arXiv:2603.28215v1 [math.QA] 30 Mar 2026

由 ind-正合代数构造带状范畴：简单流情形

KENICHI SHIMIZU 和 HARSHIT YADAV

ABSTRACT. 我们给出一组判据，用以确定编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 在 ind-完备化 $\mathcal{C}$ 中交换代数 A 上的有限生成局部模何时继承（刚性、编织、带状）张量范畴的结构。随后，我们将这些判据应用于单流代数 $A = \bigoplus_{g\in\Gamma} E_g$，其中$\Gamma$ 是 $\mathcal{C}$中可逆对象的一个子群。借助对单流 A-模的描述，我们验证了此类代数满足所需假设，并推导出其有限生成局部模的刚性、编织、带状及非退化性质。作为应用，我们从未卷化 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的量子超群范畴构造了带状张量范畴的实例。

1. INTRODUCTION

单流（即可逆对象）在表示论和共形场论中出现的编织张量范畴的构造与分类问题中起着核心作用。给定一个编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 及其可逆对象同构类群的一个子群 Γ，对象 $A = \bigoplus_{g\in\Gamma} E_g$（其中 $E_g \in \mathcal{C}$ 表示与 $g \in \Gamma$ 相对应的可逆对象）在适当的余循环条件下，在 ind-完备化 $\mathcal{C}$ 中具有代数结构。我们将这类代数称为单流代数（精确定义见定义2.8）。本文的目标是给出可行的判据，确保交换代数在 $\widehat{\ }$上的适当模子范畴 $\mathcal{C}$ 继承自 $\mathcal{C}$ 带状张量范畴的结构，并证明在温和假设下，交换单流代数满足这些判据。

1.1. 主要结果。

本文始终在代数闭域 $\Bbbk$ 上工作。本文分为两部分。首先，我们为交换代数 $A \in \mathcal{C}$ 建立一个一般框架，其中 $\mathcal{C}$ 是一个编织张量范畴。若右 A-模是某个对象 $X \in \mathcal{C}$ 对应的自由 A-模 $X \otimes A$ 的商对象，则称其为有限生成。基于此定义，可以定义有限生成 A-模的范畴 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$，以及其有限生成局部模子范畴 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$。

定理 A。 设 $A \in \mathcal{C}$ 是一个单倍交换代数。

(a) 若 A 是阿廷的，则fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$ 和fg- $\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 是有限长度的阿贝尔范畴。(b) 若进一步 A 是 *ind*-正合的，则fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$ 是张量范畴，而fg- $\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 是编织张量范畴。(c) 若此外 $\mathcal{C}$ 是带状的，且 A 是弗罗贝尼乌斯的，并且 $\theta_A = \mathrm{id}_A$，则fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 是带状范畴。

阿廷代数和 ind-正合代数的定义分别见3.2 和3.5 。Frobenius 代数一词采用扩展含义，定义见3.9，尤其是(c)中的代数 A 可能不是 $\mathcal{C}$中的刚性对象。我们对阿廷代数和 ind-正合代数的讨论建立在 [CEO24] 及我们先前的工作 [SY24]之上。（c）是本定理的主要新贡献：我们引入“无限”Frobenius 代数，并利用这一性质获得 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$的带状结构。

其次，我们讨论一种检验代数是否 ind-正合的实用方法。Etingof 和 Penneys 证明，在张量积右正合的阿贝尔辫单范畴中，若所有简单对象都是刚性的，则所有有限长度对象都是刚性的 [EP26，引理 4。2]在附录A中，我们证明了这一结果的一个非辫化推广（定理A.2）。利用这一结果，我们得到以下结论（定理3.6）：

定理 B. 设 $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴， A 是 $\mathcal{C}$ 中的阿廷中心交换代数。那么， A 是 *ind*-正合的，当且仅当每个单 A-模都是刚性的。

第三，也是本文的主要贡献：我们证明，在明确且可检验的条件下，简单流代数（定义2.8）满足这些假设，并推导出关于其模范畴的具体结论。对于简单流代数 $A = \bigoplus_{g\in\Gamma} E_g$，我们首先对单 A-模进行分类。随后，我们验证这一类满足定理A 的假设：特别是， A 总是阿廷的（命题4.14）且为弗罗贝尼乌斯代数（定理 4.15）。若 A 是中心交换的，且 $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$，我们利用单 A-模的显式描述证明它们是刚性的。根据定理B，这就证明了 A 是 ind-正合的。第 4 节还为范畴 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 给出了一个一般的范畴非退化性判据。

定理C。 假设$\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$。设 Γ 是 $\mathcal{C}$ 中可逆对象的同构类群的一个子群，并且对于所有 $g \in \Gamma$，都有 $c_{E_g,E_g} = \mathrm{id}^{E_g\otimes E_g}$ 。那么，对象 $A = \bigoplus_{g\in\Gamma} E_g$具有唯一的（在同构意义下）交换简单流代数结构。对于交换简单流代数 A，我们有：

(a) fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$ 是一个张量范畴，而fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是一个编织张量范畴。(b) 若 $\mathcal{C}$ 是带状的，且对于所有 $g \in \Gamma$，都有 $\theta_{E_g} = \mathrm{id}^{E_g}$，则fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是带状的。

现在假设 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯的（即它有足够多的投射对象）。那么，

(c) fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$ 和fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是弗罗贝尼乌斯的。(d) fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$ 是有限的，当且仅当$\mathrm{Irr}(\mathcal{C})/\Gamma$ 是有限的；而fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是有限编织的，当且仅当$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_\Gamma)/\Gamma$ 是有限的。这里， $\mathcal{C}_\Gamma$ 是全子范畴

$$\mathcal{C}_\Gamma := \{X \in \mathcal{C} | c_{E_g,X}c_{X,E_g} = \mathrm{id}_{X\otimes E_g} \ \forall\ g \in \Gamma\}.$$

(e)如果 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中与 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中所有其他简单对象都平凡地进行双重编织的简单对象恰好是 E_g（其中 $g \in \Gamma$），那么 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 是非退化的。

可以将具有平凡 M¨uger 中心的带状张量范畴称为模张量范畴。那么，定理 C 给出了交换的单流代数 A 必须满足的充分条件，以确保范畴 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是模的。

1.2. 顶点算子代数的动机与应用。 单流扩张的研究起源于共形场论，始于 Schellekens 和 Yankielowicz [SY89]关于由整数自旋单流生成的模不变量的工作。在顶点算子代数理论中，Dong、Li 和 Mason [DLM96] 较早研究了由单流构成的扩张。在有理张量范畴的框架下，Kirillov– Ostrik [KJO02] 以及 Fuchs、Runkel 和 Schweigert [FRS04]发展了代数对象与局部模的观点。之后，Huang、Kirillov 和 Lepowsky [HKJL15] 证明，在适当的假设下，顶点算子代数的扩张 V等价于其模的编织张量范畴中的、扭结平凡的交换结合代数对象V。在这一框架中，扩展顶点算子代数 W 对应于$\mathcal{C}$ （或 $\mathcal{C}$）中的一个代数对象 A ，而 W-模的范畴由局部 A-模的范畴描述；参见

[HKJL15, CKM24]。如果代数的底层对象是可逆对象的直和，就称其为单流扩张（这也是我们将形如 $A = \bigoplus_{g\in\Gamma} E_g$ 的代数称为简单流代数的原因）。

我们的研究动机源于对数顶点算子代数的简单流扩张。此类顶点算子代数的表示范畴通常既非半单也非有限；此外，简单流扩张通常不是原范畴中的对象，而是属于 ind-完备化。许多论文通过具体例子探讨了简单流扩张上模范畴的刚性带状结构；例如，参见 [AR18、CMY22a、CR22、CMY22b]。

我们的结果可视为顶点算子代数的简单流扩张继承刚性的一项结论。设 V 是一个顶点算子代数，使得其 $\mathcal{C}$ - V模的某个适当范畴具有编织张量范畴结构。此外，假设 $\mathcal{C}$ 是刚性的，并设 $V \subset W$是一个简单流扩张。在张量范畴的表述中，该扩张对应于一个交换代数对象 $A \in \mathcal{C}$，而 W-模可由 A中的局部 $\widehat{\mathcal{C}}$ [-模来描述，见 HKJL15、CKM24]。在定理 A的假设下，我们证明范畴 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$具有刚性。因此， W 也具有一个刚性的表示编织张量范畴。这一点很有用，因为在顶点张量范畴理论中，刚性往往是最难确立的性质之一。

1.3. **例子**。 通过将我们的判据应用于两个非半单带状范畴族中的交换简单流代数，我们还得到了（编织、带状）张量范畴的例子： $U_q^H(\mathfrak{g})$ [Rup22] 和 $U_q^E(\mathfrak{gl}(1|1))$ [GY25]的整权模范畴。在这些情形下，可以对适当子群上的可逆对象求和，从而得到交换简单流代数；我们的判据则可构造新的局部模范畴。在展开量子群的情形下，这具体化为 Creutzig–Rupert [CR22]的显式格判据。

请注意， $U_q^H(\mathfrak{g})$ 和 $U_q^E(\mathfrak{gl}(1|1))$ 的权模范畴是 [CGPM14]意义下的相对模范畴。值得探究的是，相对模结构是否会下降到由我们的结果得到的局部模范畴上。

1.4. **结构安排**。 本文结构如下。第 2 节回顾张量范畴与中心的基本术语。第 3 节建立一个一般框架，用于从 ind-完备化中的交换代数构造（编织、带状）张量范畴；主要判据总结于定理3.1。第 4节将这一框架应用于简单流代数。第5节列出展开量子群中的具体例子，见 $\mathfrak{gl}(1|1)$。附录 A 给出了 Etingof–Penneys [EP26]引理的一个非带编织变体，该引理用于刚性论证。

1.5. **致谢**。 作者感谢 RIMS 在本研究完成期间提供的热情接待。我们感谢 Pavel Etingof 和 Dave Penneys 通过电子邮件就[EP26, 引理 4.2]进行了有益的交流。

HY 部分获得阿尔伯塔大学启动基金和 NSERC 探索研究基金的资助。KS 获得 JSPS 科学研究费助成金，项目编号 JP24K06676。

2. Background

2.1. **记号**。 全文中， $\Bbbk$ 表示一个代数闭域。我们将用**向量空间范畴** 表示有限维 $\Bbbk$-向量空间的范畴，并用**向量空间范畴** 表示所有 $\Bbbk$-向量空间的范畴。

给定一个范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 表示 $\mathcal{C}$的反范畴。除非另有说明，幺半范畴 $\mathcal{C}$ 的幺半积和单位对象分别记为 $\otimes\colon\ \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 和 $\mathbb{1}\in\mathcal{C}$。 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 表示带有反向幺半积的范畴 $\mathcal{C}$。对于带有编织 c 的辫带范畴 $\mathcal{C}$，我们使用记号 $\mathcal{C}$ 表示具有反向编织的 $\underline{\mathcal{C}}^{\mathrm{rev}}\ c_{X,\ Y}=c_{YX}^{-1},$。

–

关于对偶相关的术语，我们遵循 [EGNO16] 中使用的约定。若幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对象分别具有左对偶对象和右对偶对象，则称其为左刚性和右刚性对象。刚性对象是左刚性且右刚性的对象。若 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都是刚性对象，则称 $\mathcal{C}$ 是刚性的。给定一个左刚性对象 $X\in\mathcal{C}$，我们记

$$(X^*,\ \mathrm{ev}_X: X^*\otimes X\to\mathbb{1},\ \mathrm{coev}_X:\mathbb{1}\to X\otimes X^*)$$

X 的左对偶对象。我们分别称 ev_X 和 coev_X 为 X 的求值和余评价。 X 的右对偶对象（的对象部分）记为 ${}^*X$。

2.2. **张量范畴**。局部有限阿贝尔范畴是一个本质小的 $\Bbbk$-线性阿贝尔范畴，其中每个对象都具有有限长度，且每个 Hom 空间都是有限维的。张量范畴是配备刚性幺半范畴结构的局部有限阿贝尔范畴，其中幺半积是 $\Bbbk$-双线性的，且单位是单对象 [EGNO16]。设 $\mathcal{C}$ 为张量范畴。我们记录以下结果以备后用。

引理 2.1 ([Del02，命题 1。1])。 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔 $\Bbbk$-线性幺半范畴，且其对象的自同态环为自同态环$_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})\cong\Bbbk$，其中对象均有有限长度。若 $\mathcal{C}$ 是刚性的，则它是 *Hom*-有限的。

若张量范畴 $\mathcal{C}$ 还满足每个简单对象都有内射包 [ACE15]，则称其为弗罗贝尼乌斯 范畴。关于 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯范畴的若干等价条件见 [SS23]。

2.3. **辫带张量范畴**。

2.3.1. *M¨uger* 中心与非退化性。 给定一个编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 和一个幺半子范畴 $\mathcal{D}$， $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的中心化子 定义如下:

$$\mathcal{Z}_2(\mathcal{D}\subset\mathcal{C})=\{X\in\mathcal{C}\mid c_{Y,X}\circ c_{X,Y}=\mathrm{id}_{X\otimes Y},\,\forall\,Y\in\mathcal{D}\}.$$

$\mathcal{C}$ 的*M¨uger* 中心 为 $\mathcal{C}':=\mathcal{Z}_2(\mathcal{C}\subset\mathcal{C})$。若 $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴，且其 M¨uger 中心等价于**向量空间范畴**，则称 $\mathcal{C}$ 为非退化 。

我们将使用以下非退化性判据。

引理 2.2. 设 $\mathrm{char}(\Bbbk)\ =0$。那么，辫带 *Frobenius* 张量范畴 $\mathcal{C}$ 非退化，当且仅当 $\mathcal{C}$ 的 *M¨uger* 中心中，除同构外唯一的简单对象是 $\mathbb{1}$ 。

证明。 由于 $\mathcal{C}$ 是 Frobenius 范畴， $\mathbb{1}$ 在 $\mathcal{C}$中的射影覆盖存在。为证明“若”部分，注意在我们的假设下，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},\mathbb{1})=0$ （有限情形下的证明见 EGNO16，定理 4.4.1]；该证明要求 $\mathbb{1}$ 在 $\mathcal{C}$ 中存在射影覆盖，但并未用到 $\mathcal{C}$的有限性）。若 $\mathbb{1}$ 是 $\mathcal{C}'$ 中除同构外唯一的简单对象，则由于 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},\mathbb{1})=0$, $\mathcal{C}'$ 中的每个对象都是 $\mathbb{1}$ 的有限直和，因此 $\mathcal{C}'$ 等价于 **向量空间范畴**。逆命题显然。□

2.3.2. 带状张量范畴。A 带状张量范畴是一个编织张量范畴 $\mathcal{C}$，配备了一个扭结，即满足以下条件的自然自同构 $\theta=\{\theta_X\colon\ X\xrightarrow{\sim}X\}_{X\in\mathcal{C}}$

$$\theta_{X\otimes Y}=c_{Y,X}\circ c_{X,Y}\circ(\theta_X\otimes\theta_Y),\qquad \theta_{X^*}=(\theta_X)^* \tag{2.1}$$

对所有 $X,Y\in\mathcal{C}$ 均成立。由前一个方程可推出 $\theta_{\mathbb{1}}=\mathsf{id}_{\mathbb{1}}$ 。

2.4. **闭幺半范畴中的模**。 设幺半范畴$\mathcal{C}$中的代数为 A 和 B，我们分别用 ${}_A\mathcal{C}$、 $\mathcal{C}_B$ 和 ${}_A\mathcal{C}_B$表示 $\mathcal{C}$ 中左 A-模、右 B-模以及 A-B-双模的范畴。

若对每个 $X \in \mathcal{C}$， $\mathcal{C}$ 上的自函子 $X \otimes -$ 和 $- \otimes X$ 都有右伴随，则称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 是闭的。设 $\mathcal{C}$ 为闭幺半范畴。给定 $X \in \mathcal{C}$，记 $[X, -]$ 为 $- \otimes X$ 的一个右伴随。指派 $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ 可扩张为一个函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，称之为右内 *Hom* 函子。根据定义，存在自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W \otimes X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, [X, Y])$，其中 $W, X, Y \in \mathcal{C}$。左内 *Hom* 函子 以类似方式定义。由于有右伴随的函子保持余极限，自函子 $X \otimes$(–) 和 (–) $\otimes X$ 保持余极限。

我们假设 $\mathcal{C}$ 具有等化子和余等化子。对于 $\mathcal{C}$中的右 A-模 M 和左A-模 N，它们的张量积 $M \otimes_A N$ 定义为 $a^r_M \otimes \mathrm{id}_N$ 和 $\mathrm{id}_M \otimes a^l_N$ 的余等化子，其中 $a^r_M \colon M \otimes A \to M$ 以及 $a^l_N \colon A \otimes N \to N$分别是 A在 M 和 N上的右作用与左作用。由于 $\mathcal{C}$ 是闭的，可以验证， ${}_A\mathcal{C}_A$ 这一 A-双模范畴是一个幺半范畴，其幺半积为 $\otimes_A$，单位为 A。此外， ${}_A\mathcal{C}_A$ 是一个闭幺半范畴。内部 Hom 函子的构造见 [SY24，第 3.2] 节。

2.4.1. 中心代数上的模。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有等化子和余等化子的闭幺半范畴。若 A是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，并且带有半编织 σ，使得（A， σ）是德林费尔德中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$中的交换代数，则称其为中心交换代数。在这种情况下，右 A-模可以通过由 σ给出的作用视为左 A-模，而范畴 $\mathcal{C}_A$ 则视为 ${}_A\mathcal{C}_A$ 的全子范畴。可以验证， $\mathcal{C}_A$ 在 $\otimes_A$ 下封闭，因此 $\mathcal{C}_A$ 是一个幺半范畴。利用与 ${}_A\mathcal{C}_A$ [SY24 第 3.3] 节中相同的内部 Hom 函子， $\mathcal{C}_A$ 也是一个闭幺半范畴。

2.4.2. 局部模。 假设闭幺半范畴 $\mathcal{C}$ 是编织的，且 A 是 $\mathcal{C}$中的交换代数。那么，如上所述，范畴 $\mathcal{C}_A$ 在相对张量积 $\otimes_A$下构成幺半范畴。不过，它通常并非编织范畴。 $\mathcal{C}_A$ 中由局部 模组成的全子范畴，也就是说，由满足$\rho \circ c_{A,M} \circ c_{M,A} = \rho$的 A-模（M, ρ）组成的全子范畴，其编织结构继承自 $\mathcal{C}$ [Par95]。当 $\mathcal{C}$ 存在等化子时，范畴 $\mathcal{C}_A^{\mathrm{loc}}$事实上是闭幺半范畴，其内部 Hom 函子与${}_A\mathcal{C}_A$ [SY24, §3.3]中的相同。

2.5. **Ind-完备化及其子范畴**。

2.5.1. Ind-完备化。设 $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴。 $\mathcal{C}$ 的 ind-完备化 $\widehat{\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}$ 关于滤过余极限 [KS06]的完备化。它是一个格罗滕迪克阿贝尔范畴，且包含 $\mathcal{C} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$是正合且全忠实的。此外， $\mathcal{C}$ 具有一种延拓 $\mathcal{C}$的幺半结构的幺半结构，并且该包含是强幺半的。虽然 $\mathcal{C}$ 不是刚性范畴，但它是闭幺半范畴。当 $\mathcal{C}$ 是编织范畴时， $\mathcal{C}$ 的编织结构自然延拓到 $\mathcal{C}$。当 $\mathcal{C}$ 进一步是带状范畴时， $\mathcal{C}$ 的扭结自然延拓为自然同构 $\mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{C}}} \to \mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{C}}}$，并满足（2.1）中的第一个等式。

2.5.2. *ind*-完备化中代数上的模范畴。设 $\mathcal{C}$ 为张量范畴，且 $\widehat{\mathcal{C}}_{\widehat{\mathcal{C}}\widehat{\mathcal{C}}}\widehat{\mathcal{C}}_{\widehat{\mathcal{C}}\widehat{\mathcal{C}}}A$ 是 ind-完备化 $\widehat{\mathcal{C}}$中的一个代数。范畴 $\mathcal{C}_A$ 可识别为关于单子 $T := - \otimes A$的代数范畴$\widehat{\mathcal{C}}$。由于 $\mathcal{C}$ 是闭幺半的，函子 T 存在一个右伴随。$\widehat{\mathcal{C}}$ $\widehat{\mathcal{C}}$因此，$\mathcal{C}_A$ 是一个阿贝尔范畴，且遗忘函子 $\mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ 是正合且忠实的。

2.5.3. 各种模范畴。设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。我们回顾右 A-模的以下三个有限性条件。

定义 2.3. M 中的右 A-模 $\mathcal{C}$ 称为有限生成的，如果存在一个 $\mathcal{C}_A$ 中的满态射 $X \otimes A \twoheadrightarrow M$，其中 $X \in \mathcal{C}$。若存在一个 $\mathcal{C}_A$ 中的正合序列 $X \otimes A \to Y \otimes A \to M \to 0$，其中 $X, Y \in \mathcal{C}$，则称 M 是有限长度的。我们用 fg-$\mathcal{C}_A$、fp-$\mathcal{C}_A$ 和 fl-$\mathcal{C}_A$ 分别表示 $\mathcal{C}_A$中由有限生成、有限表示和有限长度模构成的全子范畴。

显然，全子范畴 fg-$\mathcal{C}_A$ 对商对象封闭。然而，fg-$\mathcal{C}_A$ 在 $\mathcal{C}_A$ 中未必对核封闭，因此它可能不是阿贝尔范畴。中由有限长度对象构成的全子范畴 fl-$\mathcal{C}_A$ 是 $\mathcal{C}_A$的 Serre 子范畴；特别地，它是阿贝尔范畴。

我们回顾一下：当 A 是中心交换的时，$\mathcal{C}_A$ 关于 $\otimes_A$ 是幺半的。尽管我们不知道 fp-$\mathcal{C}_A$ 和 fl-$\mathcal{C}_A$ 是否在 $\otimes_A$ 下封闭，但可以证明：

引理 2.4. 若 A 是中心交换的，则 有限生成-$\mathcal{C}_A$ 在 $\otimes_A$ 下封闭。

证明。 </style>若 fg-(，2) 是 $X_i \otimes A$ ($X_i \in \mathcal{C}$) 的商对象，则 $M_1 \otimes_A M_2$ 是 $(X_1 \otimes A) \otimes_A (X_2 \otimes A) \cong (X_1 \otimes X_2) \otimes A$ 的商对象，因此它是有限生成的。□

根据定义，我们有 fp-$\mathcal{C}_A$ ⊆fg-$\mathcal{C}_A$。接下来我们将证明 fl-$\mathcal{C}_A$ ⊆fg-$\mathcal{C}_A$ 也成立。

引理 2.5. 每个有限长度的 A-模都是有限生成的。

证明。 设 $M \in \mathcal{C}_A$ 具有有限长度。令 $\{F_i\}_{i \in I}$ 为所有有限生成的-子模的族，其中这些子模都是 M的子模。我们首先断言 $M = \sum_{i \in I} F_i$。由于 M 是 $\mathcal{C}$中的一个对象，我们可以将其写为$M = \sum_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$，其中 $X_\lambda \subset M$ 是子对象族，且 $X_\lambda \in \mathcal{C}$。对于每个 $\lambda \in \Lambda$，令 W_λ 为子对象 $X_\lambda \otimes A$在作用 $M \otimes A \to M$下的像。于是 W_λ是 M的一个子模，并且根据构造，它是自由 A-模 $X_\lambda \otimes A$的商对象。因此 W_λ 是有限生成的。此外，根据单位公理，$X_\lambda \subset W_\lambda$。因此

$$M = \sum_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \subset \sum_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \subset \sum_{i \in I} F_i \subset M,$$

这就证明了该断言。

接下来，注意到族 $\{F_i\}_{i \in I}$ 在包含关系下是有向的。事实上，若 F_i 和 F_j 是 M的有限生成子模，那么 $F_i \oplus F_j$ 也是有限生成的。因此，其商对象 $F_i + F_j$是 M的有限生成子模。于是存在 $k \in I$ 使得 $F_i \subset F_k$ 和 $F_j \subset F_k$。

反设 M 不是有限生成的。取 $j_1 \in I$ 使得 $F_{j_1} \neq 0$。由于 $F_{j_1} \neq M$ 和 $M = \sum_{i \in I} F_i$，存在 $i_2 \in I$ 使得 $F_{i_2} \not\subset F_{j_1}$。由有向性，存在 $j_2 \in I$ 使得 $F_{j_1} + F_{i_2} \subset F_{j_2}$。于是 $F_{j_1} \subsetneq F_{j_2}$。重复此论证，我们构造出一条 M的子模的严格递增链 $F_{j_1} \subsetneq F_{j_2} \subsetneq F_{j_3} \subsetneq \cdots$，这是不可能的，因为$M$具有有限长度。因此 M 是有限生成的。□

注记 2.6。 由于 $\mathcal{C}$ 是局部可呈范畴，$\mathcal{C}_A$也如此。在这类范畴中，有限表示对象和有限生成对象有一般定义，分别由 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}_A}}(M, -)$ 与滤过余极限，以及与单态射的滤过余极限可交换这一条件刻画。我们对有限生成模和有限表示模的定义与这些一般定义一致 [SS23]。因此，上述引理可以借助局部可呈范畴的一般结果来证明，不过为方便读者，我们给出了直接证明。

2.5.4. *ind*-完备化中的局部模。 设 $\mathcal{C}$ 是一个编织张量范畴，且 A 是 $\widehat{\mathcal{C}}$中的一个交换代数。根据 [CKM24，命题 2.56] （专门化到非超情形）， $\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$对取核和余核封闭。因此，它是一个阿贝尔范畴，且包含函子 $i\colon \widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_A$ 是正合的。

事实上，$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是 $\widehat{\mathcal{C}}_A$ [Par95 定理 3.6]中的一个余反射子范畴。也就是说， i 有一个右伴随 $i^R\colon \widehat{\mathcal{C}}_A \to \widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$。具体而言，对于$(M,\ \rho) \in \widehat{\mathcal{C}}_A$， $i^R(M,\ \rho)$是下列映射的等化子

$$[A,\rho]\circ\eta_M, [A,\rho\circ c_{A,M}\circ c_{M,A}]\circ\eta_M : M \to [A,M], \tag{2.2}$$

其中 $\eta_M\colon\ M \to [A, M\otimes A]$ 是伴随的单位的分量。特别地， $\widehat{\mathcal{C}_A^{\mathrm{loc}}}$在 $\mathcal{C}_A$ 中对余极限封闭，且包含 i 保持余极限。

定义 2.7。 我们将$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$的全子范畴 fl-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$、fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$和 fp-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$定义为$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$分别与 fl-$\widehat{\mathcal{C}}_A$、fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$和 fp-$\widehat{\mathcal{C}}_A$的交。

2.6. **张量范畴中的可逆对象**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有简单单位对象的局部有限 $\Bbbk$-线性阿贝尔幺半范畴。我们回顾一下 $\mathcal{C}$中可逆对象的一些基本事实。若存在对象 $Y \in \mathcal{C}$ 使得 $X\otimes Y \cong \mathbb{1} \cong Y\otimes X$，则称对象$X \in \mathcal{C}$ 为可逆的 。 $\mathcal{C}$ 中可逆对象的同构类在张量积下构成一个群，记为 Inv($\mathcal{C}$)。

2.6.1. 群上同调。 我们固定群上同调的约定。设 G 是一个群。对于整数 $n \geq 1$，我们用 $\mathsf{C}^n(G)$ 表示从 $G\times\cdots\times G$ (n 次笛卡尔积) 到 $\Bbbk^\times$ 的所有映射组成的集合，这些映射满足：只要 x_i 中有一个是单位元，就有 $f(x_1,\ \cdots,\ x_n) = 1$。$\mathsf{C}^n(G)$ 中的元素称为规范化 n-余链。对于每个 $n \geq 1$，都有余边界映射 $\partial_{n+1}\colon \mathsf{C}^n(G) \to \mathsf{C}^{n+1}(G)$。例如，

$$\partial_2(f)(x,y) = f(x)f(xy)^{-1}f(y), \tag{2.3}$$

$$\partial_3(g)(x,y,z) = g(x,y)g(x,yz)^{-1}g(xy,z)g(y,z)^{-1} \tag{2.4}$$

对于 $f \in \mathsf{C}^1(G)$、 $g \in \mathsf{C}^2(G)$ 和 $x,\ y,\ z \in G$。$\mathrm{Ker}(\partial_{n+1})$ 和 $\mathrm{Im}(\partial_n)$ 中的元素分别称为 n-余循环和 n-余边界。我们将 n阶上同调群$\mathrm{H}^n(G)$ 定义为商群 $\mathrm{Ker}(\partial_{n+1})/\mathrm{Im}(\partial_n)$。

