arXiv:2603.28228v1 [math.GR] 30 Mar 2026

可 amenable 子群空间上的平稳边界与 C*-单纯性

´ANNA CASCIOLI、MARTIN GILABERT VIO 和 EDUARDO SILVA

Abstract. 我们给出了一个充分条件，使可数群 G拥有一个概率测度 μ，该测度承认一个非平凡的 μ-边界，此边界以群 G 的可 amenable 子群空间 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 为模型。特别地，对于这样的 μ，空间 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 并非唯一μ-平稳。这与 Hartman-Kalantar 的定理形成对照；该定理指出，可数群 G 是 C*-单的，当且仅当存在 $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$，使得 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 是唯一 μ- 平稳的 [HK23]。我们的判据适用于（置换）缠绕积，其中包括 C*- 单群；也适用于 Thompson 群 F，其 C*-单纯性等价于其非可解性，因此仍是一个未决问题。我们还证明，任何以 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 为模型的非平凡 μ-边界，都支撑在可 amenable 的近正规子群上，其意义取自 Breuillard-Kalantar-Kennedy-Ozawa [BKKO17]。由此我们得出结论：没有有限正规子群且没有可 amenable 的近正规子群的可数群，在其所有泊松边界上都本质自由地作用。

1. Introduction

离散可数群 G的子群空间 Sub(G) 可自然地识别为 $\{0,1\}^G$ 的一个闭子集，并赋予乘积拓扑。由此诱导的拓扑称为 ***Chabauty*** 拓扑，使 $\mathrm{Sub}(G)$ 成为紧致可度量空间，而 G 对子群的共轭作用则诱导出同胚作用 $G \curvearrowright \mathrm{Sub}(G)$。研究这一动力系统时，一个核心对象是 Sub(G) 上 G不变的概率测度类，它们称为 不变随机子群(IRS)。不变随机子群的重要应用包括刚性结果，例如 Stuck–Zimmer 定理 [SZ94]，关于半单李群 L^2的 [-Betti 数的逼近结果 +17]，以及群的平稳作用的熵谱实现 [Bow15，HY18]。

可 amenable 子群的集合 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 在 $\mathrm{Sub}(G)$ 中是闭的，研究 $G \curvearrowright \mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 动力学的一个原因，是它与 G 的 C*-单纯性有关。若一个可数群 G 的约化 C*-代数 $C_r^*(G)$ 不含非平凡闭理想，则称该群为 C*- 单的。这里， G 的约化 C*- 代数 $C_r^*(G)$ 是 G 在 $\ell^2(G)$ 上的左正则表示所定义的酉算子线性张成空间的范数闭包。这一性质已从算子代数和群论的角度得到广泛研究 [Pow75, BCdlH94]。M. Kennedy [在与 Breuillard-Kalantar-Ozawa [合作开展研究后得到的一项结果 20], Ken17]，表明，可数群 G 是 C*-单的，当且仅当 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 唯一的极小闭不变子集由平凡子群 $\{e_G\}$构成。

前述判据的可测版本表述涉及平稳概率测度，而非不变概率测度。回忆一下，概率测度 $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$

若其支撑生成的半群恰为 G，则称其为非退化的；在概率空间 (Z,η) 上， G 的可测作用称为 μ-平稳的，如果 $\eta = \sum_{g\in G}\mu(g)g_*\eta$。$\mathrm{Sub_{am}}(G)$ 上的 μ-平稳概率测度称为 amenable μ-平稳随机子群（或 amenable μ-SRS）。事实证明，这一概念对于刻画可数群的 C*-单纯性很有用。Hartman-Kalantar [HK23], 证明，可数群 G 是 C*-单的，当且仅当存在一个非退化概率测度 $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$，使得 $\mathrm{Sub_{am}}(G)$ 上存在唯一的 μ-平稳概率测度（而且它必定是 $\delta_{\{e_G\}}$）。换言之，C*-单纯群拥有能够见证其 C*-单纯性的特殊概率测度。本文探讨具有相反性质的概率测度是否存在。

问题 1. 设 G 是一个可数群。是否存在一个非退化概率测度 μ 定义在 G 上，使其存在一个不同于 $\delta_{\{e_G\}}$的可 amenable μ-平稳随机子群?

正如 [HK23], 所指出的，若 G 不是 C*-单的，那么每个非退化概率测度 μ 在 G 上都具有上述性质。因此，问题1只有在 G是 C*-单时才值得关注。此外，Hartman-Kalantar 证明，存在一些 C*-单群类，其中没有任何概率测度 μ能产生一个可 amenable μ-平稳随机子群，使其不同于 $\delta_{\{e_G\}}$。当这些群的可 amenable 根（即其极大正规可 amenable 子群）是平凡群时，双曲群、映射类群和线性群都满足这一点[HK23，定理4.12、6.5和6.7，例6。6], 这一讨论提示了一种 C*-单纯性的分级概念：不允许存在非平凡可 amenable μ-平稳随机子群的群，可以被视为“更加”C*-单，因为它们在 $\mathrm{Sub_{am}}(G)$ 上的平稳动力学受到严格约束。

我们的结果涉及以下一类可 amenable SRS。

定义 1.1. 设 μ 是可数群 G 上的一个概率测度，并用 $\mathbb{P}_\mu$ 表示在 G 上由 μ 驱动的右随机游走的分布。若可 ***amenable*** 子群空间 $\mathrm{Sub_{am}}(G)$ 上的一个 μ-平稳概率测度 η 满足：对于 $\mathbb{P}_\mu$-几乎每条轨迹 $(w_n)_{n\geq 0}\in G^{\mathbb{N}}$，序列 $(w_{n*}\eta)^{n\geq 0}$ 在弱*-拓扑下收敛到 $\mathrm{Sub_{am}}(G)$ 中的一个狄拉克质量，则称其为一个可 amenable 边界 μ- 平稳随机子群 。

等价地，若空间 $(\mathrm{Sub_{am}}(G)\ \eta)$ 是一个 μ-边界，即它是 (G,μ) 的泊松边界的一个 G-等变商，则 η 是一个可 amenable 边界 μ-SRS。我们的第一个主要定理给出了一个保证此类测度存在的条件。

定理 A. 设 G 是一个可数群。假设存在一个非平凡子群 H，使得对于所有有限子集 Q、$Z\subseteq G$，都存在 $b\in G$，使得 bZ 和 $b^{-1}Z$ 均包含于

$$\left\{g\in G : Q\cap H = Q\cap gHg^{-1}\right\}.$$

那么存在一个非退化、对称且有限熵的概率测度 μ在 G 上，使得 $\mathrm{Orb}_G(H)$ 支撑一个不同于 $\delta_{\{e_G\}}$ 的 μ-边界 ***SRS***。

特别地，如果 H 是可 ***amenable*** 的，那么 G 就存在一个与 $\delta_{\{e_G\}}$不同的 ***amenable*** 边界 μ-***SRS***。

陈述中出现的条件可以看作是 G 在 H 的轨道上的作用的强回归形式（见注 3.8）。我们用来构造 μ的策略，是 Frisch-Hartman-Tamuz-Vahidi Ferdowsi [FHTVF19]用于证明任意非超双曲 FC 中心群都存在具有非平凡泊松边界的非退化概率测度的方法，即记录时刻法。

在命题 3.2中，我们还为花环积给出了一个更简短、更直接的论证，这与定理 A的一般证明不同。回想一下，若 A 是 C*-简单群，那么对于任意可数群 B，缠绕积 $A \wr B = \bigoplus_B A \rtimes B$ 都是 C*-单的。命题 3.2 给出了一些 C*-单群的例子：对于这些群，任何能够证明其 C*-单纯性的概率测度（如 [HK23] 的主要定理中所述）都必然具有无限支撑（见推论3.3）。据我们所知，这是首批此类例子。A. Erschler 和 J. Frisch 告知我们，他们独立得出了命题3.2。

定理 A 中的判据适用于 Thompson 群 F，即由分段二进仿射区间同胚构成的群。

推论 B. 存在 *Thompson* 群 F 上的一个非退化、对称且具有有限熵的概率测度 μ，使得 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{ab}}(F) = \{H \in \mathrm{Sub}(F)\ H$ 为阿贝尔群$\}$支撑一个非原子的 μ-边界。

