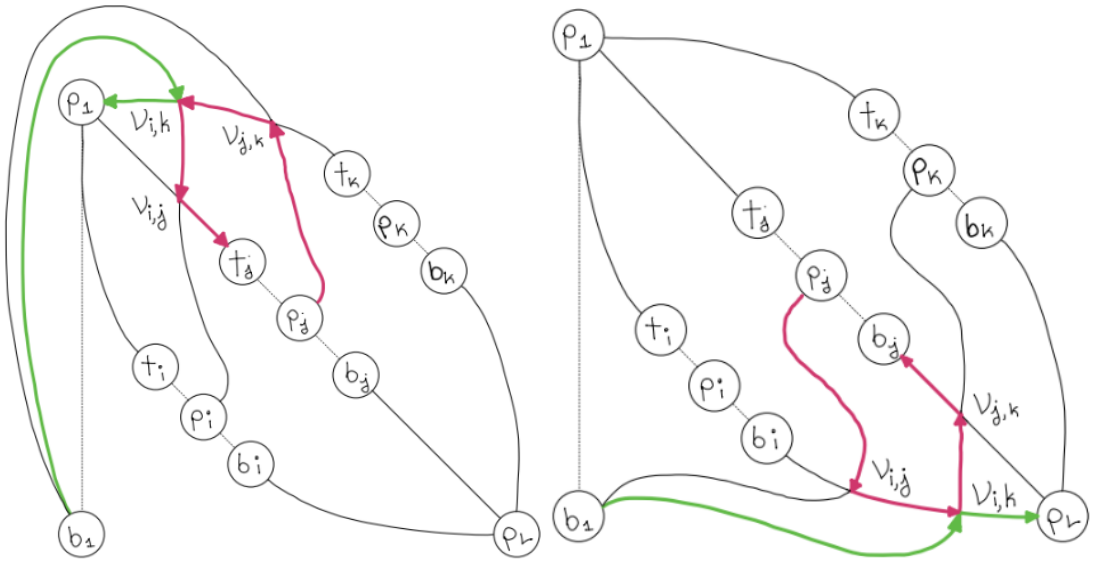
定理 7.16（Erd˝os-Szekeres [29]）。 对于r、$s \in \mathbb{Z}_{>0}$，任何由不同实数构成且长度至少为 $(r-1)(s-1)+1$ 的序列，都包含一个长度为r的单调递增子序列，或一个长度为s的单调递减子序列。

如果子集 $I \subseteq \{2, \ldots, L-1\}$ 的大小为 $|I| \ge 3$，并且 有序，那么 I 的指标在路径 $[\![p_1 t_a]\!]$ 绕 p_1 的顺时针顺序中，要么按递增顺序出现，要么按递减顺序出现（等价地，路径 $[\![b_1 p_a]\!]$绕 b_1的顺时针顺序中也如此）；此外，若 i和 j分别是 I的最小元素和最大元素，那么终端 t_L 和 b_1 位于由 γ_i 与 γ_j的拼接所围成、且不包含 γ_a 的区域内，其中 $a \in I \setminus \{i, j\}$。

断言 7.17。 存在一个有序集合 $I \subseteq \{2, \ldots, L-1\}$，其大小为 $\Omega(\sqrt{L})$。

证明：根据 Erd˝os-Szekeres 定理，存在一个子集 $I_0 \subseteq \{2, \ldots, L-1\}$，其大小至少为 $\sqrt{L-2}$，使得 I_0 的指标在路径 $[\![p_1 T_a]\!]$ 绕 p_1 的循环顺序中单调排列，并在路径 $[\![T_1 p_a]\!]$ 绕 T_1的反向循环顺序中单调排列。该循环顺序由以下三处划分为三部分：（1）$[\![p_1 T_L]\!]$ 在绕 p_1，的顺序中的位置；（2）$[\![B_1 p_L]\!]$ 在绕 p_L的顺序中的位置；（3）I_0的最大元素与最小元素之间的位置。选取这三部分中最大的一部分，即可得到所需集合 I，其大小至少为$\frac{1}{3}\sqrt{L-2}$。□

断言 7.17 使我们能够专注于有序集合。稍微滥用一下记号，接下来我们将假设整个 $\{2, \ldots, L-1\}$ 都是有序的（并力求得到关于 $O(\varepsilon^{-1})$的界 L）。



(a) T 型键构造　　(b) B 型键构造

图 11：类似于共匹配分析的结尾，通过重排对 $|\mathbb{I}_T|, |\mathbb{I}_B|$ 给出界。(a) $\mathrm{i} < \mathrm{j} < \mathrm{k}$ 是 I_T 的三个连续指标。在命题 7.19 中，我们按照图中箭头的方向，从 $\mathrm{p}_j, \mathrm{p}_1$ 分别到 $\mathrm{t}_j, \mathfrak{b}_1$，构造路径 P_j（粗粉色线）和 Q_j（粗绿色线），然后将经过的路径段连接起来。显然，即使连续交点 $\mathrm{v}_{a,b}$ 相等，图示也不会有太大变化。(b) 这里 $\mathrm{i} < \mathrm{j} < \mathrm{k}$ 则是 I_B 的三个连续指标。与 T 型情况对称，在命题 7.21 中，我们按照图中箭头的方向，从 $\mathrm{p}_j, \mathfrak{b}_1$ 分别到 $\mathfrak{b}_j, \mathrm{p}_L$，构造路径 P_j（粉色）和 Q_j（绿色），并将每条经过的路径段首尾相接。

7.4.4 构造最终矛盾

通过考察路径 $[\![\mathfrak{b}_1 p_a]\!]$ 对于 $1 <$ 一个 $< L$ 的表现，可以得到最终矛盾。固定 $1 <$ 一个 $< L$。观察如下。

- 对于每个 $1 < b \le a$，$[\![\mathfrak{b}_1 p_a]\!]$ 与 $[\![p_1 \mathfrak{t}_b]\!]$ 不相交，这是因为引理 7.11。
- 对于每个 $a \le b < L$，$[\![\mathfrak{b}_1 p_a]\!]$ 与 $[\![p_L \mathfrak{b}_b]\!]$ 不相交，这是因为引理 7.15。

由于该实例具有顺序性，对于每个 b_1, b_2 满足 $1 < b_1 < a < b_2 < L$ 的情形，γ_{b_1} 与 γ_{b_2} 的拼接构成一条闭合环路，将 $\mathfrak{b}_1$ 与 p_a 分隔开。因此，$[\![\mathfrak{b}_1 p_a]\!]$ 与 $[\![p_L \mathfrak{b}_{b_1}]\!]$ 或 $[\![p_1 \mathfrak{t}_{b_2}]\!]$ 相交。此外，由于顺序性，以下选项之一成立：

T 型： $[\![\mathfrak{b}_1 p_a]\!]$ 与每条路径 $[\![p_1 \mathfrak{t}_b]\!]$ 横截相交，其中 $a < b < L$；若从 $\mathfrak{b}_1$ 到 p_a，则指标 b 按递减顺序排列；且不与任何路径 $[\![p_L \mathfrak{b}_b]\!]$ 横截相交，其中 $1 < b < a$。

B 型： $[\![\mathfrak{b}_1 p_a]\!]$ 与每条路径 $[\![p_L \mathfrak{b}_b]\!]$ 都横截相交，其中 $1 < b < a$，若从 $\mathfrak{b}_1$ 到 p_a，则按指标 b 递增的顺序排列；并且与任何路径 $[\![p_1 \mathfrak{t}_b]\!]$ 都不横截相交，其中 $a < b < L$。

令 I_T 和 I_B 分别表示使选项 T 或 B 成立的 $\{2, \ldots, L-1\}$ 指标集合。现在我们分别分析 I_T 和 I_B；两种分析相似，但并不完全相同。

T 型分析。对于两个指标 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{I}_T$，且 $\mathrm{a} < \mathrm{b}$，令 $\mathrm{v}_{a,b}$ 为 $[\![\mathfrak{b}_1 \mathrm{p}_a]\!]$ 与 $[\![\mathrm{p}_1 \mathfrak{t}_b]\!]$ 的交点中的任意一个顶点。我们已经证明，对于固定的 $\mathrm{a} \in \mathrm{I}_T$，当 $\mathrm{b} \in \mathrm{I}_T$ 且 $\mathrm{b} > \mathrm{a}$ 时，顶点 $\mathrm{v}_{a,b}$ 沿 $[\![\mathfrak{b}_1 \mathrm{p}_a]\!]$ 按递减顺序排列（从 $\mathfrak{b}_1$ 走向 p_a 时；两个相邻顶点 $\mathrm{v}_{a,b}$ 可能相同）。我们注意到，沿 $[\![\mathrm{p}_1 \mathfrak{t}_b]\!]$ 也有同样的结论。

命题 7.18。 对于每个 $b \in I_T$，当 $a \in I_T$ 且 $a < b$ 时，顶点 $v_{a,\,b}$ 沿 $[\![p_1 t_b]\!]$ 按递增顺序排列（沿此路径从 p_1 走向 t_b 时；两个相邻顶点 $v_{a,\,b}$ 可能相同）。