2.6.2. 由结合子导出的 3-余循环。对于每个类 $g \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$，我们选取一个代表 g的对象$E_g \in \mathcal{C}$ 。我们假设 E_1 是 $\mathcal{C}$ 的单位对象。由于 E_1 是简单对象，且 $E_g\otimes(-)$ 在 $\mathcal{C}$ 上是一个等价的自函子，因此 $E_g \cong E_g\otimes E_1$ 也是简单对象。因此，根据舒尔引理和局部有限性，对于 $g,\ h \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$，当 $g = h$ 时，空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E_g,\ E_h)$ 是一维的，否则为零。我们进一步选取同构

$$\phi_{x,y} : E_x\otimes E_y \to E_{xy} \quad (x,y \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C}))$$

使得对于所有 $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$，$\phi_{1,\,x}$ 和 $\phi_{x,\,1}$ 都是单位同构。我们定义映射 $\omega : \mathrm{Inv}(\mathcal{C})^3 \to \Bbbk^\times$，使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccc} (E_x\otimes E_y)\otimes E_z & \xrightarrow{\phi_{x,y}\otimes\mathrm{id}} & E_{xy}\otimes E_z & \xrightarrow{\phi_{xy,z}} & E_{xyz} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{E_x,E_y,E_z}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \omega(x,y,z)\,\mathrm{id}} \\ E_x\otimes(E_y\otimes E_z) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\phi_{y,z}} & E_x\otimes E_{yz} & \xrightarrow{\phi_{x,yz}} & E_{xyz}, \end{array} \tag{2.5}$$

对于所有 x、y、$z \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$，其中 α 是结合子。众所周知，五边形公理蕴含 ω 是群 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 上的一个 3-余循环。余循环 ω 取决于同构 $\phi_{x,y}$ 的选择；然而，其上同调类并不取决于此。

2.6.3. 由编织导出的阿贝尔 *3*-余循环。我们假设幺半范畴 $\mathcal{C}$ 具有编织结构 c。于是我们还定义映射 $\beta : \mathrm{Inv}(\mathcal{C})^2 \to \Bbbk^\times$，其定义为

$$\beta(x,y)\mathrm{id}_{E_{xy}} = \phi_{y,x} \circ c_{E_x,E_y} \circ \phi_{x,y}^{-1} \tag{2.6}$$

对于 x，$y \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$。编织的六边形公理蕴含，$(\omega, \beta)$ 在 Eilenberg–Mac Lane [EML54] 的意义下构成 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 上的一个阿贝尔 *3*-余循环；另见 [JS93]。由 $\mathsf{q} : \mathrm{Inv}(\mathcal{C}) \to \Bbbk^\times$ 定义的函数 $\mathsf{q}(g) = \beta(g, g)$ 是一个二次型，其对应的对称双特征标为双重编织标量 $b_{\mathsf{q}}(g, h) = \beta(g, h)\beta(h, g)$。[JS93], [DGNO10, §2.11, 附录 D] 和 [EGNO16, §8.4] 对这一观点作了阐述。

2.6.4. （交换的）由可逆对象构成的代数。设 $\mathcal{C}$ 是一个局部有限的 $\Bbbk$-线性阿贝尔闭幺半范畴，并按前文定义 ω（当 $\mathcal{C}$ 为编织范畴时也定义 β）。现在我们在 $\mathcal{C}$ 中引入以下一类代数，它是本文的主要研究对象：

定义 2.8。设 Γ 是 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 的一个子群。Γ 上的简单流代数是一个代数 A，满足：作为 $\mathcal{C}$ 中的对象，乘法 $A \otimes A \to A$ 对所有元素 x，$y \in \Gamma$ 均限制为同构 $E_x \otimes E_y \to E_{xy}$，且单位由包含态射 $\mathbb{1} = E_1 \to A$ 给出。

引理 2.9。固定 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 的一个子群 Γ，并令 $A = \bigoplus_{g\in\Gamma} E_g$。

(a) 对象 A 是 Γ 上的简单流代数，当且仅当 *3*-余循环 ω 在 $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ 上的限制是一个余边界。若此条件成立，对于任意满足 $\omega|_{\Gamma\times\Gamma\times\Gamma} = \partial_3(\eta)$ 的余链 $\eta \in \mathrm{C}^2(\Gamma)$，由此诱导的态射 $\mu : A \otimes A \to A$

$$\mu_{x,y} := \eta(x,y)\phi_{x,y} : E_x \otimes E_y \to E_{xy} \quad (x, y \in \Gamma) \tag{2.7}$$

使 A 成为 Γ 上的简单流代数。

(b) 我们假设 $\mathcal{C}$ 是编织的。那么 A 是交换简单流代数，当且仅当 $\mathsf{q}|_\Gamma \equiv 1$，即对于所有 $g \in \Gamma$，$\beta(g, g) = 1$。若此条件成立，则有

$$\beta(x,y)\beta(y,x) = 1, \qquad \textit{for all } x, y \in \Gamma. \tag{2.8}$$

(a) 和 (b) 部分广为人知；带标记融合范畴的情形见 [EGNO16, §8.8]，一般性陈述见 [DGNO10, §2.11]，简单流扩张见 [FRS04, §3]。

证明。(a) 给定归一化 2-余链 $\eta : \Gamma \times \Gamma \to \Bbbk^\times$，容易验证，由（2.7）诱导的态射 $\mu : A \otimes A \to A$ 使 A 成为单流代数，当且仅当 $\omega|_{\Gamma\times\Gamma\times\Gamma} = \partial_3(\eta)$。特别地，我们已经证明了“若”这一方向。为证明逆命题，假设 A 是一个乘法为 μ 的简单流代数。根据简单流代数的定义，该乘法必由某个映射 $\eta : \Gamma \times \Gamma \to \Bbbk^\times$ 通过（2.7）诱导。重复“若”这一方向中的计算即可完成证明。

(b) 假设 A 是一个乘法由 η 诱导的简单流代数。(x, y)-分量上的交换性条件 $\mu \circ c_{A,A} = \mu$ 写作

$$\eta(y,x)\,\beta(x,y) = \eta(x,y) \qquad (x, y \in \Gamma). \tag{2.9}$$

令 $x = y$ 并使用 $\eta(x, x) \neq 0$ 得到 $\beta(x, x) = 1$，即 $\mathsf{q}|_\Gamma \equiv 1$。反过来，假设 $\mathsf{q}|_\Gamma \equiv 1$。那么阿贝尔 3-余循环 $(\omega|_{\Gamma^3}, \beta|_{\Gamma^2})$ 的关联二次型是平凡的。根据

阿贝尔上同调与二次型之间的 Eilenberg–Mac Lane 同构（近期参考文献见 [Gal26]），它在阿贝尔上同调中的类因此是平凡的。故存在归一化 2-余链 $\eta \in C^2(\Gamma)$，使得

$$\partial_3(\eta) = \omega|_{\Gamma^3} \qquad \text{and} \qquad \beta(x,y) = \eta(x,y)\eta(y,x)^{-1} \quad (x,y \in \Gamma).$$

第一个等式根据(a)在 A 上给出了一个代数结构，而第二个等式正是交换性条件(2.9)。因此 A 是一个交换代数。由(2.8)可立即得到等式(2.9)。□

在(a)中对 η 的选择并不唯一。如果由满足 $\partial_3(\eta_i) = \omega|_{\Gamma\times\Gamma\times\Gamma}$的余链 $\eta_i \in C^2(\Gamma)$构造简单流代数 A_i $(i = 1,2)$，则 $A_1 \cong A_2$ 作为代数同构，当且仅当η_1 与 η_2 上同调等价。换言之， Γ上的简单流代数的同构类集合（若非空）是一个以$H^2(\Gamma)$为底的挠子。

在(b)中对 η 的选择也不唯一。设余链 $\eta_1, \eta_2 \in C^2(\Gamma)$在对象 $A = \bigoplus_{g\in\Gamma} E_g$上定义了两个交换简单流代数结构。那么 $\rho := \eta_1\eta_2^{-1}$是阿贝尔群 Γ上的一个对称 2-余循环。由于群 $\Bbbk^\times$ 是可除的，每个对称 2-余循环 $\Gamma \times \Gamma \to \Bbbk^\times$ 都是一个余边界。因此存在 $\lambda \in C^1(\Gamma)$，使得 $\rho = \partial_2(\lambda)$。将每个直和项 E_x 乘以标量 $\lambda(x)$重新缩放，即可得到两个结构之间的代数同构。特别地， η 在$H^2(\Gamma)$中的上同调类，从而交换代数 A的同构类，是唯一确定的。

3. A construction of ribbon braided tensor categories

本节将介绍一种构造新的带状编织张量范畴的框架。我们从一个编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 出发，并考察其 ind-$\widehat{\ }$完备化 $\mathcal{C}$中的交换代数。这类代数上的完整模范畴通常过于庞大，无法构成我们所研究类型的张量范畴，因为其中会包含非刚性对象和无限长度对象。因此，我们必须找出在张量积下封闭且满足必要有限性条件的特定子范畴。

我们证明，对于 阿廷代数，有限生成、有限表示和有限长度模这三种有限性条件彼此等价（定理 3.4），从而得到一个 $\Bbbk$-线性阿贝尔幺半范畴，其中每个对象的长度都有限。在第 3.2 节中，我们引入 ind-正合代数（沿用 [CEO24] 的做法），以确保有限生成模范畴具有刚性。在第 3.3 节中，我们将刚性情形下常用的定义推广（见定义 3.9），在闭幺半范畴中引入 Frobenius 代数的概念，并证明：若代数 A 按我们的定义是阿廷、ind-正合且为 Frobenius 代数，并且扭结在 A 上为恒等映射，则有限生成局部模范畴是带状的。主要结果总结于下文的定理3.1 中。

约定。 在本节中， $\mathcal{C}$ 表示一个张量范畴（并在需要时赋予额外结构 $\widehat{\ }$），$\mathcal{C}$ 表示其 ind-完备化， A表示 $\mathcal{C}$中的一个代数。

$\widehat{\ }$**定理 3.1**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个编织张量范畴，且 $A \in \mathcal{C}$ 是一个交换代数。若 A 是阿廷的、单倍的且 *ind*-正合的，则fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$是一个张量范畴，且fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是一个编织张量范畴。若进一步地， $\mathcal{C}$ 是带状的， A 是弗罗贝尼乌斯的，且$\theta_A = \mathrm{id}_A$，则fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是一个带状张量范畴。

证明。 本定理总结了本节后文证明的结果。第一个断言由定理 3.13得出，第二个断言由定理 3.15得出。□

3.1. **阿廷代数。** 回顾定义$\mathcal{C}_A$中关于有限长度、有限生成和有限表示$\mathcal{C}_A$的子范畴$\mathcal{C}_A$，分别是 A-模2.3。

理想情况下，我们希望在 $\mathcal{C}_A$ 的全子范畴中工作，该子范畴由同时满足有限生成、有限表示且具有有限长度的对象构成。这引出了以下指导性问题：找出使这三个有限性条件彼此等价的代数 A。

定义 3.2. 若每个有限生成右A-模都具有有限长度，则称代数 $A \in \mathcal{C}$ 阿廷 [CEO24]。

我们首先记录阿廷代数的关键性质。

引理 3.3 。若 A 是阿廷代数，则每个有限生成右 A-模都是有限表示的。

证明。设 M 是一个有限生成的 A-模。根据定义，存在一个满态射 $f : X \otimes A \twoheadrightarrow M$，其中 $\mathcal{C}_A$ 中的某个 $X \in \mathcal{C}$。令 $K := \ker(f)$，并令 $k\colon K \hookrightarrow X \otimes A$ 为核包含，因此我们有一个正合列

$$0 \to K \xrightarrow{k} X \otimes A \xrightarrow{f} M \to 0.$$

由于 $X \otimes A$ 是有限生成的，而 A 是阿廷的，$X \otimes A$ 具有有限长度。因此 K 作为在阿贝尔范畴 $X \otimes A$ 中的子对象，具有有限长度 $\mathcal{C}_A$。由引理 2.5，K 是有限生成的。因此存在 $X' \in \mathcal{C}$ 以及一个满态射 $g : X' \otimes A \twoheadrightarrow K$。

于是 $k \circ g\colon X' \otimes A \to X \otimes A$ 的像为 $K = \ker(f)$，因此 f 是 $k \circ g$的余核。等价地，

$$X' \otimes A \xrightarrow{k\circ g} X \otimes A \xrightarrow{f} M \to 0$$

是正合的，证明了 M 是有限表示的。 □

我们关注阿廷代数，是因为以下定理表明，阿廷性会使这些有限性概念彼此一致。

定理 3.4. 设 $A \in \mathcal{C}$ 是阿廷代数。则有 fl-$\mathcal{C}_A$ = fg-$\mathcal{C}_A$ = fp-$\mathcal{C}_A$，且这些范畴是阿贝尔 $\Bbbk$-线性范畴，其中的对象具有有限长度。若 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象，则这些范畴也有足够多的投射对象。

证明。由引理 3.3，立即可得 fg-$\mathcal{C}_A$ =fp-$\mathcal{C}_A$。接下来，利用引理 2.5 以及阿廷性质，可知 $\mathcal{C}_A$ 中的对象有限生成，当且仅当其具有有限长度，即 fl-$\mathcal{C}_A$ =fg-$\mathcal{C}_A$。因此，这三个范畴相等。特别地，fg-$\mathcal{C}_A$ 是阿贝尔的，$\Bbbk$-线性的，且对象具有有限长度。

假设 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象。设 $M \in$ fg-$\mathcal{C}_A$，并选取一个满态射$q : X \otimes A \twoheadrightarrow M$，其中 $X \in \mathcal{C}$。在 $\mathcal{C}$ 中选取一个满态射 $\pi : P \twoheadrightarrow X$，其中 P 是投射的。于是$\pi \otimes \mathrm{id}_A : P \otimes A \twoheadrightarrow X \otimes A$ 是 $\mathcal{C}_A$中的满态射，因此 $q \circ (\pi \otimes \mathrm{id}_A) : P \otimes A \twoheadrightarrow M$也是满态射。此外，$P \otimes A$ 在 $\mathcal{C}_A$中是投射的：事实上，对于任意 A-模 N，我们有一个伴随

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}_A}}(P \otimes A, N) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(P, U(N)),$$

其中 U 是遗忘函子，它是正合的，因为 $\mathcal{C}_A$ 中的核和余核都是在 $\mathcal{C}$中计算的。由于 Hom $\widehat{\mathcal{C}}(P,$ –) 是正合的，因此 Hom $\widehat{\mathcal{C}_A}(P \otimes A,$ –) 也是正合的。由此可知，fg-$\mathcal{C}_A$有足够多的投射对象。□

3.2. **Ind-正合代数。** 我们考虑来自 [CEO24, §6的以下概念].

定义 3.5。 如果函子 $-\otimes_A -:\text{fg-}\mathcal{C}_A\times\text{fg-}_A\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 是双正合的，我们就称代数 A 为 $\mathcal{C}$ *ind*-正合 。这里，fg-$_A\mathcal{C}$ 是有限生成左 A-模的范畴，其定义方式与fg-$\mathcal{C}_A$相同。

定理 *3.6. </style}*设 A 是 $\mathcal{C}$中的阿廷中心交换代数。以下条件等价：

(a) A是 *ind*-正合的。(b) 范畴 fg-$\mathcal{C}_A$ 是刚性的。*(c) </style}*每个单 A-模都是刚性的。

证明。 $(a)\Rightarrow(b)$：阿廷假设意味着 fp-$\mathcal{C}_A$ = fg-$\mathcal{C}_A$。因此，fg-$\mathcal{C}_A$ 中的每个对象都是有限表示的，也就是说，它是某个态射 $X\otimes A\to Y\otimes A$ 的余核，其中 $X,Y\in\mathcal{C}$。这里 $X\otimes A$ 和 $Y\otimes A$ 是刚性的。因此，结论成立，因为在张量积双正合的阿贝尔幺半范畴中，刚性对象对取余核封闭 [Wig18]。

$(b)\Rightarrow(a)$：刚性意味着，函子 $-\otimes_A V$通过与 V 的左/右对偶进行张量积而具有左/右伴随函子；这些对偶位于 fg-$\mathcal{C}_A$ 中。因此，在 A上进行张量积是双正合的。

$(b)\Rightarrow(c)$：这是显然的。

$(c)\Rightarrow(b)$：记 $\mathcal{D}$ =fg-$\mathcal{C}_A$。由于 A 是阿廷的，定理 3.4 意味着 $\mathcal{D}$ 是一个阿贝尔$\Bbbk$-线性范畴，其中每个对象都具有有限长度。在 $\mathcal{D}$中，每个对象都是某个自由模 $X\otimes A$ 的商对象，其中 $X\in\mathcal{C}$具有刚性。因此，根据 Etingof 和 Penneys 引理的非编织版本（见定理A.2），所有简单对象的刚性意味着整个范畴具有刚性。□

定理 3.7。 设 $A\in\mathcal{C}$ 是一个具有中心性的单倍阿廷代数。如果定理 *3.6* 中的任一条件得到满足，那么 fg-$\mathcal{C}_A$ 是一个张量范畴。此外，如果 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯的，那么 fg-$\mathcal{C}_A$ 是一个弗罗贝尼乌斯张量范畴。

证明。由定理 3.4，fg-$\mathcal{C}_A$ 是一个阿贝尔 $\Bbbk$-线性范畴，其中所有对象都有有限长度。此外，定理 3.6 表明 fg-$\mathcal{C}_A$ 是刚性的。由于 A是单倍的，

$$\mathrm{Hom}_{\text{fg-}\widehat{\mathcal{C}}_A}(A,A)\cong\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbb{1},A)\cong\Bbbk.$$

因此，引理 2.1 表明 fg-$\mathcal{C}_A$ 是局部有限的。定理 3.4 中的同一论证适用于幺半子范畴 fg-$\mathcal{C}_A$ ，结论得证。□

注 3.8。我们可以放宽 $\mathrm{Hom}(\mathbb{1},A)\cong\Bbbk$ 这一假设，改用较弱的假设：$\dim(\mathrm{Hom}(\mathbb{1},A))<\infty$，且 A 是连通的 [1]。事实上，Hom$_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbb{1},A)$ 是一个有限维连通代数，而 fg-$\mathcal{C}_A$ 的单位对象（即 A）满足 Hom$_{\text{fg-}\widehat{\mathcal{C}}_A}(A,A)\cong$Hom $_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbb{1},A)$，后者是一个有限维连通代数。因此，借鉴 [EGNO16, Theorem 4.3.1]，中的类似论证，Hom$_{\text{fg-}\widehat{\mathcal{C}}_A}(A,A)$ 同构于若干个 $\Bbbk$ 的直和。由于它也是连通的，我们得到 Hom$_{\text{fg-}\widehat{\mathcal{C}}_A}(A,A)\cong\Bbbk$。

3.3. **Frobenius 代数**。 本小节中，我们介绍 $\mathcal{C}$ 中的 Frobenius 代数，并讨论其性质。我们证明，若 $\mathcal{C}$ 是带状范畴且 A 是 Frobenius 代数，则 A上的局部模范畴具有辫带结构。

回忆一下， $\mathcal{C}$ 是闭幺半范畴，我们将右内 Hom 记为 $[-,-]$。它满足 Hom $_{\widehat{\mathcal{C}}}(L\otimes M,\ N)\cong$Hom $_{\widehat{\mathcal{C}}}(L,\ [M,N])$。

[1] A 称为连通的，如果环 $A^{\mathrm{inv}}:=\mathrm{Hom}(\mathbb{1},\ A)$ 是有限维连通环，也就是说，不存在非平凡幂等元。等价地，对于某些代数 A_1 和 A_2，A 不同构于 $A_1\oplus A_2$。

定义 3.9。设 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，其乘法为 μ，并设 $\lambda\colon A \to \mathbb{1}$ 是 $\mathcal{C}$中的一个态射。我们定义 $\phi\colon A \to [A, \mathbb{1}]$ 为 $\mathcal{C}$ 中在伴随同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes A, \mathbb{1}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, [A, \mathbb{1}])$下对应于 $\lambda\mu\colon A \otimes A \to \mathbb{1}$ 的态射。若态射 ϕ 可逆，则称 A为带有 Frobenius 形式 λ 的 Frobenius 代数。

正如我们将在第 4 节看到的，“单流代数”是这样一种 Frobenius 代数（定理 4.15）。我们预期余 Frobenius Hopf 代数将提供更多例子，并将在未来的工作中继续探究这一方向。

现在我们给出 Frobenius 代数的性质。下面的引理 3.10 类似于这样一个事实：对于通常的 Frobenius 代数，自由模函子是从模范畴出发的遗忘函子的右伴随。

引理 3.10。设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个 *Frobenius* 代数。则存在一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(M, X \otimes A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X) \tag{3.1}$$

对于 $M \in \mathcal{C}_A$ 和 $X \in \mathcal{C}$。

证明。存在一个自然变换 $f_{X,M}\colon X \otimes [A, M] \to [A, X \otimes M]$，其中 $X, M \in \mathcal{C}$使得函子 $[A, -]\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$成为一个“松”左 $\mathcal{C}$-模函子，因为 $[A, -]$是左 $\mathcal{C}$-模函子 $- \otimes A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$的右伴随。我们注意到，当 X 为刚性时，$f_{X,M}$ 是可逆的。容易看出，定义 3.9 中的态射 $\phi\colon A \to [A, \mathbb{1}]$ 是右 A-模的同构。因此，对于 $X \in \mathcal{C}$，我们有 $X \otimes A \cong X \otimes [A, \mathbb{1}] \cong [A, X]$ 作为右 A-模。现在我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(M, X \otimes A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(M, [A, X]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M \otimes_A A, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X)$$

对于 $M \in \mathcal{C}_A$ 和 $X \in \mathcal{C}$。证明完毕。 □

我们将 $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ 定义为函子 $- \otimes_A M\colon \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ 的右伴随。它可以以与 ${}_A\mathcal{C}_A$ 的内部 Hom 函子相同的方式构造（见 [SY24]）。

引理 3.11. 采用上述记号，我们有一个自然同构

$$\underline{\mathsf{Hom}}_A(M, X \otimes A) \cong [M, X]$$

关于右 A-模，对 $M \in {}_A\mathcal{C}_A$ 和 $X \in \mathcal{C}$成立。

引理 *3.11*的证明。 对于一个右 A-模 L，我们有自然同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(L, \underline{\mathsf{Hom}}_A(M, X \otimes A)) &\cong \mathrm{Hom}_A(L \otimes_A M, X \otimes A)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L \otimes_A M, X)\\ &\cong \mathrm{Hom}_A(L, [M, X]),\end{aligned}$$

这里我们用到了引理 3.10。因此，由米田引理可得所述结论。 □

3.4. 辫 braided 情形。我们也记录局部模范畴相应的有限性结论。在本节中，$\mathcal{C}$ 假设为编织张量范畴。

命题 3.12。设 $A \in \mathcal{C}$ 为交换阿廷代数。则有

$$\mathrm{fl}\text{-}\mathcal{C}_A^{\mathrm{loc}} = \mathrm{fg}\text{-}\mathcal{C}_A^{\mathrm{loc}} = \mathrm{fp}\text{-}\mathcal{C}_A^{\mathrm{loc}},$$

而且这些范畴是有限长度的阿贝尔 $\Bbbk$-线性辫幺半范畴。此外，若 $\mathrm{fg}\text{-}\mathcal{C}_A$ 有足够的内射对象，则这些范畴也有足够的内射对象。

证明。第一个结论由定理 3.4 得出。由于 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}} = \mathrm{fg}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A \cap \widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$和 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$以及 $\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$都是阿贝尔 $\Bbbk$-线性子范畴，且它们属于 $\widehat{\mathcal{C}}_A$，因此 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$也是阿贝尔 $\Bbbk$-线性子范畴。最后，由于 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$ 是有限长度的，且 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$的全子范畴，因此 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$也是有限长度的。

回顾一下，包含函子 $i\colon\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}} \to \widehat{\mathcal{C}}_A$ 有一个右伴随 i^R。若 $M \in \mathrm{fg}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A = \mathrm{fl}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A$，则 $i^R(M)$（它是 M的一个子对象，见（2.2））也具有有限长度，因此是有限生成的。因此，右伴随 $i^R\colon\widehat{\mathcal{C}}_A \to \widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$限制为函子 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A \to \mathrm{fg}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$。

假设 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$ 有足够多的内射对象。令 $M \in$ fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$并选取一个单射$i(M) \hookrightarrow I$属于 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$，其中 I是内射对象。于是，$i^R(I)$ 在 $\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$中是内射的，因为 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}}(-,\ i^R(I)) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_A}(i(-)\ I)$ 是正合的。由于 $M \hookrightarrow i^R(I)$，我们看到 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$也有足够多的内射对象。

最后，当 A是交换代数时，$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$上的编织幺半结构限制到 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$，因为两个有限生成局部模的张量积仍然是有限生成的。□

3.4.1. 刚性。

定理 3.13。设 $A \in \mathcal{C}$ 是一个阿廷的单子交换代数。如果满足定理 3.6 中的任一条件，那么 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$ 是一个张量范畴，而 $\mathrm{fg}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是一个编织张量范畴。若进一步 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯的，那么二者都是弗罗贝尼乌斯张量范畴。

证明。证明与定理 3.7的证明类似。关键在于，$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是 $\widehat{\mathcal{C}}_A$的一个闭幺半群子范畴。因此，fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$的一个闭编织幺半群子范畴。于是，如果 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$ 是刚性的，那么 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$也是刚性的。由于 A是单倍的，$\mathrm{End}_{\mathrm{fg}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A}(A) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbb{1}, A)$ 是连通的；如上所述，这将单位对象自同态环与 $\Bbbk$相识别，因此这些是张量范畴。

我们回顾 [SS23] 中的结论：张量范畴是弗罗贝尼乌斯范畴，当且仅当它有足够多的内射对象；当且仅当它有足够多的投射对象。现在假设 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯范畴。于是，由定理 3.4，张量范畴 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$ 是弗罗贝尼乌斯范畴。因此，由命题 3.12，fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$也是弗罗贝尼乌斯范畴。□

3.4.2. 局部模上的带状结构。设 $\mathcal{C}$ 是一个带状张量范畴，其编织为 c，扭结为 θ。那么 $\mathcal{C}$ 是一个闭辫单范畴。此外，扭结在恒等函子 $\mathcal{C}$上诱导出一个自同构，满足 $\theta_{M\otimes N} = c_{N,\,M}c_{M,\,N}(\theta_M \otimes \theta_N)$，对所有 $M,\ N \in \mathcal{C}$均成立。

我们将 $\mathcal{C}'$ 记作 $\mathcal{C}$的 Müger 中心。接下来我们将证明，在带状范畴的 ind-完备化中，内部 Hom 与辫带结构相容。特别地，$\theta_{[M,\mathbb{1}]} = [\theta_M, \mathbb{1}]$ 对 $M \in \mathcal{C}$成立。

引理 3.14. 对于任意对象 $M \in \mathcal{C}$和 $X \in \mathcal{C}'$，都有 $\theta_{[M,X]} = [\theta_M, \theta_X]$。

证明。我们将 M写作 $M = \varinjlim_{i\in I} M_i$，其中 $M_i \in \mathcal{C}$。于是有 $[M, X] = \varprojlim_{i\in I}[M_i, X]$。若$W \in \mathcal{C}$，则我们可以且确实会将 $[W, X]$与 $X \otimes W^*$视为相同。因此有

$$\theta_{[W,X]} = \theta_{X\otimes W^*} = c_{W^*,X}c_{X,W^*}(\theta_X \otimes \theta_{W^*}) = \theta_X \otimes (\theta_W)^* = [\theta_W, \theta_X],$$