备注。

- Sub(F) 的极小闭子系统和群 F 的不变随机子群均支撑在正规子群上（分别见 [LBM18, 定理 1.7, (i)] 和 [DM14] ），这些子群都包含 F 的（非阿贝尔）导出子群 $[F, F]$。推论 B 表明，尽管如此，Subam(F) 的动力学仍足够丰富，能够支撑非平凡的 μ-平稳随机子群。群论中一个著名的未解问题是， F 是否可 amenable [CFP96], ；根据 [LBM18, 定理 1.6], 这等价于 F 不是 C*-单的。如果 F 非可 amenable，那么 F 就属于一类 C*-单纯群，其可 amenable 子群动力学比双曲群或映射类群更加丰富。

- 推论 B 的证明可逐字适用于由 Lodha-Moore 构造的群 $\mathbb{R}$的分段射影同胚所组成的有限表示非可 amenable 群[LM16], ，该群已知是 C*-单的 [LBM18，定理 1。10]。

回顾一下，若子群 H 属于 G，则称其为近正规子群，$\bigcap_{z\in Z} zHz^{-1}$ 如果对于每个有限子集 $Z \subseteq G$，其交集都是无限的。这一概念由 [BKKO17第 6], 节提出，其中证明了不存在近正规子群意味着 C*-单纯性。我们的第二个主要定理将这一概念与问题 1联系起来。

定理 C。令 μ 为可数群 G 上的非退化概率测度，并令 η 为定义在 $\mathrm{Sub}(G)$上的 μ-平稳概率测度。假设 $(\mathrm{Sub}(G)\ \eta)$ 是 G的一个 μ-边界，并且 η 不是某个有限正规子群上的狄拉克质量。则 η支撑在 G的近正规子群上。

因此，我们得到以下结果。

推论 D. 设 G 是一个没有有限正规子群且没有可 *amenable* 的正规样子子群的可数群。那么，对于每个非退化的 $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$， G 在(G,μ) 的泊松边界上的作用都是本质自由的。

事实上，可数群 群 G 在其泊松边界上的作用是可 amenable 的 [Zim78，推论 5.3]; 另见 [Kai05，定理 5.2] ，其中给出了概率论证明。Elliot-Giordano 证明了，可和作用的点稳定子几乎处处都是可 amenable 的 [EG93，命题 1.2], ，因此稳定子映射 $z \mapsto \mathrm{Stab}(z)$ 从 (G,μ) 的泊松边界映射到 $\mathrm{Sub}(G)$，其值落在 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 中（另见 [ADR00，推论 5.3.33]）。因此，稳定子映射定义了一个可 amenable 边界 μ-SRS 于 G上。如果 G在(G,μ) 的泊松边界上的作用不是本质自由的，定理 C 将表明 G 存在一个可和近正规子群，这与该推论的假设相矛盾。

没有可 amenable 的近正规子群的群包括具有正 L^2-贝蒂数的群 [BFS14，推论 1。5], 具有某种非平凡有界上同调（混合系数）的群，以及具有有限可 amenable 根的线性群[BKKO17，命题 6.3 和 6。4]。这些结论适用于

- 在树、CAT(-1) 空间或有界价格罗莫夫双曲图上具有非初等、等距且适当作用的可数群 [MS06，定理 1。3], [MS04，推论 7.6 和 7.8，定理 7。13], [MMS04，定理 3],
- 拟双曲群 [Osi16，推论 1。5],以及
- 在有限维不可约 CAT(0) 立方复形上具有非初等、度量适当且本质的作用的可数群 [CFI16，推论 1。8]。

备注。

- 定理C应与以下结果进行比较： [HK23，第 6], 节中证明，若干类群不存在具有 μ 非平凡可 amenable μ-SRS 的概率测度。其结论更强，因为它们排除了 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 上任何非平凡 μ-平稳测度的存在，包括那些可能并非可 μ-边界的测度。相比之下，定理C 所涵盖的群类更广，其证明基于一个统一论证，适用于陈述中出现的所有群。
- 沿袭 [HK23，定理 5。4], A. Alpeev 证明，群 G 是 C*-单的，当且仅当对于 G 上的一个泛型概率测度（按贝尔范畴意义），群 G在相应的泊松边界上本质自由地作用 [Alp25，定理 B]。推论D 给出了明确的假设，在这些假设下，每个概率测度都具有这一性质，而不仅仅是贝尔泛型的子集。

最后，在第 4 节中，我们指出不应期待定理C有逆命题。更确切地说，我们证明，许多 Baumslag-Solitar 群拥有可 amenable 的正规样子子群，但其可 amenable 子群空间是可数的。因此，对于任意非退化的 μ-SRSs，它们都不具有非平凡的可 amenable μ，参见推论4.1。特别是，BS(2,3) $= \langle a, t \mid ta^2t^{-1} = a^3 \rangle$便是如此。证明用到了 Y. Cornulier 的一项未发表结果 [Cor]。

1.1. **结构安排**。 第 2 节回顾群的边界作用的基本性质及其与 C*-单纯性的联系。我们还会讨论本文的结果和进一步的问题。第 3 节通过证明展示边界 SRS 的存在性，尤其是定理 A的证明。最后，在第 4 节中，我们证明定理 C ，并证明许多 Baumslag-Solitar 群拥有可 amenable 的正规样子子群，但没有可 amenable 的 μ-SRS。

致谢。我们感谢 Yair Hartman、Mehrdad Kalantar 和 Nicol´as Matte Bon 在本项目不同阶段提供的反馈。Anna Cascioli 和 Eduardo Silva 感谢 Sam Mellick 进行的有益讨论，并感谢德国研究联合会（DFG）根据德国卓越战略提供的支持，资助项目为 EXC 2044/2 –390685587，M¨unster 数学中心：动力学–几何–结构。Mart´ın Gilabert Vio 感谢 Sasha Bontemps、Damien Gaboriau 和 Adrien Le Boudec 进行的有益讨论，并感谢 ECOS 项目 23003“作用下的小空间”提供的支持。

2. 背景与讨论

我们介绍随机游走、平稳边界以及群的子群空间的一些背景知识。关于这些内容的更多细节，请参阅 [Fur02，LBM18] 。我们还将讨论 C*-单测度以及进一步的问题。本节中， G始终表示一个可数群。

随机游走与平稳空间。 设 μ 是 G上的一个概率测度。 μ 的香农熵是非负量 $H(\mu)$ $= -\sum_{g\in G}\mu(g)\log\ \mu(g)$。我们用 $\mathbb{P}_\mu$ 表示由 μ定义的右随机游走$\mathbf{w}$ $=(w_n)_{n\geq 0}\in G^{\mathbb{N}}$ 的分布，也就是说，它是伯努利测度 $\mu^{\mathbb{N}}$ 经映射

$$G^{\mathbb{N}}\to G^{\mathbb{N}}$$
$$(g_n)_{n\geq 0}\mapsto (w_n)_{n\geq 0}$$

其中，对每个 $n\geq 1$， $w_n=g_1\cdots g_n$。空间 $G^{\mathbb{N}}$ 赋有 G 通过乘法定义的左作用，因此对所有 $g\in G$ 和$(w_n)_{n\geq 0}\in G^{\mathbb{N}}$，有 $g(w_n)_{n\geq 0}=(gw_n)_{n\geq 0}$ 。

设 X 是一个紧致度量空间， G 通过同胚作用于其上。若博雷尔概率测度 η 满足 $\eta=\sum_{g\in G}\mu(g)g_*\eta$，则称其为 X 上的 μ-平稳测度。鞅收敛定理保证，几乎处处（相对于 $\mathbb{P}_\mu$），极限 $\lim_{n\to\infty}(w_n)_*\eta=\eta_{\mathbf{w}}$ 在 Prob(X) 中存在。当 $\eta_{\mathbf{w}}$ 几乎处处（相对于 $\mathbb{P}_\mu$）是狄拉克质量时，我们称概率空间(X,η)为 G的一个 μ-边界。在此情形下，我们得到一个 G-等变且 S-不变的映射$(G^{\mathbb{N}},\mathbb{P}_\mu)\to(X,\eta)$，其中 $S\colon G^{\mathbb{N}}\to G^{\mathbb{N}}$是移位映射 $S((w_n)_{n\geq 0})=(w_{n+1})_{n\geq 0}$。反过来，若存在 $x\in X$ 使得几乎处处（相对于 $\mathbb{P}_\mu$），$\lim_{n\to\infty}w_nx$ 在 X中存在，则$\lim_{n\to\infty}w_nx$ 的分布是 μ-平稳的，并在 X上定义一个 μ-边界。文献有时将 μ-边界称为 μ-近端系统 [FG10]。