证明：反设：对于某个 $a_1 < a_2 < b$、$a_1, a_2 \in I_T$，顶点 $v_{a_1,b}$ 比 $v_{a_2,b}$ 更靠近 t_b on$[\![p_1 t_b]\!]$。于是，路径 $[\![b_1 p_{a_1}]\!]$ 在 $v_{a_1,b}$ 处穿过了无自交的闭合环路 γ；该环路由以下部分拼接而成：(i) 从 p_L 到 $v_{a_2,b}$ 的 γ_b 的一部分；(ii) 从 $v_{a_2,b}$ 到 p_{a_2} 的 $[\![b_1 p_{a_2}]\!]$ 子路径；(iii) 从 p_{a_2} 到 b_{a_2} 的 $\Gamma(\sigma_{a_2})$；(iv) $[\![b_{a_2} p_L]\!]$。根据顺序，γ 将对于 $L > a > a_2$ 的顶点 p_a 与对于 $1 < a < a_2$，的顶点 p_a 分隔开，而 a_1 位于另一侧。这就产生了矛盾。□

这使我们能够对 $|I_T|$ 获得一个界，方式与共匹配分析末尾类似。（另见图11a。）

命题 7.19。 $|I_T| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$。

证明：设 $i < j < k$ 是 I_T 的三个连续指标。我们按如下方式构造一条连接 p_j 和 t_j 的路径 P_j：从 p_j 出发，沿着 $[\![p_j b_1]\!]$ 继续前进至 $v_{j,\,k}$ 然后沿着 $[\![p_1 t_k]\!]$ 朝 p_1 的方向前进至 $v_{i,\,k}$再沿着 $[\![b_1 p_i]\!]$ 朝 p_i 的方向前进至 $v_{i,\,j}$最后沿着 $[\![p_1 t_j]\!]$前进至 t_j。我们按如下方式构造一条连接 p_1 和 b_1 的路径 Q_j：从 b_1 出发，沿着 $[\![b_1 p_i]\!]$ 继续前进至 $v_{i,\,k}$然后沿着 $[\![p_1 t_k]\!]$ 前进至 p_1。共有 $|I_T| - 2$ 条路径 P_j 和 $|I_T| - 2$ 条路径 Q_j，且每条路径 P_j 或 Q_j 的长度至少为 R。

在重排中，我们只使用路径 $[\![p_1 t_i]\!]$ 和 $[\![b_1 p_i]\!]$ 的边，针对$i \in I_T$，且不会重复使用同一条边。这些路径的长度均不超过 $(1-\varepsilon)R$。因此，

$$2|I_T| \cdot (1-\varepsilon)R \geq (2|I_T| - 4) \cdot R.$$

这意味着 $|I_T| \leq 2\varepsilon^{-1}$，正如所需。 □

B 型分析。对于两个指标 $a, b \in I_B$，$b < a$，设 $v_{a,b}$ 是$[\![b_1 p_a]\!]$ 和 $[\![p_L b_b]\!]$的交点处的任意一个顶点。我们已经证明，对于固定的 $a \in I_B$，当 $b \in I_B$，$b < a$ 时，顶点 $v_{a,b}$ 沿 $[\![b_1 p_a]\!]$ 按递增顺序排列（从 b_1 到 p_a 时；相邻的两个顶点 $v_{a,b}$ 可能相同）。我们注意到，沿着 $[\![p_L b_b]\!]$ 也有同样的结论。

命题 7.20. 对于每个 $b \in I_B$，当沿路径 $[\![p_L b_b]\!]$ 从 p_L 到 b_b 遍历时，顶点 $v_{a,b}$（其中 $a \in I_B$，且 $a > b$）按递减顺序排列（两个连续的顶点 $v_{a,b}$ 可能相等）。

证明：假设结论不成立：对于某个 $b < a_1 < a_2$，$a_1, a_2 \in I_B$，顶点 $v_{a_1,b}$ 在路径$[\![p_L b_b]\!]$ 上比 $v_{a_2,b}$ 更靠近 p_L。那么，路径 $[\![b_1 p_{a_2}]\!]$ 在 $v_{a_2,b}$ 处与闭合环路 γ 相交。该环路无自交，由以下部分拼接而成：(i) γ_b 从 p_1 到 $v_{a_1,b}$ 的一段；(ii) $[\![b_1 p_{a_2}]\!]$ 中从 $v_{a_1,b}$ 到 p_{a_1}的子路径；(iii) $\Gamma(\sigma_{a_1})$ 从 p_{a_1} 到 t_{a_1}；(iv) $[\![p_1 t_{a_1}]\!]$。根据顺序，γ 将 $L > a > a_1$ 对应的顶点 p_a 与 $1 < a < a_1$，对应的顶点 p_a 分隔开，而 a_2 位于另一侧。这就产生了矛盾。□

这使我们能够像共匹配分析末尾那样，得到关于 $|I_B|$ 的界。（另见图11b。）

命题 7.21。 $|I_B| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$。

证明：设 $i < j < k$ 是 I_B 的三个连续指标。我们按如下方式构造一条连接 p_j 和 b_j 的路径 P_j：从 p_j 出发，沿着 $[\![p_j b_1]\!]$ 走到 $v_{i,j}$，然后沿着 $[\![p_L b_i]\!]$ 朝 p_L 的方向走到 $v_{i,k}$，接着沿着 $[\![b_1 p_k]\!]$ 朝 p_k 的方向走到 $v_{j,k}$，最后沿着 $[\![p_L b_j]\!]$ 到达 b_j。我们按如下方式构造一条连接 b_1 和 p_L 的路径 Q_j：从 b_1 出发，沿着 $[\![b_1 p_i]\!]$ 走到 $v_{i,k}$，然后沿着 $[\![p_L b_k]\!]$到达 p_L。共有 $|I_B| - 2$ 条路径 P_j 和 $|I_B| - 2$ 条路径 Q_j。每条路径 P_j 的长度至少为 R，而每条路径 Q_j 的长度至少为 $\mathrm{dist}(b_1, p_L)$。此外，由于该实例是等距的，对于每个 $j \in I_B$，都有$|\mathrm{dist}(b_1, p_L) - \mathrm{dist}(b_1, p_j)| \leq \delta$。

在重排中，我们只使用了路径 $[\![p_L \mathfrak{b}_i]\!]$ 和 $[\![\mathfrak{b}_1 p_i]\!]$ 的边，其中 $i \in I_B$，且不会重复使用同一条边。因此，

$$\sum_{i \in I_B} \big(\mathsf{dist}(\mathfrak{b}_1, p_i) + \mathsf{dist}(p_L, \mathfrak{b}_i)\big) \geq (|I_B| - 2)R + (|I_B| - 2)\mathsf{dist}(\mathfrak{b}_1, p_L).$$

上式左侧的每个距离都至多为 $(1-\varepsilon)R$，且路径$[\![\mathfrak{b}_1 p_i]\!]$ 的长度与$\mathsf{dist}(\mathfrak{b}_1, p_L)$ 相差不超过 δ。因此，

$$(|I_B| + 2)(1-\varepsilon)R + (|I_B| - 2)\delta \geq (|I_B| - 2)R.$$

这就推出 $|I_B| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$，证毕。 □

引理 7.3 的证明至此结束。

8 带孔多边形

这里我们证明，带孔多边形中点的最远邻居问题存在多项式核集界。这可由下文的引理 8.1 和定理 1.2推出。

引理 8.1。 设 $f(\varepsilon)$ 为平面度量空间中任意 $\varepsilon \in (0,1)$ 的最远邻居问题的 ε-核心集的最大规模。则我们可以为带孔多边形中任意点集的最远邻居问题构造一个大小为 $f(\varepsilon/8)$ 的 ε-核心集。

证明： 设 $\mathcal{P}$ 是平面上的一个带孔多边形，P 是 $\mathcal{P}$ 中的一个点集。设 $\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}$ 是 $\mathcal{P}$ 中点与点之间的测地距离函数。设 Δ 是 P 的直径。设 P^+ 是距 P 不超过 Δ/ε 的点集。注意，对于任意点 $q \in V \setminus P^+$，任意点 $p \in P$ 都是 q 的一个 $(1-\varepsilon)$ 近似最远邻居。因此，只要核心集非空，$V \setminus P^+$ 中的点便都已处理。

在此，我们关注 P^+ 中的点。设 Q 是 P^+ 的一个 $(\varepsilon\Delta/8)$-网。也就是说，对于每个点 $\mathrm{x} \in \mathrm{P}^+$，都存在一个点 $\mathrm{y} \in$Q，使得 $\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq \varepsilon\Delta/8$；并且对于 $\mathrm{Q} \in$ 中任意两点 x、y，都有 $\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > \varepsilon\Delta/8$。如果对于每个 $\mathrm{q} \in$Q，都存在一个点 $\mathrm{p} \in \mathrm{C}$，使得：我们称子集 $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{P}$ 是 P 关于 Q 的一个最远 $(\varepsilon/8)$-核心集：

$$\mathsf{dist}_{\mathcal{P}}(p, q) \geq (1-\varepsilon)\mathsf{dist}_{\mathcal{P}}(p^*, q)$$

其中 p^* 是q 在p中的最远邻居。也就是说，C 只保留Q中各点的最远邻居。下面的断言表明，只需将范围限制在Q内；证明将留待后文给出。

断言 8.2. 设 C 是将范围限制在 Q 内的 P 的最远邻居 $(\varepsilon/8)$-核心集。那么，C 是将范围限制在 P^+ 内的 P 的最远邻居 ε-核心集。