其中在第三个等号处，我们用到了假设 $X \in \mathcal{C}'$。由于对所有 $M_i \in \mathcal{C}$ i，

$$\theta_{[M,X]} = \varprojlim_{i\in I} \theta_{[M_i,X]} = \varprojlim_{i\in I} [\theta_{M_i}, \theta_X] = [\varinjlim_{i\in I} \theta_{M_i}, \theta_X] = [\theta_M, \theta_X].$$ □

设 A 是 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中的一个交换 Frobenius 代数。那么，由有限生成局部 A-模组成的范畴 $\mathcal{D} :=$ fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 是一个辫单范畴。

定理 3.15。 若 $\theta_A = \mathrm{id}_A$ 且 $\mathcal{D}$ 是刚性的，则 $\mathcal{D}$ 是一个带状范畴。

我们说明，本定理可应用于 $\mathcal{C}$ 第 4 节中 $\theta_A =$特征零$_A$ 下的简单流代数。条件 [id25] 类似于有限维弗罗贝尼乌斯情形中中山自同构平凡这一条件 [FFRS06, 命题 2。25]。

证明。由假设 $\theta_A = \mathrm{id}_A$，我们可以按照 [KJO02, 定理 1.17 (2)] 的相同方式定义自然同构 $\theta^A_M : M \to M$，其中 $M \in \mathcal{D}$ 由 $\theta^A_M = \theta_M$ 给出。利用内部 Hom 函子，$\mathcal{D}$ 的对偶函子由 $M \mapsto M^\dagger := \mathrm{Hom}_A(M, A)$ 给出。剩下要证明的是，对于所有 $M \in \mathcal{D}$，$(\theta^A_M)^\dagger = \theta^A_{M^\dagger}$ 成立。根据引理 3.11，存在自然同构ϕ_M: $M^\dagger \to [M, \mathbb{1}]$，其中 $M \in \widehat{\mathcal{C}_A}$。现在我们有

$$\phi_M \circ \theta^A_{M^\dagger} = \theta^A_{[M,\mathbb{1}]} \circ \phi_M = [\theta^A_M, \mathbb{1}] \circ \phi_M = \phi_M \circ (\theta^A_M)^\dagger$$

对于 $M \in \mathcal{D}$，其中第一个等式由 θ 的自然性得出，第二个等式由前一个引理得出，最后一个等式由 ϕ 的自然性得出。证明完毕。□

4. Representation theory of simple current algebras

在本节中，$\mathcal{C}$ 表示一个局部有限的 $\Bbbk$-线性阿贝尔闭幺半范畴，且其单位对象是单对象；需要时还会施加其他假设（如刚性、编织等）。我们还固定 Γ，它是群 Inv($\mathcal{C}$)（$\mathcal{C}$ 的可逆对象构成的群）的一个子群；对于每个 $g \in \Gamma$，选取一个代表 g 的对象 $E_g \in \mathcal{C}$。根据引理 2.9 (a)，我们假设存在一个 2-余链 $\eta \in C^2(\Gamma)$，使得 $\partial_3(\eta) = \omega|_{\Gamma\times\Gamma\times\Gamma}$，其中 ω 是由结合子导出的 Inv($\mathcal{C}$) 上的 3-余循环，并通过 2-余链 η 构造简单流代数 $A = \bigoplus_{g\in\Gamma} E_g$。本节旨在研究 A 的表示论。在本节中，我们将在关于 Γ 和 $\mathcal{C}$ 的某些假设下，验证 A 满足定理 3.1 的假设。因此，我们得到一些判据，确保 A 上有限生成局部模的范畴是一个带状（弗罗贝尼乌斯）张量范畴（定理 4.24）。

4.1. 单模的分类。

在本小节中，我们对代数 $A = \bigoplus_{g\in\Gamma} E_g$ 在 $\mathcal{C}$ 中的单右模进行分类。为此，我们研究 A-模限制到 A 的子代数上的情形，这在精神上与克利福德理论相似。

可逆直和项 E_g 通过张量积作用于 $\mathcal{C}$ 的简单对象，因此任意单 A-模 M 都支撑在某个简单成分 $X \subset M$ 的单一 Γ-轨道上。接着，我们从整个代数A 转到稳定子群 $S = \mathrm{Stab}_\Gamma(X)$ 及相应的子代数 $A_X = \bigoplus_{s\in S} E_s$，后者刻画了保持 X 不变的那部分作用。A_X 对 X 的作用所满足的结合约束产生了 S 上的一个规范 2-余循环 ξ_X；该余循环衡量了无法相容地选取同一化 $X \otimes E_s \simeq X$ 的障碍，并迫使重数空间携带 S 的 ξ_X-射影表示。因此，底层对象同构于 $X \oplus \cdots \oplus X$ 的单 A_X-模由 S 的不可约 ξ_X-射影表示 W 参数化，而相应的单 A-模则通过诱导 $\mathrm{M}(X, W) = (W \otimes X) \otimes_{A_X} A$ 得到。最后，同构类由显然的轨道关系给出：用 E_g 扭结 X 会将 (S, ξ_X, W) 替换为共轭数据，从而得到同一个诱导 A-模。

4.1.1. 射影表示。

我们回顾群的射影表示基础知识。设 S是一个群，$\xi \in C^2(S)$ 是一个归一化 2-上循环。S 具有乘子ξ 的射影表示是一个有限维向量空间 V，以及一个映射 $\rho : S \to \mathrm{GL}(V)$，满足

$$\rho(s)\,\rho(t) = \xi(s,t)\,\rho(st) \quad \text{for all } s, t \in S.$$

态射是与 S-作用相交织的线性映射。我们用 $\mathbf{Rep}(S,\xi)$ 表示这类表示所构成的范畴。它等价于扭群代数 $\Bbbk^{\xi}[S]$ 上有限维模所构成的范畴；该代数以 $\{e_s\}_{s\in S}$ 为 $\Bbbk$-基，乘法为 $e_s\cdot e_t=\xi(s,t)\,e_{st}$。若 ξ 和 ξ' 上同调等价，则 $\mathbf{Rep}(S,\xi)\simeq\mathbf{Rep}(S,\xi')$，因此该范畴仅取决于类$[\xi]\in\mathrm{H}^2(S)$。

4.1.2. 稳定子上的模。 对于一个简单对象 $X\in\mathcal{C}$，我们定义

$$\mathrm{Stab}_\Gamma(X)=\{g\in\Gamma\mid X\otimes E_g\cong X\}$$

并称其为 X 的稳定子 。显然，$\mathrm{Stab}_\Gamma(X)$ 是 Γ 的子群。固定一个简单对象 $X\in\mathcal{C}$ ，并记 $S=\mathrm{Stab}_\Gamma(X)$。稍后，我们将通过从子代数诱导构造一个简单的右 A-模

$$A_X:=\bigoplus_{s\in S}E_s$$

A。我们首先指出， A_X 实际上是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数。也就是说，

引理4.1。 群 S 是有限的。

证明。 我们用 $[-,-]^l$ 表示 $\mathcal{C}$ 的左内 Hom 函子（因此 $[X,-]^l$ 是 $X\otimes-$ 的右伴随）。若 $g\in S$，则有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E_g,[X,X]^l)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes E_g,X)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)\neq0$。这意味着 E_g 是 $[X,X]^l$ 的一个简单子对象。因此， S 的基数不超过 $[X,X]^l\in\mathcal{C}$ 的底的长度，而该长度至多为有限。□

~ ~我们选取一族同构 $\phi_s\colon X\otimes E_s\to X$ ($s\in S$)，它们属于 $\mathcal{C}$ ，且 ϕ_1 是单位同构，并定义映射 $\eta_X\colon S\times S\to\Bbbk^\times$ ，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccc}(X\otimes E_s)\otimes E_t & \xrightarrow{\tilde\phi_s\otimes\mathrm{id}} & X\otimes E_t & \xrightarrow{\tilde\phi_t} & X\\ \downarrow{\scriptstyle\alpha_{X,E_s,E_t}} & & & & \downarrow{\scriptstyle\eta_X(s,t)\,\mathrm{id}}\\ X\otimes(E_s\otimes E_t) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\phi_{s,t}} & X\otimes E_{st} & \xrightarrow{\tilde\phi_{st}} & X\end{array}\tag{4.1}$$

对所有 s， $t\in S$。

引理 4.2. $\partial_3(\eta_X^{-1})=\omega|_{S\times S\times S}$。

证明。 存在一个由图 1 给出的交换图（图中，为节省空间， $\mathcal{C}$ 中对象的张量积用并置表示）。沿第一列的复合根据五边形公理等于恒等态射。因此我们有

$$\eta_X(s,t)^{-1}\eta_X(st,u)^{-1}\omega(s,t,u)^{-1}\eta_X(s,tu)\eta_X(t,u)=1\quad(s,t,u\in S),\tag{4.2}$$

这便推出所述结论（参见 2.4 中 ∂_3 的定义）。 □

由此引理，我们在 S 上得到一个 2-余循环 ξ_X ，其定义为

$$\xi_X(s,t)=\eta(s,t)\cdot\eta_X(s,t)\quad(s,t\in S).\tag{4.3}$$

~我们将 ξ_X 与.....相关联的 *2*-余循环 $\{\phi_s\}_{s\in S}$ 称为.....。2-余循环 ξ_X 取决于~同构$\{\phi_s\}_{s\in S}$ 族$\phi_{s,\ t}$ 和 η的选择（事实上，还取决于.....的选择）；然而，它的上同调类只取决于 X。

现在我们考虑张量范畴**向量空间范畴**^{S} ，其对象为 $\Bbbk$上的有限维 S分次向量空间。令 $\Bbbk_s\in$ **向量空间范畴**^{S} 表示由 $s\in S$分次的一维向量空间 $\Bbbk$ 。我们用$\mathcal{M}_X$ 表示

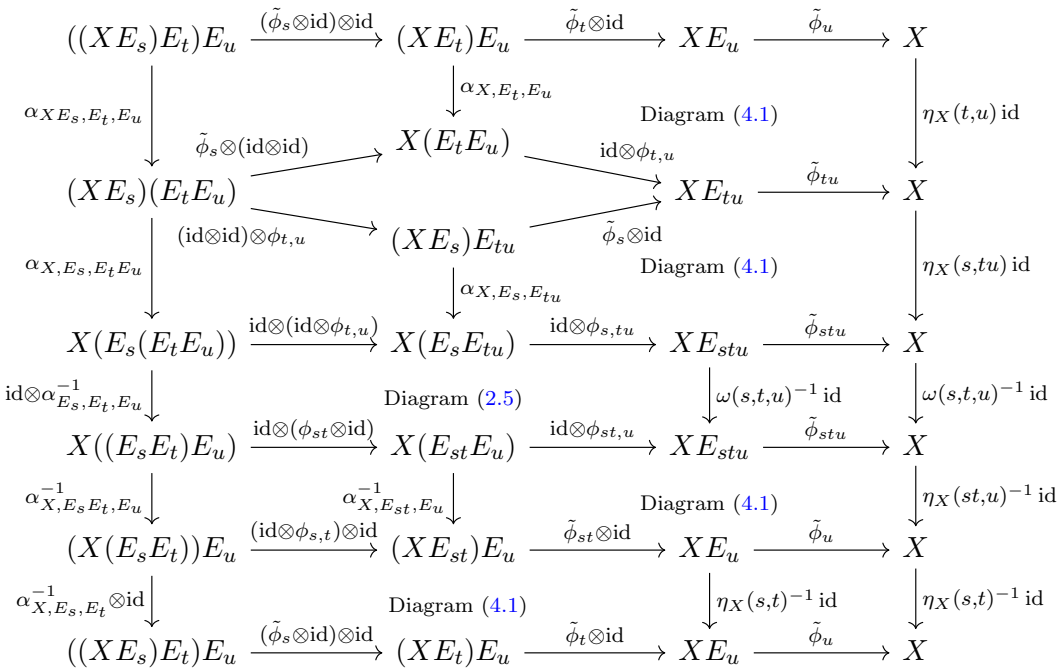


FIGURE 1. 等式（4.2）的证明

将范畴**向量空间范畴** 通过以下作用 $V \triangleleft W = V \otimes W$赋予右模范畴结构，使其成为**向量空间范畴**^{S} 上的右模范畴：对 $V \in$**向量空间范畴** 和 $W \in$**向量空间范畴**^{S}，模结合子 $\tilde{\alpha}$ 由下式确定

$$\tilde{\alpha}_{V,\Bbbk_s,\Bbbk_t} = \xi_X(s,t)\,\mathrm{id}_V : (V \triangleleft \Bbbk_s) \triangleleft \Bbbk_t \to V \triangleleft (\Bbbk_s \otimes \Bbbk_t) \tag{4.4}$$

对于 $s,\ t \in S$。

存在唯一的（在同构意义下）线性函子 $\mathcal{E}$： $\mathbf{vec}^S \to \mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{E}(\Bbbk_s) = E_s$ 对所有元素 $s \in S$均成立。函子 $\mathcal{E}$ 是一个幺半函子，其幺半结构由态射$\mu_{s,\ t}$ 给出，如（2.7）所示。因此，$\mathcal{C}$ 通过幺半函子$\mathbf{vec}^S$ 成为一个右模范畴 $\mathcal{E}$。我们注意到， $\tilde{\alpha}$ 的 $\mathcal{C}$ 模结合子由下式给出

$$\tilde{\alpha}_{V,\Bbbk_s,\Bbbk_t} = (\mathrm{id}_V \otimes \mu_{s,t}) \circ \alpha_{V,E_s,E_t} : (V \triangleleft \Bbbk_s) \triangleleft \Bbbk_t \to V \triangleleft (\Bbbk_s \otimes \Bbbk_t) \tag{4.5}$$

对于 $V \in \mathcal{C}$ 和 $s,\ t \in S$。

从现在起，我们将 **vec** 视为 $\mathcal{C}$ 的一个全子范畴，方法是将 $\mathcal{C}$ 的单位对象与向量空间 $\Bbbk$ 等同，从而 $V \otimes Y$对 $V \in \mathbf{vec}$ 以及 $Y \in \mathcal{C}$ 都有意义。

引理 4.3. 该函子

$$\mathcal{F}_X : \mathcal{M}_X \to \mathcal{C}, \quad \mathcal{F}_X(W) = W \otimes X$$

是由模结构 f 确定的右 **向量空间范畴**^{S}-模函子

$$f_{W,\Bbbk_s} = (\mathrm{id}_{\mathcal{E}(W)} \otimes \tilde{\phi}_s) \circ \alpha_{W,X,E_s} : \mathcal{F}_X(W) \triangleleft \Bbbk_s \to \mathcal{F}_X(W \triangleleft \Bbbk_s) \tag{4.6}$$

其中 $s \in S$。

证明。 容易看出 $f_{W,\Bbbk_1} = \mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_X$ 对 $W \in \mathcal{M}_X$成立。为了完成证明，只需证明以下等式

$$\mathcal{F}_X(\tilde{\alpha}_{W,\Bbbk_s,\Bbbk_t}) \circ f_{W \triangleleft \Bbbk_s,\Bbbk_t} \circ (f_{W,\Bbbk_s} \triangleleft \Bbbk_t) = f_{W,\Bbbk_s \otimes \Bbbk_t} \circ \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}_X(W),E_s,E_t} \tag{4.7}$$

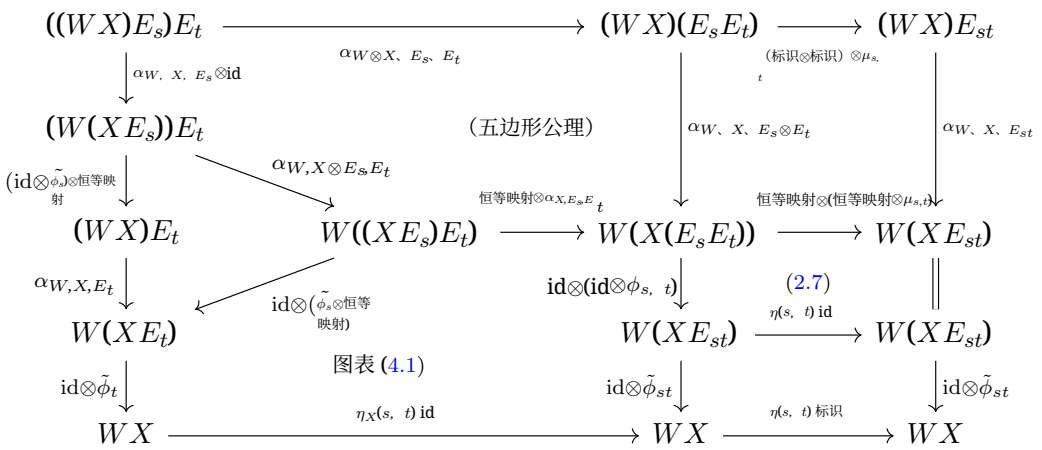


FIGURE 2. 引理4.3的证明

对所有 $W \in \mathcal{M}_X$ 和 $s,t \in S$均成立。我们考虑图 2所示的交换图。由（4.4）和（4.6），（4.7）的左边等于图 2中从左上角到右下角沿逆时针路径的态射复合。由（4.5）和（4.6），沿顺时针路径得到（4.7）的右边。因此得到（4.7）。□

给定幺半范畴 $\mathcal{D}$ 上的右模范畴 $\mathcal{M}$，以及 $\mathcal{D}$ 中的代数 R，其乘法为 m，单位为 u，即可定义 $\mathcal{M}$ 中右 R-模所成的范畴。回顾一下，该范畴的对象是一个对象 $M \in \mathcal{M}$，连同一个态射 $a\colon M \triangleleft R \to M$，满足下列图表交换:

$$\begin{array}{ccccc} (M\triangleleft R)\triangleleft R & \xrightarrow{a\triangleleft \mathrm{id}} & M\triangleleft R & \xrightarrow{a} & M \\ \cong\downarrow & & & & \downarrow\mathrm{id} \\ M\triangleleft(R\otimes R) & \xrightarrow{\mathrm{id}\triangleleft m} & M\triangleleft R & \xrightarrow{a} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M\triangleleft 1 & \xrightarrow{\mathrm{id}\triangleleft u} & M\triangleleft R \\ \cong\downarrow & & \downarrow a \\ M & \xrightarrow{\mathrm{id}} & M. \end{array}$$

我们考虑群代数 $R=\Bbbk S$，它是 $\mathbf{vec}^S$ 中的一个代数，其分次由$R_s=\Bbbk s$ $(s\in S)$给出。当我们通过幺半函子$\mathcal{E}:\mathbf{vec}^S\to\mathcal{C}$将 $\mathcal{C}$ 视为 $\mathbf{vec}^S$ 上的右模范畴时，$\mathcal{C}$ 中右 R-模所成的范畴与 $\mathcal{C}_{A_X}$ 相同，因为 $\mathcal{E}(\Bbbk S)=A_X$ 是代数。考虑模结合子的公式 (4.5)，可知 $\mathcal{M}_X$ 中的右R-模等同于一个有限维向量空间 W，连同一族$\{\rho(s)\}_{s\in S}$ 上的线性自同态，使得以下等式

$$\rho(1)=\mathrm{id}_W \quad \text{and} \quad \xi_X(s,t)\rho(st)=\rho(t)\rho(s)$$

对所有 $s,\ t\in S$均成立。因此，$\mathcal{M}_X$ 中右 R-模的范畴可识别为 $\mathbf{Rep}(S^{\mathrm{op}},\ \xi_X^{\mathrm{op}})$，即带有乘子 ξ_X^{op} 的 S^{op} 的射影表示范畴，其中 $\xi_X^{\mathrm{op}}(t,\ s)=\xi_X(s,\ t)$ $(s,\ t\in S)$。我们利用这一观察来证明:

引理 4.4。给定具有表示空间 W 的 $\rho\in\mathrm{Rep}(S^{\mathrm{op}},\xi_X^{\mathrm{op}})$，我们定义 e

$$\mathbf{L}(X,\{\tilde{\phi}_s\}_{s\in S},\rho)=W\otimes X$$

并通过由.....诱导的作用，使其成为 $\mathcal{C}$ 中的右 A_X-模

$$(W\otimes X)\otimes E_s \xrightarrow{\alpha_{W,X,E_s}} W\otimes(X\otimes E_s) \xrightarrow{\rho(s)\otimes\tilde{\phi}_s} W\otimes X.$$

这一构造导出一个函子

$$\mathbf{L}(X,\{\tilde{\phi}_s\}_{s\in S},-):\mathrm{Rep}(S^{\mathrm{op}},\xi_X^{\mathrm{op}})\to\mathcal{C}_{A_X},$$

这诱导出一个从 $\mathrm{Rep}(S^{\mathrm{op}},\xi_X^{\mathrm{op}})$ 到 $\mathcal{C}$ 中右 A_X-模范畴的等价，其中其底层对象同构于 X 的有限个副本的直和。

证明。右 $\mathbf{vec}^S$-模函子 $\mathcal{F}_X:\mathcal{M}_X\to\mathcal{C}$ 从 $\mathcal{M}_X$ 中右 R-模的范畴诱导出一个函子，且诱导出的函子正是所讨论的函子 $\mathbf{L}(X,\{\phi_s\}_{s\in S},-)$。该引理的最后一个断言成立，是因为 $\mathcal{F}_X$ 从 $\mathcal{M}_X$ 到 $\mathcal{C}$ 的全子范畴诱导出一个等价，而该全子范畴由 X 的有限直和组成。□

设 (ρ,W) 如引理 4.4 中所述，并设 (ρ',W') 是 S^{op} 的一个与 ρ 射影等价的射影表示。根据定义，存在一个同构 $T:W\to W'$ 和一个映射$\theta:S^{\mathrm{op}}\to\Bbbk^\times$，使得对于所有 $s\in S^{\mathrm{op}}$，$\rho'(s)=\theta(s)T\rho(s)T^{-1}$。由于 ρ' 的乘子是

$$\xi'(t,s)=\theta(s)\theta(t)\theta(st)^{-1}\xi_X(s,t)\quad(s,t\in S^{\mathrm{op}})$$

且可能不等于 ξ_X^{op}，因此右 A_X-模 $\mathbf{L}(X,\{\tilde{\phi}_s\}_{s\in S},\rho')$ 可能未定义。不过，我们可以使用映射 θ 来引入一个新的族

$$\tilde{\phi}'_s=\theta(s)^{-1}\tilde{\phi}_s:X\otimes E_s\to X\quad(s\in S)$$

˜ 个同构。于是，右 A_X-模 $\mathbf{L}(X,\{\phi'_s\}_{s\in S},\rho')$ 有定义，并且

$$\mathbf{L}(X,\{\tilde{\phi}'_s\}_{s\in S},\rho')\cong\mathbf{L}(X,\{\tilde{\phi}_s\}_{s\in S},\rho)$$

作为右 A_X-模。因此我们引入以下记号：

定义 4.5. 给定一个 S^{op} 的射影表示 ρ'，其乘子与 2-余循环 ξ_X^{op} 上同调等价，我们定义 $\mathbf{L}(X,\rho'):=\mathbf{L}(X,\{\tilde{\phi}'_s\}_{s\in S},\rho')$，其中 $\{\tilde{\phi}'_s:X\otimes E_s\to X\}_{s\in S}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个同构族，使得相应的 2-余循环等于 ρ' 的乘子。

4.1.3. 简单模的构造。设 X 是 $\mathcal{C}$中的一个简单对象，并设 S 是 X的稳定子˜。我们固定一个族 $\phi_s:X\otimes E_s\to X\,(s\in S)$ 的同构，并根据（4.3）定义 ξ_X。

定义 4.6. 我们定义如下函子

$$\mathbf{M}(X,-):\mathrm{Rep}(S^{\mathrm{op}},\xi_X^{\mathrm{op}})\to\widehat{\mathcal{C}}_A,\quad\rho\mapsto\mathbf{L}(X,\rho)\otimes_{A_X}A.$$

引理 4.7. 上文引入的函子 $\mathbf{M}(X,-)$ 是正合且忠实的。

证明. 函子 $\mathbf{M}(X,-)$ 分解如下：

$$\mathrm{Rep}(S^{\mathrm{op}},\xi_X^{\mathrm{op}})\xrightarrow{\mathbf{L}(X,-)}\mathcal{X}\xrightarrow{i}\widehat{\mathcal{C}}_{A_X}\xrightarrow{F}\widehat{\mathcal{C}}_A,$$

其中 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 中底层对象同构于有限个 X的直和的右 A_X-模的范畴，i 是包含函子，$F=-\otimes_{A_X}A$ 是诱导函子。根据引理 4.4，第一个箭头是正合且忠实的。显然，第二个箭头也是正合且忠实的。由于 A 是 A_X上的自由对象，函子 F 也是正合且忠实的。因此，$\mathbf{M}(X,-)$ 作为这些函子的复合，是正合且忠实的。□

我们固定 $\{g_i\}_{i\in I}$ 的陪集代表元 $S\backslash\Gamma$。于是我们有一个同构

$$A=\bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{s\in S}E_{sg_i}\xrightarrow[\cong]{\oplus_{i\in I}\oplus_{s\in S}\mu_{s,g_i}^{-1}}\bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{s\in S}E_s\otimes E_{g_i}=\bigoplus_{i\in I}A_X\otimes E_{g_i}$$

左 A_X-模的同构。因此我们有

$$\mathbf{M}(X,\rho)\cong\bigoplus_{i\in I}(W\otimes X)\otimes E_{g_i} \tag{4.8}$$

作为 $\mathcal{C}$中的一个对象，其中 W 是 ρ的表示空间。(由 4.8) 诱导的 A 在右侧的作用为

$$\begin{aligned}((WX)E_{g_i})E_\gamma\cong(WX)(E_{g_i}E_\gamma)&\xrightarrow{(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\mu^{-1}_{s,g_j}\mu_{g_i,\gamma}}(WX)(E_sE_{g_j})\\ \cong(W(XE_s))E_{g_j}&\xrightarrow{(\rho(s)\otimes\tilde{\phi}_s)\otimes\mathrm{id}}(WX)E_{g_j}\end{aligned} \tag{4.9}$$

其中 $\gamma\in\Gamma$，对象的张量积用并置表示，$s\in S$ 和 $j\in I$ 是由${}^sg_j=g_i\gamma$确定的元素，而 $\cong$是由结合子得到的典范同构。现在我们给出关于$\mathbf{M}(X,\rho)$结构的一些结果。

引理 4.8。右 A-模$\mathbf{M}(X,\rho)$ 同构于 A 当且仅当对于某个$g\in\Gamma$，有 $X\cong E_g$ 。

证明。考虑某个 $g\in\Gamma$对应的 $X=E_g$ 。那么，Γ中的稳定子是平凡的，因此 $A_X=\mathbb{1}$，并且$\mathbf{M}(E_g,\rho)$作为右 A-模同构于$\cong$ $E_g\otimes A$ （其中 ρ 必然是平凡一维表示）。最后，A 中的乘法诱导出右 A-模的同构$E_g\otimes A\cong A$，因为它将每个直和项$E_g\otimes E'_g\cong E_{gg'}$ 与A中的相应直和项对应起来。

逆命题方面，假设 $\mathbf{M}(X,\rho)\cong A$属于 $\mathcal{C}_A$，并设 Y是 $\mathbf{M}(X,\rho)$作为 $\mathcal{C}$中的一个对象时的简单子对象。那么，根据 $Y\cong E_h$ 的定义，对某个 $h\in\Gamma$ 有 A；而根据分解式（4.8），对某个 $i\in I$ 有 $Y\cong X\otimes E_{g_i}$。因此 $X\cong E_h\otimes E^*_{g_i}\cong E_{hg_i^{-1}}$，结论得证。□

引理 4.9。右 A-模 $\mathbf{M}(X,\rho)$ 在 $\mathcal{C}$ 中是单的，当且仅当射影表示 ρ 不可约。

证明。假设 ρ不可约。设 M'是 $\mathbf{M}(X,\rho)$ 的非零子模，并设 Y是 M'作为 $\mathcal{C}$中的一个对象时的简单子对象。那么，对某个 $i\in I$有 $Y\cong X\otimes E_{g_i}$；根据引理 4.8 中的同样论证，我们得出 X 也是 M'的子对象。由于 ρ不可约，M'包含分解式（4.8）中与 $(W\otimes X)\otimes E_1$ 相对应的子对象。由（4.9）可知，对于所有 $j\in I$，M'都包含 $(W\otimes X)\otimes E_{g_j}$。因此 $\mathbf{M}(X,\rho)$ 是单的。