为滥用记号，对于一个由 G 通过非奇异可测变换作用的概率空间 $(X,\ \eta)$，若它是 μ- 平稳的，且存在一个紧致可度量模型，该模型在上述意义下是一个 μ- 边界，则也称其为 μ-边界。$(G,\ \mu)$ 的 泊松边界 是 G 的最大 μ-边界，意即任何其他此类空间

都是它的一个 G-等变商。它在 G-等变可测同构意义下唯一确定。

我们将使用以下著名结果，它是μ-边界遍历性的推论。

命题 2.1. 设 μ 是可数群 G 上的概率测度， G 通过同胚作用于紧致度量空间 X。设 (X,η) 是 G 的一个 μ-边界。若 η 是 G-不变的，或者 η 含有原子，则 η 是集中于 X 中某个不动点的狄拉克质量，该点在 G 的作用下保持不变。

证明。 首先，假设 η 是 G-不变的。由于对于 $\mathbb{P}_\mu$-几乎处处的 $\mathbf{w}=(w_n)_{n\geq 0}$，存在一个元素 $\xi(\mathbf{w})\in X$，使得 $\lim_{n\to\infty}(w_n)_*\eta=\delta_{\xi(\mathbf{w})}$，我们推得 η 是集中于 X 上由 G 的作用固定的不动点的狄拉克质量。

现在假设 η 有原子。考察 X 中具有最大 η-测度的点，我们推得 η 在一个有限的 G-轨道 $\mathcal{O}$上赋予正质量。 η 的遍历性（见[Jaw94，例如第 2], 节）意味着它将全部质量赋予 $\mathcal{O}$，因而是不变的。根据前一种情形， η 必定是在某个不动点上的狄拉克质量。 □

Hartman-Kalantar 对 C*-单纯性的刻画。将群 G 的左正则表示记作 $\lambda: G\to\mathcal{U}(\ell^2(G))$。回顾一下，约化 C*-代数 $C_r^*(G)$上的态是一个正线性泛函 $\rho: C_r^*(G)\to\mathbb{C}$，满足 $\rho(\lambda_{e_G})=1$。典范迹 τ_0 是约化 C*- 代数 $C_r^*(G)$ 上的态，满足对所有 $g\in G\setminus\{e_G\}$， $\tau_0(\lambda_g)=0$。群 G 在态 ρ 上的作用定义为，对于每个 $g\in G$，$(g\rho)(a)=\rho(\lambda_{g^{-1}ag})$；给定定义在 G上的概率测度 μ，若态 ρ 满足 $\rho=\sum_{g\in G}\mu(g)g\rho$，则称其为 μ-平稳态。由于典范迹在群 G的作用下不变，因此对于每个 $\mu\in\mathrm{Prob}(G)$，它都是 μ-平稳的。

Hartman-Kalantar 将 C*-单测度定义为群 G 上的概率测度 μ，使得典范迹是 $C_r^*(G)$ 上唯一的 μ-平稳态 [HK23，第 4] 页顶部的定义。他们的第一个主要定理指出，可数群 G 是 C*-单的，当且仅当 G 具有 C*-简单概率测度 [HK23，定理 5.2]。他们的第二个主要定理表明，可数群 G 是 C*-单的，当且仅当 G 存在一个概率测度 μ，使得可 amenable 子群空间 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 具有唯一的μ-平稳性 [HK23，推论 5.7]。 [HK23] 中证明并使用了以下两个唯一平稳性概念之间的蕴含关系。

命题 2.2。 设 μ 是可数群 G 上的概率测度。假设$\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 存在一个不同于 $\delta_{\{e_G\}}$ 的 μ-*SRS*。那么，约化 *C**-代数 $C_r^*(G)$ 上的态空间不具有唯一的 μ-平稳性。

*Pro*关于。 设 η 是一个可 amenable μ-SRS，且不同于 $\delta_{\{e_G\}}$。根据 [HK23，引理 2。3], ma p

$$\rho(\lambda_g):=\eta\left(\{H\in\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G):g\in H\}\right),\ g\in G,$$

可扩展为 ρ 上的态 $C_r^*(G)$。此外，由于 η 是 μ-平稳的，且不同于$\delta_{\{e_G\}}$，态 ρ 是 μ-平稳的，并且不同于典范迹。□

我们在定理 A 中关于概率测度存在性的判据 $\mu\in\mathrm{Prob}(G)$ 满足 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 不唯一地 μ-平稳，因此表明这些测度并非

Hartman–Kalantar 意义下的 C*-单。然而，我们指出，目前尚不清楚命题 2.2 的逆命题是否成立。原则上，可能存在概率测度 μ于 G ，它们并非 C*-单，尽管 Sub$_{\mathrm{am}}(G)$ 是唯一地 μ-平稳的。

2.1. **非 μ-边界的平稳随机子群**。 设 μ 是可数群 G上的一个概率测度。本文所有结果均涉及可 amenable 的 μ-平稳随机子群，且空间 (Sub$_{\mathrm{am}}(G)$ η) 是一个 μ-边界（见定义 1.1）。根据 H. Furstenberg [Fur73，定理 14。1] 以及 Glasner-Weiss [GW16，定理 8。5]的研究，若G 通过同胚作用于紧致度量空间 X，则以下条件等价：

- 对于每个 μ-平稳概率测度 ν （定义在 X 上），空间 (X, ν) 都是一个 μ-边界。
- 存在唯一的 μ-平稳概率测度 ν （定义在 X 上），且空间 (X, ν) 是一个 μ-边界。

特别是，当 X =Sub$_{\mathrm{am}}(G)$ 时，问题 1 询问是否存在定义在 G上的概率测度 μ ，使得 Sub$_{\mathrm{am}}(G)$ 不是唯一的 μ-平稳概率测度。上述等价关系表明，在这种情形下，我们的方法无法识别所有可 amenable 的 μ-平稳随机子群，因为必然存在一些这样的子群并非源自 μ-边界 G。由此自然引出一个问题：定理 C能否推广到 G的任意平稳随机子群。

问题 2。 设 μ 是可数群 G 上的非退化概率测度，且 η 是 Sub(G) 上一个遍历的 μ-平稳概率测度，并非支撑在 G 的有限正规子群上的点质量。

- 是否成立： η 必须支撑在 G 的近正规子群上?
- 进一步假设 η 支撑在 G 的可 amenable 子群上。是否成立： G 的所有 L^2-贝蒂数都必须为零?

我们指出，若 η 是可数群 G 的不变随机子群，且支撑在其 L^2-贝蒂数均为零的子群上，那么已知对 G 也有相同结论。事实上，正如 Abert-Glasner-Virag 所示， G 的每个不变随机子群都可表示为 G 的一个保测概率作用在稳定子映射 [AGV14, 命题 13] 下的像。这在 [ST10, 第 5 节3] 的术语中产生了群胚的“主扩张”。由 [ST10, 引理 5.1] 可知，稳定子群胚的 L^2-贝蒂数为零。接着， [ST10, 定理 1.3] 表明，作用群胚 $G \curvearrowright$ (Sub(G) η) 的 L^2- 贝蒂数也为零，而这些数恰与 G 的 L^2- 贝蒂数相同（例如参见 [CGdlS21, 定理 5.4] ）。我们感谢 Sam Mellick 和 Damien Gaboriau 提请我们注意这一论证。

3. Existence of amenable boundary μ-stationary random subgroups

本节给出关于可数群中非平凡可 amenable 边界平稳随机子群存在性的结果。我们先简要证明关于缠绕积的一个结果（命题 3.2），该证明也为定理 A 的证明提供了动机；在该定理中，我们建立了一个保证这类子群存在的一般判据。随后，我们应用这一