设 $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E}, \mathrm{w})$ 是一个边赋权平面图，满足：(i) 顶点集满足 $\mathrm{Q} \cup \mathrm{P} \subseteq \mathrm{V} \subseteq \mathcal{P}$；(ii) 对所有 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$，$\mathrm{dist}_{\mathrm{G}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$；(iii) 对每条边 $\mathrm{E} = (\mathrm{u}, \mathrm{v})$，$\mathrm{w}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(\mathrm{u}, \mathrm{v})$。这样的图 G 存在 [5]。（构造 G 的基本思路是取连接 Q 中所有点对的测地线，并在任意两条测地线的交点处放置一个顶点；由于多边形的平面性，该图是平面图。）接下来，我们为 G 的最短路径度量构造一个大小为 $\mathrm{f}(\varepsilon/8)$ 的 P 的最远邻居$(\varepsilon/8)$-核心集 $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{P}$。由于 G 保持了 $\mathrm{P} \cup$Q 中各点之间的两两距离，C 是将范围限制在 Q 内的 P 的一个 ε-核心集。因此，根据断言 8.2，C 是将范围限制在 P^+ 内的 P 的最远邻居 ε-核心集，进而也是整个定义域 $\mathcal{P}$上的核心集。□

现在我们证明命题 8.2，这只是三角不等式的一个直接应用。

证明（命题 8.2的证明）： 设 x 是P^+ 中的一个点，y 是Q 中的一个点，且满足 $\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,y) \leq \varepsilon\Delta/8$；根据$Q$的定义，$y$ 存在。设x 和y 在P中的最远邻居分别为x^* 和y^*。由于P 的直径至多为 Δ，根据三角不等式：

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,x^*), \mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(y,y^*) \geq \Delta/2$$

由于 C 是限制在Q上的 $(\varepsilon/8)$-核心集，因此存在一点 $\hat{y} \in C$，使得：

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(y,\hat{y}) \geq (1-\varepsilon/8)\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(y,y^*)$$

我们的目标是证明 $\hat{y}$ 是x的 $(1-\varepsilon)$-近似最远邻居，如下所示：

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,\hat{y}) &\geq \mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(y,\hat{y}) - \mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,y) && \text{(triangle inequality)} \\
&\geq (1-\varepsilon/8)\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(y,y^*) - \mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,y) && \text{(by definition of } \hat{y}) \\
&\geq (1-\varepsilon/8)\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(y,x^*) - \mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,y) && \text{(since } y^* \text{ is furthest neighbor of } y) \\
&\geq (1-\varepsilon/8)(\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,x^*) - \mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,y)) - \mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,y) && \text{(triangle inequality)} \\
&\geq (1-\varepsilon/8)\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,x^*) - 2\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,y) \\
&\geq (1-\varepsilon/8)\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,x^*) - \varepsilon\Delta/4 && \text{(since } \mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,y) \leq \varepsilon\Delta/8) \\
&\geq (1-\varepsilon/8)\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,x^*) - (\varepsilon/2)\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,x^*) && \text{(since } \mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,x^*) \geq \Delta/2) \\
&\geq (1-\varepsilon)\mathrm{dist}_{\mathcal{P}}(x,x^*)\,,
\end{aligned} \tag{3}$$

如所期望的。 □

9 有界亏格图

由可嵌入有界欧拉亏格曲面的图所诱导的度量空间的上界，将通过利用割图归约为平面度量空间。下面我们将重用为类似论证所定义的一些形式体系，见 [38]。

对于曲面 Σ，嵌入在H 中的图 Σ 若仅有一个同胚于开圆盘的面，则称其为简单割图。特别地，沿 $\Sigma \rtimes H$ 中 Σ 图H 的边的嵌入进行切割后得到的曲面是一个圆盘。

设 G 是嵌入在 Σ 中的图，H 是其子图，且是 Σ的简单割图。我们将 $G \rtimes H$ 定义为从 G 按如下方式得到的嵌入在 $\Sigma \rtimes$中的图。首先，令 σ 为 H 的（唯一）面游走。H 的每条边 e 在 σ 中恰好出现两次，H 的每个顶点 v 在 σ 中出现的次数则等于 v 在 H 中的度。为了得到 $G \rtimes H$，我们用一个简单环 C_σ替换 H，其中 C 的顶点集是 H 的顶点副本构成的集合，边集则是以显而易见的方式定义的 H 的边副本构成的集合。注意，σ 还规定：对于 G 中连接顶点 $u \in V(G) \setminus V(H)$与顶点 $v \in V(H)$的每条边 uv，$G \rtimes H$ 中 u 应与 v 在 $G \rtimes H$ 中的哪个副本相邻。

我们的归约的关键组成部分是以下广为人知的结果；例如，参见 [8, 13, 30]。

引理 9.1. 对于每个整数 $k \geq 1$，以及每个嵌入在曲面 Σ 上的边赋权连通图 G（其欧拉亏格至多为 g），对于每个顶点 $u \in V(G)$，都存在 G 的一个子图 H，满足以下性质：

- H 是 Σ 的一个简单割图，且
- $V(H)$ 是 G 中 $\mathcal{O}(g)$ 条以 u 为公共端点的最短路径的顶点集之并。

特别是，如果 G 的直径为 Δ，那么 H 在 $G \rtimes H$ 中的顶点副本集合可以用至多 $\mathcal{O}(g)$ 条长度不超过 Δ 的路径覆盖。

对于 ε-共匹配和 ε-双梯子的上界证明遵循非常相似的结构；因此，我们将定义以下 ε-双半梯概念，以同时刻画这两种结构。

定义 *9.2*（ε-双半梯）。令 $\mathcal{D} = \{(p1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{t}_1), (p2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{t}_2), \ldots, (p_\ell, \mathfrak{b}_\ell, \mathfrak{t}_\ell)\} \subseteq V^3$ 为度量空间 $(V, dist)$中的一列点的有序三元组，且 $\varepsilon \in (0,1)$ 为一个参数。若存在 $R > 0$ 满足以下条件，则称 $\mathcal{D}$ 为一个 ε-双半梯：

1. 对于每个 $1 \le i < j \le \ell$,

$$\mathrm{dist}(p_i, \mathfrak{t}_j) \le (1-\varepsilon)R \quad \text{and} \quad \mathrm{dist}(p_j, \mathfrak{b}_i) \le (1-\varepsilon)R.$$

2. 对于每个 $1 \le i \le \ell$,

$$\mathrm{dist}(p_i, \mathfrak{t}_i) > R \quad \text{and} \quad \mathrm{dist}(p_i, \mathfrak{b}_i) > R;$$

ε-双半梯实例是一个二元组 $(G, \mathcal{D})$，其中 G 是一个图，而 $\mathcal{D}$ 是由 G 诱导的图度量中的一个 ε-双半梯。

注意，这一概念推广了 ε-共匹配和 ε-双梯：前者可通过令 $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{t}_i = q_i$ 得到；后者则是一个特例，其中我们还要求对于 $1 \le i < j \le \ell$，距离$\mathrm{dist}(p_j, \mathfrak{t}_i)$、$\mathrm{dist}(p_i, \mathfrak{b}_j)$ 足够大。归约本身由以下引理实现。

引理 9.3。任取整数 $g \ge 0$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$。设 $(G, \mathcal{D} = \{(p_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{t}_i)\}_{i \in [L]})$ 是一个 ε-重半梯实例，且 G 可嵌入欧拉亏格至多为 g 的曲面中。那么，存在一组指标 $j_1, \ldots\ldots, j_{L'} \in [L]$，、一个平面图 G' 以及一个映射 η： $V(G) \to V(G')$，使得：

- $\mathrm{dist}_{G'}(\eta(p_{j_x}), \eta(\mathfrak{t}_{j_y})) \ge \mathrm{dist}_G(p_{j_x}, \mathfrak{t}_{j_y})$ *and* $\mathrm{dist}_{G'}(\eta(p_{j_x}), \eta(\mathfrak{b}_{j_y})) \ge \mathrm{dist}_G(p_{j_x}, \mathfrak{b}_{j_y})$ *for* $x, y \in [L']$,
- $\mathrm{dist}_{G'}(\eta(p_{j_x}), \eta(\mathfrak{t}_{j_y})) = \mathrm{dist}_G(p_{j_x}, \mathfrak{t}_{j_y})$ *for* $1 \le x < y \le L'$,
- $\mathrm{dist}_{G'}(\eta(p_{j_y}), \eta(\mathfrak{b}_{j_x})) = \mathrm{dist}_G(p_{j_y}, \mathfrak{b}_{j_x})$ *for* $1 \le x < y \le L'$,
- $L = \mathcal{O}(g^4 \varepsilon^{-8}) \cdot L'$.