现在考虑 ρ 可约的情形。于是，在范畴 $\mathrm{Rep}(S^{\mathrm{op}},\xi_X^{\mathrm{op}})$ 中有正合列 $0\to\rho'\to\rho\to\rho''\to0$，其中 ρ' 和 ρ'' 均非零。由引理 4.7，得到 $\mathcal{C}_A$ 中的正合列 $\mathbf{M}(X,\rho')\to\mathbf{M}(X,\rho)\to\mathbf{M}(X,\rho'')\to0$，其中 $\mathbf{M}(X,\rho')$ 和 $\mathbf{M}(X,\rho'')$ 均非零。这意味着 $\mathbf{M}(X,\rho)$ 不是单右 A-模。证明完毕。□

引理 4.10。函子 $\mathbf{M}(X,-)$ 保持长度不变。

证明。引理 4.9 说明 $\mathbf{M}(X,-)$ 将简单对象映为简单对象。利用引理 4.7，可以通过对射影表示的长度作归纳，证明 $\mathbf{M}(X,\rho)$ 与 ρ 长度相同 ρ。□

4.1.4. 简单模的分类。

定理 4.11. 设 M 是 $\mathcal{C}$中的一个单右 A-模，且 X 是 M 作为 $\mathcal{C}$中一个对象时的简单子对象。那么，M 同构于某个不可约投射表示ρ 对应的 $\mathrm{Stab}_\Gamma(X)^{\mathrm{op}}$ 的 $\mathbf{M}(X,\rho)$，其乘子为 ξ_X^{op} 。

证明。我们在 $\mathcal{C}$中选取 M 的一个简单子对象 X 。令 L 为 $X \otimes A_X$ 在作用 $M \otimes A \to M$下的像。则 L是 M的一个非零 A_X-子模。我们选取 L的一个简单 A_X-子模 L' 。由于 $X \otimes A_X$ 是 X的有限个副本的直和， L也如此，因此 L'亦然。于是由引理 4.4，右 A_X-模 L' 同构于 $\mathbf{L}(X, \rho)$，其中 $\rho \in$ 是 $\mathrm{Rep}(S^{\mathrm{op}}, \xi_X^{\mathrm{op}})$中的某个不可约对象。由诱导的泛性质，存在一个非零右 A-模态射，记为 f，从 $\mathbf{M}(X, \rho)$ 到 M。由于 $\mathbf{M}(X, \rho)$ 和 M都是单的，根据舒尔引理，态射f 实际上是一个同构。证明完毕。□

给定一个对象 $M \in \mathcal{C}$ 和一个简单对象 $X \in \mathcal{C}$，我们将 $M|_X$ 记作 M 中所有与 X同构的子对象之和。设 M 是 $\mathcal{C}$中的一个简单右 A-模，并设 X 是 $\widehat{\mathcal{C}}$中M 的一个简单子对象。如上面的定理所示， M 同构于某个 $\rho \in \mathrm{Rep}(S^{\mathrm{op}}, \xi_X^{\mathrm{op}})$ 中的 $\mathbf{M}(X, \rho)$。根据分解式 (4.8) 以及上述定理的证明，子对象 $M|_X$ 是 M 的一个 A_X-子模，满足 $M|_X \cong \mathbf{L}(X, \rho)$，因此根据引理 4.4，我们可以从 $M|_X$ 恢复出 ρ 的射影等价类。我们利用这一观察来证明：

定理 4.12。 $\mathbf{M}(X, \rho)$ 和 $\mathbf{M}(X', \rho')$ 作为右 A-模同构，当且仅当存在一个元素 $g \in \Gamma$ ，使得 X' 与 $X \otimes E_g$ 同构，且 ρ' 与ρ^g射影等价。

这里， ρ^g 由 $\rho^g(s') = \rho(gs'g^{-1})$定义，其中 $s' \in S'$。我们假设 X' 与$X \otimes E_g$ 同构，并记作 $S = \mathrm{Stab}_\Gamma(X)$和 $S' = \mathrm{Stab}_\Gamma(X')$。容易看出 $S' = g^{-1}Sg$。因此， ρ^g是 S'^{op}的一个良定义的射影表示。

证明。 “若”部分容易证明。我们证明“仅若”部分。假设 $\mathbf{M}(X, \rho)$ 和 $\mathbf{M}(X', \rho')$ 作为右 A-模同构。那么， X' 是 $\mathbf{M}(X, \rho)$ 的一个子对象。因此，由 (4.8)， X'与 $X \otimes E_g$ 同构，其中 $g \in \Gamma$。根据本定理前面的讨论，我们有如下同构

$$\mathbf{L}(X', \rho') \cong \mathbf{M}(X', \rho')|_{X'} \cong \mathbf{M}(X, \rho)|_{X'} \tag{4.10}$$

在 $\mathcal{C}$中的右A_X-模。现在固定一个同构 $\psi\colon X \otimes E_g \to X'$ ，并考虑图3所示的图表，其中 $s' \in S'$ 和 $s = gs'g^{-1} \in S$ 使得 $sg = gs'$。除标记为(♡)的单元格外，该图表是交换的˜。我们可以且确实选择同构 $\phi'_{s'}\colon X' \otimes E_{s'} \to X'$ $(s' \in S')$，并将其置于图表的虚线上，使单元格(♡)交换。根据 (4.9)，图表的左列是 $A_{X'}$ 在$\mathbf{M}(X, \rho)|_{X'}$上的作用。因此，由该图表可得一个同构

$$(\mathrm{id}_W \otimes \psi)\alpha_{W,X,E_g} : \mathbf{M}(X, \rho)|_{X'} \to \mathbf{L}(X', \{\tilde{\phi}'_{s'}\}_{s' \in S'}, \rho^g)$$

右 $A_{X'}$-模。由（4.10）和引理4.4，我们得出 ρ^g 与 ρ'射影等价。证明完毕。□

4.1.5. 简单模数量的有限性。 我们给出 $\mathcal{C}_A$ 的简单对象同构类数量的公式，并特别确定其何时有限。给定一个阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，我们用 $\mathrm{Irr}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 中简单对象同构类的集合。群 Γ 通过以下方式作用于 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$：对于 $g \in \Gamma$ 和 $[X] \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，该作用是良定义的，因为 $(-) \otimes E_g$ 是一个保持简单性的自等价函子。

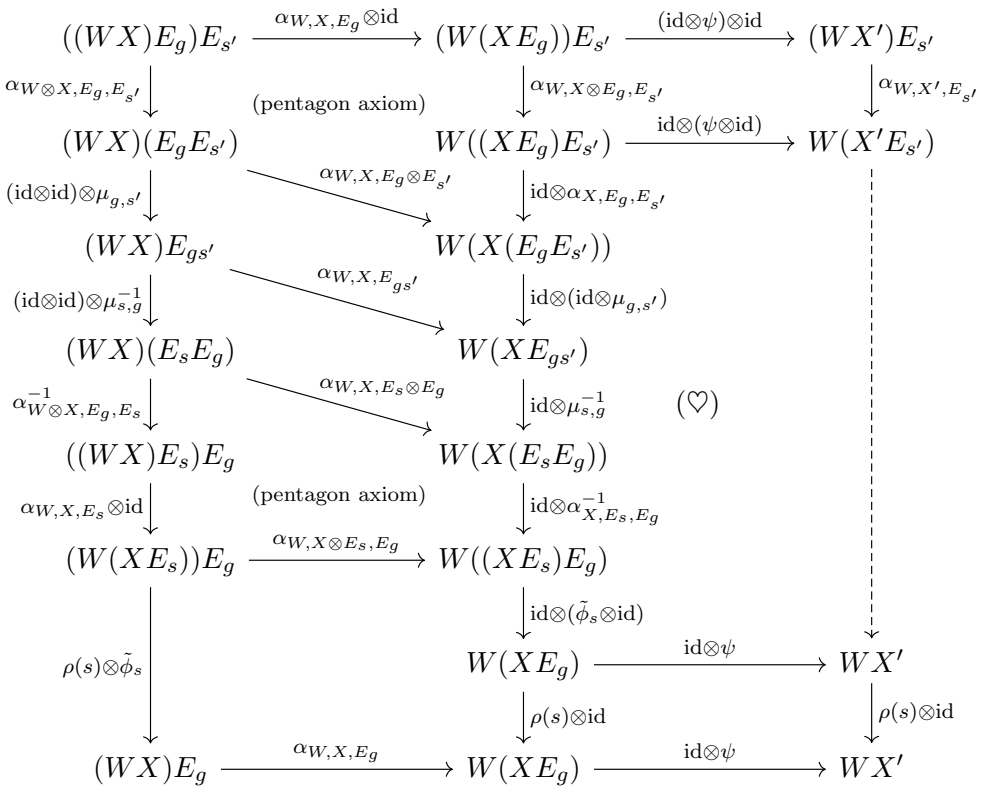


FIGURE 3. 定理的证明 4.12

推论 4.13。 为简洁起见，记 $I_X = \text{不可约表示}\big(\mathrm{Rep}(\mathrm{Stab}_\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \xi_X^{\mathrm{op}})\big)$ 为简单对象 $X \in \mathcal{C}$，其中 ξ_X 是由 2-余循环确定的 (4.3)。那么存在一个双射

$$\bigsqcup_{X\in\mathcal{O}} I_X \to \mathrm{Irr}(\widehat{\mathcal{C}_A}), \quad [\rho] \mapsto [\mathbf{M}(X,\rho)] \quad ([\rho]\in I_X),$$

其中 $\mathcal{O}$ 是 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})/\Gamma$ 的轨道代表元集合。

双射蕴含 $\#\,\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_A) = \sum_{[X]\in\mathcal{O}} \#I_X$。由于对所有简单的 $X \in \mathcal{C}$，集合 I_X 非空且有限（因为稳定子 $\mathrm{Stab}_\Gamma(X)$ 是有限的），因此 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_A)$ 有限当且仅当 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})/\Gamma$有限。

证明。我们首先证明该映射是满射。根据定理 4.11，每个简单右 A-模都同构于某个简单 $X' \in \mathcal{C}$ 和某个 $[\rho'] \in I_{X'}$ 对应的 $\mathbf{M}(X',\rho')$。根据 Γ 在 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 上的作用定义，存在 $X \in \mathcal{O}$ 和 $g \in \Gamma$ 使得 $X' \cong X \otimes E_g$。令 $\rho = (\rho')^{g^{-1}}$，根据定理 4.12，我们有 $\mathbf{M}(X',\rho') \cong \mathbf{M}(X,\rho)$。这意味着该映射是满射。

为证明单射性，令 $X, Y \in \mathcal{O}$, $[\rho] \in I_X$和 $[\sigma] \in I_Y$，并假设 $[\mathbf{M}(X,\rho)] = [\mathbf{M}(Y,\sigma)]$。由定理 4.12，存在一个元素 $g \in \Gamma$，使得 $Y \cong X \otimes E_g$和 $\sigma \sim \rho^g$。由于X 和 Y 是某些轨道的代表元，我们有 $X = Y$，因此 $g \in \mathrm{Stab}_\Gamma(X)$。于是$\sigma \sim \rho^g \sim \rho$。这表明该映射是单射的。证明完毕。□

4.2. 张量范畴 fg-$\mathcal{C}_A$. 从此处开始， $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴。如上所述， $A = \bigoplus_{g\in\Gamma} E_g$ 是子群 $\Gamma < \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 上的简单流代数。在一些额外假设下，我们将

验证 A 满足定理3.7的假设，因此该定理的结论成立。

4.2.1. 阿廷性质。

命题 *4.14.* </style}代数 A 是阿廷的。

^证明。 由于 fg-$\mathcal{C}_A$ 的有限生成对象是某个 $X \in \mathcal{C}$ 的 $X \otimes A$ 的商对象，且有限长度对象的商对象也具有有限长度，因此只需证明对于 $X \in \mathcal{C}$，自由模$X \otimes A$ 具有有限长度。我们通过对 $\mathcal{C}$ 中作为对象的 X 的长度进行归纳来证明这一点。

若 $\ell(X) = 0$，则结论显然。我们假设 $\ell(X) = 1$，或者等价地， X 是一个简单对象。由于 $X \otimes A_X$ 是一个右 A_X-模，其底层对象同构于有限多个 X的直和，根据引理 4.4，存在 $\rho \in \mathrm{Rep}(S^{\mathrm{op}}, \xi_X^{\mathrm{op}})$ 使得 $X \otimes A_X \cong \mathbf{L}(X, \rho)$ 同构为右 A_X-模。存在同构

$$X \otimes A \cong (X \otimes A_X) \otimes_{A_X} A \cong \mathbf{L}(X, \rho) \otimes_{A_X} A = \mathbf{M}(X, \rho)$$

右 A-模。因此，根据引理 4.10， $X \otimes A$ 具有有限长度。

现在假设，对于所有满足 $\ell(Y) < \ell(X)$ 的 $Y \in \mathcal{C}$， $\ell(X) > 1$ 且 $Y \otimes A$ 具有有限长度。我们选取一个简单子对象 $X' \subset X$，并令 $X'' = X/X'$，使得在 $\mathcal{C}$ 中存在一个短正合列$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$。将自由模函子应用于此正合列，得到^短正合列 $0 \to X' \otimes A \to X \otimes A \to X'' \otimes A \to 0$，它位于 $\mathcal{C}_A$ 中。由于 $X' \otimes A$ 和 $X'' \otimes A$ 具有有限长度， $X \otimes A$ 也具有有限长度。这证明了 A 是阿廷的。□

4.2.2. *Frobenius* 代数结构。在本小节中，我们证明 A 是弗罗贝尼乌斯的。我们回顾 Iovanov 的结果 [Iov06], ，它起着关键作用。设 $\mathcal{A}$ 是一个完备且余完备的阿贝尔范畴，令 $\{M_i\}_{i \in I}$ 为 $\mathcal{A}$ 中的一个无限对象族。那么我们有两个对象：积 $\Pi := \prod_{i \in I} M_i$ 和余积 $\Sigma := \bigoplus_{i \in I} M_i$。存在一个典范态射 $\Sigma \to \Pi$。当 $\mathcal{A}$ 是一个环上的模范畴，且对于无限多个 i, $M_i \neq 0$ 时，这个典范态射从来不是同构。然而，根据 Iovanov [Iov06，例 2.9], ，若 $\mathcal{A}$ 是一个局部有限阿贝尔范畴的 ind-完备化，且 Σ 是拟有限的，则典范态射 $\Sigma \to \Pi$ 是同构。我们用此证明：

定理 4.15。 代数 A 是弗罗贝尼乌斯代数，其 *Frobenius* 形式为 $\lambda\colon\ A \to \mathbb{1}$ 由到 $E_1 = \mathbb{1}$的投影给出。

^证明。 对于 $\mathcal{C}$中的对象族 $\{M_i\}_{i \in I}$，我们有 $[\bigoplus_{i \in I} M_i, N] \cong \prod_{i \in I} [M_i, N]$。因此，

$$[A, \mathbb{1}] \cong \prod_{g \in \Gamma} [g, \mathbb{1}] \cong \prod_{g \in \Gamma} g^{-1} \cong \prod_{g \in \Gamma} g.$$

展开态射的定义 $\phi\colon\ A \to [A, \mathbb{1}]$ 在定义 3.9中可以验证，在上述同一化下，它与典范态射 $\bigoplus_{g \in \Gamma} g \to \prod_{g \in \Gamma} g$一致：具体而言，写作 $A = \bigoplus_{g \in \Gamma} g$，复合态射 $\lambda\mu$ 在 $g \otimes h$ 上为零，除非 $h \simeq g^{-1}$；在这种情况下，它（在选定的同一化 $g \otimes g^{-1} \cong \mathbb{1}$下）与求值配对相同。由伴随性可得一个态射 $g \to [A, \mathbb{1}] \cong \prod_{h \in \Gamma} h$，其唯一非零分量是典范映射 $g \to g$ 到 $h = g$ 因子中。对 g 求和得到典范态射$\bigoplus_{g \in \Gamma} g \to \prod_{g \in \Gamma} g$。根据上文引用的 Iovanov 结果，这是一个同构。□

4.2.3. 简单模的刚性。 沿用上一小节的记号。固定一个具有稳定子 S 的 $\mathcal{C}$ 的简单对象 X，以及一个乘子为ξ_X^{op} 的 S^{op} 的射影表示 ρ。

定理 4.16. 假设 $|S| \neq 0$ 属于基域 $\Bbbk$。那么 $\mathbf{M}(X,\rho)$ 是某个正整数 m对应的自由模 $X^{\oplus m} \otimes A$ 的直和项。

证明. 根据本定理的假设， A_X 是可分的 [FRS04，引理 3.1], the^对于 $\mathcal{C}$中的右 A_X-模 M和左 A_X-模 N，商态射 $M \otimes N \to M \otimes_{A_X} N$有一个关于 M和 N自然的截面。因此，当 N是 $\mathcal{C}$中某个代数⌢B 的 A_X-B双模时，右 B-模 $M \otimes_{A_X} N$ 是右 B-模 $M \otimes N$的直和项。将此论证应用于 $M = \mathbf{L}(X,\rho)$、 $N = A$ 和 $B = A$，即可得出结论。□

^**推论 4.17.** 假设 $X \in \mathcal{C}$ 是刚性的，且 A 是 $\mathcal{C}$中的中心交换代数。若⌟$|S| \neq 0$ 属于 $\Bbbk$，则 $\mathbf{M}(X,\rho)$ 是 $\mathcal{C}$中右 A-模范畴里的刚性对象。

证明。 前一个定理说明，$\mathbf{M}(X,\rho)$ 是某个自由模 $X^{\oplus m} \otimes A$的直和项，其中 m。由于 $X \otimes A$是刚性的（其左对偶为 $X^* \otimes A$，右对偶为 ${}^*X \otimes A$），由刚性对象的直和项仍是刚性对象这一事实即可得出结论。□

鉴于上述推论，我们考虑以下条件：

$$|\mathrm{Stab}_\Gamma(X)| \neq 0 \text{ in } \Bbbk \text{ for every simple object } X \in \mathcal{C}. \tag{4.11}$$

条件 (4.11) 在例如 $\Bbbk$ 具有特征零时成立。即使在$\Bbbk$ 具有正特征 $p > 0$的情况下，若 $g^p \neq 1$ 对每个非恒等元 $g \in \Gamma$都成立，则条件 (4.11) 也成立。特别地，若 Γ 无挠，则条件 (4.11) 成立。

推论 4.18. 若 $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴，且简单流代数 A 是中心交换的^，并满足条件 (4.11)，则 fg-$\mathcal{C}_A$ 是一个张量范畴。

^证明。 根据前一个推论，fg-$\mathcal{C}_A$ 的每个简单对象都是刚性的。此外， A 是一个单倍^交换代数。因此，根据定理 3.7，fg-$\mathcal{C}_A$ 是一个张量范畴。 □

4.2.4. 充分投射对象的存在性与有限性。 假设 $\mathcal{C}$ 有充分的投射对^象。那么，根据定理 3.4， A 的阿廷性质$\mathcal{C}_A$ 意味着 fg-$\mathcal{C}_A$ 有充分的投射对象。我们给出投射对象的一种更显式的构造。

令 $X \in \mathcal{C}$ 为一个简单对象，其射影覆盖为 $\pi : P \to X$，并令 ρ 为 $\mathrm{Stab}_\Gamma(X)^{\mathrm{op}}$ 的一个不可约射影表示，其乘子为 ξ_X^{op}。我们定义 $\mathbf{P}'(X,\rho) := (P \otimes W) \otimes A_X$（自由右 A_X-模），其中 W 是 ρ 的表示空间。于是 $\mathbf{P}'(X,\rho)$ 是一个投射右 A_X-模，并且存在一个满态射

$$\mathbf{P}'(X,\rho) \xrightarrow{(\pi\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}} \mathbf{L}(X,\rho) \otimes A_X \xrightarrow{\text{action}} \mathbf{L}(X,\rho)$$

右 A_X-模。现在我们定义

$$\mathbf{P}(X,\rho) := \mathbf{P}'(X,\rho) \otimes_{A_X} A \cong (P \otimes W) \otimes A.$$

^那么，$\mathbf{P}(X,\rho)$ 是 $\mathcal{C}$ 中右 A-模范畴的一个投射对象，而简单模$\mathbf{M}(X,\rho) = \mathbf{L}(X,\rho) \otimes_{A_X} A$ 是 $\mathbf{P}(X,\rho)$ 的一个商对象。

因此fg$\mathcal{C}_A$是一个局部有限阿贝尔范畴，其中每个简单对象都是某个^投射对象的商对象。这意味着 fg-$\mathcal{C}_A$ 具有足够多的投射对象。

定理 4.19。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 *Frobenius* 张量范畴。假设 A 是一个中心交换的 $\widehat{}$ 代数，属于 $\mathcal{C}$ 且满足条件 (4.11)。 那么，$\mathrm{fg}\text{-}\mathcal{C}_A$ 是一个 *Frobenius* 张量范畴。$\widehat{}$ 此外，$\mathrm{fg}\text{-}\mathcal{C}_A$ 是一个有限张量范畴，当且仅当 不可约表示$(\mathcal{C})/\Gamma$ 是有限的。

$\widehat{}$ 证明。 由推论 4.18，$\mathrm{fg}\text{-}\mathcal{C}_A$ 是一个张量范畴。由于 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯的，且 A 是阿廷的，由 $\widehat{}$ 定理 3.4，$\mathrm{fg}\text{-}\mathcal{C}_A$ 有足够多的投射对象。因此，它是一个弗罗贝尼乌斯张量范畴。有限性的结论由推论 4.13 得出。 □

$\widehat{}$ **问题 4.20**。 假设$\mathrm{fg}\text{-}\mathcal{C}_A$ 是一个有限张量范畴，单对象及其射影覆盖的 *Frobenius-Perron* 维数是多少？该范畴的 *FP* 维数是多少？

4.3. **局部模子范畴**。 从现在起， $\mathcal{C}$ 是一个编织张量范畴，且 A是子群 $\Gamma < \mathsf{Inv}(\mathcal{C})$ 上的交换简单流代数。由引理 2.9 和等式（2.8），可知 A 的可逆直和项彼此中心化，即有以下等式成立：

$$c_{E_h,E_g}c_{E_g,E_h} = \mathrm{id}_{E_g\otimes E_h} \quad (g,h\in\Gamma). \tag{4.12}$$

4.3.1. 简单局部模的分类。固定一个简单对象 $X\in\mathcal{C}$ 和稳定子 $S = \mathsf{Stab}_\Gamma(X)^{\mathrm{op}}$ 的一个不可约射影表示 ρ。令

$$\mathcal{C}_\Gamma := \{\, Y\in\mathcal{C} \mid c_{E_g,Y}c_{Y,E_g} = \mathrm{id}_{Y\otimes E_g} \text{ for all } g\in\Gamma \,\} \tag{4.13}$$

为点状张量子范畴 $\langle E_g \mid g\in\Gamma\rangle\subset\mathcal{C}$ 的 M¨uger 中心化子 .

命题 4.21。那么，$\mathbf{M}(X,\rho)$ 是一个局部 A-模，当且仅当 $X\in\mathcal{C}_\Gamma$。

证明。设 $M := \mathbf{M}(X,\rho)$，并令 $a_M\colon M\otimes A\to M$ 为其作用。

假设对所有 $g\in\Gamma$，均有 $c_{E_g,X}c_{X,E_g} = \mathrm{id}^{X\otimes E_g}$。那么自由模 $X\otimes A$ 是局部的。由于 M 是 $X\otimes A$ 的商对象，且 $\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 在 $\widehat{\mathcal{C}}_A$ 中对余核封闭，因此 M 是局部的。

反过来，首先假设 M 是局部的。由 (4.8)，选取 $\{g_i\}_{i\in I}$ 的陪集代表元 $S\backslash\Gamma$，使得 $g_1 = 1$，于是 M的一个直和项为 $W\otimes X$。对于每个 $g\in\Gamma$，作用的 $(\mathbf{1},g)$-块是一个同构

$$a_{1,g}\colon ((W\otimes X)\otimes E_1)\otimes E_g \xrightarrow{\sim} (W\otimes X)\otimes E_{g_j},$$

其中 $Sg_j = Sg$ （对于 $S = \mathsf{Stab}_\Gamma(X)$）。将局部性 $a_M\circ c_{A,M} = a_M\circ c_M^{-1}{}_{,A}$ 限制到此块上，再与$a_1^{-1}{}_{,g}$ 复合，得到

$$c_{E_g,W\otimes X} = c^{-1}_{W\otimes X,E_g}.$$

由于 W 是有限维向量空间对象（因此是若干个 $\mathbb{1}$ 的直和），这等价于

$$c_{E_g,X} = c^{-1}_{X,E_g},$$

也就是说，对所有 $g\in\Gamma$，$c_{E_g,X}c_{X,E_g} = \mathrm{id}^{X\otimes E_g}$。 □

推论 4.22。 为简洁起见，记 $I_X = \mathrm{Irr}\big(\mathrm{Rep}(\mathsf{Stab}_\Gamma(X)^{\mathrm{op}},\xi_X^{\mathrm{op}})\big)$ 为简单对象 $X\in\mathcal{C}$，其中 ξ_X 是由 2-余循环确定的 (4.3)。于是存在一个双射

$$\bigsqcup_{X\in\mathcal{O}_\Gamma} I_X \to \mathrm{Irr}(\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}),\quad [\rho]\mapsto[\mathbf{M}(X,\rho)]\quad ([\rho]\in I_X),$$

其中 $\mathcal{O}_\Gamma$ 是 不可约表示$(\mathcal{C}_\Gamma)/\Gamma$ 的轨道代表元。

该双射意味着 # 不可约表示$(\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}) = \sum_{[X]\in\mathcal{O}_\Gamma}\#I_X$。由于对于所有简单 $X\in\mathcal{C}$，集合 I_X 非空且有限，因此当且仅当 $\mathrm{Irr}(\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}})$ 有限时，$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_\Gamma)/\Gamma$ 也有限。

证明。 根据命题 4.21，$\widehat{\mathcal{C}_A^{\mathrm{loc}}}$的简单对象恰好是那些 $\mathbf{M}(X,\ \rho)$ 满足 $X \in$ 不可约表示$(\mathcal{C}_\Gamma)$ 且 ρ 不可约的对象。其余论证与推论 4.13相同。 □

4.3.2. 简单局部模之间的编织。

引理 4.23. 设 $\mathbf{M}(X,\rho)$ 和 $\mathbf{M}(Y,\sigma)$ 是简单局部 A-模。那么，$\mathbf{M}(X,\rho)$ 与 $\mathbf{M}(Y,\sigma)$ 之间在fg-$\widehat{\mathcal{C}_A^{\mathrm{loc}}}$中的双重编织平凡，当且仅当 X与 Y 之间在 $\mathcal{C}$ 中的双重编织平凡。

证明。 $(\Rightarrow)$ 我们先引入一些记号：令 $S = \mathrm{Stab}_\Gamma(X)$ 和 $T = \mathrm{Stab}_\Gamma(Y)$，并分别取 Γ/S、 Γ/T 和 $T\backslash\Gamma/S$ 的代表元 $\{x_i\}_{i\in I}$、 $\{y_j\}_{j\in J}$ 和 $\{z_k\}_{k\in K}$。我们假设指标集 I、 J 和 K 各有一个特殊元素 0，使得 $x_0 = y_0 = z_0 = 1$。

由（4.8）及编织可得一个同构

$$\mathbf{M}(X,\rho)\otimes\mathbf{M}(Y,\sigma) \cong \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{j\in J}(\mathbf{L}(X,\rho)\otimes\mathbf{L}(Y,\sigma))\otimes(E_{x_i}\otimes E_{y_j}). \tag{4.14}$$

由于 $A \cong \bigoplus_{k\in K} A_Y \otimes (E_{z_k}\otimes A_X)$ 是 A_Y-A_X-双模，我们有

$$\mathbf{M}(Y,\sigma) = \mathbf{L}(Y,\sigma)\otimes_{A_Y} A \cong \bigoplus_{k\in K}\mathbf{L}(Y,\sigma)\otimes(E_{z_k}\otimes A_X) \cong \bigoplus_{k\in K} A_X\otimes(\mathbf{L}(Y,\sigma)\otimes E_{z_k})$$