判据于 Thompson 群 F （推论B）以及置换 wreath 积（推论 3.9）。

3.1. 花环积的一个简短证明。 设 A, B 为可数群。它们的花环积为 $A \wr B = \bigoplus_B A \rtimes B$, 其中 $\bigoplus_B A$ 表示有限支撑函数群 $\varphi : B \to A$，而 B 在 $\bigoplus_B A$ 上的作用定义为

$$(x \cdot \varphi)(y) = \varphi(x^{-1}y), \qquad x, y \in B.$$

因此， $A \wr B$中的乘法为 $(\varphi, b)(\psi, c) = \big(\varphi \cdot (b \cdot \psi)\ bc\big)$,其中 $(b \cdot \psi)(y) = \psi(b^{-1}y)$，对每个 b, $c \in B$ 以及 $\varphi, \psi \in \bigoplus_B A$均成立。

给定概率测度 $\mu \in \mathrm{Prob}(A \wr B)$， μ-随机游走 $\mathbf{w} = (w_n)_{n \geq 0}$在 $A \wr B$上可利用半直积结构写为 $w_n = (\varphi_n, b_n)$。这里， $\varphi_n \in \bigoplus_B A$称为时刻 n的灯配置，而 $b_n \in B$ 称为时刻 n 的位置。一般而言，$(\varphi_n)_{n \geq 0}$ 并不定义 $\bigoplus_B A$上的随机游走，而 $(b_n)_{n \geq 0}$ 是基群 B上的随机游走。

定义 3.1. 若存在一个轨迹的余零测集$\mathbf{w} = (\varphi_n, b_n)_{n \geq 0}$，使得对每个 $b \in B$，都存在 N，满足对所有 $n \geq N.$， $\varphi_n(b) = \varphi_N(b)$，则称 上 -随机游走的灯配置几乎必然稳定。

在此假设下，存在一个几乎处处定义的映射 $(A \wr B)^{\mathbb{N}} \to A^B$，它将 $\mathbb{P}_\mu$-几乎每条轨迹$\mathbf{w} = (\varphi_n, b_n)_{n \geq 0}$ 映射到极限灯配置$\varphi_\infty(\mathbf{w})$，其定义为

$$\varphi_\infty(\mathbf{w})(b) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(b), \qquad b \in B.$$

灯配置并不总是稳定的：对每个 $\varepsilon > 0$，都存在概率测度 μ，其具有有限的（$1 - \varepsilon$）阶矩，但稳定化失败 [Kai83]。然而，稳定化的一个充分条件是 μ 具有有限一阶矩，且其诱导的 B 上的随机游走是暂态 [Ers11]。若 B 是有限生成的，且增长至少为三次，则 Varopoulos 的一个定理 [Var86] 表明， 上的每个非退化概率测度 $A \wr B$ 都会在上诱导一个暂态随机游走 B。特别地，在这种情况下，可以选取 μ 为有限支撑。

命题 3.2。 设 A、B 是非平凡可数群，并设 μ 是 $A \wr B$ 上的非退化概率测度，使得 μ-随机游走的灯配置几乎必然稳定。则存在一个定义在 $\mathrm{Subam}(A \wr B)$ 上的测度 $\eta \neq \delta_{\{e\}}$，使得$(\mathrm{Subam}(A \wr B)\ \eta)$ 是一个 μ-边界。

此外，若 A 是非阿贝尔群，则 η 是非原子的。

证明。 固定 $a \in A \setminus \{e_A\}$。对于 $b \in B$ 和 $x \in A$，用 $\delta_b^x \in \bigoplus_B A$ 表示构型

n

$$\delta_b^x(y) = \begin{cases} x & y = b, \\ e_A & y \neq b \end{cases}$$

它在 b 处取值为 x，并在其他位置取单位元 e_A。令 $\mathbb{P}_\mu$ 为 μ-随机游走的分布。给定一条轨迹 $\mathbf{w} = (\varphi_n, b_n)_{n \geq 0}$，其极限灯配置为 $\varphi_\infty(\mathbf{w})$，定义

$$H(\mathbf{w}) = \left\langle \delta_b^{\varphi_\infty(\mathbf{w})(b) a (\varphi_\infty(\mathbf{w})(b))^{-1}} : b \in B \right\rangle \subseteq \bigoplus_B A.$$

也就是说，子群 $H(\mathbf{w})$ 是通过在每个位置 b 放置由极限灯值 $\varphi_\infty(\mathbf{w})(b)$ 共轭得到的元素 a 而获得的。映射 $\mathbf{w} \mapsto \varphi_\infty(\mathbf{w})$ 是 $A \wr B$-等变的。

设 $g = (\varphi, b') \in A \wr B$。那么

$$(g \cdot \varphi_\infty)(y) = \varphi(y)\, \varphi_\infty(b'^{-1} y), \text{ for each } y \in B.$$

因此

$$H(g\mathbf{w}) = \left\langle \delta_y^{\varphi(y)\varphi_\infty(b'^{-1}y) a (\varphi(y)\varphi_\infty(b'^{-1}y))^{-1}} : y \in B \right\rangle,$$

并且写作 $y = b'b$，可得

$$H(g\mathbf{w}) = \left\langle \delta_{b'b}^{\varphi(b'b)\varphi_\infty(b) a (\varphi(b'b)\varphi_\infty(b))^{-1}} : b \in B \right\rangle = g\, H(\mathbf{w}).$$

因此，映射 $\mathbf{w} \mapsto H(\mathbf{w})$ 是 $A \wr B$-等变的。因此，推前 $\eta = (H)_* \mathbb{P}_\mu$ 是一个支撑在 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(A \wr B)$ 上的 μ-边界。由于 $a \neq e_A$，子群 $H(\mathbf{w})$ 几乎必然非平凡，因此 $\eta \neq \delta_{\{e\}}$。

若 A 是非阿贝尔的，我们可以选取 a 使其不属于 A 的中心。在这种情况下，灯位于 A 中 a 的中心化子的不同陪集中的极限构形会产生不同的子群 $H(\mathbf{w})$，因此 η 是非原子的。□

已知只要 A 是 C*-单，群 $A \wr B$ 就是 C*-单；例如，参见 [BO18，命题 5.5]中的简短证明。或者，利用 [KK17，定理 1.5], ，可以通过展示一个拓扑自由的（$A \wr B$）边界来证明 $A \wr B$ 的 C*-单纯性。也就是说，只需证明存在一个紧空间 X，其上赋有$A \wr B$通过同胚实现的极小作用，并且对每个（$A \wr B$）-轨道而言，其在 $\mathrm{Prob}(X)$ 中的闭包都包含一个狄拉克 δ 测度；此外， X 中每个非平凡元素 $A \wr B$ 的不动点集都具有空内点。为此，假设 A 是 C*-单的，并令 X_A 为一个拓扑自由的 A-边界。考虑 $A \wr B$ 在 $\prod_B X$ 上的作用，该作用定义为：对任意 $\varphi \in \bigoplus_B A$、 $c \in B$ 以及 $(x_b)_{b \in B} \in \prod_B X_A$，有 $(\varphi, c) \cdot (x_b)_{b \in B} = (\varphi_b \cdot x_{c^{-1}b})_{b \in B}$。由此得到 $A \wr B$的拓扑自由边界作用，因此 $A \wr B$ 是 C*-单的。

作为命题3.2的推论，我们得到如下结论。

推论 3.3。设 A 是一个可数 C*-简单群，且 B 是一个增长至少为三次的有限生成群。那么，按照 $A \wr B$ 的定义， *[HK23],*，在 $A \wr B$ 上的每个 C*-简单概率测度*23],*都具有无穷一阶矩。

3.2. **记录时刻与定理 A 的证明**。为了构造定理 A 中出现的测度，我们首先需要引入一些一般术语。

定义 3.4。设 $p = (p_j)_{j \geq 0}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个概率测度，并设 $(X_n)_{n \geq 1}$ 是服从分布 p 的一列独立同分布随机变量。对于每个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，记$M_n :=$最大值$\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 为该序列在时刻 n 的记录值。我们称记录值 M_n 为简单的，如果

$$|\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i = M_n\}| = 1.$$

我们称$(X_n)_{n \geq 1}$ 的记录最终是简单的，如果几乎处处（相对于 $p^{\otimes \mathbb{N}}$），存在$N \geq 1$，使得对所有 $n \geq N$，记录值 M_n 都是简单的。最后，通过 $T_1 = 1$ 和 $T_{k+1} = \min\{n > T_k : X_n = M_n\}$ （$k \in \mathbb{N}_{>0}$）定义$(T_k)_{k \geq 1}$ 的记录时刻（$X_n)_{n \geq 1}$ 序列。