证明：设

$$R := \min_{i \in [L]} \min(\mathrm{dist}(p_i, \mathfrak{b}_i), \mathrm{dist}(p_i, \mathfrak{t}_i))$$

并令 $\delta := \varepsilon R/100$。不失一般性，可假设 G 的每条边都位于某条路径 $[\![p_i \mathfrak{t}_j]\!]$ 或$[\![p^j$上，$\mathfrak{b}_i]\!]$ 其中 $1 \le i < j \le L$，因此根据断言 7.4中的相同论证，G的直径至多为 $8R$。

令 u $\in$V (G)为 V(G)中的任意顶点。令 H 为对 G 应用以端点 u 为参数的引理 9.1 后得到的 G 的一个子图。对于 v $\in$V(G)，令 μ(v) 表示执行切割后，G⋊H 中由 v 拆分得到的所有顶点。特别地，当 v $\notin$V (H)时，有 μ(v) = {v}。对于任意 u、v $\in$V (G)以及 u′ $\in \mu$(u)、v′ $\in \mu$(v)，都有 distG⋊H(u′、v′) $\ge$ distG(u、v)，也就是说，切割过程只会增加顶点之间的距离。此外，如果 distG⋊H(u′、v′) > distG(u、v)，那么 G 中从 u 到 v 的最短路径必定经过 V(H)。对于每个 μ(v)，我们任意选取其中一个顶点，并将其记为 η(v)。

令 $\mathcal{D}'$ 为 $\mathcal{D}$ 在 $G \rtimes H$ 上的一个投影，即 $\mathcal{D}' = \{(\eta(p_i), \eta(\mathfrak{b}_i), \eta(\mathfrak{t}_i)) : i \in [L]\}$。注意，所有二元组 $(\eta(p_i), \eta(\mathfrak{b}_i))$ 和 $(\eta(p_i), \eta(\mathfrak{t}_i))$ 的距离仍至少为 R；然而，某些在 $\mathcal{D}$ 中彼此接近的二元组 $(\eta(p_i), \eta(\mathfrak{t}_j))$ 或 $(\eta(p_j), \eta(\mathfrak{b}_i))$，在切割后可能也变得相距甚远。

令 X = $\bigcup_{v \in V(H)} \mu$(v)。由于 V (H)包含在 G 中至多 $\mathcal{O}$(g) 条长度不超过 8R 的最短路径的并集中，因此 X 在 G⋊H 中也满足同样性质。特别地，存在一个大小为 $\mathcal{O}(g\varepsilon^{-1})$ 的集合 Z，使得每个 x $\in$X 到 G⋊H 中某个 z $\in$Z 的距离至多为 δ。将三元组 $(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}) \in \mathcal{D}'$ 按照 p 到 Z 在 G⋊H 中的取整距离剖面分组。由于 G⋊H 是平面的，由引理 7.5 可得

此类分组的数量为 $\mathcal{O}(g^4\varepsilon^{-8})$。特别地，存在一个子集 $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$，使得对所有 $(p_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{t}_i) \in \mathcal{D}_0$，顶点 p_i 共享到 X 的取整距离剖面，并且 $L = \mathcal{O}(|\mathcal{D}_0| \cdot g^4\varepsilon^{-8})$。

令 $\mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_{L'}$ 为 $\mathcal{D}_0$ 中三元组 $(\eta(\mathfrak{p}_{j_i}), \eta(\mathfrak{b}_{j_i}), \eta(\mathfrak{t}_{j_i}))$ 的指标。我们要证明，指标 $(\mathfrak{j}_i)_{i\in[L']}$、图 $G \bowtie H$ 和映射 η 满足引理的陈述。对于所有 $\mathfrak{v}, \mathfrak{u} \in V(G)$，条件 $\mathrm{dist}_{G\bowtie H}(\eta(\mathfrak{v}), \eta(\mathfrak{u})) \geq \mathrm{dist}_G(\mathfrak{v}, \mathfrak{u})$ 立即成立；而 $L = \mathcal{O}(g^4\varepsilon^{-8}L')$ 则由我们选择$\mathcal{D}_0$的方式得出。反设存在两个指标 $\mathfrak{j}_x < \mathfrak{j}_y$，使得 $\mathrm{dist}_{G\bowtie H}(\eta(\mathfrak{p}_{j_x}), \eta(\mathfrak{t}_{j_y}))$ 或 $\mathrm{dist}_{G\bowtie H}(\eta(\mathfrak{p}_{j_y}), \eta(\mathfrak{b}_{j_x}))$ 小于 $(1-\varepsilon)$ $[\![\mathfrak{p}_{j_x}\mathfrak{t}_{j_y}]\!]_{(1-\varepsilon)}$，大于 $(1-\varepsilon)$ $[\![\mathfrak{p}_{j_x}\mathfrak{t}_{j_y}]\!]_{(1-\varepsilon)}$。不失一般性，假设前者成立。我们有 $\mathrm{dist}_G(\mathfrak{p}, \mathfrak{R})$，因此路径 $\mathfrak{p}$ 穿过 $\mathfrak{V}_H$。

令u为$V(H)$中从p_{j_x}到$\mathfrak{t}_{j_y}$的一条路径上的第一个顶点。特别地，存在$u^* \in \mu(u) \subseteq X$，使得$\mathrm{dist}_G(p_{j_x}, u) = \mathrm{dist}_{G\bowtie H}(\eta(p_{j_x}), u^*)$。令$z \in Z$为$G\bowtie H$中距$u^*$至多为 δ 的顶点。我们有

$$\mathrm{dist}_G(p_{j_y}, u) \leq \mathrm{dist}_{G\bowtie H}(\eta(p_{j_y}), u^*) \leq \mathrm{dist}_{G\bowtie H}(\eta(p_{j_y}), z) + \delta \leq$$

$$\leq \mathrm{dist}_{G\bowtie H}(p_{j_x}, z) + 2\delta \leq \mathrm{dist}_{G\bowtie H}(p_{j_x}, u^*) + 3\delta = \mathrm{dist}_G(p_{j_x}, u) + 3\delta,$$

其中所有不等式都由三角不等式以及 $\eta(p_{j_x})$、$\eta(p_{j_y})$到z的舍入距离相同这一事实推出。因此，

$$\mathrm{dist}_G(p_{j_y}, \mathfrak{t}_{j_y}) \leq \mathrm{dist}_G(p_{j_y}, u) + \mathrm{dist}_G(p_{j_x}, \mathfrak{t}_{j_y}) - \mathrm{dist}_G(p_{j_x}, u) \leq \mathrm{dist}_G(p_{j_x}, u) + 3\delta + (1-\varepsilon)R - \mathrm{dist}_G(p_{j_x}, u) < R,$$

这与 $\mathcal{D}$ 是G中的一个 ε-双梯矛盾。

因此，我们对j_i 和 ν 的选择满足引理陈述，证明至此完成。 □

证明（定理 1.6 的证明）：令$\{(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i)\}_{i\in[L]}$ 为G中欧拉亏格至多为g的一个 ε-共匹配。令$\mathfrak{R} = \min_{i\in[L]} \mathrm{dist}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i)$。集合$\{(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_i)\}_{i\in[L]}$是G中的一个 ε-双半梯。取一个平面图G'、指标$\mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_{L'} \in [\mathfrak{L}]$以及映射 $\eta : V(G) \to V(G')$，由引理 9.3 应用于$(G, \{(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_i)\}_{i\in[L]})$得到。我们有：

- $\mathrm{dist}_{G'}(\eta(p_{j_x}), \eta(q_{j_x})) \geq \mathrm{dist}_G(p_x, q_x) > R$ for $x \in [L']$, and
- $\mathrm{dist}_{G'}(\eta(p_{j_x}), \eta(q_{j_y})) = \mathrm{dist}_G(p_x, q_y) \leq (1-\varepsilon)R$ for $x, y \in [L']$, $x \neq y$,

因此 $\{(\eta(p_{j_i}), \eta(q_{j_i}))\}_{i\in[L']}$是一个 ε-共匹配，属于 G'，根据定理 1.5 其大小至多为 $L_{\mathrm{planar}}(\varepsilon^{-1})$。因此，$L \leq \mathcal{O}(g^4\varepsilon^{-8}) \cdot L_{\mathrm{planar}}(\varepsilon^{-1})$ 证明完毕。 □

证明（定理 1.18 的证明）：令 $\mathcal{D} = \{(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{t}_i)\}_{i\in[L]}$ 为 G 中一个欧拉亏格至多为 g 的 ε-双梯。令 $\mathfrak{R} = \min_{i\in[L]} \min(\mathrm{dist}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{b}_i), \mathrm{dist}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{t}_i))$。取一个平面图 G'、指标 $\mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_{L'} \in [\mathfrak{L}]$ 以及映射 $\eta : V(G) \to V(G')$，由引理 9.3 应用于 $(G, \mathcal{D})$ 得到。我们有：

- $\mathrm{dist}_{G'}(\eta(p_{j_x}), \eta(\mathfrak{t}_{j_y})) = \mathrm{dist}_G(p_{j_x}, \mathfrak{t}_{j_y}) \leq (1-\varepsilon)R$ for $1 \leq x < y \leq L'$,
- $\mathrm{dist}_{G'}(\eta(p_{j_y}), \eta(\mathfrak{b}_{j_x})) = \mathrm{dist}_G(p_{j_y}, \mathfrak{b}_{j_x}) \leq (1-\varepsilon)R$ for $1 \leq x < y \leq L'$,
- $\mathrm{dist}_{G'}(\eta(p_{j_y}), \eta(\mathfrak{t}_{j_x})) \geq \mathrm{dist}_G(p_{j_y}, \mathfrak{t}_{j_x}) > R$ for $1 \leq x \leq y \leq L'$,
- $\mathrm{dist}_{G'}(\eta(p_{j_x}), \eta(\mathfrak{b}_{j_y})) \geq \mathrm{dist}_G(p_{j_x}, \mathfrak{b}_{j_y}) > R$ for $1 \leq x \leq y \leq L'$,

因此 $\{(\eta(p_{j_i}), \eta(\mathfrak{b}_{j_i}), \eta(\mathfrak{t}_{j_i}))\}_{i\in[L']}$是一个 ε-双梯，属于 G'，因此根据定理 1.17 其大小至多为 L' 平面(ε^{-1})。因此，$L \leq \mathcal{O}(g^4\varepsilon^{-8}) \cdot L'$ 平面(ε^{-1})，证明完毕。 □