作为 A_X-模。因此，

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(X,\rho)\otimes_A\mathbf{M}(Y,\sigma) &= (\mathbf{L}(X,\rho)\otimes_{A_X} A)\otimes_A\mathbf{M}(Y,\sigma) \cong \mathbf{L}(X,\rho)\otimes_{A_X}\mathbf{M}(Y,\sigma)\\ &\cong \bigoplus_{k\in K}(\mathbf{L}(X,\rho)\otimes\mathbf{L}(Y,\sigma))\otimes E_{z_k}\end{aligned} \tag{4.15}$$

$\widehat{\ }$作为 $\mathcal{C}$ 的对象。令 $\pi\colon \mathbf{M}(X,\rho)\otimes\mathbf{M}(Y,\sigma) \to \mathbf{M}(X,\rho)\otimes_A\mathbf{M}(Y,\sigma)$ 为典范满射，并定义满态射 $\tilde{\pi}$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{M}(X,\rho)\otimes\mathbf{M}(Y,\sigma) & \xrightarrow[\cong]{(4.14)} & \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{j\in J}(\mathbf{L}(X,\rho)\otimes\mathbf{L}(Y,\sigma))\otimes(E_{x_i}\otimes E_{y_j})\\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\pi}}\\ \mathbf{M}(X,\rho)\otimes_A\mathbf{M}(Y,\sigma) & \xrightarrow[\cong]{(4.15)} & \bigoplus_{k\in K}(\mathbf{L}(X,\rho)\otimes\mathbf{L}(Y,\sigma))\otimes E_{z_k}\end{array}$$

满态射 $\tilde{\pi}$将第 (i,j) 个分量 $(\mathbf{L}(X,\rho)\otimes\mathbf{L}(Y,\sigma))\otimes(E_{x_i}\otimes E_{y_j})$ 映射到第 k 个分量，其中 k 是满足 $x_iy_j \in Tz_kS$ 的唯一指标。我们令

$$\tilde{\pi_{ij}}\colon (\mathbf{L}(X,\rho)\otimes\mathbf{L}(Y,\sigma))\otimes(E_{x_i}\otimes E_{y_j}) \to (\mathbf{L}(X,\rho)\otimes\mathbf{L}(Y,\sigma))\otimes E_{z_k} \quad (x_iy_j \in Tz_kS)$$

是由 $\tilde{\pi}$ 诱导的态射。尽管在一般情况下，态射 $\tilde{\pi}_{ij}$ 可能难以显式写出（因为它涉及 $t\in T$ 和 $s\in S$ 的作用，使得 $x_iy_j = tz_ks$），但很容易验证 $\tilde{\pi}_{00}$ 是恒等态射。

我们考察 $\mathbf{M}(X,\rho)$ 与 $\mathbf{M}(Y,\sigma)$ 的双重编织。由于 $X,Y\in\mathcal{C}_\Gamma$，且 A 的可逆直和项彼此中心化，因此有交换图表

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{M}(X,\rho)\otimes\mathbf{M}(Y,\sigma) & \xrightarrow[\cong]{(4.14)} & \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{j\in J}(\mathbf{L}(X,\rho)\otimes\mathbf{L}(Y,\sigma))\otimes(E_{x_i}\otimes E_{y_j})\\ \downarrow{\scriptstyle M_{\mathbf{M}(X,\rho),\mathbf{M}(Y,\sigma)}} & & \downarrow{\scriptstyle\bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{j\in J}M_{\mathbf{L}(X,\rho),\mathbf{L}(Y,\sigma)}\otimes\mathrm{id}}\\ \mathbf{M}(X,\rho)\otimes\mathbf{M}(Y,\sigma) & \xrightarrow[\cong]{(4.14)} & \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{j\in J}(\mathbf{L}(X,\rho)\otimes\mathbf{L}(Y,\sigma))\otimes(E_{x_i}\otimes E_{y_j})\end{array}$$

令 M^A 表示局部模范畴 $\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 的双重编织。根据定义，M^A 由等式 $\pi\circ M_{\mathbf{M}(X,\rho),\mathbf{M}(Y,\sigma)} = {M^A}_{\mathbf{M}(X,\rho),\mathbf{M}(Y,\sigma)}\circ\pi$ 刻画。由上述交换图表可知，存在同构 m_k $(k\in K)$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}(X,\rho)\otimes_A\mathbf{M}(Y,\sigma) & \xrightarrow[\cong]{(4.15)} & \bigoplus_{k\in K}(\mathbf{L}(X,\rho)\otimes\mathbf{L}(Y,\sigma))\otimes E_{z_k} \\ {\scriptstyle M^A_{\mathbf{M}(X,\rho),\mathbf{M}(Y,\sigma)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bigoplus_{k\in K} m_k} \\ \mathbf{M}(X,\rho)\otimes_A\mathbf{M}(Y,\sigma) & \xrightarrow[\cong]{(4.15)} & \bigoplus_{k\in K}(\mathbf{L}(X,\rho)\otimes\mathbf{L}(Y,\sigma))\otimes E_{z_k} \end{array}$$

由上述交换图和 M^A 的定义可得

$$m_0 = M_{\mathbf{L}(X,\rho),\mathbf{L}(Y,\sigma)}\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{I}}.$$

现在假设 $M^A_{\mathbf{M}(X,\rho),\mathbf{M}(Y,\sigma)}$ 是恒等态射。那么对于所有 $k\in K$，m_k 都是恒等态射。因此，特别地，$m_0 = \mathrm{id}$。由于 $\mathbf{L}(X,\rho)$ 和 $\mathbf{L}(Y,\sigma)$ 分别是由有限个 X 和 Y 的副本组成的直和，$m_0 = \mathrm{id}$ 意味着 $M_{X,Y} = \mathrm{id}$。我们已经证明了该定理的“仅当”部分。

($\Leftarrow$) 逆命题：假设 $M_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$。由于 $\mathbf{L}(X,\rho)$ 和 $\mathbf{L}(Y,\sigma)$ 分别是由有限个 X 和 Y 的副本组成的直和，因此 $M_{\mathbf{L}(X,\rho),\mathbf{L}(Y,\sigma)} = \mathrm{id}$。此外，由 (4.12)，$M_{E_{x_i},E_{y_j}} = \mathrm{id}$ 对所有 $i\in I$ 和 $j\in J$ 都成立。因此，上述交换图中的右侧垂直态射是恒等态射，从而 $M_{\mathbf{M}(X,\rho),\mathbf{M}(Y,\sigma)} = \mathrm{id}$。现在关系

$$\pi\circ M_{\mathbf{M}(X,\rho),\mathbf{M}(Y,\sigma)} = M^A_{\mathbf{M}(X,\rho),\mathbf{M}(Y,\sigma)}\circ\pi$$

由于 π 是一个满态射，因此可得

$$M^A_{\mathbf{M}(X,\rho),\mathbf{M}(Y,\sigma)} = \mathrm{id}.$$

这就证明了“若”部分。 □

4.3.3. 带状结构与非退化性。设 $\mathcal{G} := \langle E_g \mid g\in\Gamma\rangle\subset\mathcal{C}$。由（4.12），$\mathcal{G}$ 是对称的，因此 $\mathcal{G}\subset\mathcal{C}_\Gamma = \mathcal{Z}_{(2)}(\mathcal{G}\subset\mathcal{C})$。现在我们可以陈述本节的主要结果。

定理 4.24。设 $\mathcal{C}$ 是一个满足条件（4.11）的（弗罗贝尼乌斯）编织张量范畴。

(a) 那么，fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是一个（弗罗贝尼乌斯）编织张量范畴。(b) 若 $\mathcal{C}$ 是带状的，且对所有 $g\in\Gamma$ 都有 $\theta_{E_g} = \mathrm{id}_{E_g}$，则fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是一个带状张量范畴。(c) 当 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象时，fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是一个编织有限张量范畴，当且仅当不可约表示$(\mathcal{C}_\Gamma)/\Gamma$ 是有限的。

证明。(a) 回顾一下，A 是阿廷且单倍的。此外，根据推论 4.18，所有单 A-模都是刚性的。因此，根据定理 3.13，fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是一个编织的（弗罗贝尼乌斯）张量范畴。

(b) 注意，A 根据定理 4.15，是弗罗贝尼乌斯的，并且 $\theta_A = \mathrm{id}_A$ 根据关于扭结的假设成立。由于 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$根据 (a) 部分是刚性的，定理 3.15 推出它是带状的。

(c) 根据 (a) 部分，fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是一个具有足够多投射对象的局部有限阿贝尔范畴。因此，当且仅当它具有有限多个简单对象时，它才是有限编织的。根据推论4.22，后者等价于 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_\Gamma)/\Gamma$ 是有限集。□

定理 4.25. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 *Frobenius* 编织张量范畴，且 $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$。若 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中与所有其他简单对象双重编织均平凡的简单对象恰好是 E_g （其中 $g \in \Gamma$），则 $\mathrm{fg}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$是非退化的。

证明。由于 $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$，条件 (4.11) 得到满足。因此，定理 4.24(a) 表明 $\mathrm{fg}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 是一个 Frobenius 张量范畴。于是，根据引理 2.2，$\mathrm{fg}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 非退化，当且仅当其 M¨uger 中心中的唯一简单对象是 A。但是，$\mathrm{fg}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 中的简单对象为 $\mathrm{M}(X,\rho)$，其中$X \in \mathcal{C}_\Gamma$；而要使这样的对象属于 M¨uger 中心，它必须与所有其他简单对象都满足平凡的双重编织。根据引理 4.23，这意味着 X 与 $\mathcal{C}_\Gamma$ 的所有简单对象都满足平凡的双重编织。根据定理的假设，$X \cong E_g$，其中某个 $g \in \Gamma$。现在，引理 4.8 表明 $\mathrm{M}(X,\rho) \cong A$。因此，$\mathrm{fg}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 的 M¨uger 中心是平凡的，即 $\mathrm{fg}\text{-}\widehat{\mathcal{C}}_A^{\mathrm{loc}}$ 非退化。□

5. Examples from quantum (super)group categories

本节研究来自展开量子群 $U^H(\mathfrak{g})$ 和展开量子超群 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的两个系列例子。我们分析相应的有限维权模范畴，以及它们所产生的单流局部模范畴。我们遵循以下相同的步骤：

(a) 确定可逆简单对象及其张量积律；(b) 计算这些可逆对象上相关的编织和扭结数据；(c) 选取交换简单流代数，并推导相应局部模范畴的结果。

步骤 (c) 中的范畴论推论是通过将定理 4.24 应用于明确的单流数据而得到的。

令 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ 为二阶加法群。我们有时用 $M_{S,T}$ 表示两个对象 S 和 T 之间的双重编织。

5.1. **展开量子群范畴。** 范畴论所需的背景资料沿用 Creutzig–Rupert[CR22]（及其中所引用的文献）；我们仅回顾应用第 4 节单流理论工具所需的数据。关于一般子格（命题 5.1 及其推论）的论述是新的。

取一个单复李代数 $\mathfrak{g}$，其 Cartan 矩阵为 $A = (a_{ij})$，根格为 $Q \subset \mathfrak{h}^*$，权格为 $P \subset \mathfrak{h}^*$。假设 q 是一个本原 ℓ 次单位根，且对所有 i，$\mathrm{ord}(q^2) > d_i$。固定 $\log q$，并令 $q^z = \exp(z \log q)$，其中 $z \in \mathbb{C}$。我们还令

$$r = \ell \text{ if } \ell \text{ is odd}, \qquad r = \ell/2 \text{ if } \ell \text{ is even}. \tag{5.1}$$

令 $\mathcal{C} := \mathrm{Rep}^{\mathrm{wt}}(U_q^H(\mathfrak{g}))$ 为 Rupert 的展开受限量子群的有限维权模范畴。该量子群由展开量子群对由根向量的指定幂生成的 Hopf 理想取商得到。具体而言，$U_q^H(\mathfrak{g})$ 由E_i、F_i、H_i 以及由固定格（介于 Q 和 P之间）索引的类群元 K_γ生成；权模是一个有限维模，它分解为公共 H_i特征空间，并且对于 $\gamma = \sum_i k_i\alpha_i$，算子 K_γ在 λ-权空间上的作用为标量 $q^{\sum_i k_i d_i \lambda(H_i)}$。令$\lambda(H_i)$ 表示 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 在 H_i上的求值。根据 Rupert [Rup22]（另见 [CR22]），$\mathcal{C}$ 是一个带状 Frobenius 张量范畴，且具有足够多的投射对象（等价地说，具有射影覆盖），其 M¨uger 中心是平凡的。

令 M_λ 表示最高权为 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$的 Verma 模的简单商。那么

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = \{\, M_\lambda \mid \lambda \in \mathfrak{h}^* \,\}.$$

模 M_λ 是一维的，因此是可逆对象，当且仅当 E_i 和 F_i 对所有 i 都作用为零，这等价于对所有 i， $\lambda(H_i) \in \frac{\ell}{2d_i}\mathbb{Z}$。在这种情况下，我们记作 $C_\lambda := M_\lambda$。因此

$$\Lambda_{\mathrm{inv}} := \left\{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \,\middle|\, \lambda(H_i) \in \frac{\ell}{2d_i}\mathbb{Z} \,\forall\, i \right\}$$

经由 $\lambda \mapsto C_\lambda$，它与 $\mathcal{C}$ 中可逆简单对象的加法群同构；对于 λ， $\mu \in \Lambda_{\mathrm{inv}}$，有 $C_\lambda \otimes C_\mu \cong C_{\lambda+\mu}$。对于可逆对象，有

$$c_{C_\lambda, C_\mu} = q^{\langle \lambda, \mu \rangle}\tau, \qquad M_{C_\lambda, C_\mu} = q^{2\langle \lambda, \mu \rangle}\mathrm{id}.$$

其中 τ 是**Vec** 的编织，并且

$$\langle \lambda, \mu \rangle := \sum_{i,j} d_i (A^{-1})_{ij} \lambda(H_i)\mu(H_j)$$

$\mathfrak{h}^*$ 上不变双线性形式所对应的值。这里， $d_i = \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle/2$ 是对称化子。扭结为 [CR22，式（4.12）]:

$$\theta_{C_\lambda} = q^{\langle \lambda, \lambda + 2(1-r)\rho \rangle}\mathrm{id}_{C_\lambda}, \tag{5.2}$$

其中 ρ 是 Weyl 向量，而 r 如（5.1）所示。因此，对于加法子群 $L' \subseteq \Lambda_{\mathrm{inv}}$，相应的简单流代数为

$$A_{L'} = \bigoplus_{\lambda \in L'} C_\lambda \in \widehat{\mathcal{C}}.$$

按照第4节中的记号，记

$$\beta(\lambda, \mu) = q^{\langle \lambda, \mu \rangle}, \qquad b(\lambda, \mu) = q^{2\langle \lambda, \mu \rangle}, \qquad \mathfrak{q}(\lambda) = q^{\langle \lambda, \lambda \rangle} = \beta(\lambda, \lambda).$$

对于加法子群 $L' \subseteq \mathfrak{h}^*$，记

$$(L')^* := \{ \gamma \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \gamma, \lambda \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for all } \lambda \in L' \}$$

为关于 $\langle -, -\rangle$ 的对偶格。

命题 5.1。(a) 对象 $A_{L'}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的单倍代数。当且仅当 $\mathfrak{q}|_{L'} \equiv 1$ 时，它是交换的。等价地，对于 $\lambda \in L'$， $\langle \lambda, \lambda \rangle \in \ell\mathbb{Z}$。

(b) 令

$$\mathcal{C}_{L'} := \left\{ X \in \mathcal{C} \;\middle|\; c_{C_\lambda, X} \circ c_{X, C_\lambda} = \mathrm{id}_{X \otimes C_\lambda} \quad \forall\, \lambda \in L' \right\}.$$

则 $\mathcal{C}_{L'} = \mathcal{C}^{\mathrm{int}}_{L'}$，其中 $\mathcal{C}^{\mathrm{int}}_{L'}$ 是所有权均属于 $\frac{\ell}{2}(L')^*$ 的对象所构成的全子范畴。

(c) 假设 $A_{L'}$ 是交换的。那么，轨道集 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_{L'})/L'$（其中 L' 通过与可逆对象 C_λ作张量积来作用）可识别为

$$\Lambda(L') := \frac{\frac{\ell}{2}(L')^*}{L'}.$$

注意，当 $A_{L'}$是交换的（等价地，对所有 $\lambda \in L'$， $\langle \lambda, \lambda \rangle \in \ell\mathbb{Z}$）时，我们得到 $L' \subseteq \frac{\ell}{2}(L')^*$，因此商对象 $\Lambda(L')$ 有定义。

证明。(a) 在可逆对象上，编织标量为 $\beta(\lambda, \mu) = q^{\langle \lambda, \mu \rangle}$，这是 Λ_{inv} 上的双特征。因此，尖点可逆对象子范畴上相应的阿贝尔 3-余循环可由以下对象表示

由 $(1,\ \beta)$ 表示，因此普通结合子余循环 ω 在 L' 上限制为平凡。由引理 2.9(a)，这为任意加法子群 $L' \subseteq \Lambda_{\mathrm{inv}}$ 在 $A_{L'}$ 上赋予代数结构。接着，引理 2.9(b) 表明，$A_{L'}$ 是交换的当且仅当 $\mathsf{q}|_{L'} \equiv 1$。由于 $\mathsf{q}(\lambda) = q^{\langle \lambda,\ \lambda\rangle}$，这等价于对所有 $\lambda \in L'$，$\langle \lambda,\ \lambda\rangle \in \ell\mathbb{Z}$。由对 $\lambda \neq 0$ 有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},\ C_\lambda) = 0$，可知 A 是单倍的，因此 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbb{1},\ A_{L'}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},\ C_0) \cong \Bbbk$。

(b) 设 $X \in \mathcal{C}$ 是一个权模。对于权向量 $w_\gamma \in X$，有

$$\big(c_{C_\lambda,X} \circ c_{X,C_\lambda}\big)(v_\lambda \otimes w_\gamma) = q^{2\langle \lambda,\gamma\rangle}(v_\lambda \otimes w_\gamma).$$

因此，$X \in \mathcal{C}_{L'}$ 当且仅当 $2\langle \lambda,\ \gamma\rangle \in \ell\mathbb{Z}$ 对每个 $\lambda \in L'$ 以及 X 的每个权 γ 都成立；也就是说，当且仅当所有权都属于 $\frac{\ell}{2}(L')^*$。

(c) 由 $A_{L'}$ 根据 (a) 可知是交换的，因此定理4.11 和4.12 连同命题4.21表明，单局部 $A_{L'}$-模由配对 (M_γ, ρ) 分类，其中 $M_\gamma \in \mathcal{C}_{L'}$ 且 ρ 是

$$\mathrm{Stab}_{L'}(M_\gamma) := \{\, \eta \in L' \mid M_\gamma \otimes C_\eta \cong M_\gamma \,\}^{\mathrm{op}}.$$

由于 $M_\gamma \otimes C_\eta \cong M_{\gamma+\eta}$ 和 $M_\lambda \cong M_\mu$ 仅当 $\lambda = \mu$ 时成立，因此该稳定子是平凡的。因此，ρ 必然平凡，所以单局部 $A_{L'}$-模恰好由 L' 在 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_{L'})$ 中的轨道参数化。

此外，$Q \subseteq \frac{\ell}{2}(L')^*$ 因为 $\langle \eta,\ \alpha_i\rangle = d_i\eta(H_i) \in \frac{\ell}{2}\mathbb{Z}$ 对于 $\eta \in L' \subseteq \Lambda_{\mathrm{inv}}$ 和每个单根 α_i；因此，如果 $\gamma \in \frac{\ell}{2}(L')^*$，那么 M_γ 的每个权也都属于 $\frac{\ell}{2}(L')^*$。

由于不可约表示 $\mathsf{r}(\mathcal{C}) = \{\, M_\gamma \mid \gamma \in \mathfrak{h}^* \,\}$，(b) 部分说明 $\mathcal{C}_{L'}$ 的简单对象恰好是

$$\{\, M_\gamma \mid \gamma \in \tfrac{\ell}{2}(L')^* \,\}.$$

此外，对于 $\eta \in L'$，$M_\gamma \otimes C_\eta \cong M_{\gamma+\eta}$，因此，当且仅当两个这样的单对象的参数相差 L'中的一个元素时，它们才属于同一个 L'-轨道。这将 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_{L'})/L'$ 与 $\frac{\ell}{2}(L')^*/L' = \Lambda(L')$ 一一对应起来。 □

引理 5.2。 设 $M_\gamma \in \mathcal{C}_{L'}$ 为单对象。若 M_γ 不可逆，则存在一个简单对象$M_\alpha \in \mathcal{C}_{L'}$，使得

$$c_{M_\alpha,M_\gamma} \circ c_{M_\gamma,M_\alpha} \neq \mathrm{id}.$$

$\mathcal{Z}_{(2)}(\mathcal{C}_{L'})$ 的每个简单对象都是可逆的。

证明。 如命题 5.1(c) 的证明中所述，有 $Q \subseteq \frac{\ell}{2}(L')^*$。

现在设 v_γ 和 v_{α_i} 分别是 M_γ 和 M_{α_i}的最高权向量。将编织写作 $\tau \circ R$，其中 $R = \mathcal{H}\,\widetilde{R}$，且 $\mathcal{H}$ 在权向量上的作用为 $q^{\langle -,\ -\rangle}$ 并且

$$\widetilde{R} = 1 + \sum_{\nu \in Q_{>0}} \sum_{s} c_{\nu,s}\, E_{\nu,s} \otimes F_{\nu,s}$$

是一个 PBW 展开，其中每个 $E_{\nu,\ s}$ 的正根权为 $\nu > 0$。由于 v_γ 和 v_{α_i} 是最高权向量，每个非平凡的 PBW 项都会消去第一个张量因子，因此

$$\widetilde{R}(v_\gamma \otimes v_{\alpha_i}) = v_\gamma \otimes v_{\alpha_i}, \qquad \widetilde{R}(v_{\alpha_i} \otimes v_\gamma) = v_{\alpha_i} \otimes v_\gamma.$$

因此

$$\big(c_{M_{\alpha_i},M_\gamma} \circ c_{M_\gamma,M_{\alpha_i}}\big)(v_\gamma \otimes v_{\alpha_i}) = q^{2\langle \gamma,\alpha_i\rangle}(v_\gamma \otimes v_{\alpha_i}) = q_i^{2\gamma(H_i)}(v_\gamma \otimes v_{\alpha_i}).$$

如果 M_γ 不可逆，那么对于某个 i，$\gamma(H_i) \notin \frac{\ell}{2d_i}\mathbb{Z}$，因此 $q^{2\gamma(H_i)}{}_i \neq 1$。对于这个 i，我们有$\alpha_i \in Q \subseteq \frac{\ell}{2}(L')^*$，所以 $M_{\alpha_i} \in \mathcal{C}_{L'}$，且上述单值化不是恒等映射。最后的结论立即得出。 □

推论 5.3。 假设 $A_{L'}$ 是交换的。

(a) fg-$\widehat{\mathcal{C}}^{\mathrm{loc}}_{A_{L'}}$ 是带状的，当且仅当 $2(1-r)\langle\lambda,\rho\rangle\in\ell\mathbb{Z}$ 对所有 $\lambda\in L'$ 都成立。(b) fg-$\widehat{\mathcal{C}}^{\mathrm{loc}}_{A_{L'}}$ 是有限编织的，当且仅当 $\Lambda(L')$ 是有限的，等价地，$\mathrm{rank}(L')=\mathrm{rank}(P)$。(c) fg-$\widehat{\mathcal{C}}^{\mathrm{loc}}_{A_{L'}}$ 是非退化的，如果由 $b([\lambda],[\mu])=q^{2\langle\lambda,\mu\rangle}$ 在 $\Lambda(L')$ 上诱导的双特征具有平凡根基。

证明。 (a) 根据定理 4.24(b)，是带状的等价于对于所有 $\lambda\in L'$ 都有 $\theta_{C_\lambda}=\mathrm{id}$。根据 (5.2)，$\theta_{C_\lambda}=q^{\langle\lambda,\lambda\rangle}q^{2(1-r)\langle\lambda,\rho\rangle}\mathrm{id}_{C_\lambda}$。由 $A_{L'}$ 的交换性，$\langle\lambda,\lambda\rangle\in\ell\mathbb{Z}$。因此，第一个因子为 1，判据恰好是对于所有 $\lambda\in L'$，$2(1-r)\langle\lambda,\rho\rangle\in\ell\mathbb{Z}$。

(b) 一般判据是定理 4.24(c)：有限编织等价于 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_{L'})/L'$ 有限。根据命题 5.1(c)，这个轨道集是 $\Lambda(L')$。等价关系 $\Lambda(L')$ 有限 $\Longleftrightarrow\mathrm{rank}(L')=\mathrm{rank}(P)$ 是 [CR22，定理 4.2] 中的格计算。

(c) 根据定理 4.25，若 $\mathcal{Z}_{(2)}(\mathcal{C}_{L'})$ 的每个简单对象都属于 $\langle C_\lambda\mid\lambda\in L'\rangle$，则非退化性成立。根据引理 5.2，$\mathcal{Z}_{(2)}(\mathcal{C}_{L'})$ 的每个简单对象都是可逆的。因此，$\mathcal{Z}_{(2)}(\mathcal{C}_{L'})$ 只由可逆对象组成 C_γ 且 $\gamma\in\Lambda_{\mathrm{inv}}\cap\frac{\ell}{2}(L')^*$。对于这样的 C_γ，它与 $M_\delta\in\mathcal{C}_{L'}$ 的双重编织为 $q^{2\langle\gamma,\delta\rangle}\mathrm{id}$，因此 $C_\gamma\in\mathcal{Z}_{(2)}(\mathcal{C}_{L'})$ 当且仅当 $q^{2\langle\gamma,\delta\rangle}=1$ 对所有 $\delta\in\frac{\ell}{2}(L')^*$ 都成立；也就是说，$[\gamma]$ 属于 b 在 $\Lambda(L')$ 上的根基。因此，若 b 的根基平凡，则 $\mathcal{Z}_{(2)}(\mathcal{C}_{L'})$ 的每个简单对象都属于 $\langle C_\lambda\mid\lambda\in L'\rangle$，结论由定理 4.25 得出。□

5.2. **一般线性超群** $\mathfrak{gl}(1|1)$。令 $U_q^E(\mathfrak{gl}(1|1))$ 表示 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 在单位根 $q=e^{2\pi i/r}$ $(r\geq 3)$ 处的展开量子超群 [GY25, §2.2]；它是一个霍普夫超代数，具有偶生成元 E、G、$K^{\pm1}$ 以及奇生成元 X、Y。令 $\mathcal{C}:=\mathcal{D}^{q,\mathrm{int}}$ 表示有限维整数权 $U_q^E(\mathfrak{gl}(1|1))$-超模范畴。所谓权模，是指一个有限维超模，其中相互交换的偶生成元 E 和 G 半单地作用；因此，每个权向量 v 都有一个权 $\lambda=(\lambda_E,\lambda_G)\in\mathbb{C}^2$，其特征为

$$Ev=\lambda_E v,\qquad Gv=\lambda_G v.$$

“整数的”这一修饰语表示所有 G-权都满足 $\lambda_G\in\mathbb{Z}$。于是 $\mathcal{C}$ 是一个有足够多投射对象 [的带状张量范畴 [GY25, 定理 2.14]。全文中，$q^z:=\exp(z\log q)$，其中 $\log q=2\pi i/r$。

5.2.1. 简单对象及其融合。 $\mathcal{C}$ 的简单对象为 [GY25，第 2.3.2 节]：

- 一维模 $\varepsilon\big(\frac{nr}{2},\ b\big)_{\bar p}$，其中 $n\in\mathbb{Z}$、$b\in\mathbb{Z}$ 和 $\bar p\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$：它具有一个奇偶性为 $\bar p$的基向量 v，满足

$$Ev=\tfrac{nr}{2}v,\qquad Gv=bv,\qquad Xv=0,\qquad Yv=0.$$

- 二维量子 Kac 模 $V(\alpha,\ a)_{\bar p}$，其中 $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\frac{r}{2}\mathbb{Z}$、$a\in\mathbb{Z}$和 $\bar p\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$：它具有两个基向量 v（次数为 $\bar p$）和 v'（次数为 $\bar p+\bar 1$），满足

$$\begin{aligned}Ev=\alpha v,\qquad Gv=av,\qquad Xv=0,\qquad Yv=v',\\ Ev'=\alpha v',\qquad Gv'=(a-1)v',\qquad Xv'=[\alpha]_q v,\qquad Yv'=0.\end{aligned}\tag{5.3}$$