以下引理见 [EK23，引理 2.3 和推论 2。6]充分条件归功于 [BSW94，定理 3。2], 而必要条件归功于 [Qi97，定理 2]。另请参见 [Eis09，定理 3、推论 3.1 和 3。2]。

引理 3.5。设 p 是定义在 $\mathbb{N}$ 上的概率测度，且 $(X_n)_{n\geq 1}$ 是一列分布为 p 的独立同分布随机变量。那么，$(X_n)_{n\geq 1}$ 最终具有简单记录值，当且仅当 p 的支撑是无限的，并且

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p_j}{p_j+p_{j+1}+\cdots}\right)^2<\infty. \tag{3.1}$$

特别地，当 p_j 如 $j\to\infty$ 那样具有多项式衰减时，后一条件成立。

引理 3.6 ([EK23，引理 2。17])。对于任意一个定义在 p 上的 $\mathbb{N}$ 无限支撑概率测度，都存在一个非递减函数 $\Phi:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得几乎必然地 $T_{k+1}\leq\Phi(R_k)$ 对所有充分大的 k均成立。

我们将证明定理A的以下重新表述，它明确给出了该测度的构造以及由此得到的边界 SRS。回顾一下，对于给定的概率测度 μ 在 G 上，我们用 $\mathbb{P}_\mu$ 表示 μ- 随机游走 $(w_n)_{n\geq 0}$ 在 G上的分布。

定理 3.7. 设 G 是一个可数群，并假设 G 有一个非平凡子群H，使得对于所有有限子集 Q、$Z\subseteq G$，都存在 $b\in G$，满足

$$bZ,b^{-1}Z\subseteq\left\{g\in G:Q\cap H=Q\cap gHg^{-1}\right\}.$$

那么存在一个非退化的对称概率测度 μ，定义在 G 上，且具有有限香农熵，使得 $\mathbb{P}_\mu$-几乎必然，序列$(w_nHw_n^{-1})_{n\geq 0}$ 收敛到 G的一个非平凡子群。特别地，若 H 是可 *amenable* 的，则子群$\lim_{n\to\infty}w_nHw_n^{-1}$的分布定义了 G的一个可 *amenable* 边界 *μ-SRS*。

证明。考虑一个概率测度 p 定义在 $\mathbb{N}$上，它对所有非负整数赋予正质量，并满足条件（3.1），因此引理3.5 保证一列服从分布 p 的独立同分布随机变量几乎必然具有最终简单记录值。此外，我们可以选择 p 使其香农熵 $H(p)=-\sum_{j\geq 0}p_j\log(p_j)$有限。

~我们选取一个由 G 的两两不相交且对称的子集组成的序列 $(A_n)_{n\geq 0}$ ~ ~ ~，使得 $A_0=\{e_G\}$, $|A_n|\leq 2$ 对所有 $n\geq 0$ 和 $G=\bigcup_{n\geq 0}A_n$ 均成立。我们首先通过归纳法构造 G 的递增有限子集序列 $(A_n)_{n\geq 0}$、$(\triangle_n)_{n\geq 0}$、$(Q_n)_{n\geq 0}$，并为每个 $n\geq 0$ 选取一个元素序列 $b_n\in G$。

~我们首先令 $A_0=A_0=\{e_G\}$、$\triangle_0=Q_0=\varnothing$ 和 $b_0=e_G$。现在，令 $n\geq 1$，并假设对于每个 $0\leq i\leq n$，集合 $\triangle_i$ 和 Q_i 以及元素 b_i 均已定义。我们令

$$A_{n+1}=\widetilde{A}_{n+1}\setminus\bigcup_{i=0}^{n}\{b_i,b_i^{-1}\},\ \triangle_{n+1}=\left(\bigcup_{i=0}^{n}A_i\cup\{b_i,b_i^{-1}\}\right)^{\Phi(n)},$$

其中 Φ 是与之相关联的规范函数 p，见引理 3.6。接下来，我们取 Q_{n+1} 为 G 的一个有限子集，其中包含 Q_n，并且满足对每个 $d\in\triangle_n$，都有 $Q_{n+1}\cap dHd^{-1}\neq$

$\{e_G\}$。将定理的假设应用于有限子集 $Q := \bigcup_{d\in\triangle_n} d^{-1}Q_{n+1}d$和 $Z := \triangle_n$，我们得到 $b_{n+1} \in G$，使得对所有 $z \in \triangle_n$ 都有

$$Q \cap H = Q \cap (b_{n+1}z)H(b_{n+1}z)^{-1} = Q \cap (b_{n+1}^{-1}z)H(b_{n+1}^{-1}z)^{-1}.$$

因此，注意到对于每个 d， $z \in \triangle_n$ 我们有

$$Q_{n+1} \cap dHd^{-1} = Q_{n+1} \cap (db_{n+1}z)H(db_{n+1}z)^{-1} = Q_{n+1} \cap (db_{n+1}^{-1}z)H(db_{n+1}^{-1}z)^{-1}. \quad (3.2)$$

这完成了序列 $(A_n)_{n\geq0}$、$(\triangle_n)_{n\geq0}$、$(Q_n)_{n\geq0}$和 $(b_n)_{n\geq0}$的归纳构造。

现在固定一个辅助序列 $(\alpha_i)_{i\geq1}$，使得对每个 $i \geq 1$ 都有 $0 < \alpha_i < 1$，并且满足 $\sum_{i\geq1} \alpha_i < \infty.$。定义群 G 上的对称概率测度 μ，使得 $\mu(A_0) = p_0$，并且对每个 $i \geq 1$ 我们有

$$\mu\left(A_i \cup \{b_i, b_i^{-1}\}\right) = p_i \text{ and } \mu\left(A_i \backslash \{b_i, b_i^{-1}\}\right) \leq \alpha_i p_i. \quad (3.3)$$

在证明的其余部分，我们将论证这样的测度 μ 满足该定理的结论。

首先，注意到 $\text{supp}(\mu) = G$，因为 p 具有完全支撑，且 $G = \cup_{n\geq0}A_n$。特别地，概率测度 μ 是非退化的。此外， μ 具有有限的香农熵，因为

$$H(\mu) \leq \log(4) + H(p) < \infty. \quad (3.4)$$

事实上，要看出这一点，只需注意到 μ 可以分两步抽样：首先，根据分布 $i \in \mathbb{N}$ 选择一个指标 p，然后按照 $g_i \in A_i \cup \{b_i, b_i^{-1}\}$ 在该子集上的条件分布抽取 μ 。不等式（3.4）随后由随机变量 H（X） $= H$（$X \mid Y$） $+ H$（Y）的标准（条件）熵分解得出， X 以及 Y取值于大小为 N的集合中的随机变量，其熵至多为 $\log(N)$。由于 $|A_i \cup \{b_i, b_i^{-1}\}| \leq 4$ 对每个 $i \geq 0$都成立，我们便得到所需的界。

现在只需证明序列 $(w_nHw_n^{-1})_{n\geq0}$ 几乎必然收敛到 G 的一个非平凡子群，其中收敛以 $\mathbb{P}_\mu$为准。令 $(g_n)_{n\geq1}$ 为由 G 中元素构成的独立序列，其分布为 μ，并对每个 $n \geq 1$ 定义 $w_n = g_1 \cdots g_n$。换言之，过程 $(w_n)_{n\geq1}$ 服从 G 上的 μ-随机游走的分布 $\mathbb{P}_\mu$。对于每个 $i \geq 1$，记 $X_i \in \mathbb{N}$ 为满足 $g_i \in A_{X_i} \cup \{b_{X_i}, b_{X_i}^{-1}\}$ 的唯一值。于是，由μ 的构造可知，序列 $(X_i)_{i\geq1}$ 是服从分布 p 的独立同分布序列，因此最终具有简单记录值。记 $(T_k)_{k\geq1}$ 为相应的记录时刻，并对每个 $k \geq 1$ 记 $R_k := X_{T_k}$ 为记录值。结合

（a）根据 μ（$A_i \backslash \{b_i, b_i^{-1}\}$） $\leq \alpha_i p_i$（条件（3.3））， 结合 $\sum_{i\geq1} \alpha_i < \infty$ 和 Borel-Cantelli 引理，（b）引理3.6，以及（c）最终简单记录时刻的定义（定义3.4），