10 下界

10.1 超越有界亏格图：定理证明 1.7

我们先重述定理 1.7：

定理 1.7（最远邻居与共匹配的下界构造）。对于每个整数 $k \geq 3$，都存在一个图 G_k，具有以下性质：

1. G_k 包含一个大小为 2^k 的 $(2k-1)$-共匹配。*2.* G_k 有一个树分解，其中每个袋的大小至多为 6，每个粘合度至多为 2（因此，特别地，其树宽为常数）；*3.* G_k 不含 $K_{3,4}$ 子式；*4.* G_k 不含 K_5 子式；*5.* G_k 的欧拉亏格介于 2^{k-3} 和 2^k 之间。

证明：对于非负整数 k，我们按如下方式定义无向整数加权图 G_k。首先，构造两棵完全二叉树 T_1 和 T_2，其根节点分别为 r_1 和 r_2，，且高度均为 k 条边，并令 $I : V(T_1) \to V(T_2)$ 为它们之间任意一个同构。令 $S : V(T_1) \to V(T_1) \cup \{\perp\}$ 为一个函数：对于 T_1 的顶点 v，返回其唯一的兄弟节点（根节点 r_1，除外，对它 $S(r_1) = \perp$）。然后，除了二叉树的边之外，添加所有形如 $(v, I(B(v)))$ 的边，其中 $v \neq r$（我们称之为匹配边）。此外，T_1 和 T_2 的所有边权重均为单位权重，而每条边 $(v, I(B(v)))$ 的权重为 $2\text{dist}(r_1, v) - 1$。图 12 给出了 G_3 的示例。

我们将证明G_k 满足所有必要的性质。

1. 令 $\mathcal{M}$ 为所有二元组 $(l、I(l))$组成的集合，其中l 是上方树T_1的一个叶节点。由于T_1 有 2^k 个叶子，该集合的大小为 2^k。

断言 10.1。 $\mathcal{M}$ 是一个 $(2k-1)$-共匹配。

这一断言将用于证明条目 1。

证明： 考虑一对叶子 $(l、m)$，其中 $l \in V(T_1)$ 且 $m \in V(T_2)$。我们旨在证明 $\text{dist}(l、m) \leq 2k-1 \Leftrightarrow I(l) \neq m$。细心的读者可以查看图 12中上方树最左侧叶子到其他节点的距离，并注意到这些模式很容易推广到更大的 k值；不过，我们仍将给出更详细的证明。

令 $p : V(G_k) \to V(G_k) \cup \{\perp\}$ 为一个函数，它将顶点映射到其所属树中的父节点（根节点 r_1 和 r_2，除外，此时 $p(r_1) = p(r_2) = \perp$）。考虑序列 $P_l = (l、p(l)、p^2(l)、\ldots、p^k(l))$ 以及 $P_m = (m、p(m)、p^2(m)、\ldots、p^k(m))$。由于 $p^k(l) = r_1, p^k(m) = r_2$ 且 $I(r_1) = r_2$，，存在最小下标 c，使得 $I(p^c(l)) = p^c(m)$。如果 $m \neq I(l)$，那么 $c > 0$ 且 $I(p^{c-1}(l))$ 是 $p^{c-1}(m)$的兄弟节点，因此 $p^{c-1}(l)$ 与 $p^{c-1}(m)$之间存在一条匹配边。该边的长度为 $2(k-(c-1))-1$，因此路径 $l、p(l)、\ldots、p^{c-1}(l)、p^{c-1}(m)、p^{c-2}(m)、\ldots、p(m)、m$ 的长度为 $2k-1$，这表明 $m \neq I(l) \Rightarrow \text{dist}(l, m) \leq 2k-1$。

现在考虑从 l 到 $I(l)$ 的任意路径。它必定包含一条匹配边——设为 $(x, I(B(x)))$。我们有，$(x, I(B(x)))$ 的权重为 $2\text{dist}(x, r_1) - 1$，且 $\text{dist}(l, x) + \text{dist}(x, r_1) \geq \text{dist}(l, r_1) = k$，$\text{dist}(I(l), I(B(x))) + \text{dist}(I(B(x)), r_2) \geq \text{dist}(I(l), r_2) = k$，并且 $\text{dist}(x, r_1) = \text{dist}(I(B(x)), r_2)$。因此，所考虑路径的长度至少为 $\text{dist}(l, x) + 2\text{dist}(x, r_1) - 1 + \text{dist}(I(B(x)), I(l)) \geq (k - \text{dist}(x, r_1)) + 2\text{dist}(x, r_1) - 1 + (k - \text{dist}(I(B(x)), r_2) = 2k - 1$。然而，要使等式成立，所有上述不等式都必须成为等式。因此，这意味着 x 是 l 的祖先，且 $I(B(x))$ 是 $I(l)$ 的祖先。但若 x 是 l 的祖先，则 $B(x)$ 不是 l 的祖先，$I(B(x))$ 也不是 $I(l)$ 的祖先，由此产生矛盾，证明 $\text{dist}(l, I(l)) > 2k-1$，从而得出 $\mathcal{M}$ 确实是一个 $(2k-1)$-共匹配。□

2. 现在我们着重构造一个 G_k 的树分解，以证明条目 2，并帮助证明条目 3 和条目 4。

令 T 表示 T_1 在其所有非叶子顶点上诱导的子图。我们将树分解设为 $\mathcal{T} = (T, B)$，其中 B 是一个袋函数，使得 $B(v)$ 是一个包含六个顶点 v、s_1，s_2，$I(v)$、$I(s_1)$、$I(s_2)$的袋，其中 s_1和 s_2是 T_1中 v 的子节点。容易验证，这确实是 G_k的一个树分解。显然，它也满足每个袋的大小为 6、粘合度的大小为 2，由此证明了条目 2。

3. 为证明条目 3，我们反设 $K_{3,4}$ 是 G_k的一个子式。换言之，存在 $V(G_k)$的两两不相交子集 L_1，L_2，L_3，R_1，R_2，R_3和 R_4，使得每个子集都诱导出 G_k的一个连通子图，并且对于每一对 $(L_i、R_j)$，都存在一条边连接 L_i中的一个顶点与 R_j中的一个顶点。令 $T^{L_1}, \ldots, T^{R_4}$为 T 的子图，其中 T^X是 T 在满足 $B(v) \cap X \neq \emptyset$的顶点上诱导的子图。由于 $L_1, \ldots, R_4$诱导出 G_k的连通子图，因此 $T^{L_1}, \ldots, T^{R_4}$ 也都是连通的。根据一项已知性质，如果它们两两相交，那么必定存在一个袋与它们全都相交。然而，这不可能，因为该袋的大小至少为七，而 $\mathcal{T}$中的所有袋大小都为六。因此，存在一对 (X、Y)，它们是 $L_1, \ldots, R_4$,中的子集，且 T^X与 T^Y不相交。这一对不可能是 $(L_i、R_j)$的形式，否则 L_i 与 R_j 之间就没有边，这与我们的假设矛盾。首先，假设这一对的形式为 $(L_i、L_j)$。T 中存在一条连接 T^{L_i}与 T^{L_j}的唯一最短路径 P，且 P 至少包含一条边。$T^{R_1}, \ldots, T^{R_4}$都必须同时与 T^{L_i}和 T^{L_j} 相交，因此它们都必须包含 P。然而，这意味着 P 上的粘合度大小都至少为四，这与 $\mathcal{T}$中的粘合度至多为二这一事实矛盾。若不连通的一对形式为 $(R_i、R_j)$，情况类似；不同之处在于，最后的论证得到的粘合度大小至少为三，而非四，但仍然会导致矛盾。至此，条目 3 的证明完成。

4. 由此与条目4矛盾，因此我们假设 K_5 是 G_k的一个子式，也就是说，$V(G_k)$ 中存在五个两两不相交的子集 V_1，V_2，V_3，V_4和 V_5（称为分支集），每个子集都在 G_k 中诱导出一个连通子图，并且每一对分支集之间都有一条边相连。根据一个广为人知的论证，必定存在一个 $\mathcal{T}$ 的袋，其中至少包含五个分支集各自的一个顶点；令 $\hat{B}$ 为这样一个袋。由于 $\hat{B}$ 诱导出一个 C_6，因此至多有 6 对分支集能由 $\hat{B}$ 内的一条边相连。设 $(V_i、V_j)$ 是一对在 $\hat{B}$ 内没有边相连的分支集。这样的二元组至少有 $|E(K_5)| - |E(G_k[\hat{B}])| = 10 - 6 = 4$ 对。如果它们在 $\hat{B}$ 内没有边相连，那么就存在另一个袋同时包含这两个分支集中的顶点，这意味着 $\hat{B}$ 与其某个相邻袋之间存在一个粘合度，其中同时包含 V_i 和 V_j中的顶点。然而，每个粘合度的大小均为二，且 T 中所有顶点的度都不超过三，因此这样的二元组至多有三对，这与至少需要四对这样的二元组矛盾。至此，条目4的证明完成。

5. 为证明条目5，我们注意到 G_3 包含一个 $K_{3,3}$，的拓扑小子图，如图13所示，这表明其欧拉亏格至少为 1。由于当 $k \geq 3$ 时，G_k 包含 2^{k-3} 个两两不相交的 G_3 副本（忽略权重），且每个副本的欧拉亏格至少为 1，因此 G_k 的欧拉亏格至少为 2^{k-3}。另一方面，对每个 $v \in V(T_1) \setminus \{r_1\}$，我们都在图12所示的嵌入中添加一个交叉帽，以容纳边$(v、I(B(v)))$和 $(B(v)、I(v))$的交点，由此得到 G_k嵌入一个曲面，其欧拉亏格等于此类二元组的数量，即 $2^k - 1$。因此，G_k 的欧拉亏格至多为 $2^k - 1$，这就证明了我们的结论。