注意，单位对象为 $\varepsilon(0,\ 0)_{\bar 0}$。

简单对象之间的张量积已在 [GY25, §2.3.3] 中计算。这里我们只回顾后续分析单流扩张所需的公式。对于 $n,n',b,b',a\in\mathbb{Z}$,

$\bar{p},\bar{p}',\bar{q}\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和 $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\frac{r}{2}\mathbb{Z}$，有

$$\varepsilon\Big(\frac{nr}{2},b\Big)_{\bar{p}}\otimes\varepsilon\Big(\frac{n'r}{2},b'\Big)_{\bar{p}'}\cong\varepsilon\Big(\frac{(n+n')r}{2},\,b+b'\Big)_{\bar{p}+\bar{p}'},$$
$$V(\alpha,a)_{\bar{p}}\otimes\varepsilon\Big(\frac{nr}{2},b\Big)_{\bar{q}}\cong V\Big(\alpha+\frac{nr}{2},\,a+b\Big)_{\bar{p}+\bar{q}},$$

其中，$\bar{p}$的所有和都在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$中取。

5.2.2. 简单对象之间的辫结构。$\mathcal{C}$ 中的辫结构由下式给出

$$c_{V,W}=\tau_{V,W}\circ\widetilde{R}_{V,W}\circ\Upsilon_{V,W},$$

其中，对于权为 λ 的权向量 $v\in V$以及权为 μ的权向量 $w\in W$，有

$$\Upsilon_{V,W}(v\otimes w)=q^{-\lambda_E\mu_G-\lambda_G\mu_E}(v\otimes w),\qquad \tau_{V,W}(v\otimes w)=(-1)^{\bar{v}\,\bar{w}}(w\otimes v),$$

并且 $\widetilde{R}$是由 $1+(q-q^{-1})(X\otimes Y)(K\otimes K^{-1})$给出的左乘。

对于一维模，我们有 $X=Y=0$，因此 $R=\mathrm{id}$。于是，对于 $\varepsilon=\varepsilon(nr/2,\ b)_{\bar{p}}$和 $\varepsilon'=\varepsilon(n'r/2,\ b')_{\bar{p}'}$，其基向量分别为 v，v'，可得

$$c_{\varepsilon,\varepsilon'}(v\otimes v')=(-1)^{\bar{p}\,\bar{p}'}q^{\frac{(-nb'-bn')r}{2}}(v'\otimes v).\tag{5.4}$$

特别地，双重编织是标量：

$$c_{\varepsilon',\varepsilon}\circ c_{\varepsilon,\varepsilon'}=q^{-(nb'+n'b)r}\,\mathrm{id}_{\varepsilon\otimes\varepsilon'}=\mathrm{id}_{\varepsilon\otimes\varepsilon'}.\tag{5.5}$$

设 $V=V(\alpha,a)_{\bar{p}}$是一个二维量子 Kac 模，设 $\varepsilon=\varepsilon(nr/2,b)_{\bar{q}}$是一维的，且其基向量为 w。选取 $\{v,v'\}$ 的齐次权基 V，使其满足 (5.3)。由于 $Xw=Yw=0$，R 中的修正项在 $V\otimes\varepsilon$ 和 $\varepsilon\otimes V$上均为零，因此两种情况下都有 $R=\mathrm{id}$。因此

$$c_{V,\varepsilon}(v\otimes w)=(-1)^{\bar{p}\,\bar{q}}q^{-\alpha b-a\frac{nr}{2}}(w\otimes v),\ c_{\varepsilon,V}(w\otimes v)=(-1)^{\bar{p}\,\bar{q}}q^{-\frac{nr}{2}a-b\alpha}(v\otimes w),$$
$$c_{V,\varepsilon}(v'\otimes w)=(-1)^{(\bar{p}+1)\,\bar{q}}q^{-\alpha b-(a-1)\frac{nr}{2}}(w\otimes v')\ \ c_{\varepsilon,V}(w\otimes v')=(-1)^{(\bar{p}+1)\,\bar{q}}q^{-\frac{nr}{2}(a-1)-b\alpha}(v'\otimes w)。$$

特别地，双重编织中的奇偶性符号会相互抵消。因此，双重编织在权基上是对角的，并且由于 $q^r=1$，我们得到

$$c_{\varepsilon,V}\circ c_{V,\varepsilon}=q^{-2\alpha b}\,\mathrm{id}_{V\otimes\varepsilon}.\tag{5.6}$$

5.2.3. 的 *Müger* 中心 $\mathcal{C}$。

定理 5.4. *Müger* 中心 $\mathcal{Z}_{(2)}(\mathcal{C})$ 是一个满张量子范畴，其简单对象为

$$\varepsilon\Big(\frac{nr}{2},0\Big)_{\bar{p}}\qquad(n\in\mathbb{Z},\ \bar{p}\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

证明。设 S是一个透明简单对象。若 $S=V(\alpha,a)_{\bar{p}}$，取 $T=\varepsilon(0,1)_{\bar{0}}$。由（5.6），

$$M_{S,T}=q^{-2\alpha}\,\mathrm{id}_{S\otimes T}.$$

由于 $\alpha\notin\frac{r}{2}\mathbb{Z}$，我们有 $q^{-2\alpha}\neq1$，这就产生矛盾。因此 $S\cong\varepsilon(\frac{nr}{2},b)_{\bar{p}}$。将（5.6）用于 $T=V(\alpha,0)_{\bar{0}}$可得

$$M_{S,T}=q^{-2\alpha b}\,\mathrm{id}_{S\otimes T}.$$

对所有这类 T 的透明性要求 $b=0$。因此，每个透明简单对象都具有 $\varepsilon(\frac{nr}{2},0)_{\bar{p}}$ 的形式。

反过来，令 $S=\varepsilon\big(\frac{nr}{2},0\big)_{\bar{p}}$，并令 $T\in\mathcal{C}$为任意元素。选取 S的一个基向量 v，并令$w\in T$为权为 (α,a)、奇偶性为 $\bar{q}$的齐次权向量。由于 X 和 Y作用平凡

˜于 S上， R中的修正项在 $S\otimes T$和 $T\otimes S$上均为零。因此

$$c_{S,T}(v\otimes w)=(-1)^{\bar p\,\bar q}q^{-\frac{nr}{2}a}\,(w\otimes v),\qquad c_{T,S}(w\otimes v)=(-1)^{\bar p\,\bar q}q^{-a\frac{nr}{2}}\,(v\otimes w).$$

因此

$$M_{S,T}(v\otimes w)=q^{-nra}(v\otimes w)=(q^r)^{-na}(v\otimes w)=v\otimes w.$$

由于权向量张成 T，因此 $M_{S,\ T}=\mathrm{id}_{S\otimes T}$。于是 $S\in\mathcal{Z}_{(2)}(\mathcal{C})$。 □

5.2.4. 可逆对象群。 $\mathcal{C}$的可逆简单对象是一维模$\varepsilon\big(\frac{nr}{2},\ b\big)_{\bar p}$其中 $n,\ b\in\mathbb{Z}$且 $\bar p\in\{\bar 0,\bar 1\}$。 $\mathcal{C}$的简单可逆对象群在参数相加（$n,\ b,\ \bar p$）下与 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$（非典范地）同构。

对于 $\varepsilon=\varepsilon\big(\frac{nr}{2},\ b\big)_{\bar p}$其中 $n,\ b\in\mathbb{Z}$,

$$c_{\varepsilon,\varepsilon}=(-1)^{\bar p}q^{-nrb}\,\mathrm{id}_{\varepsilon\otimes\varepsilon}=(-1)^{\bar p}\,\mathrm{id}_{\varepsilon\otimes\varepsilon}.\tag{5.7}$$

令 θ 表示 $\mathcal{C}$的带扭结。对于 $\varepsilon(\alpha,\ b)_{\bar p}$，可以根据定义，利用显式的右求值/余评价映射直接计算 θ：

$$\mathrm{ev}_V(v\otimes f)=(-1)^{\bar f\,\bar v}f(Kv),\qquad \mathrm{coev}_V(1)=\sum_i(-1)^{\bar v_i}v_i^*\otimes K^{-1}v_i.$$

使用与 [GY25 定理 2.14],中相同的计算，我们得到

$$\theta_{\varepsilon(\alpha,b)_{\bar p}}=q^{-2\alpha b+\alpha}\,\mathrm{id}_{\varepsilon(\alpha,b)_{\bar p}}.\tag{5.8}$$

对于 $\alpha=\frac{nr}{2}$ （其中 $n,b\in\mathbb{Z}$），这变为

$$\theta_{\varepsilon(\frac{nr}{2},b)_{\bar p}}=q^{-nrb+\frac{nr}{2}}\,\mathrm{id}=q^{\frac{nr}{2}}\,\mathrm{id}=(-1)^n\,\mathrm{id},$$

其中我们使用了 $q^r=1$，因此 $q^{-nrb}=1$，且 $q^{nr/2}=e^{\pi in}=(-1)^n$。

现在我们精确确定哪些简单流代数是交换的。定义二次型 $\mathsf{q}:\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^\times$ 如下

$$\mathsf{q}(n,b,\bar p)=(-1)^{\bar p}.\tag{5.9}$$

因此

$$\mathsf{q}|_\Gamma\equiv 1\iff\Gamma=L\times\{\bar 0\}\text{ for some }L\le\mathbb{Z}^2.\tag{5.10}$$

ˆ因此， $\mathcal{C}$ 中的交换简单流代数恰好是由子群$L\le\mathbb{Z}^2$指标化的那些:

$$A_\Gamma=\bigoplus_{(n,b)\in L}\varepsilon\big(\tfrac{nr}{2},b\big)_{\bar 0}\quad(\Gamma=L\times\{\bar 0\}).$$

我们用 π_n和 π_b表示到 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的第一和第二坐标的投影。

命题 5.5. 设 $\Gamma=L\times\{\bar 0\}\le\mathsf{Inv}(\mathcal{C})$ 满足 $L\le\mathbb{Z}^2$，并令 $A_\Gamma=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\gamma\in\widehat{\mathcal{C}}$。将每个 $\gamma\in\Gamma$写成 $\gamma=\varepsilon\Big(\frac{n(\gamma)r}{2},b(\gamma)\Big)_{\bar 0}$。那么，fg-$\widehat{\mathcal{C}}^{\mathrm{loc}}_{A_\Gamma}$是编织张量。它是带状的，当且仅当对所有$\gamma\in\Gamma$都有 $\theta_\gamma=\mathrm{id}_\gamma$；等价地，当且仅当对每个 $\gamma\in\Gamma,\ n(\gamma)$ 都是偶数。

证明。 由定理 4.24(a), fg-$\widehat{\mathcal{C}}^{\mathrm{loc}}_{A_\Gamma}$是编织张量。由定理 4.24(b)，它是带状的，当且仅当对所有 $\gamma\in\Gamma$, $\theta_\gamma=\mathrm{id}_\gamma$成立。对于 $\gamma=\varepsilon(\frac{n(\gamma)r}{2},b(\gamma))_{\bar 0}$，上面的扭结公式给出 $\theta_\gamma=(-1)^{n(\gamma)}\mathrm{id}_\gamma$，因此这等价于对每个 $\gamma\in\Gamma,\ n(\gamma)$ 都是偶数。□

5.2.5. *fg* 的有限性-$\widehat{\mathcal{C}}_A$和 fg-$\widehat{\mathcal{C}}^{\mathrm{loc}}_A$。 完整的模范畴 fg-$\widehat{\mathcal{C}}_A$永远不是有限的，但局部子范畴可能是有限的。设 $\Gamma=L\times\{\bar 0\}\le\mathsf{Inv}(\mathcal{C})$，其中 $L\le\mathbb{Z}^2$，并设 $A_\Gamma=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\gamma$。

Γ-Kac 单对象上的轨道具有连续的 α-参数，对离散子群 $\frac{r}{2}\pi_n(L)$ 取模，$\widehat{\ }$因此 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})/\Gamma$ 是无限的，且 fg-$\mathcal{C}_{A_\Gamma}$ 根据定理有无限多个简单对象4.19。

对于 $\gamma = \varepsilon(\frac{nr}{2},\ b)_{\bar{0}} \in \Gamma$ 和一个 Kac 单对象 $V(\alpha,\ a)_{\bar{p}}$，(5.6) 给出 $M_{\gamma,\ V} = q^{-2\alpha b}\mathrm{id}$. 记作

$$B := \pi_b(\Gamma) \le \mathbb{Z}.$$

因此 $V(\ \alpha,\ a)_{\bar{p}}$ 是局部的，当且仅当对所有 $b \in B$ 都有 $q^{-2\alpha b} = 1$。若 $B = d\mathbb{Z}$ $(d > 0)$，这等价于

$$\alpha \in \frac{r}{2d}\mathbb{Z},$$

而对于 $B = 0$，对 α 没有限制。因此，局部性将连续的 α-族替换为由 B 决定的算术条件。在我们的 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 情形中，$\mathcal{C}_\Gamma$ 包含所有一维单对象 $\varepsilon(\frac{nr}{2},\ b)_{\bar{p}}$。当且仅当 $\alpha \in \frac{r}{2d}\mathbb{Z} \setminus \frac{r}{2}\mathbb{Z}$ 且 $B = d\mathbb{Z}$ 和 $d > 0$ 时，它包含 Kac 单对象 $V(\alpha,\ a)_{\bar{p}}$；而对于 $B = \bar{0}$，除了 $\alpha \notin \frac{r}{2}\mathbb{Z}$ 之外没有额外限制。因此，当且仅当 $\pi_b(L) \neq 0$ 时，局部性才会消去连续的 α-参数。fg-$\widehat{\mathcal{C}}^{\mathrm{loc}}_{A_\Gamma}$ 的有限性要求更强，当且仅当 L 在 $\mathbb{Z}^2$ 中具有有限指数时才成立。

命题 5.6。设 $\Gamma \le \mathsf{Inv}(\mathcal{C})$ 满足 $\mathsf{q}|_\Gamma \equiv 1$，记 $\Gamma = L \times \{\bar{0}\}$，其中 $L \le \mathbb{Z}^2$，并设 $A_\Gamma = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\gamma$。那么 fg-$\widehat{\mathcal{C}}^{\mathrm{loc}}_{A_\Gamma}$ 有限，当且仅当 $[\mathbb{Z}^2 :\ L] < \infty$。

证明。由 (5.5)，每个一维简单对象 $\varepsilon(\frac{nr}{2}, b)_{\bar{p}}$ 与 Γ交换，因而属于 $\mathcal{C}_\Gamma$。这些简单对象上的Γ-作用是通过 L 在 $(n, b) \in \mathbb{Z}^2$上作平移，因此它们的轨道集为

$$(\mathbb{Z}^2/L) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

因此，若 $[\mathbb{Z}^2 :\ L] = \infty$，则 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_\Gamma)/\Gamma$ 已经是无限的。

反之，设 $[\mathbb{Z}^2 :\ L] < \infty$。那么

$$N := \pi_n(L) = n_0\mathbb{Z} \qquad \text{and} \qquad B := \pi_b(L) = d\mathbb{Z}$$

其中 $n_0, d > 0$。对于 Kac 单对象 $V(\alpha, a)_{\bar{p}}$，(5.6) 表明，当且仅当 $q^{-2\alpha b} = 1$ 对所有$b \in B$成立时，才具有局部性，等价地

$$\alpha \in \frac{r}{2d}\mathbb{Z}.$$

因此，局部 Kac 单对象由以下参数化

$$\left(\frac{r}{2d}\mathbb{Z} \setminus \frac{r}{2}\mathbb{Z}\right) \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

现在，Γ 对 Kac 参数的作用由以下给出

$$(n, b) \in L \quad \mapsto \quad (\alpha, a) \longmapsto \left(\alpha + \frac{nr}{2},\ a + b\right).$$

Let

$$L' := \left\{ \left(\frac{nr}{2},\ b\right) \in \frac{r}{2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, (n, b) \in L \right\} \subset \frac{r}{2d}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

由于 L 在 $\mathbb{Z}^2$ 中的指数有限，因此其秩为 2，故 L' 是一个秩为 2 的子格

$$\frac{r}{2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

此外，

$$\left[\frac{r}{2d}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \frac{r}{2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\right] = d < \infty,$$

因此，L' 也是$\frac{r}{2d}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$的有限指数子格。—

$$\left(\frac{r}{2d}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\right)/L'$$

是有限的。由于被排除的子集$\frac{r}{2}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$在 L'作用下稳定，限制到.....后也同样如此

$$\left(\frac{r}{2d}\mathbb{Z}\setminus\frac{r}{2}\mathbb{Z}\right)\times\mathbb{Z}.$$

因此，局部 Kac 单对象仅贡献有限多个 Γ-轨道；奇偶参数仅贡献有限因子 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

一维部分也贡献有限多个 Γ-轨道，因为

$$(\mathbb{Z}^2/L)\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

是有限的。因此，$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_\Gamma)/\Gamma$ 是有限的。

现在应用定理4.24(c)。 □

总之，有限指数子群 $L\leq\mathbb{Z}^2$ 在 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 设定下，给出显式的有限编织（且当所有 $n(\gamma)$ 均为偶数时，为带状）局部模范畴。

Appendix A. Non-braided version of Etingof-Penneys' lemma

在附录 A中，阿贝尔幺半范畴是指配备了幺半范畴结构的阿贝尔范畴，其中幺半积在每个变量上都是可加且右正合的。

A.1. **Etingof-Penneys 引理**。 阿贝尔幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 X 称为左平坦，如果自函子 $X\otimes(-)$ 在 $\mathcal{C}$ 上是正合的。类似地，如果 $(-)\otimes X$是正合的，则称 X 为右平坦。若 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都是 $\mathcal{C}$中的某个左（右）平坦对象的商对象，则称 $\mathcal{C}$ 有足够多的左（右）平坦对象。平坦对象是同时左平坦和右平坦的对象。

引理 A.1。 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔幺半范畴，且 $0\to Y\xrightarrow{i}Z\xrightarrow{p}X\to 0$ 是 $\mathcal{C}$中的一个短正合列。假设 $\mathcal{C}$ 有足够多的左平坦对象和足够多的右平坦对象。

(a) 若 X 和 Y 是左刚性且右平坦的，则 Z 是左刚性的。(b) 若 X 和 Z 是左刚性的，则 Y 是左刚性的。(c) 若 Y 和 Z 是左刚性的，且 i^* 是满态射，则 X 是左刚性的。

Etingof 和 Penneys 在假设 $\mathcal{C}$ 是编织的条件下证明了这个引理[EP26, 引理 4.2]。他们还指出，编织并非必不可少 [EP26, 备注 4.4]。本附录的目标之一是通过仔细追溯原证明，说明在没有编织的情况下， [EP26, 引理 4.2] 仍以上述形式成立。

众所周知，左（右）刚性对象是左（右）平坦的（见下文引理 A.5 ）。非编织情形中的一个技术难点是，左（右）刚性对象未必是右（左）刚性的。例如，给定一个左刚性对象 Y，证明中会考虑由函子 $Y^*\otimes(-)$ 诱导的 Yoneda 扩张群[1] 之间的映射 [EP26, 引理 4.2]。然而，由于在我们的非编织情形中，函子 $Y^*\otimes(-)$ 未必是正合的，因此会遇到一些技术问题。为求完整起见，我们在 §A.4 中讨论非正合加性函子诱导的 Yoneda 扩张群[1] 之间的映射。

还需注意的是，证明 [EP26，引理 42]时用到了 Tor 函子的技巧。我们没有论证在当前情形下使用 Tor 函子的合理性，而是选择假设 $\mathcal{C}$ 有足够多的左平坦对象和足够多的右平坦对象，并在 §A.3 中直接验证关于平坦对象的一些必要技术引理。对于我们在中心 $\mathcal{C}$ 之上的有限生成模范畴这一主要应用而言，关于

交换代数在编织张量范畴中的情形见 §3，因为此类范畴中的每个对象都是一个平坦对象（事实上是刚性对象）的商对象。

上述引理的一个重要推论是：

定理 A.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔幺半范畴，其中每个对象都有有限长度。假设 $\mathcal{C}$ 有足够多的左平坦对象和足够多的右平坦对象。若$\mathcal{C}$ 的每个简单对象都是刚性的，则 $\mathcal{C}$ 是刚性的。

证明。 显然， $\mathcal{C}$ 的零对象是刚性的。设 M 是 $\mathcal{C}$的一个非零对象。我们通过对 M的长度归纳来证明 M 的刚性。若 M 的长度为 $\mathbf{1}$，则 M 是简单对象，因此根据假设它是刚性的。

现在设 M 的长度为 $n>1$，并假设 $\mathcal{C}$ 中长度为 $<n$ 的每个对象都是刚性的。取一个短正合列 $0\to N\to M\to S\to 0$，其中 S 是简单对象。根据归纳假设， N 是刚性的；根据假设， S 也是刚性的。特别地， N 和 S 是平坦的（见下文引理 A.5 ）。将引理 A.1 应用于此正合列可知， M 是左刚性的。将引理 A.1 应用于反向幺半范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 可知， M 是右刚性的。因此， M 是刚性的。□

A.2. **刚性对象的引理**。 我们首先汇集关于刚性对象的有用引理。下面的引理见于 [EP26，引理 4.2]的证明中：

引理 A.3。 设 $\mathcal{C}$ 为一个幺半范畴，设 L 和 R 为 $\mathcal{C}$中的对象，并设 $\varepsilon\colon\ L\otimes R\to\mathbb{1}$和 $\eta\colon\ \mathbb{1}\to R\otimes L$ 为 $\mathcal{C}$中的态射。假设

$$\xi:=(\varepsilon\otimes\mathrm{id}_L)\circ(\mathrm{id}_L\otimes\eta)\quad and\quad \zeta:=(\mathrm{id}_R\otimes\varepsilon)\circ(\eta\otimes\mathrm{id}_R)$$

它们在 $\mathcal{C}$ 中是可逆的。则有

$$\varepsilon\circ(\xi^{-1}\otimes\mathrm{id}_R)=\varepsilon\circ(\mathrm{id}_L\otimes\zeta^{-1}),\quad (\zeta^{-1}\otimes\mathrm{id}_L)\circ\eta=(\mathrm{id}_R\otimes\xi^{-1})\circ\eta.$$

分别令 ε' 和 η' 为前一个方程和后一个方程的两边。那么三元组(L,ε',η) 和(L,ε,η') 是 R 的左对偶对象。

证明。 利用 $\otimes$的函子性，很容易验证

$$\varepsilon\circ(\xi\otimes\mathrm{id}_R)=(\varepsilon\otimes\varepsilon)\circ(\mathrm{id}_L\otimes\eta\otimes\mathrm{id}_R)=\varepsilon\circ(\mathrm{id}_L\otimes\zeta).$$

从右侧复合 $\xi^{-1}\otimes\zeta^{-1}$，即可得到陈述中的第一个方程。第二个方程的证明方式类似。现在我们有

$$(\varepsilon'\otimes\mathrm{id}_L)\circ(\mathrm{id}_L\otimes\eta)=(\varepsilon\otimes\mathrm{id}_L)\circ(\xi^{-1}\otimes\eta)=\xi\circ\xi^{-1}=\mathrm{id}_L,$$
$$(\mathrm{id}_R\otimes\varepsilon')\circ(\eta\otimes\mathrm{id}_R)=(\mathrm{id}_R\otimes\varepsilon)\circ(\eta\otimes\zeta^{-1})=\zeta\circ\zeta^{-1}=\mathrm{id}_R,$$

这意味着 (L,ε',η) 是 R 的左对偶对象。(L,ε,η') 的情形可用类似的方法证明。□

设 A 和 B 是 $\mathcal{C}$ 中的对象，且设 $f\colon\ A\to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射。为了从 A 的刚性或其逆命题讨论 B 的刚性，我们注意到以下引理：设 A' 和 B' 也都是 $\mathcal{C}$ 中的对象，并设

$$\varepsilon_A:A'\otimes A\to\mathbb{1},\quad \eta_A:\mathbb{1}\to A\otimes A',\quad \varepsilon_B:B'\otimes B\to\mathbb{1},\quad \eta_B:\mathbb{1}\to B\otimes B'$$

以及 $f'\colon\ B'\to A'$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射，使得

$$\varepsilon_B\circ(\mathrm{id}_{B'}\otimes f)=\varepsilon_A\circ(f'\otimes\mathrm{id}_A),\quad (f\otimes\mathrm{id}_{A'})\circ\eta_A=(\mathrm{id}_B\otimes f')\circ\eta_B.$$

引理 A.4。 在上述情形下，我们有

$$f \circ (\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon_A) \circ (\eta_A \otimes \mathrm{id}_A) = (\mathrm{id}_B \otimes \varepsilon_B) \circ (\eta_B \otimes \mathrm{id}_B) \circ f,$$
$$(\varepsilon_A \otimes \mathrm{id}_{A'}) \circ (\mathrm{id}_{A'} \otimes \eta_A) \circ f' = f' \circ (\varepsilon_B \otimes \mathrm{id}_{B'}) \circ (\mathrm{id}_{B'} \otimes \eta_B).$$

例如，若 $(A', \varepsilon_A, \eta_A)$ 是 A 的左对偶对象，且 f 是满态射、 f' 是单态射，那么由此引理可得 $(B', \varepsilon_B, \eta_B)$ 是 B 的左对偶对象。

证明。 第一个等式证明如下：

$$\begin{aligned}
&f \circ (\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon_A) \circ (\eta_A \otimes \mathrm{id}_A) \\
&= (\mathrm{id}_B \otimes \varepsilon_A \otimes \mathrm{id}_A) \circ (f \otimes \mathrm{id}_{A'} \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\eta_A \otimes \mathrm{id}_A) \\
&= (\mathrm{id}_B \otimes \varepsilon_A \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes f' \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\eta_B \otimes \mathrm{id}_A) \\
&= (\mathrm{id}_B \otimes \varepsilon_A \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_{B'} \otimes f) \circ (\eta_B \otimes \mathrm{id}_A) \\
&= (\mathrm{id}_B \otimes \varepsilon_B) \circ (\eta_B \otimes \mathrm{id}_B) \circ f.
\end{aligned}$$

第二个等式以类似方式通过直接计算即可证明。 □

设 X 是 $\mathcal{C}$ 的左刚性对象。众所周知，函子 $X^* \otimes (-)$ 是函子 $X \otimes (-)$ 的左伴随。该伴随的单位和余单位分别由余评价和求值给出。由此可得以下众所周知的事实：

引理 A.5。 在阿贝尔幺半范畴中，左刚性对象是左平坦的。类似地，右刚性对象是右平坦的。

证明。 根据阿贝尔幺半范畴的定义，函子 $X \otimes (-)$ 是右正合的。由于它有左伴随 $X^* \otimes (-)$，函子 $X \otimes (-)$ 也左正合。因此， X 是左平坦的。右刚性情形类似。□

设 $f\colon X \to Y$ 是幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中两个左刚性对象 X 和 Y 之间的一个态射。那么， f 的左对偶态射有定义，记为

$$f^* := (\mathrm{ev}_Y \otimes \mathrm{id}_{X^*})(\mathrm{id}_{Y^*} \otimes f \otimes \mathrm{id}_{X^*})(\mathrm{id}_{Y^*} \otimes \mathrm{coev}_X) : Y^* \to X^*.$$

之字形关系蕴含

$$\mathrm{ev}_X(f^* \otimes \mathrm{id}_{X^*}) = \mathrm{ev}_Y(\mathrm{id}_{Y^*} \otimes f), \quad (\mathrm{id}_Y \otimes f^*)\mathrm{coev}_Y = (f \otimes \mathrm{id}_{X^*})\mathrm{coev}_X.$$

以下事实已在 [EP26, 引理 4.2] 的证明中提及：

引理 A.6。 若 $f\colon X \to Y$ 是阿贝尔幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中两个左刚性对象 X 和 Y 之间的一个满态射，则 f^* 是单态射。

证明。 固定一个对象 $T \in \mathcal{C}$，并考虑交换图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y^*) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T \otimes Y, \mathbb{1}) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, f^*)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_T \otimes f, \mathbb{1})} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X^*) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T \otimes X, \mathbb{1}).
\end{array}$$