我们得出，几乎必然存在 $k_0 \geq 1$，使得对所有 $k \geq k_0$，都有

(A) $g_{T_k} \in \{b_{R_k}, b_{R_k}^{-1}\}$，(B) $T_{k+1} \leq \Phi$
(R_k)，以及 (C) 对所有
$T_k < m < T_{k+1}$， $X_m < R_k$。

现在，令 $n > T_{k_0}$，并选择 $k \geq k_0$ 使得 $T_k \leq n < T_{k+1}$。于是，我们可以写成

$$w_n = g_1 \cdots g_{T_k-1} \cdot g_{T_k} \cdot g_{T_k+1} \cdots g_n.$$

令 $d = g_1 \cdots g_{T_k-1}$ 和 $z = g_{T_k+1} \cdots g_n$，使得 $w_n = d g_{T_k} z$。由上述条件(B)和(C) 可得

$$d, z \in \left(\bigcup_{i=0}^{R_k-1} A_i \cup \{b_i, b_i^{-1}\} \right)^{T_{k+1}} \subseteq \triangle_{R_k}.$$

此外，由于条件(A) 以及 b_{R_k}的归纳构造，我们还有

$$Q_{R_k} \cap dHd^{-1} = Q_{R_k} w_n H w_n^{-1},$$

如方程（3.2）所示。

断言。对于每个 $m \geq n$，都有

$$Q_{R_k} \cap dHd^{-1} = Q_{R_k} \cap w_m H w_m^{-1}.$$

命题的证明。设 ℓ 满足 $T_\ell \leq m < T_{\ell+1}$。注意，由于 $m > n$，必有 $\ell \geq k$。我们对 ℓ 使用归纳法证明该断言。

若 $\ell = k$，则该断言已在等式（3.2）中得到证明。现在假设˜满足 $\ell > k$，并记 $w_m = d g_{T_\ell} \widetilde{z}$，其中

$$\widetilde{d} = g_1 \cdots g_{T_\ell - 1} \text{ and } \widetilde{z} = g_{T_\ell+1} \cdots g_m.$$

如同断言之前的论证所示，我们有

$$Q_{R_\ell} \cap \widetilde{d} H \widetilde{d}^{-1} = Q_{R_\ell} \cap w_m H w_m^{-1},$$

因此特别地

$$Q_{R_k} \cap \widetilde{d} H \widetilde{d}^{-1} = Q_{R_k} \cap w_m H w_m^{-1}. \tag{3.5}$$

˜将 $d = w_{T_\ell - 1}$ 代入归纳假设，可得

$$Q_{R_k} \cap dHd^{-1} = Q_{R_k} \cap \widetilde{d} H \widetilde{d}^{-1}. \tag{3.6}$$

结合等式（3.5）和（3.6）即可完成该断言的证明。 □

Sub(G)的紧致性意味着，序列 $(w_n H w_n^{-1})_{n\geq 0}$ 至少有一个极限点 $K \in$Sub(G)。由于集合 Q_{R_k} 构成了 G的一个穷尽，前述断言表明，对于 K的任意开邻域 U，序列 $(w_n H w_n^{-1})_{n\geq 0}$ 最终都留在 U中。因此极限点唯一，并且 $(w_n H w_n^{-1})_{n\geq 0}$ 在 Sub(G) 中收敛。最后，极限子群 K 是非平凡的：事实上，$Q_{R_k} \cap dHd^{-1}$ 包含一个非平凡元素 $g \in G \backslash \{e_G\}$，而前述断言表明 $g \in K$。□

注记 3.8. 定理 A 要求存在一个非平凡子群 $H \subseteq G$ 使得对于每一对有限子集 Q, $Z \subseteq G$ 存在 $b \in G$ 满足

$$bZ, b^{-1}Z \subseteq \{g \in G : Q \cap H = Q \cap gHg^{-1}\}.$$

对于 G 在 Sub(G) 上的共轭作用，这一条件具有动力学解释。有限集 Q 确定了 Chabauty 拓扑中 H 的一个基本邻域，

$$U_Q(H) = \{K \in \text{Sub}(G) : Q \cap K = Q \cap H\}.$$

上述性质进而断言，对于每个这样的邻域和每个有限集 $Z \subseteq G$，都存在 $b \in G$ 使得

$$bz \cdot H, b^{-1}z \cdot H \in U_Q(H) \qquad \text{for all } z \in Z.$$

换言之，可以通过一个群元素 b 及其逆元的共轭作用，将 H 在 Sub(G) 中的 G-轨道的任意有限部分同时推至任意接近 H 的位置。这可以视为 G 对 H 的轨道作用的一种强回归形式。

3.3. 可 amenable 边界 μ-平稳随机子群（SRSs），适用于 Thompson 群 F。考虑保向同胚群 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其中存在一个有限子集$D \subset \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$，使得对于 $\mathbb{R} \setminus D$ 的每个有界连通分支 $\mathcal{C}$，映射 f 在 C 上的限制具有如下形式

- $x \mapsto 2^k x + q$ 其中 $k \in \mathbb{Z}$，且当 C 有界时， $q \in \mathbb{Z}[1/2]$，其形式为
- $x \mapsto x + m$ 其中 $m \in \mathbb{Z}$ 在 C 无界时成立。

众所周知，上述描述的是一个与汤普森群 F同构的群，它由闭单位区间 $[0,1]$上的所有递增分段二进仿射同胚构成；例如参见 [BB05，第3节。1]在此表示中，换位子群 $[F,F]$ 恰好是 F中在某个紧区间之外恒等的同胚 $\mathbb{R}$。

推论 B 的证明。我们证明汤普森群 F 满足定理 A 的假设。设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 $[0,1]$的一个真闭子区间内支撑集的任意非平凡元素。对每个 $k \in \mathbb{Z}$，记 $t_k \in F$ 为平移 $k \in \mathbb{Z}$。考虑由所有元素 $t_k f t_k^{-1}$、 $k \in \mathbb{Z}$生成的 F 的子群 H。这些元素的支撑集彼此不交，故它们相互交换，因此 H 是阿贝尔群。还要注意， H及其所有共轭元都包含在正规子群 $[F,F]$中。因此，为验证定理 A 的条件，只需证明：对于任意有限子集 $Q \subseteq [F,F]$和每个有限子集 $Z \subseteq F$，我们都能找到 $b \in F$，使得

$$bZ, b^{-1}Z \subseteq \{g \in F : Q \cap H = Q \cap gHg^{-1}\}.$$

由于 $Q \subseteq [F,F]$， Q 的所有元素在某个充分大的区间之外都是单位元。因此，我们可以选择 $N \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $q \in Q$，supp(q) $\subseteq [-N,N]$。接下来，选择足够大的 $M \geq 1$，使得对于每个 $z \in Z$，存在 m_z^-， $m_z^+ \in \mathbb{Z}$，满足

$$z(x) = x + m_z^- \text{ for } x \leq -M,\ z(x) = x + m_z^+ \text{ for } x \geq M.$$

对于每个 $z \in Z$，记 r_z^-， $r_z^+ \in F$为映射 $r_z^-(x) = x - m_z^-$ 和 $r_z^+(x) = x - m_z^+$（其中 $x \in \mathbb{R}$）。那么 supp(zr_z^-) $\subseteq [-M, +\infty)$，且对于每个 $z \in Z$，supp(zr_z^+) $\subseteq (-\infty,\ M]$。

现在令 $b \in F$ 表示关于 $-M-N-1$ 的平移。利用 H 被任意平移正规化这一事实，对于每个 $z \in Z$，我们有

$$\begin{aligned} bzHz^{-1}b^{-1} &= b(zr_z^+)H((r_z^+)^{-1}z^{-1})b^{-1} \\ &= (b(zr_z^+)b^{-1})H(b(zr_z^+)b^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

$b(zr_z^+)b^{-1}$ 的支撑包含于（$-\infty$， $-N-1$]，而 Q 中的所有元素的支撑都包含于 $[-N,N]$。因此， $b(zr_z^+)b^{-1}$ 与 Q中的所有元素都可交换，