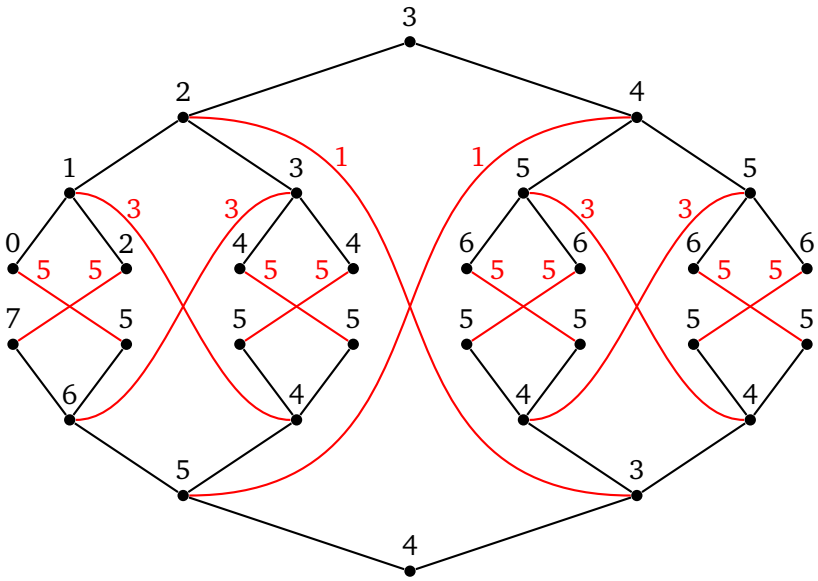


图12：图G_3的示意图。同构I 对应于将上方树沿水平线镜像。匹配边以红色绘制，并标出了它们的权重。我们为每个顶点赋予其到上方树最左侧叶子的距离。

10.2 树中的大型共匹配：定理 1.12的证明

我们重述定理 1.12：

定理 1.12。 对于每个整数 $k \geq 1$，都存在一棵树 G_k，其中含有一个大小为 2^k 的 (k, k)-共匹配。

证明： 设$k \geq 1$ 为一个整数。图G_k 按如下方式构造。首先，取一棵深度为k的满二叉树T_k 。令r 为T_k的根。然后，对于T_k中除h 外的每个顶点$v \neq r$，若<style id='h'>h是T_k中v 到r 的距离，则从v 连接一条长度为h 的路径P_v，并将P_v的另一个端点记为$\hat{}v$ 。至此，图G_k的构造完成。

令 L 为 T_k 的叶子集合。对于每个 v $\in$ L，令 Q_v 为 T_k 中从 v 到 r 的路径。令 $Y_v = N_{T_k}(V(Q_v))$，也就是说，Y_k 是 T_v 中 Q_v 上各顶点的邻居集合。（换言之，构造 Y_v 时，我们从 v 朝 r 前进，并将每个经过的顶点的兄弟节点加入 Y_v =。最后，令 X |{ˆu $\in$u $_v$Y (}。我们声称 $)_{v\in L}$v, X v |满足所需性质。显然，| $= 2^k$L。

L 中各顶点与 ˆu 各顶点之间距离的分析，由以下引理概括。

引理10.2。 设 $v \in L$ 且 $u \in V(T_k)$。那么，

$$\mathrm{dist}(v, \hat{u}) = k + 2\mathrm{dist}(u, V(Q_v)).$$

证明： 令 h = dist(u,r)。显然，u 位于 v 到 ˆu 在 G_k 中的唯一一条路径上。设 u 和 v 在 T_k 中的最近公共祖先为 w；注意，w 也是Q_v 上距离 u 最近的顶点，且dist$(w, r) = h -$ dist(u,w)。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(v, \hat{u}) &= \mathrm{dist}(v, w) + \mathrm{dist}(w, u) + \mathrm{dist}(u, \hat{u}) \\ &= (k - h + \mathrm{dist}(u, w)) + \mathrm{dist}(u, w) + h \\ &= k + 2\mathrm{dist}(u, V(Q_v)).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 10.2 意味着，对于每个 $v \in L$ 和 ˆ$u \in X_v$，都有 dist(v, ˆu) = k + 2，因为根据定义，u 与$V(Q_v)$ 的距离恰好为 1。

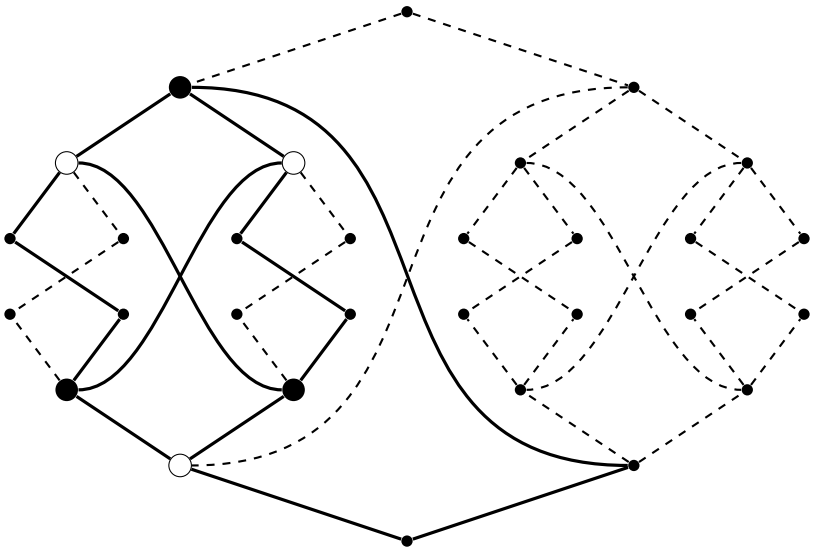


图13：G_3 的绘图，其中突出显示了$K_{3,3}$ 的拓扑小图模型。

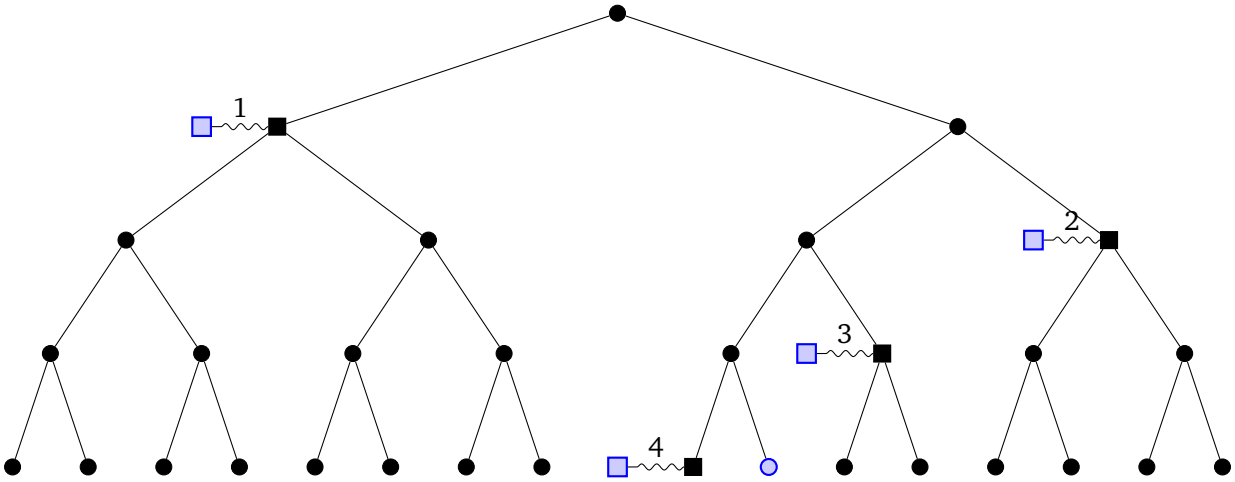


图14：定理G_k 的部分1.12 （针对 $k = 4$）：树 T_k 和选定路径 P_u。蓝色圆圈表示一个 $v \in L$，蓝色方块表示其对应的 u 元素 X_v，黑色方块表示对应的顶点 u。

此外，考虑两个不同的 $v_1, v_2 \in L$。令 w 为 v_1 和 v_2在 T_k 中的最近公共祖先，并令 u_1 （分别为 u_2）为 w 的子节点，且该子节点是 v_1 （分别为 v_2）的祖先。于是，$u_1 \in V(Q_{v_1})$且 $\hat{u}_1 \in X_{v_2}$。根据引理 10.2，这意味着 $\text{dist}(v_1, X_{v_2}) \leq \text{dist}(v_1, \hat{u}_1) = k$。定理 1.12 得证。

10.3 平面图中更大的共匹配：定理的证明 1.13

首先，我们重述定理 1.13：

定理 1.13。 对于每个整数 k，$d \geq 1$，都存在一个平面图 $G_{k,d}$，其具有一个大小至少为 k，d) 的共匹配

$$\left(2\left\lfloor \frac{d}{k} \right\rfloor + 2\right)^k \quad \text{if } k \leq d; \qquad \left(3\left\lfloor \frac{k}{d} \right\rfloor + 1\right)^d \quad \text{if } d \leq k.$$

（注意，对于 $k = d$，两种界都给出 4^k。）

证明： 设k、$d \geq 1$为整数。令$h \leq \min(k, d)$，并令$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_h$，$d = d_1 + d_2 + \ldots d_h$，使得每个$k_i$ 和d_i 都是正整数。对于这些整数，我们按如下方式构造一个图G。