由于 f 是满态射，且假设 $\mathcal{C}$ 中的幺半积是右正合的，态射 $\mathrm{id}_T \otimes f$ 是满态射。这意味着上述图表中的右侧竖直箭头是单射，因此左侧竖直箭头也是单射。证明完毕。□

A.3. **关于平坦对象的引理。** 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔幺半范畴。我们给出一些关于平坦对象的引理。

引理 A.7. 设 $t\ 0 \to Y \to Z \to X \to 0$ 是 $\mathcal{C}$中的一个正合列，并设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个对象。

(a) 若 X 是右平坦的，且 A 是一个左平坦对象的商对象，则 $0 \to A \otimes Y \to A \otimes Z \to A \otimes X \to 0$ 是正合的。(b) 若 X 是左平坦的，且 A 是一个右平坦对象的商对象，则 $0 \to Y \otimes A \to Z \otimes A \to X \otimes A \to 0$ 是正合的。

证明。 (a) 我们选取一个满态射 $p\colon F \to A$，其中 F 是左平坦的，并令 $i\colon K \to F$ 为 p 的核，从而得到正合列 $0 \to K \to F \to A \to 0$。我们考虑以下交换图表：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathrm{Ker}(i\otimes \mathrm{id}_Y) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(i\otimes \mathrm{id}_Z) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(i\otimes \mathrm{id}_X) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K\otimes Y & \longrightarrow & K\otimes Z & \longrightarrow & K\otimes X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle i\otimes \mathrm{id}_Y} & & \downarrow{\scriptstyle i\otimes \mathrm{id}_Z} & & \downarrow{\scriptstyle i\otimes \mathrm{id}_X} & & \\
0 & \longrightarrow & F\otimes Y & \longrightarrow & F\otimes Z & \longrightarrow & F\otimes X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle p\otimes \mathrm{id}_Y} & & \downarrow{\scriptstyle p\otimes \mathrm{id}_Z} & & \downarrow{\scriptstyle p\otimes \mathrm{id}_X} & & \\
 & & A\otimes Y & \longrightarrow & A\otimes Z & \longrightarrow & A\otimes X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

此处为简洁起见，省略了部分垂直箭头 $0 \to$和 $\to 0$，并用符号 $\hookrightarrow$ 和$\twoheadrightarrow$ 分别表示单态射和满态射。由于 F 是左平坦对象，第三行是正合的。由张量积的右正合性可知，其余各行及所有列也都是正合的。由于 X 是右平坦的，$i \otimes \mathrm{id}_X$ 是单态射。因此，蛇引理给出了正合列 $0 \to A \otimes Y \to A \otimes Z \to A \otimes X \to 0$。

(b) 将 (a) 应用于 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$。 □

引理 A.8. 设 $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ 是 $\mathcal{C}$中的一个正合列。

(a) 若 $\mathcal{C}$ 有足够多的左平坦对象，且 X 和 Y 都是右平坦的，则 Z 是右平坦的。(b) 若 $\mathcal{C}$ 有足够多的右平坦对象，且 X 和 Y 都是左平坦的，则 Z 是左平坦的。

证明。 (a) 我们假设 $\mathcal{C}$ 有足够多的左平坦对象，且 X 和 Y 都是右平坦的。设 $0 \to B \to C \to A \to 0$ 是 $\mathcal{C}$中的一个正合列。我们考虑通过对 $0 \to B \to C \to A \to 0$ 和 $0 \to Y \to Z \to X \to 0$取张量积得到的以下交换图表：

$$\begin{array}{ccccc}
B\otimes Y & \hookrightarrow & C\otimes Y & \twoheadrightarrow & A\otimes Y \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B\otimes Z & \hookrightarrow & C\otimes Z & \twoheadrightarrow & A\otimes Z \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B\otimes X & \hookrightarrow & C\otimes X & \twoheadrightarrow & A\otimes X
\end{array}$$

第一行和第三行是正合的，因为 X 和 Y 是右平坦的。由于 $\mathcal{C}$ 有足够多的左平坦对象，且 X 是右平坦的，根据引理 A.7，各列是正合的。因此，由九引理可知，中间行也是正合的。因此，Z 是右平坦的。

(b) 将 (a) 应用于 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$。 □

A.4. **关于 Yoneda Ext 的回顾。** Ext 函子在任意阿贝尔范畴中定义为：将特定形式的正合列的等价类集合（即所谓的 Yoneda Ext）赋予相应对象。这里我们回顾 Yoneda Ext 函子的基础知识，并将讨论范围限定于 Ext^1。

A.4.1. *Yoneda Ext* 函子的定义。设 $\mathcal{A}$是一个阿贝尔范畴。对于 $\mathcal{A}$中的对象 X 和 Y，集合 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,\ Y)$ 定义为形如 $0 \to Y \to E \to X \to 0$ 的正合列的等价类集合，其中 $E \in \mathcal{A}$取某个值。当 $\mathcal{A}$ 可由上下文明确时，我们通常将其记作 $\mathrm{Ext}^1(X,\ Y)$。事实上，集合 $\mathrm{Ext}^1(X,\ Y)$ 的构造可扩展为从 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A}$到阿贝尔群范畴$\mathbf{Ab}$的一个函子。函子性和阿贝尔群结构说明如下：

(1) 给定 $\mathcal{A}$ 中的一个态射 $f\colon X' \to X$ 以及一个对象 $Y \in \mathcal{A}$，映射[2]

$$f^\star : \mathrm{Ext}^1(X, Y) \to \mathrm{Ext}^1(X', Y)$$

定义如下：设 e 是 $\mathrm{Ext}^1(X,\ Y)$ 的一个元素，由正合列$0 \to Y \to E \to X \to 0$表示。我们考虑交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E \times_X X' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & (\mathrm{PB}) & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{A.1}$$

正合行，其中 (PB) 表示一个拉回方块。元素 $f^\star(e)$ 定义为由上述图表第一行所表示的元素。

(2) 给定一个态射 $g\colon Y \to Y'$ in $\mathcal{A}$ 和一个对象 $X \in \mathcal{A}$，映射

$$g_\star : \mathrm{Ext}^1(X, Y) \to \mathrm{Ext}^1(X, Y')$$

其定义与 (1) 对偶：若 $e \in$ 扩张群$^1(X, Y)$ 由 $0 \to Y \to E \to X \to 0$ 表示，考虑交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle g}\downarrow & (\mathrm{PO}) & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & E \amalg_Y Y' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{A.2}$$

正合行，其中 (PO) 表示一个推出方块。元素 $g_\star(e)$ 定义为由上述图表第二行所表示的元素。

(3) 对于 (1) 和 (2) 中的态射 f 和 g，可以证明 $f^\star$ 和 $g_\star$ 交换。现在我们定义映射 扩张群$^1(f, g)$：

$$\mathrm{Ext}^1(f, g) := f^\star \circ g_\star = g_\star \circ f^\star : \mathrm{Ext}^1(X, Y) \to \mathrm{Ext}^1(X', Y').$$

(4) 对于 $e_1, e_2 \in$ 扩张群$^1(X, Y)$，它们的和定义为

$$e_1 + e_2 := \mathrm{Ext}^1(\mathrm{diag}_X, \mathrm{sum}_Y)(e_1 \oplus e_2) \quad (\text{the Baer sum}),$$

其中 $\mathrm{diag}_X\colon X \to X \oplus X$ 和 $\mathrm{sum}_Y\colon Y \oplus Y \to Y$ 分别是对角态射和和，而 $e_1 \oplus e_2 \in \mathrm{Ext}^1(X \oplus X, Y \oplus Y)$ 是由以下对象表示的元素：

[2]为了将其与幺半范畴中的对偶区分开来，我们用 $\star$ 表示由态射诱导的 Ext 群之间的映射。更具体地说，$(\text{–})^\star$ 用于逆变情形，而 $(\text{–})_\star$ 用于协变情形。

通过对表示 e_1 和 e_2 的正合列取直和而得到的正合列。

(5) 若 $e \in$ 扩张群$^1(X,\ Y)$ 由 $0 \to Y \xrightarrow{i} E \to X \to 0$ 表示，则 e 的逆元（相对于 Baer 和）由以下正合列表示

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{-i} E \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

下面的标准引理有助于计算 $f^\star$ 和 $g_\star$。

引理 A.9. 设 $0 \to Y \to E \to X \to 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个正合列，且 e 是扩张群$^1(X,\ Y)$ 中的一个元素，由该正合列表示。

(a) 若存在一个交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & F & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{A.3}$$

且各行正合，则顶行表示 $f^\star(e)$。

(b) 如果存在一个交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{A.4}$$

其行正合，那么底行表示 $g_\star(e)$。

证明。 我们只证明 (a)，因为 (b) 可以用类似的方法验证。假设存在一个如 (a) 所示的交换图表，并将图表 (A.1) 和 (A.3) 中的箭头标记如下：

$$\text{(A.1)}: \quad \begin{array}{ccccc} Y & \xhookrightarrow{a'} & E \times_X X' & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & X' \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xhookrightarrow{a} & E & \xrightarrow{b} & X \end{array} \qquad \text{(A.3)}: \quad \begin{array}{ccccc} Y & \xhookrightarrow{a''} & F & \xrightarrow{p_2} & X' \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xhookrightarrow{a} & E & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

由拉回的泛性质，存在唯一态射 $s\colon F \to E \times_X X'$ 使得 $p_i = \mathrm{pr}_i \circ s$ $(i = 1,2)$。由于 $\mathrm{pr}_1 s a'' = p_1 a'' = a = \mathrm{pr}_1 a'$ 且 $\mathrm{pr}_2 s a'' = p_2 a'' = 0 = \mathrm{pr}_2 a'$，我们有 $sa'' = a'$。因此得到交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{a''} & F & \xrightarrow{p_2} & X' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{a'} & E \times_X X' & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & X' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

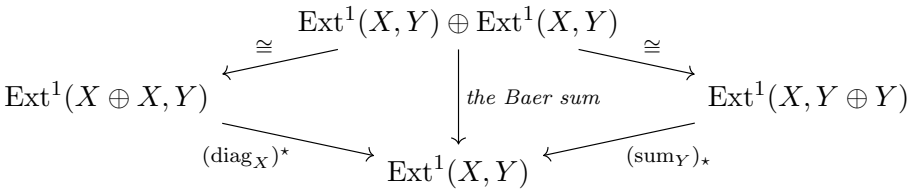
其行正合。五引理表明 s 是一个同构。由于 $f^\star(e)$ 按定义由 (A.1) 的顶行表示，$f^\star(e)$ 也由 (A.3) 的顶行表示。□

众所周知，函子 $\mathbf{Ext}^1\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ 对每个变量都是可加的。因此，特别地，存在典范同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1(X \oplus Y, Z) &\cong \mathrm{Ext}^1(X,Z) \oplus \mathrm{Ext}^1(Y,Z), \\ \mathrm{Ext}^1(X, Y \oplus Z) &\cong \mathrm{Ext}^1(X,Y) \oplus \mathrm{Ext}^1(X,Z) \end{aligned}$$

对于 $X, Y, Z \in \mathcal{A}$。我们注意到上述同构与 Baer 和之间有如下众所周知的关系。

引理 A.10. 下图是交换的：



A.4.2. 由函子诱导的映射。设 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是阿贝尔范畴之间的一个可加函子。为简便起见，我们将 $\mathcal{E}_F$ 定义为由 $\mathcal{A}$ 中的对象组成的对 (X,Y) 的类，使得 F 保持 X 被 Y 扩张，也就是说，对于 $\mathcal{A}$ 中形如 $0 \to Y \to E \to X \to 0$ 的每个正合列，序列 $0 \to F(Y) \to F(E) \to F(X) \to 0$ 都是正合的。对于每一对 $(X,Y) \in \mathcal{E}_F$，我们有一个显然的映射

$$\widetilde{F}_{X,Y} : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(F(X),F(Y))$$

~由函子 F 诱导（在不致引起混淆时，我们常将 $F_{X,Y}(e)$ 简写为 $F(e)$）。~在此，我们展示映射 $F_{X,Y}$ 的性质。当所讨论的函子是正合函子时，所有这些结果都应是众所周知的。由于正合性对于我们的应用而言要求过强，我们重新审视标准论证，并明确证明这些结果在较弱的假设下仍然成立。

~首先，我们讨论 $F_{X,\ Y}$ 的自然性。

引理 A.11. 设 F 如上所述。

~(a) 对于固定的 $X \in \mathcal{A}$，映射 $F_{X,\ Y}$ 关于满足 $(X,Y) \in \mathcal{E}_F$ 的 $Y \in \mathcal{A}$ 是自然的。
~(b) 对于固定的 $Y \in \mathcal{A}$，映射 $F_{X,\ Y}$ 关于满足 $(X,Y) \in \mathcal{E}_F$ 的 $X \in \mathcal{A}$ 是自然的。

证明。我们只给出 (a) 的证明，因为 (b) 的证明类似。固定 $X \in \mathcal{A}$ 并令 $g\colon\ Y \to Y'$ 为 $\mathcal{A}$ 中的一个态射，使得 $(X,\ Y)$ 和 $(X,\ Y')$ 都属于类 $\mathcal{E}_F$。令 $e \in$ 扩张群$^1(X,\ Y)$ 为由正合列 $0 \to Y \to E \to X \to 0$ 表示的一个元素。将 F 应用于图表 (A.2)，我们得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F(Y) & \longrightarrow & F(E) & \longrightarrow & F(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle F(g)}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & F(Y') & \longrightarrow & F(E \amalg_Y Y') & \longrightarrow & F(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其各行都是正合的，因为 $(X,\ Y)$、$(X,\ Y') \in \mathcal{E}_F$。第二行表示 $F(g_\star(e))$。由于第一行表示 $F(e)$，根据引理 A.9，第二行也表示 $F(g)_\star(F(e))$。因此~我们有 $F(g_\star(e)) = F(g)_\star(F(e))$。这意味着 $F_{X,\ Y}$ 如所述是自然的。□

~$F_{X,\ Y}$ 的可加性似乎要求一个颇为微妙的条件。

引理 A.12。 设 F 如上，并设 X、$Y \in \mathcal{A}$。若~类 $\mathcal{E}_F$ 中同时包含 (X,Y) 和 $(X,Y \oplus Y)$，则映射 $F_{X,Y}$ 是可加的。

证明。 设 $e_i (i = 1, 2)$ 是扩张群 $\mathrm{Ext}^1(X, Y)$ 中由正合列 $0 \to Y \to E_i \to X \to 0$ 表示的一个元素。我们考虑下列行正合的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Y \oplus Y & \longrightarrow & E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & X \oplus X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \uparrow & (\mathrm{PB}) & \uparrow{\scriptstyle \text{图表}X} & & \\
0 & \longrightarrow & Y \oplus Y & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{sum}_Y}\downarrow & (\mathrm{PO}) & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

我们将此图表称为 D ，并考虑通过对 D 应用 F而得到的图表 $F(D)$。由于$e_1 + e_2$ 由 D的第三行表示， $F(D)$的第三行表示 $F(e_1 + e_2)$。现在，我们用另一种方式计算 $F(D)$的第三行。由于 F 是可加的，我们可以在此等同$F(V \oplus W) = F(V) \oplus F(W)$，其中 V、$W \in \mathcal{A}$。在此等同下，我们有 F(图表X) $=$图表$_{F(X)}$，以及 F(和$_Y$) $=$和$_{F(Y)}$。不难验证， $F(D)$的第一行是正合的，并表示 $F(e_1) \oplus F(e_2)$。根据假设，(X, Y)、$(X, Y \oplus Y) \in \mathcal{E}_F$， $F(D)$的第二行和第三行也都是正合的。因此，利用引理 A.9，我们看到 $F(D)$的第三行表示 $F(e_1) + F(e_2)$。证明完毕。□

这个引理给出了一个与我们的目标直接相关的应用：

引理 A.13。 设 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔幺半范畴，且有 $X, Y, A \in \mathcal{C}$。若 X 是右平坦的，且A 是左平坦对象的商对象，则函子 $A \otimes (-)$ 诱导出一个同态

$$\mathrm{Ext}^1(X, Y) \to \mathrm{Ext}^1(A \otimes X, A \otimes Y)$$

阿贝尔群之间的同态。

证明。 考虑函子 $F = A \otimes (-)$。引理 A.7 表明 F保持X 被任意对象扩张的扩张。由此，函子 F 诱导出扩张群之间的映射[1]，如上所述；根据引理A.12，该映射实际上是可加的。 □

A.4.3. 伴随同构。 与前面一样， $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是阿贝尔范畴之间的加性函子。假设 F 有一个右伴随 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$。令 $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \to GF$ 和 $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$分别为伴随的单位和余单位。在对 $X \in \mathcal{A}$和 $Y \in \mathcal{B}$施加适当条件时，以下引理给出一个同构 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, G(Y)) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(F(X)\ Y)$，其公式类似于伴随同构。

引理 A.14。 若$(X, G(Y)) \in \mathcal{E}_F$且$(F(X)\ Y) \in \mathcal{E}_G$，则该映射

$$\Phi : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, G(Y)) \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(F(X), FG(Y)) \xrightarrow{(\varepsilon_Y)_\star} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(F(X), Y)$$

是可逆的，其逆为

$$\Psi : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(F(X), Y) \xrightarrow{\widetilde{G}} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(GF(X), G(Y)) \xrightarrow{(\eta_X)^\star} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, G(Y)).$$

证明。 我们证明 $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$；关于 $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ 的证明类似。设 $e \in$ 扩张群$^1_{\mathcal{A}}(X,\ G(Y))$ 是由短正合列 $0 \to G(Y) \xrightarrow{a} E \xrightarrow{b} X \to 0$ 表示的一个元素。根据定义，

$\Phi(e)$ 由下列具有正合行的交换图中的第二行表示:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & FG(Y) & \xrightarrow{F(a)} & F(E) & \xrightarrow{F(b)} & F(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \varepsilon_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow[a']{} & E' & \xrightarrow[b']{} & F(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$\Psi(\Phi(e))$ 是由　以下交换图的第一行表示的，其各行均为正合行　　:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G(Y) & \xrightarrow{a''} & E'' & \xrightarrow{v} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_X} & & \\ 0 & \longrightarrow & G(Y) & \xrightarrow{G(a')} & G(E') & \xrightarrow[G(b')]{} & GF(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

考虑复合态射 $t := G(j) \circ \eta_E \colon E \to G(E')$。由 η 的自然性，我们有

$$G(b') \circ t = G(b') \circ G(j) \circ \eta_E = GF(b) \circ \eta_E = \eta_X \circ b.$$

因此，根据拉回的泛性质，存在唯一态射 $s\colon E \to E''$，使得 $u \circ s = t$ 和 $v \circ s = b$。利用 η 的自然性，我们得到

$$\begin{aligned} u \circ s \circ a = t \circ a = G(j) \circ \eta_E \circ a = G(j) \circ GF(a) \circ \eta_{G(Y)} \\ = G(a') \circ G(\varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)} = G(a') = u \circ a'', \end{aligned}$$

其中最后一个等式是单位和余单位的三角恒等式。由于还有 $v \circ s \circ a = b \circ a = 0 = v \circ a''$，我们有 $s \circ a = a''$。因此，映射 s 是短正合列之间的态射

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G(Y) & \xrightarrow{a} & E & \xrightarrow{b} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & G(Y) & \xrightarrow{a''} & E'' & \xrightarrow{v} & X & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由五引理，s 是一个同构，因此 e和 $\Psi(\Phi(e))$ 是等价扩张。由此，它们在 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,\ G(Y))$ 中定义了同一个类。□

A.5. **同调代数练习**。设 $\mathcal{A}$是一个阿贝尔范畴。在本小节中，我们考虑如下交换图表

$$\begin{array}{ccccc} A_{11} & \xhookrightarrow{i_1} & A_{12} & \xrightarrow{p_1} & A_{13} \\ {\scriptstyle j_1}\uparrow & & {\scriptstyle j_2}\uparrow & & {\scriptstyle j_3}\uparrow \\ A_{21} & \xhookrightarrow{i_2} & A_{22} & \xrightarrow{p_2} & A_{23} \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & {\scriptstyle q_2}\downarrow & & {\scriptstyle q_3}\downarrow \\ A_{31} & \xhookrightarrow{i_3} & A_{32} & \xrightarrow{p_3} & A_{33} \end{array} \tag{A.5}$$

在 $\mathcal{A}$ 中，其行和列均为正合列。在此，我们建立关于该图表的技术性引理。

引理 A.15. 存在一个正合列

$$0 \longrightarrow A_{11} \xrightarrow{\iota} \mathrm{Ker}(p_3 q_2) \xrightarrow{\pi} A_{13} \oplus A_{31} \longrightarrow 0, \tag{A.6}$$

其中 ι 是 $i_2j_1 : A_{11} \to A_{22}$ 的限制，且 π 是使下列图表交换的唯一态射：

$$\begin{array}{ccccccc}
A_{22} & \longleftarrow & \mathrm{Ker}(p_3q_2) & \hookrightarrow & A_{22} \\
{\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\
A_{23} & \xleftarrow[j_3]{} A_{13} & \twoheadleftarrow & A_{13}\oplus A_{31} & \twoheadrightarrow & A_{31} & \xrightarrow[i_3]{} A_{32}
\end{array}$$

证明。 我们使用 Mitchell 嵌入定理，将 $\mathcal{A}$ 中的对象视为阿贝尔群。首先定义 π。由于图表（A.5）可交换，我们有

$$q_3p_2 = p_3q_2 : A_{22} \to A_{33}.$$

因此，对于 $z \in$Ker(p_3q_2)，我们有 $q_3p_2(z) = 0$，故 $p_2(z) \in$ Ker$(q_3) =$ Im(j_3)。由于 j_3 是单态射，存在唯一态射 $\pi_{13} :$ Ker$(p_3q_2) \to A_{13}$，使得 $j_3 \circ \pi_{13} = p_2|_{\mathrm{Ker}(p_3q_2)}$。

类似地，若 $z \in$Ker(p_3q_2)，则 $p_3q_2(z) = 0$，故 $q_2(z) \in$ Ker$(p_3) =$ Im(i_3)。由于 i_3 是单态射，存在唯一态射 $\pi_{31} :$ Ker$(p_3q_2) \to A_{31}$，使得 $i_3 \circ \pi_{31} = q_2|_{\mathrm{Ker}(p_3q_2)}$。我们定义$\pi = (\pi_{13}, \pi_{31}) :$ Ker$(p_3q_2) \to A_{13} \oplus A_{31}$。

我们证明序列 (A.6) 是正合的。

ι的单射性显然，因为 i_2j_1是单态射。此外， $\pi \circ \iota = 0$，因为 $p_2i_2 = 0$且 $q_2i_2 = i_3q_1$。因此，像$(\iota) \subseteq$ 核(π)。

为证明 π是满态射，令 $(x, y) \in A_{13} \oplus A_{31}$。取 $z_0 \in A_{22}$，使得 $q_2(z_0) = i_3(y)$（这是可能的，因为 q_2 是满态射）。于是 $p_3q_2(z_0) = 0$，故 $z_0 \in$ 核(p_3q_2)。由于 $q_3p_2(z_0) = p_3q_2(z_0) = 0$，我们有 $p_2(z_0) \in$ 核$(q_3) =$像(j_3)，因此存在 $x_0 \in A_{13}$，使得 $p_2(z_0) = j_3(x_0)$。令 $d := x_0 - x \in A_{13}$。取 $w \in A_{12}$，使得 $p_1(w) = d$ （这是可能的，因为 p_1 是满态射）。于是

$$q_2(z_0 - j_2(w)) = q_2(z_0) \quad \text{and} \quad p_2(z_0 - j_2(w)) = p_2(z_0) - p_2j_2(w) = j_3(x_0) - j_3p_1(w) = j_3(x).$$

因此， $z := z_0 - j_2(w)$ 属于 Ker(p_3q_2)，并且满足 $\pi(z) = (x, y)$。所以 π 是满态射。

最后，设 $z \in$ Ker(π)。那么 $p_2(z) = j_3\pi_{13}(z) = 0$，且 $q_2(z) = i_3\pi_{31}(z) = 0$。因此 $z \in$ Ker$(p_2) \cap$Ker$(q_2) =$ 像$(i_2) \cap$像(j_2)。取 $u \in A_{21}$ 和 $v \in A_{12}$，使得 $i_2(u) = j_2(v) = z$。应用 q_2 并利用交换性可得

$$0 = q_2(z) = q_2i_2(u) = i_3q_1(u),$$

所以 $q_1(u) = 0$ si 因为 i_3 是单态射。因此 $u \in$ Ker$(q_1) =$ 像(j_1)，所以对于某个 $a \in A_{11}$，有 $u = j_1(a)$。 n

$$z = i_2(u) = i_2j_1(a) = j_2i_1(a),$$

并且由于 j_2 是单态射，我们得到 $v = i_1(a)$。因此 $z = \iota(a)$，即 Ker(π) =像(ι)。 □

由扩张群的可加性[1], ，我们有一个同构

$$\mathrm{Ext}^1(A_{13} \oplus A_{31}, A_{11}) \cong \mathrm{Ext}^1(A_{13}, A_{11}) \oplus \mathrm{Ext}^1(A_{31}, A_{11}) \tag{A.7}$$

阿贝尔群。正合列（A.6）定义了（A.7）左侧的一个元素。与（A.7）右侧的元素相对应的（A.6）描述如下：

引理 A.16。 设 α_1 和 β_1 分别是 *Ext* 群中对应于 (A.5)的第一行和第一列的元素。那么，由正合列 (A.6)表示的元素，对应于 (α_1, β_1)，即 (A.7)右端的元素。

证明。 在典范同构 $\mathsf{Ext}^1(A_{13}\oplus A_{31},\ A_{11}) \cong \mathsf{Ext}^1(A_{13},\ A_{11}) \oplus \mathsf{Ext}^1(A_{31},\ A_{11})$ 下，该扩张类被映射为沿着包含映射 $A_{13} \hookrightarrow A_{13}\oplus A_{31}$ 和$A_{31} \hookrightarrow A_{13}\oplus A_{31}$ 的拉回对。

设 e 为由 (A.6) 表示的扩张类。沿 $A_{13} \hookrightarrow A_{13}\oplus A_{31}$对 (A.6) 作拉回，其中间项为 $\mathsf{Ker}(\pi_{31})$，其中 π_{31} 是复合态射 $\mathsf{Ker}(p_3q_2) \xrightarrow{\pi} A_{13}\oplus A_{31} \to A_{31}$。根据引理 A.15 中 π的构造，我们有 $i_3\circ\pi_{31} = q_2|_{\mathrm{Ker}(p_3q_2)}$，因此 $\mathsf{Ker}(\pi_{31}) = \mathsf{Ker}(q_2) \cong A_{12}$。此外，由交换性 $p_2j_2 = j_3p_1$和定义性质 $j_3\circ\pi_{13} = p_2|_{\mathrm{Ker}(p_3q_2)}$，可将诱导映射 $\mathsf{Ker}(\pi_{31}) \to A_{13}$ 识别为 p_1。因此，该拉回扩张同构于 (A.5) 的第一行，故等于 α_1。

类似地，沿 $A_{31} \hookrightarrow A_{13}\oplus A_{31}$ 的拉回，其中间项为核(π_{13})。由于 $j_3\circ\pi_{13} = p_2|_{\mathrm{Ker}(p_3q_2)}$，我们有核$(\pi_{13}) =$ 核$(p_2) \cong A_{21}$。诱导映射 核$(\pi_{13}) \to A_{31}$ 与 q_1 通过交换性 $q_2i_2 = i_3q_1$ 及定义性质 $i_3\circ\pi_{31} = q_2|_{\mathrm{Ker}(p_3q_2)}$相识别。因此，此拉回扩张同构于 (A.5) 的第一列，故等于 β_1。

因此， e 对应于 $(\alpha_1,\ \beta_1)$。 □

在反范畴 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$中，图表 (A.5) 如下所示：

$$\begin{array}{ccccc}
A_{33} & \xhookrightarrow{q_3} & A_{32} & \xtwoheadrightarrow{i_3} & A_{31} \\
{\scriptstyle p_3}\downarrow & & {\scriptstyle p_2}\downarrow & & {\scriptstyle p_1}\downarrow \\
A_{23} & \xhookrightarrow{q_2} & A_{22} & \xtwoheadrightarrow{i_2} & A_{21} \\
{\scriptstyle j_3}\downarrow & & {\scriptstyle j_2}\downarrow & & {\scriptstyle j_1}\downarrow \\
A_{13} & \xhookrightarrow{q_1} & A_{12} & \xtwoheadrightarrow{i_1} & A_{11}.
\end{array}$$