这意味着 bZ 包含于 $\{g \in F\colon\ Q \cap H = Q \cap gHg^{-1}\}$。类似的论证也适用于 $b^{-1}Z$。这验证了定理A的假设，结论则由 Sub(F)中阿贝尔子群的集合在 Chabauty 拓扑下是闭集这一事实得出。□

3.4. 可 amenable 边界 μ-平稳随机子群的置换式群圈积。 设 A、B为可数群，且 $B \curvearrowright X$ 是在可数集 X上的作用。置换式群圈积 $G = A \wr_X B$ 是半直积 $\left(\bigoplus_{x\in X} A\right) \rtimes B$，其中 B 通过 $b.(\varphi_x)_{x\in X} = (\varphi_{b^{-1}.x})_{x\in X}$ 作用于$\bigoplus_{x\in X} A$，对 $b \in B$、$(\varphi_x)_{x\in X} \in \bigoplus_{x\in X} B$ 成立。这里，群 B被识别为其在 $A \wr_X B$中的典范副本，而 A 则被识别为其在固定基点 $o \in B$ 处直和中的副本。

令 $\mu \in \mathrm{Prob}(A \wr_X B)$。与花环积的情形一样，若存在一个无限轨道 $\mathcal{O} \subseteq X$，使得对于 $\mathbb{P}_\mu$-几乎每条轨迹 $\mathsf{w} = (\varphi_n, b_n)_{n\geq 0}$，限制在 $\mathcal{O}$ 上的构型 $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ 逐点收敛到极限函数 $\varphi_\infty(\mathsf{w}) \in A^{\mathcal{O}}$，则称 μ-随机游走在 $A \wr_X B$ 上的灯配置几乎必然稳定化。只要对每个$x \in \mathcal{O}$，诱导随机游走 $(b_n.x)_{n\geq 0}$ 在 $\mathcal{O}$ 上是暂态的，且 μ 具有有限一阶矩，灯就会稳定化。一般而言，$(b_n.x)_{n\geq 0}$ 在 $\mathcal{O}$ 上的暂态性，可能比随机游走 $(b_n)_{n\geq 0}$ 在 B 本身上的暂态性更微妙。下面的命题将定理 A 中的判据用于构造一个具有有限香农熵的对称测度 μ，使得上述情形成立。

推论 3.9。 设 A, B 为可数群，且 $B \curvearrowright X$ 是在可数集 X 上的忠实作用，该集合至少有一个无限轨道 $\mathcal{O}$。假设 A 非阿贝尔。则存在一个定义在 $A \wr_X B$ 上的非退化对称概率测度，其香农熵有限，并且它具有一个不同于 $\delta_{\{e\}}$的可 *amenable* 边界 μ-*SRS*。

证明。 固定一个元素 $a \in A$，它不属于群 A的中心，并考虑非平凡的可 amenable 子群 $H = \bigoplus_{x\in\mathcal{O}} \langle a\rangle$，它是群 $A \wr_X B$的子群。我们将证明 H 满足定理A的假设。

首先注意到 H 同时被两个子群 $\bigoplus_{x\in X\setminus\mathcal{O}} A$ 和 B正规化。此外，H 包含于正规子群 $\bigoplus_{x\in\mathcal{O}} A$中。为了验证定理 A的条件，只需证明：对于任意有限子集 Z，$Q \subset \bigoplus_{x\in\mathcal{O}} A$ 我们都能找到$b \in B$ 使得

$$bZ, b^{-1}Z \subseteq \left\{g \in A \wr_X B : Q \cap H = Q \cap gHg^{-1}\right\}.$$

令 Z，$Q \subset \bigoplus_{x\in\mathcal{O}} A$ 为有限子集。分别用 F_Z，$F_Q \subset \mathcal{O}$ 表示 Z，Q中各元素的支撑集之并。

断言。 存在 $b \in B \subseteq A \wr_X B$，使得 bF_Z 和 $b^{-1}F_Z$ 均与 F_Q 不相交。

命题的证明。 设 μ 是定义在 B上的非退化对称概率测度，并记 $\mathbb{P}_\mu$ 为 μ-随机游走（w_n）$_{n\geq 0}$ 在 B上的分布。由于 $\mathcal{O}$ 是无限的，由 [CF25，引理 31]（另见 [GMT24，断言 23],或 [LBM18，引理 32]）可得

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\mu[w_n \cdot x = y] = 0$$

对每个 $x \in F_Z$ 和 $y \in F_Q$ 均成立。因此，由并集界可得

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\mu[w_n \cdot F_Z \cap F_Q = \varnothing] = 1.$$

对于每个 $n \geq 1$，随机游走 $w_n = g_1 g_2 \cdots g_n$ 的第 n 步的分布为 μ^{*n}。由于 μ 是对称的，这与 $w_n^{-1} = g_n^{-1} g_{n-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}$ 的分布相同。于是可得

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\mu[(w_n)^{-1} \cdot F_Z \cap F_Q = \varnothing] = 1.$$

再应用一次并集界，可知存在 $b \in B$ 使得

$$b.F_Z \cap F_Q = b^{-1} \cdot F_Z \cap F_Q = \varnothing. \qquad \square$$

通过一个类似于推论证明中所用的论证 B，对于每个 $z \in Z$，我们可以写成

$$bzHz^{-1}b^{-1} = (bzb^{-1})Hb(bzb^{-1})^{-1},$$

类似地

$$b^{-1}zHz^{-1}b = (b^{-1}zb)H(b^{-1}zb)^{-1}.$$

根据前一个断言，bzb^{-1} 和 $b^{-1}zb$ 都与 Q 中的每个元素交换，因此 bZ 和 $b^{-1}Z$ 都包含于 $\{g \in A \wr_X B : Q \cap H = Q \cap gHg^{-1}\}$。由此可知，存在一个与 $\delta_{\{e\}}$ 不同的可 amenable 边界 μ-SRS。□

置换 wreath 积在代数上与第3.1小节讨论的通常的 wreath 积有一些相似之处，但它们的几何性质和动力学性质可能大不相同，尤其是在随机游走的行为方面。

考虑群 G 上的随机游走，并令其在每个自然数集元素处到实数集的投影为 $b_n = x_1 \cdots x_n$，其中 $(x_n)_{n\geq 1}$ 是群 G 中的一列独立增量。在通常的 wreath 积情形下，可以将该游走想象成一名提灯人在基群的凯莱图上移动，并修改其经过的顶点附近的灯。对于置换式群圈积而言，这种将其解释为在 X 的施赖尔图上游走的方式行不通。事实上，灯配置是在所谓的反向轨道上修改的

$$o, \quad x_1^{-1}.o, \quad x_1^{-1}x_2^{-1}.o, \quad x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}.o, \ \ldots,$$

它不满足马尔可夫性质，也不沿着施赖尔图中的连通路径行进。这使得对随机游走的分析更加微妙，但也带来了更丰富的几何现象。例如，当 $B = G_{012}$ 是第一格里戈尔丘克群，而 X 是其在有根二叉树边界上的作用的某个特定轨道时，反向轨道的增长被 Bartholdi-Erschler 用来证明某些置换式群圈积（包括 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr_X G_{012}$）具有中间增长，并计算其增长函数的渐近性 [BE12，定理 A]。这些是最早确定此类渐近性的中间增长群。后来，同一作者利用置换式群圈积构造了有限生成的指数增长群实例，例如 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr_{X\times X} (G_{012} \times G_{012})$，对于这些群，每个有限支撑概率测度（不一定是非退化的）都有平凡的泊松边界 [BE17，定理 A]。这回答了此前由.....提出的一个未决问题

证明并非每个指数增长群都存在具有非平凡泊松边界的有限支撑概率测度。

4. Boundary SRSs are supported on normalish subgroups

本节证明定理 C，该定理将群 G 的近正规子群与 Sub(G) 上的边界 SRS 联系起来。我们还将证明，许多 C*-单 Baumslag-Solitar 群虽然可 amenable 子群空间是可数的，却拥有可和近正规子群，因此它们所有的可 amenable μ-SRS 都是平凡的。最后，我们将给出另一种证明，说明具有性质（CS）的群的可 amenable μ-边界是平凡的。性质（CS）是一种群的算子代数性质，其表述基于群的酉表示，由 [BKKO17] 引入。