环构件。 令$i \in [h]$，并考虑一个长度为 $1 + k_i(2d_i + 1)$的环C^i。对于每个顶点$v \in V(C_i)$，按如下方式构造X_{iv}：将路径$C^i \setminus \{v\}$分成k_i条长度均为$2d_i + 1$的路径，并将每条路径的中间顶点插入X_v中。显然，$|X_{iv}| = k_i$并且

$$\begin{aligned} &\mathrm{dist}_{C^i}(v, X^i_v) = d_i + 1 && \forall_{v \in V(C^i)}, \\ &\mathrm{dist}_{C^i}(v, X^i_u) \le d_i && \forall u, v \in V(C^i), u \neq v. \end{aligned} \tag{4}$$

局部构件。设 $i \in [h]$。一个局部构件 H_i 由以下部分组成：

- 一个环 C_i；
- 一个根顶点 r，它通过一条长度为 d_i 的路径与环 C_i 的每个顶点相连；
- 对于每个 $v \in C_i$，都有一个悬挂顶点 $\hat{v}$，它通过一条长度为 $\sum_{j=1}^{i-1} d_j$ 的路径与 v 相连（注意，对于 $i = 1$，我们只有 $\hat{v} = v$）。

请注意，与根r的连接不会扭曲环构件中顶点 $v \in V(C^i)$之间以及集合 X_u中的距离，因此（4）在局部构件中仍然成立。

按树状结构排列。现在我们按树状结构排列局部构件。层级为 h 的子树就是一个局部构件 H_h，且该子树的根是 H_h 的根。对于 $1 \le i < h$，层级为 i 的子树由一个局部构件 H_i 组成，此外，对于 H_i 中环 C^i 上的每个 v，还包含一份层级为 $i + 1$ 的子树副本，其根与 v合并。层级为 i 的子树的根，是用于构造该子树的局部构件 H_i 的根。

第 1 层的子树就是最终的图 G。注意，G 是平面的，因为 G 的块都是显然平面的局部构件H_i。

共匹配定义。 令 L 为构造中所有第 h 层局部构件内的环 C^h 上所有顶点的并集。注意，

$$|L| = \prod_{i=1}^{h} (1 + k_i(2d_i + 1)). \tag{5}$$

对于顶点 $v \in L$，我们记 $v^h = v$；对于 $1 \le i < h$，我们用 v^i 表示构造中从 v 沿路径向上的局部构件 H_{i+1} 的根。由于从 v 到 v^i的最短路径由从 v_j到 v_{j-1}的路径组成（其长度为 d_j），其中 $j = h、h-1、\ldots、i+1$，因此有

$$\mathrm{dist}(v, v^i) = \sum_{j=i+1}^{h} d_j. \tag{6}$$

对于每个 $v \in L$，按如下方式构造集合 X_v。对于每个 $i \in [h]$,，查看构造中从 v沿路径向上的局部构件 H_i。令 H_i中的环为 C^i。对于每个 X_{iv^i}中的 $u \in$，将 $\hat{u}$插入 X_v。

注意到

$$|X_v| = \sum_{i=1}^{h} k_i = k. \tag{7}$$

我们声称，$(v、X_v)_{v \in L}$是一个 $(k、d)$-共匹配。我们将在接下来的两个引理中验证这一点。

引理 10.3。 对于每个 $v \in L$，$\mathrm{dist}(v, X_v) \ge d + 1$。

证明： 令 $\hat{u} \in X_v$。假设 $\hat{u}$是连接到环 C^i上顶点 u的悬挂顶点，该环位于构造中从 v 出发的向上路径上的局部构件 H_i 内。注意，v^i 和 u 都将 v与 u分隔开来，因此在 G 中，

$$\mathrm{dist}(v, \hat{u}) = \mathrm{dist}(v, v^i) + \mathrm{dist}(v^i, u) + \mathrm{dist}(u, \hat{u}).$$

第一项在（6）中计算。对于第二项，根据（4），由于 $u \in X_{i v^i}$，

$$\mathsf{dist}(v^i, u) \geq d_i + 1.$$

最后，从u到 $\hat{u}$的路径长度为

$$\mathsf{dist}(u, \hat{u}) = \sum_{j=1}^{i-1} d_j.$$

由$d = \sum_{j=1}^{h} d_j$，引理得证。 □

引理 10.4. 对于任意两个不同的 $v, w \in L$，有 $\mathsf{dist}(v, X_w) \leq d$。

证明： 令H_i 为构造中v 和w 的最近公共祖先对应的局部构件。由于$v \neq w$，我们有$v^i \neq w^i$。由（4），存在$u \in X_{i w^i}$，使得$\mathsf{dist}(v^i, u) \leq d_i$。我们断言$\mathsf{dist}(v, \hat{u}) \leq d$；这就证明了引理，因为 $\hat{u} \in X_w$。显然，

$$\mathsf{dist}(v, \hat{u}) \leq \mathsf{dist}(v, v^i) + \mathsf{dist}(v^i, u) + \mathsf{dist}(u, \hat{u}).$$

第一项由（6）计算得出。第二项至多为d_i，根据u的选取。最后，从u 到 $\hat{u}$ 的路径长度为

$$\mathsf{dist}(u, \hat{u}) = \sum_{j=1}^{i-1} d_j.$$

由$d = \sum_{j=1}^{h} d_j$，引理得证。 □

选择 t、k_i 和 d_i。为得到定理 1.13 的最终界，我们选择 $h = \min(k, d)$，并尽可能均匀地将 k 分成 k_is，将 d 分成 d_is。于是，若 $k \leq d$，则对于每个 $i \in [h]$，有 $h = k$，$k_i = 1$，且

$$1 + k_i(2d_i + 1) = 2d_i + 2 \geq 2\left\lfloor \frac{d}{k} \right\rfloor + 2.$$

否则，若 $d \leq k$，则对于每个 $i \in [h]$，有 $h = d$，$d_i = 1$，且

$$1 + k_i(2d_i + 1) = 1 + 3k_i \geq 3\left\lfloor \frac{k}{d} \right\rfloor + 1.$$

所构造的共匹配的规模可由式（5）得出。

人工智能披露

第 1.13 定理的示例见第 10.3 节，该示例由 ChatGPT 5.4 Pro 找到。第 1.12 定理的示例是我们手工找到的，之后我们请 ChatGPT 在 k 与 d 差异显著的情况下寻找改进方案。ChatGPT 自主找到了构造中使用的“局部构件”。我们已验证该构造的正确性；相关文字也由作者撰写。

致谢。 H.L. 感谢 LazarMilenkovi´c、Arnold Filtser 和 Omrit Filtser 在本研究早期阶段进行的有益讨论。

参考文献

[1] Fateme Abbasi、Sandip Banerjee、Jarosław Byrka、Parinya Chalermsook、Ameet Gadekar、Kam- yar Khodamoradi、Dániel Marx、Roohani Sharma 和 Joachim Spoerhase。关于一般范数目标的聚类参数化近似方案。载于*2023*年*IEEE*第*64*届计算机科学基础年会，FOCS ’23，第 1377–1399 页，2023年。[2] Hans Adler 和 Isolde Adler。将处处稀疏图类解释为模型论中的一个经典概念。《欧洲组合学杂志》，36：322–330，2014年。[3] Boris Aronov、Steven Fortune 和 Gordon Wilfong。最远点测地线 Voronoi 图。载于第四届计算几何年度研讨会论文集，第 229–240 页，1988年。[4] Daniel Baker、Vladimir Braverman、Lingxiao Huang、Shaofeng H-C Jiang、Robert Krauthgamer 和 Xuan Wu。用于有界树宽图聚类的核心集。载于国际机器学习会议，第 569–579 页。PMLR，2020年。[5] Sujoy Bhore、Balázs Keszegh、Andrey Kupavskii、Hung Le、Alexandre Louvet、Dömötör Pálvölgyi 和 Csaba D Tóth。通过 Steiner 跨距子图和非 Steiner 树覆盖构造平面区域中的跨距子图。载于*2025*年*ACM-SIAM*离散算法年会论文集，SODA ’25，第 4292–4326 页。SIAM，2025年。[6] Anselm Blumer、Andrzej Ehrenfeucht、David Haussler 和 Manfred K. Warmuth。可学习性与 Vapnik-Chervonenkis 维数。《*ACM*学报》，36(4)：929–965，1989年。[7] Édouard Bonnet、Samuel Braunfeld、Ioannis Eleftheriadis、Colin Geniet、Nikolas Mählmann、Michal Pilipczuk、Wojciech Przybyszewski 和 Szymon Torunczyk。单子依赖图类的可分性。载于 Keren Censor-Hillel、Fabrizio Grandoni、Joël Ouaknine 和 Gabriele Puppis 编，《第*52*届自动机、语言与编程国际研讨会，*ICALP 2025*，奥胡斯，丹麦，*2025*年*7*月*8*日至*11*日》，第 334 卷，*LIPIcs*，第 147:1–147:19 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für I nformatik，2025年。[8] Glencora Borradaile、Erik D. Demaine 和 Siamak Tazari。用于有界亏格图中子集连通性问题的多项式时间近似方案。《算法学》，68(2)：287–311，2014年。[9] Romain Bourneuf 和 Marcin Pilipczuk。通过度量稀疏性界定 ε散布维数。载于*2025*年*ACM-SIAM*离散算法年会论文集，SODA ’25，第 3155–3171 页，2025年。

[10] Nicolas Bousquet 和 Stéphan Thomassé。VC 维数与 Erdős–Pósa 性质。离散数学，338(12):2302–2317，2015。