我们将 上述引理应用于该图表，然后在 $\mathcal{A}$ 中解释结果，从而得到 :

引理 A.17。 存在一个正合列

$$0 \longrightarrow A_{13}\oplus A_{31} \xrightarrow{\iota} \mathrm{Coker}(i_2j_1) \xrightarrow{\pi} A_{33} \longrightarrow 0, \tag{A.8}$$

其中， π 由 p_3q_2 : $A_{22} \to A_{33}$ 诱导，而 ι 是使下图表交换的唯一态射:

$$\begin{array}{ccccccc}
A_{12} & \xrightarrow{p_1}\!\!\!\!\rightarrow & A_{13} & \hookrightarrow & A_{13}\oplus A_{31} & \hookleftarrow & A_{31} & \xleftarrow{q_1}\!\!\!\!\leftarrow & A_{21} \\
{\scriptstyle j_2}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\
A_{22} & & \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & & \mathrm{Coker}(i_2j_1) & & \leftarrow\!\!\!\!\longleftarrow & & A_{22}
\end{array}$$

在典范同构下

$$\mathrm{Ext}^1(A_{33}, A_{13}\oplus A_{31}) \cong \mathrm{Ext}^1(A_{33}, A_{13}) \oplus \mathrm{Ext}^1(A_{33}, A_{31}) \tag{A.9}$$

对于阿贝尔群，左侧由 (A.8)表示的元素对应于$(\alpha_3,\ \beta_3)$ 右侧的元素，其中 α_3 和 β_3 分别是由 (A.5)的第三列和第三行表示的元素。

在本节余下部分，我们固定阿贝尔幺半范畴 $\mathcal{C}$中的一个短正合列，该范畴有足够多的左平坦对象和右平坦对象:

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} X \longrightarrow 0. \tag{A.10}$$

A.6. **引理 A.1 (1) 的证明。** 我们给出引理A.1 (1) 的证明。假设 X 和 Y 是右平坦且左刚性的。引理A.5表明 X 和 Y 也都是左平坦的。

A.6.1. 对偶对象的构造。 我们首先考虑以下图表 :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ext}^1(X,Y) & \xrightarrow{\widetilde{-\otimes X^*}} & \mathrm{Ext}^1(X\otimes X^*, Y\otimes X^*) & \xrightarrow{(\mathrm{coev}_X)^\star} & \mathrm{Ext}^1(\mathbb{1}, Y\otimes X^*) \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{Y^*\otimes -}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{Y^*\otimes -}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{Y^*\otimes -}} \\
\mathrm{Ext}^1(Y^*\otimes X, Y^*\otimes Y) & \xrightarrow{\widetilde{-\otimes X^*}} & \mathrm{Ext}^1(Y^*\otimes X\otimes X^*, Y^*\otimes Y\otimes X^*) & \xrightarrow{(\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}_X)^\star} & \mathrm{Ext}^1(Y^*, Y^*\otimes Y\otimes X^*) \\
\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{ev}_Y)_\star} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{ev}_Y\otimes\mathrm{id})_\star} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{ev}_Y\otimes\mathrm{id})_\star} \\
\mathrm{Ext}^1(Y^*\otimes X, \mathbb{1}) & \xrightarrow{\widetilde{-\otimes X^*}} & \mathrm{Ext}^1(Y^*\otimes X\otimes X^*, X^*) & \xrightarrow{(\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}_X)^\star} & \mathrm{Ext}^1(Y^*, X^*),
\end{array}$$

其中 $-\otimes X^*$ 和 $Y^*\otimes -$ 分别是由函子 $-\otimes X^*$ 和 $Y^*\otimes -$诱导的映射。由于根据引理 X^* A.5 是右平坦的，因此图表中的映射 $-\otimes X^*$ 是定义良好的阿贝尔群同态。对象 X、 $X\otimes X^*$ 和 $\mathbb{1}$ 均为右平坦。因此，根据引理A.13，图表中的映射 $Y^*\otimes -$ 也是定义良好的阿贝尔群同态。

左上方的方块可交换，因为函子 $-\otimes X^*$ 和 $Y^*\otimes -$ 可交换。根据 Yoneda Ext 的基本性质，右下方的方块也可交换。其余方块也根据引理A.11可交换。上述图表的行和列是由引理 A.14中讨论的伴随诱导的双射。因此，上述图表可简化为以下由阿贝尔群同构构成的交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^1(X,Y) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Ext}^1(\mathbb{1}, Y\otimes X^*) \\
\cong\downarrow & & \downarrow\cong \\
\mathrm{Ext}^1(Y^*\otimes X, \mathbb{1}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Ext}^1(Y^*, X^*)
\end{array} \tag{A.11}$$

我们用 $\alpha\in$ 扩张群$^1(X,\ Y)$ 表示由 (A.10) 所代表的元素，并令 $\beta\in$ 扩张群$^1(Y^*,\ X^*)$ 为对应于 $-\alpha$ 的元素。我们选取一个正合列

$$0\longrightarrow X^*\xrightarrow{j} Z^\vee\xrightarrow{q} Y^*\longrightarrow 0 \tag{A.12}$$

表示 β。我们将证明，中间项 $Z^\vee$ 是 Z 的左对偶对象。

A.6.2. 余评价的构造。 将正合列 (A.10) 和 (A.12) 作张量积，可得以下交换图表：

$$\begin{array}{ccccc}
Y\otimes X^* & \xhookrightarrow{i\otimes\mathrm{id}} & Z\otimes X^* & \xrightarrow{p\otimes\mathrm{id}} & X\otimes X^* \\
{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes j}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes j}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes j}\downarrow \\
Y\otimes Z^\vee & \xhookrightarrow{i\otimes\mathrm{id}} & Z\otimes Z^\vee & \xrightarrow{p\otimes\mathrm{id}} & X\otimes Z^\vee \\
{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes q}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes q}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes q}\downarrow \\
Y\otimes Y^* & \xhookrightarrow{i\otimes\mathrm{id}} & Z\otimes Y^* & \xrightarrow{p\otimes\mathrm{id}} & X\otimes Y^*
\end{array} \tag{A.13}$$

由于 X 和 Y 均为左平坦， Z 根据引理A.8也左平坦。因此，该图表的所有列均为正合列。由于 X^* 和 Y^* 均为右平坦， $Z^\vee$ 根据引理 A.8也为右平坦，因此，该图表的所有行均为正合列。于是，根据引理A.15，我们得到一个正合列

$$0\longrightarrow X\otimes Y^*\xrightarrow{i\otimes j}\mathrm{Ker}(p\otimes q)\xrightarrow{\pi}(X\otimes X^*)\oplus(Y\otimes Y^*)\longrightarrow 0, \tag{A.14}$$

其中 π 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
Z\otimes Z^\vee \arrow[d, two heads, "p\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathrm{Ker}(p\otimes q) \arrow[ll, hook'] \arrow[rr, hook] \arrow[d, "\pi"] & & Z\otimes Z^\vee \arrow[d, two heads, "\mathrm{id}\otimes q"] \\
X\otimes Z^\vee & X\otimes X^* \arrow[l, hook', "\mathrm{id}\otimes j"'] & (X\otimes X^*)\oplus(Y\otimes Y^*) \arrow[l, two heads, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_Y"] & Y\otimes Y^* \arrow[r, hook, "i\otimes\mathrm{id}"] & Z\otimes Y^*,
\end{tikzcd} \tag{A.15}$$

其中 pr_X 和 pr_Y 分别是投影。

我们沿着态射 $\mathrm{coev}_{X,\ Y} := (\mathrm{coev}_X \oplus \mathrm{coev}_Y) \circ \mathrm{diag}_{\mathbb{1}}$，计算正合列 (A.14) 的拉回。根据引理 A.10 以及 Baer 和的自然性，我们得到以下交换图：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(X\otimes X^*, X\otimes Y^*)\oplus\mathrm{Ext}^1(Y\otimes Y^*, X\otimes Y^*) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\mathrm{coev}_X)^\star\oplus(\mathrm{coev}_Y)^\star"'] & \mathrm{Ext}^1((X\otimes X^*)\oplus(Y\otimes Y^*), X\otimes Y^*) \arrow[d, "(\mathrm{coev}_{X,Y})^\star"] \\
\mathrm{Ext}^1(\mathbb{1}, X\otimes Y^*)\oplus\mathrm{Ext}^1(\mathbb{1}, X\otimes Y^*) \arrow[r, "\text{the Baer sum}"] & \mathrm{Ext}^1(\mathbb{1}, X\otimes Y^*)
\end{tikzcd}$$

根据引理 A.16，右上角的元素 (A.14) 对应于左上角的元素 ($\alpha\otimes X^*$，$Y\otimes\beta$)。因此，根据该图表的交换性，我们有

$$(\mathrm{coev}_{X,Y})^\star(\text{A.14}) = (\mathrm{coev}_X)^\star(\alpha\otimes X^*) + (\mathrm{coev}_Y)^\star(Y\otimes\beta)$$

在扩张群^1($\mathbb{1}$，$X\otimes Y^*$) 中，右侧的第一项和第二项分别对应于图表 (A.11) 中的 $\alpha\in$扩张群^1(X，Y) 和 $\beta\in$扩张群^1(Y^*，X^*)。根据定义，β对应于图表 (A.11) 中的$-\alpha\in$扩张群^1(X，Y)，因此上述等式右侧实际上为零。这意味着沿 $\mathrm{coev}_{X,\ Y}$ 对 (A.14) 作拉回后会分裂。综上所述，我们得到交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X\otimes Y^* \arrow[r, "i\otimes j"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ker}(p\otimes q) \arrow[r, "\pi"] & (X\otimes X^*)\oplus(Y\otimes Y^*) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X\otimes Y^* \arrow[r] & E \arrow[u, "u"] \arrow[r, "r"'] \arrow[ur, phantom, "\text{(PB)}"] & \mathbb{1} \arrow[u, "\mathrm{coev}_{X,Y}"'] \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "s"] & 0
\end{tikzcd} \tag{A.16}$$

具有正合行，其中 (PB) 是一个拉回，且 s 是 r 的截面。我们定义

$$\eta_Z : \mathbb{1} \xrightarrow{s} E \xrightarrow{u} \mathrm{Ker}(p\otimes q) \hookrightarrow Z\otimes Z^\vee, \tag{A.17}$$

事实上，经过适当修正后，它便成为余评价。在继续讨论之前，我们指出，态射 η_Z 使下图交换：

$$\begin{tikzcd}
Y\otimes Y^* \arrow[d, "i\otimes\mathrm{id}"'] & \mathbb{1} \arrow[l, "\mathrm{coev}_Y"'] \arrow[r, "\mathrm{coev}_X"] \arrow[d, "\eta_Z"] & X\otimes X^* \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes j"] \\
Z\otimes Y^* & Z\otimes Z^\vee \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes q"] \arrow[r, "p\otimes\mathrm{id}"'] & X\otimes Z^\vee
\end{tikzcd} \tag{A.18}$$

事实上，由交换图（A.15）和（A.16），可得

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_Z\otimes q)\circ\eta_Z &= (i\otimes\mathrm{id}_{Y^*})\circ\mathrm{pr}_Y\circ\pi\circ u\circ s \\
&= (i\otimes\mathrm{id}_{Y^*})\circ\mathrm{pr}_Y\circ\mathrm{coev}_{X,Y} = (i\otimes\mathrm{id}_{Y^*})\circ\mathrm{coev}_Y
\end{aligned}$$

并且，以类似的方式，$(p\otimes\mathrm{id}_{Z^\vee})\circ\eta_Z = (\mathrm{id}_X\otimes j)\circ$余求值$_X$。

A.6.3. 求值映射的构造。 通过以与之前不同的顺序对正合列（A.10）和（A.12）取张量积，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} X^*\otimes Y & \xhookrightarrow{\mathrm{id}\otimes i} & X^*\otimes Z & \xtwoheadrightarrow{\mathrm{id}\otimes p} & X^*\otimes X \\ {\scriptstyle j\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle j\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle j\otimes\mathrm{id}}\downarrow \\ Z^\vee\otimes Y & \xhookrightarrow{\mathrm{id}\otimes i} & Z^\vee\otimes Z & \xtwoheadrightarrow{\mathrm{id}\otimes p} & Z^\vee\otimes X \\ {\scriptstyle q\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle q\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle q\otimes\mathrm{id}}\downarrow \\ Y^*\otimes Y & \xhookrightarrow{\mathrm{id}\otimes i} & Y^*\otimes Z & \xtwoheadrightarrow{\mathrm{id}\otimes p} & Y^*\otimes X \end{array} \tag{A.19}$$

由引理 A.8 以及 X 和 Y的平坦性可知，该图表（A.19）的各列正合。由引理 A.7 应用于 $A = X^*$、$Z^\vee$、Y^*可知，（A.19）的各行正合。

我们计算正合列的拉回

$$0 \to (X^*\otimes X)\oplus(Y^*\otimes Y) \to \mathrm{Coker}(j\otimes i) \to Y^*\otimes X \to 0$$

将引理 A.17 应用于图表（A.19），沿着态射 $\mathsf{ev}_{X,Y} := \mathrm{和}_{\mathbb{1}}\circ(\mathrm{ev}_X\oplus \mathrm{ev}_Y)$ 得到该正合列。通过与得到交换图表（A.16时相反的对偶论证，我们得到如下各行正合的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (X^*\otimes X)\oplus(Y^*\otimes Y) & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{Coker}(j\otimes i) & \longrightarrow & Y^*\otimes X & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \mathrm{ev}_{X,Y}}\downarrow & (\mathrm{PO}) & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{1} & \xrightarrow[r']{} & E' & \longrightarrow & Y^*\otimes X & \longrightarrow & 0 \\ & & & \overset{s'}{\curvearrowleft} & & & & & \end{array}$$

这里，s' 是 r'的截面。现在我们设

$$\varepsilon_Z : Z^\vee\otimes Z \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}(j\otimes i) \xrightarrow{u'} E' \xrightarrow{s'} \mathbb{1}. \tag{A.20}$$

A再次通过对偶论证，我们可知下图是交换的：

$$\begin{array}{ccccc} Z^\vee\otimes Y & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes i} & Z^\vee\otimes Z & \xleftarrow{j\otimes\mathrm{id}} & X^*\otimes Z \\ {\scriptstyle q\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes p} \\ Y^*\otimes Y & \xrightarrow{\mathrm{ev}_Y} & \mathbb{1} & \xleftarrow{\mathrm{ev}_X} & X^*\otimes X \end{array} \tag{A.21}$$

A.6.4. 验证之字形关系。 我们通过（$\eta_Z :\ \mathbb{1}\to Z\otimes Z^\vee$ 和$\varepsilon_Z :\ Z^\vee\otimes Z\to\mathbb{1}$）以及（A.17）和（A.20）分别定义了态射。我们令

$$\xi = (\varepsilon_Z\otimes \mathrm{id}_{Z^\vee})(\mathrm{id}_{Z^\vee}\otimes\eta_Z) \quad \text{and} \quad \zeta = (\mathrm{id}_Z\otimes\varepsilon_Z)(\eta_Z\otimes\mathrm{id}_Z),$$

并旨在证明 ξ 和 ζ 均可逆。为证明 ξ 可逆，我们考察图4。图中标有“(nat.)”的单元格根据幺半积的自然性构成交换图。因此，该图是交换图，并可缩减为以下具有正合行的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X^* & \xhookrightarrow{j} & Z^\vee & \xtwoheadrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & X^* & \xhookrightarrow{j} & Z^\vee & \xtwoheadrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

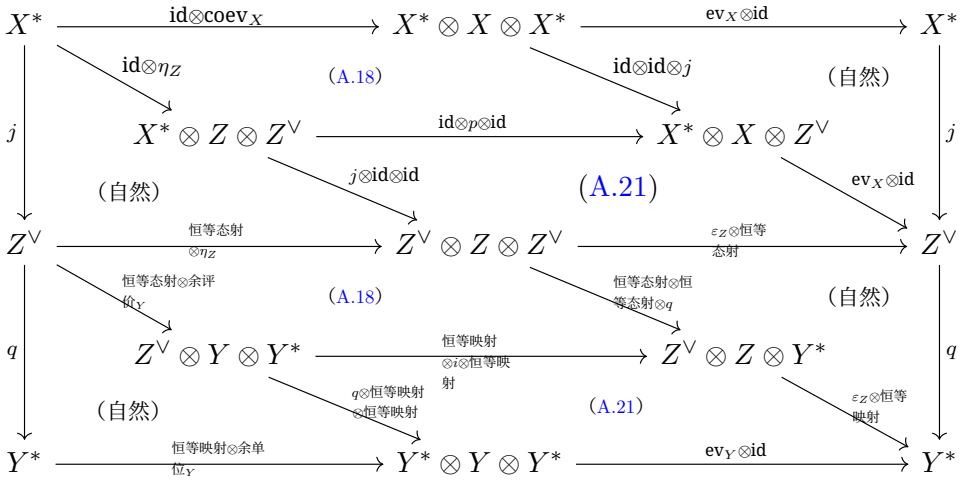


FIGURE 4. 之字形方程的证明

根据五引理， ξ 可逆。类似的论证表明 ζ 也可逆（这部分的细节见 [EP26]）。因此，根据引理 A.3， Z 是左刚性的。证明完毕。

A.7. **引理的证明 A.1 (2).** 我们给出引理A.1(2) 的证明。假设 X 和 Z 是左刚性的。

我们定义 $Y^\vee = \mathrm{Coker}(p^*\colon X^* \to Z^*)$，并将商态射记为 $\pi\colon Z^* \to Y^\vee$。由于 X 是左平坦的，我们有一个正合列

$$0 \longrightarrow Y\otimes Y^\vee \xrightarrow{i\otimes\mathrm{id}} Z\otimes Y^\vee \xrightarrow{p\otimes\mathrm{id}} X\otimes Y^\vee \longrightarrow 0$$

根据引理 A.7，我们令 $\xi = (\mathrm{id}_Z\otimes\pi)\mathrm{coev}_Z$。由于 $\pi p^* = 0$，我们有

$$(p\otimes\mathrm{id}_{Y^\vee})\xi = (p\otimes\pi)\mathrm{coev}_Z = (\mathrm{id}_X\otimes\pi p^*)\mathrm{coev}_X = 0.$$

因此， ξ通过 $\mathrm{Ker}(p\otimes\mathrm{id}_{Y^\vee})$ 分解，而它等于 $\mathrm{Im}(i\otimes\mathrm{id}_{Y^\vee})$。由于 $i\otimes\mathrm{id}_{Y^\vee}$是单态射，存在一个态射 $\eta_Y\colon \mathbb{1}\to Y\otimes Y^\vee$ in $\mathcal{C}$，使得

$$(i\otimes\mathrm{id}_{Y^\vee})\circ\eta_Y = (\mathrm{id}_Z\otimes\pi)\circ\mathrm{coev}_Z. \tag{A.22}$$

此外，还有一个正合列

$$X^*\otimes Y \xrightarrow{p^*\otimes\mathrm{id}} Z^*\otimes Y \xrightarrow{\pi\otimes\mathrm{id}} Y^\vee\otimes Y \longrightarrow 0.$$

我们令 $\zeta = \mathrm{ev}_Z(\mathrm{id}_{Z^*}\otimes i)$。由于 $\zeta(p^*\otimes\mathrm{id}_Y) = \mathrm{ev}_X(\mathrm{id}_{X^*}\otimes p\circ i) = 0$， ζ的核包含 $p^*\otimes\mathrm{id}_Y$ 的像，而该像等于 $\pi\otimes\mathrm{id}_Y$的核。因此，存在一个态射$\varepsilon_Y\colon Y^\vee\otimes Y\to\mathbb{1}$ in $\mathcal{C}$ 使得

$$\varepsilon_Y\circ(\pi\otimes\mathrm{id}_Y) = \mathrm{ev}_Z\circ(\mathrm{id}_{Z^*}\otimes i). \tag{A.23}$$

根据（A.22）、（A.23）和引理 A.4，我们有

$$i\circ(\mathrm{id}_Y\otimes\varepsilon_Y)\circ(\eta_Y\otimes\mathrm{id}_Y) = i, \quad (\varepsilon_Y\otimes\mathrm{id}_{Y^\vee})\circ(\mathrm{id}_{Y^\vee}\otimes\eta_Y)\circ\pi = \pi.$$

由于 i 是单态射且 π 是满态射，我们得出结论：$(Y^\vee,\ \varepsilon_Y,\ \eta_Y)$ 是 Y 的左对偶对象。证明完毕。

A.8. **引理的证明 A.1 (3).** 我们来证明引理 A.1 (3)。设 Y 和 Z 是左刚性的，并且 $i^*\colon Z^* \to Y^*$ 在 $\mathcal{C}$ 中是满态射。

我们定义 $X^\vee = \text{核}(i^*)$，并将 $\iota : X^\vee \to Z^*$ 记为包含态射。由于 i^* 是满态射，我们得到正合列 $0 \to X^\vee \xrightarrow{\iota} Z^* \xrightarrow{i^*} Y^* \to 0$。注意，$Y^*$ 是右平坦的，因为它有一个右对偶对象 Y。因此，由引理 A.7，我们得到以下正合列：

$$0 \longrightarrow X \otimes X^\vee \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \iota} X \otimes Z^* \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes i^*} X \otimes Y^* \longrightarrow 0.$$

由于 $(\mathrm{id}_X \otimes i^*)(p \otimes \mathrm{id}_{Z^*})\mathrm{coev}_Z = 0$，态射 $(p \otimes \mathrm{id}_{Z^*})\mathrm{coev}_Z$ 通过 $\mathrm{id}_X \otimes i^*$的核分解，而该核等于 $\mathrm{id}_X \otimes \iota$的像。由于 $\mathrm{id}_X \otimes \iota$ 是单态射，存在一个态射$\eta_X\colon \mathbb{1} \to X \otimes X^\vee$，使得

$$(\mathrm{id}_X \otimes \iota) \circ \eta_X = (p \otimes \mathrm{id}_{Z^*}) \circ \mathrm{coev}_Z. \tag{A.24}$$

还有一个正合列 $X^\vee \otimes Y \to X^\vee \otimes Z \to X^\vee \otimes X \to 0$。根据第 (2) 部分的证明中相同的论证，我们得到一个态射 $\varepsilon_X\colon X^\vee \otimes X \to \mathbb{1}$ in $\mathcal{C}$，满足以下等式：

$$\varepsilon_X \circ (\mathrm{id}_{X^\vee} \otimes p) = \mathrm{ev}_Z \circ (\iota \otimes \mathrm{id}_Z). \tag{A.25}$$

由（A.24）、（A.25）和引理 A.4，我们得出（$X^\vee$，ε_X，η_X）是 X 的左对偶对象。证明完毕。

References

[ACE15] Nicol´as Andruskiewitsch、Juan Cuadra Carre˜no 和 Pavel Etingof。关于具有非零积分的 Hopf 代数的两个有限性条件。 *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di scienze*，14(2):401–440，2015。[AR18] Jean Auger 和 Matt Rupert。关于顶点算子代数的无限阶单流扩张。*Vertex algebras and geometry*，711:143–168，2018。[CEO24] Kevin Coulembier、Pavel Etingof 和 Victor Ostrik。不可压缩张量范畴。 *Advances inMathematics*，457:109935，2024。[CGPM14] Francesco Costantino、NathanGeer 和 Bertrand Patureau-Mirand。通过链环手术表示和非半单范畴研究三维流形的量子不变量。 *Journal of Topology*，7(4):1005–1053，2014。[CKM24] Thomas Creutzig、Shashank Kanade 和 Robert McRae。 *Tensor categories for vertex operator super-algebra extensions*，第295卷。美国数学学会，2024。[CMY22a] Thomas Creutzig、Robert McRae 和 Jinwei Yang。顶点张量范畴的直接极限完备化。 *Communications in Contemporary Mathematics*，24(02):2150033，2022。[CMY22b] Thomas Creutzig、Robert McRae 和 Jinwei Yang。仿射 $\mathfrak{gl}(1|1)$的 Kazhdan–Lusztig范畴上的张量结构。 *International Mathematics Research Notices*，2022(16):12462–12515，2022。[CR22] Thomas Creutzig 和 Matthew Rupert。展开量子群的展开。 *Communications in Con-temporary Mathematics*，24(04):2150023，2022。[Del02] Pierre Deligne。张量范畴。 *Moscow Mathematical Journal*，2(2):227–248，2002。[DGNO10] Vladimir Drinfeld、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。关于编织融合范畴 I。 *Selecta Mathematica*，16:1–119，2010。[DLM96] Chongying Dong、Haisheng Li 和 Geoffrey Mason。单流与顶点算子代数的扩张。 *Communications in Mathematical Physics*，180(3):671–707，1996。[EGNO16] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。 *Tensor categories*，第205卷。美国数学学会，2016。[EML54] Samuel Eilenberg 和 Saunders Mac Lane。群 $H(\Pi, n)$，II：计算方法。 *Annalsof Mathematics*，60(1):49–139，1954。[EP26] Pavel Etingof 和 David Penneys。编织范畴中适度增长的非可忽略对象的刚性。 *Forum of Mathematics, Pi*，14:e7，2026。

[FFRS06] J¨urg Fr¨ohlich、J¨urgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert。带状范畴之间的对应。 *Advances in Mathematics*，199(1):192–329，2006。[FRS04] J¨urgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert。RCFT关联函数的拓扑场论构造：III：单流。 *Nuclear Physics B*，694(3):277–353，2004。[Gal26] C´esar Galindo。关于二次型的 Eilenberg–Mac Lane 同构的注记。 *Proceedings of the American Mathematical Society*，2026。[GY25] Nathan Geer 和 Matthew B Young。由$U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$和 $U(1|1)$陈–西蒙斯理论得到的三维拓扑量子场论。 *Advances in Mathematics*，460:110044，2025。[HKJL15] 黄意志、Alexander Kirillov Jr 和 James Lepowsky。编织张量范畴与顶点算子代数的扩张。 *Communications in Mathematical Physics*，337(3):1143–1159，2015。[Iov06] Miodrag Cristian Iovanov。何时 $\prod$ 同构于 $\bigoplus$。 *Communications in Algebra*，34(12):4551–4562，2006。[JS93] Andr´e Joyal 和 Ross Street。编织张量范畴。 *Advances in Mathematics*，102(1):20–78，1993。[KJO02] Alexander Kirillov Jr 和 Viktor Ostrik。关于 McKay 对应的 q 类比以及 sl_2共形场论的 ADE分类。 *Advances in Mathematics*，171(2):183–227，2002。[KS06] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira。《范畴与层》。 *Grundlehren der mathematischen Wis-senschaften*，332，2006。[Par95] Bodo Pareigis。关于编织与阅读障碍。 *Journal of Algebra*，171(2):413–425，1995。[Rup22] Matthew Rupert。单位根处展开限制量子群的权模范畴。*Izvestiya: Mathematics*，86(6):1204–1224，2022。[SS23] Taiki Shibata 和 KENICHI SHIMIZU。余代数的中山函子及其在 Frobenius 张量范畴中的应用。 *Advances in Mathematics*，419:108960，2023。[SY89] Adrian Norbert Schellekens 和 Shimon Yankielowicz。由单流得到的模不变量：一个显式证明。 *Physics Letters B*，227(3-4):387–391，1989。[SY24] KENICHI SHIMIZU 和 HARSHIT YADAV。交换精确代数与模张量范畴。 *arXivpreprint arXiv:2408.06314*，2024。[Wig18] Ender Wiggins。阿贝尔幺半范畴中的可对偶对象类是否对直和、核和余核封闭？数学 Stack Exchange，2018。网址：https://math.stackexchange.com/q/2864242（版本：2018-08-28）。

Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology, 307 Fukasaku, Minuma-ku, Saitama-shi, Saitama 337-8570, Japan*Email address*: kshimizu@shibaura-it.ac.jp

Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, AB, Canada T6G 2G1
Email address: hyadav3@ualberta.ca