[11] Vladimir Braverman、Vincent Cohen-Addad、H-C Shaofeng Jiang、Robert Krauthgamer、Chris Schwiegelshohn、Mads Bech Toftrup 和 Xuan Wu。均匀采样对核心集的作用。在*2022* 年 *IEEE* 第 *63* 届计算机科学基础研讨会（*FOCS*），第 462–473 页。IEEE，2022。

[12] Vladimir Braverman、Shaofeng H-C Jiang、Robert Krauthgamer 和 Xuan Wu。排除次图及更广泛图类中的聚类核心集。在*2021* 年 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会论文集（*SODA*），第 2679–2696 页。SIAM，2021。

[13] Sergio Cabello、Éric Colin de Verdière 和 Francis Lazarus。嵌入图边宽度的算法。计算几何，45(5):215–224，2012年。专题：在美国犹他州 Snowbird 举行的第26届计算几何研讨会。

[14] Amir Carmel、Chengzhi Guo、Shaofeng H.-C. Jiang 和 Robert Krauthgamer。度量空间中1-中心的核心集。载于第*16*届理论计算机科学创新会议论文集，ITCS '25，第28:1–28:20页，2025年。[15] Ke Chen。关于度量空间和欧几里得空间中 k-中位数与 k-means 聚类的核心集及其应用。《*SIAM*计算杂志》，39(3):923–947，2009年。[16] Victor Chepoi、Bertrand Estellon 和 Yann Vaxes。用固定数量的球覆盖平面图。离散计算几何，37(2):237–244，2007年2月。[17] Vincent Cohen-Addad、Andrew Draganov、Matteo Russo、David Saulpic 和 Chris Schwiegelgsohn。聚类核心集的紧致 VC 维数分析及其应用。载于*2025*年*ACM-SIAM*离散算法年会论文集（*SODA*），第4783–4808页。SIAM，2025年。[18] Vincent Cohen-Addad、David Saulpic 和 Chris Schwiegelgsohn。一个新的聚类核心集框架。载于第*53*届*ACM SIGACT*计算理论研讨会论文集，STOC '21，第169–182页，2021年。[19] Mark De Berg、Otfried Cheong、Marc Van Kreveld 和 Mark Overmars。计算几何：算法与应用。Springer，2008年。[20] Mark de Berg 和 Leonidas Theocharous。简单多边形中近似最远邻查询的核心集。载于第*40*届计算几何国际研讨会，第293卷，*SoCG'24*，第16:1–16:16页，2024年。[21] Jan Dreier。Lacon、shrub 和奇偶分解：有界扩张类转导的刻画。计算机科学逻辑方法，19(2)，2023年。[22] Jan Dreier、Ioannis Eleftheriadis、Nikolas Mählmann、Rose McCarty、Michal Pilipczuk 和 Szymon Torunczyk。单子稳定图类上的一阶模型检测。载于第*65*届*IEEE*计算机科学基础年度研讨会（*FOCS 2024*），美国伊利诺伊州芝加哥，*2024*年*10*月*27*日至*30*日，第21–30页。IEEE，2024年。[23] Jan Dreier、Jakub Gajarský、Sandra Kiefer、Michal Pilipczuk 和 Szymon Torunczyk。稀疏图转导的树状分解。载于 Christel Baier 和 Dana Fisman 编，*LICS '22*：第*37*届*ACM*年度/*IEEE*计算机科学逻辑研讨会，以色列海法，*2022*年*8*月*2*日至*5*日，第31:1–31:14页。ACM，2022年。[24] Jan Dreier、Jakub Gajarský 和 Michal Pilipczuk。稀疏图类转导的高效逆转。*CoRR*，abs/2601.14906，2026年。[25] Jan Dreier、Nikolas Mählmann 和 Sebastian Siebertz。结构稀疏图类上的一阶模型检测。载于 Barna Saha 和 Rocco A. Servedio 编，第*55*届*ACM*计算理论年度研讨会（*STOC 2023*），美国佛罗里达州奥兰多，*2023*年*6*月*20*日至*23*日，第567–580页。ACM，2023年。[26] Jan Dreier、Nikolas Mählmann、Sebastian Siebertz 和 Szymon Torunczyk。单子稳定类与单子NIP类中的不可区分元和平坦性。载于 Kousha Etessami、Uriel Feige 和 Gabriele Puppis 编，第*50*届自动机、语言与编程国际研讨会（*ICALP 2023*），德国帕德博恩，*2023*年*7*月*10*日至*14*日，第261卷，*LIPIcs*，第125:1–125:18页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2023年。[27] Jan Dreier、Nikolas Mählmann 和 Szymon Torunczyk。翻转可分性：单子依赖图类的一种组合二分性。载于 Bojan Mohar、Igor Shinkar 和 Ryan O'Donnell 编，第*56*届*ACM*计算理论年度研讨会（*STOC 2024*），加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，*2024*年*6*月*24*日至*28*日，第1550–1560页。ACM，2024年。

[28] Jan Dreier 和 Szymon Torunczyk。合并宽度与一阶模型检测。载于 Michal Koucký 和 Nikhil Bansal 编，第*57*届*ACM*年度计算理论研讨会论文集，*STOC 2025*，布拉格，捷克，*2025*年*6*月*23*日至*27*日，第1944–1955页。ACM，2025年。[29] Paul Erdös 和 George Szekeres。几何中的一个组合问题。《*Compositio mathematica*》，2:463–470，1935年。[30] Jeff Erickson 和 Kim Whittlesey。贪心最优同伦与同调生成元。载于第*16*届*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，*SODA 2005*，第1038–1046页。SIAM，2005。[31] Grzegorz Fabia ´nski、Michał Pilipczuk、Sebastian Siebertz 和 Szymon Toru ´nczyk。支配与独立性的渐进算法。*arXiv*预印本 *arXiv:1811.06799*，2018年。[32] Dan Feldman 和 Michael Langberg。近似与聚类数据的统一框架。载于第*43*届*ACM*年度计算理论研讨会论文集，STOC ’11，第569–578页，2011年。[33] Dan Feldman、Melanie Schmidt 和 Christian Sohler。将大数据变为微型数据：用于 k-means、主成分分析和投影聚类的常数大小核心集。《*SIAM*计算杂志》，49(3):601–657，2020年。[34] Jakub Gajarský、Stephan Kreutzer、Jaroslav Nesetril、Patrice Ossona de Mendez、Michal Pilipczuk、Sebastian Siebertz 和 Szymon Torunczyk。有界扩张类的一阶解释。*ACM*计算逻辑汇刊，21(4):29:1–29:41，2020年。[35] Jakub Gajarský、Nikolas Mählmann、Rose McCarty、Pierre Ohlmann、Michal Pilipczuk、Wojciech Przybyszewski、Sebastian Siebertz、Marek Sokolowski 和 Szymon Torunczyk。单子稳定图类的翻转游戏。载于 Kousha Etessami、Uriel Feige 和 Gabriele Puppis 编，第*50*届自动机、语言与编程国际研讨会，*ICALP 2023*，帕德博恩，德国，*2023*年*7*月*10*日至*14*日，LIPIcs 第261卷，第128:1–128:16页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2023年。[36] Ashish Goel、Piotr Indyk 和 Kasturi R Varadarajan。高维邻近问题之间的归约。载于*SODA*，第1卷，第769–778页，2001年。[37] Lingxiao Huang、Shaofeng H-C Jiang、Jian Li 和 Xuan Wu。倍增度量中用于聚类（含离群点）的ε-核心集。载于*2018*年*IEEE*第*59*届计算机科学基础年度研讨会（*FOCS*），第814–825页。IEEE，2018年。[38] Kacper Kluk、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Giannos Stamoulis。有界欧拉亏格图中的更快直径计算。载于 Keren Censor-Hillel、Fabrizio Grandoni、Joël Ouaknine 和 Gabriele Puppis 编，第*52*届自动机、语言与编程国际研讨会，*ICALP 2025*，奥胡斯，丹麦，*2025*年*7*月*8*日至*11*日，LIPIcs 第334卷，第109:1–109:19页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2025年。[39] Hung Le 和 Christian Wulff-Nilsen。无子式图（有向）中的VC集合系统及其应用。载于*2024*年*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，SODA ’24，第5332–5360页，2024年。[40] Richard J. Lipton 和 Robert Endre Tarjan。平面分隔定理的应用。《*SIAM J. Comput.*》，9(3):615–627，1980年。[41] Jiˇrí Matoušek。《离散几何讲义》。Springer，2002年。[42] Kurt Mehlhorn、Stefan Meiser 和 Ronald Rasch。最远点抽象Voronoi图。《国际计算几何与应用杂志》，11(06):583–616，2001年。

[43] Jaroslav Nešetˇril 和 Patrice Ossona de Mendez。稀疏性——图、结构与算法，算法与组合学第28卷。Springer，2012。[44] Tung Nguyen、Alex Scott 和 Paul Seymour。诱导子图密度。VI. 有界VC维度，2024年。[45] János Pach 和 Pankaj K. Agarwal。组合几何。John Wiley and Sons, Inc.，2005。[46] Rasmus Pagh、Francesco Silvestri、Johan Sivertsen 和 Matthew Skala。近似最远邻居及其在环带查询中的应用。*InformationSystems*，64:152–162，2017年。[47] Michal Pilipczuk。逻辑视角下的图类。*CoRR*，abs/2501.04166，2025年。[48] Marek Sokołowski。稀疏图的幂中半图阶数的界。载于*EuroComb 2021*扩展摘要：欧洲组合学、图论与应用会议，第248–254页。Springer，2021。