4.1. **定理 C 的证明。** 回忆一下，群 的 *FC* 中心 G是子群 FC(G)，由 G 中共轭类有限的所有元素组成。群 $G \curvearrowright X$在紧豪斯多夫空间 X 上的同胚作用 称为等度连续的，如果 G 在 Homeo(X) 中的像在紧开拓扑下相对紧。

定理C的证明。 设 μ 是定义在 G 上的非退化概率测度，并设 η 是 Sub(μ) 上的G-平稳概率测度，使得空间 (Sub(G) η) 是 μ的一个 G-边界。若 η 是原子的，那么它必定是某个无限正规子群上的狄拉克质量，结论便随之成立。因此我们假设 η 是非原子的。令 $g_1, \dots, g_m \in G$。我们将证明，对每个 $\varepsilon > 0$ ，都有

$$\eta\left(\left\{H \in \mathrm{Sub}(G) : \bigcap_{i=1}^{m} g_i H g_i^{-1} \text{ is finite}\right\}\right) \leq \varepsilon. \tag{4.1}$$

由于 ε 是任意的，上述测度必为 0；又因为 G是可数的，因此 η支撑在群 G的近正规子群上。

断言。 测度 η 并不支撑在 *FC* 中心$\mathrm{FC}(G)$上。

命题的证明。 考虑闭子空间 Sub(FC(G))，并注意到任意形如以下形式的开集的 G-轨道

$$\{H \in \mathrm{Sub}(\mathrm{FC}(G)) : Q \cap H = Q \cap K\},\ Q \subseteq \mathrm{FC}(G) \text{ finite and } K \in \mathrm{Sub}(\mathrm{FC}(G))$$

根据 FC(G) 的定义都是有限的。由于这些集合构成了 Sub(FC(G)) 的拓扑基，我们得出 G 在 Sub(FC(G)) 的闭开子集上的作用只有有限轨道。这意味着该作用是等度连续的：事实上，它是 [Cor14, D´efinition 2.1.3] 意义下的里程表系统。根据 [Cor14, Fait 2.1.4 (iii)]，Sub(FC(G)) 是群 G 在有限集上的作用的射影极限，因此必定是等度连续的。于是，Sub(FC(G)) 上任意 μ-平稳测度都由 [FG10, Theorem 7.4]可知是不变的。因此，η 不可能支撑在 FC(G) 上，因为任何同时也是不变测度的 μ-边界都是狄拉克质量。□

因此，存在具有无限共轭类的 $h \in G$ ，使得

$$c := \eta(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : h \in H\}) > 0.$$

记 $\mathbf{bnd}\colon G^{\mathbb{N}} \to \mathrm{Sub}(G)$ 为与 η 相关联的边界映射。给定 μ 在 G 上的随机游走的轨迹$\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 0} \in G^{\mathbb{N}}$，我们可以写出

$$\eta(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : h \in w_n H w_n^{-1}\}) = (w_n)_*\eta(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : h \in H\})$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$。由于 $(\mathrm{Sub}(G), \eta)$ 是一个 μ-边界，因此

$$\eta(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : h \in w_n H w_n^{-1}\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_{\mathbf{bnd}(\mathbf{w})}(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : h \in H\})$$

对于 $\mathbb{P}_\mu$-几乎处处的轨迹 $\mathbf{w} \in G^{\mathbb{N}}$。特别地，我们有

$$\eta\left(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : h \in w_n H w_n^{-1}\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \tag{4.2}$$

对于每个 $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 0} \in E := \mathbf{bnd}^{-1}(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : h \in H\})$，其中

$$\eta(E) = \mathbb{P}_\mu(\mathbf{bnd}^{-1}(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : h \in H\})) = \eta(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : h \in H\}) = c > 0.$$

考虑这样一条轨迹 $(w_n)_{n\geq 0} \in E$。集合 $\{w_n^{-1} h w_n : n \geq 0\}$ 几乎必然是无限的，因为 h 具有无限共轭类。

设 $j \geq 2$。由于 μ 是非退化的，作用 $G \curvearrowright (\mathrm{Sub}(G), \eta)$ 是非奇异的。因此，我们可以选择 $\delta_j > 0$，使得对于任意可测子集 $A \subseteq \mathrm{Sub}(G)$，若 $\eta(A) \geq 1-\delta_j$，则有

$$(g_i)_*\eta(A) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{m2^j}$$

对每个 $i = 1, \ldots\ldots, m$。利用方程（4.2）中的收敛性，我们归纳地构造一个递增序列 $(n_k)_{k\geq 2} \subseteq \mathbb{N}$ 如下。令 $n_2 \in \mathbb{N}$ 满足

$$\eta(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : w_{n_2}^{-1} h w_{n_2} \in H\}) \geq 1 - \delta_2.$$

若已定义 $n_2, \ldots\ldots, n_k$，则求出 $n_{k+1} > n_k$ 使得

$$w_{n_{k+1}}^{-1} h w_{n_{k+1}} \notin \left\{h_{w_{n_2}}, \ldots, h_{w_{n_k}}\right\} \text{ and } \eta(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : w_{n_{k+1}}^{-1} h w_{n_{k+1}} \in H\}) \geq 1 - \delta_{k+1}.$$

我们对 δ_k 的选择保证了

$$\eta(\{H : w_{n_k}^{-1} h w_{n_k} \in g_i H g_i^{-1}\}) = (g_i)_*\eta(\{H : w_{n_k}^{-1} h w_{n_k} \in H\}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{m2^k} \tag{4.3}$$

对每个 $k \geq 2$ 和 $i = 1, \ldots\ldots, m$ 均成立。由并集界可知

$$\eta\left(\left\{H \in \mathrm{Sub}(G) :\ w_{n_k}^{-1} h w_{n_k} \notin \bigcap_{i=1}^{m} g_i H g_i^{-1}\right\}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$$

对所有 $k \geq 2$ 均成立，因此

$$\eta\left(\left\{H \in \mathrm{Sub}(G) :\ (w_{n_k}^{-1} h w_{n_k})_{k\geq 2} \not\subseteq \bigcap_{i=1}^{m} g_i H g_i^{-1}\right\}\right) \leq \varepsilon,$$

正如所需，证明至此结束。 □

4.2. **Baumslag-Solitar 群与近正规子群。** Baumslag-Solitar 群是一类单关系群

$$\mathrm{BS}(m,n) = \langle a, t \mid ta^m t^{-1} = a^n \rangle,\ m,n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

由 Baumslag-Solitar 在 [BS62] 中引入，这一对象已从几何和代数视角得到深入研究 [Why01,Lev07]。已知当 m、n 均不等于 ± 1 和 $m \neq \pm n$ 时，它们是 C*-单的 [dlHP11，命题 5] 。无限循环子群$\langle a \rangle$ 始终是近正规的，因为对于所有 $g \in \mathrm{BS}(m,n)$，$\langle a \rangle \cap g\langle a \rangle g^{-1}$ 在 $\langle a \rangle$ 中的指数有限（例如参见[Lev07，第 2] 节）。

命题 4.2 下面找到了使得 m、n 满足 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(\mathrm{BS}(m,n))$ 可数的参数。特别地，我们推导出以下结论。

推论 4.1. 群 $\mathrm{BS}(2,3)$ 是 *C**-单的，存在一个可和近正规子群，并且对于每个非退化的 μ 平稳随机子群，任意 $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathrm{BS}(2,3))$ 上的可 *amenable* μ-*SRS* 都是平凡的。

证明。前两个结论已由 [dlHP11、命题 5] 以及[Lev07、第 2]，节得出，而下文的命题 4.2 表明 BS(2, 3) 只有可数多个可 amenable 子群。设 μ 是 BS(2, 3) 上的一个非退化概率测度，且 η 是 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 上的一个遍历 μ-平稳随机子群。由于 η 支撑在一个可数集上，它必有一个原子；由遍历性可知，η 必支撑在某个$H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{am}}(G)$ 的有限轨道上。若 H 非平凡，则由 H 生成的正规子群将是 G 的一个非平凡正规可和子群，这与 BS(2, 3) 的 C*-单纯性矛盾。因此，H 是平凡的，η 也如此。η 非遍历的情形可由遍历分解得到。□

命题 4.2. 设 m、$n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 和 $G = \mathrm{BS}(m, n)$。那么，G 至多只有可数多个可 *amenable* 子群，当且仅当以下条件之一成立：

- n 或 m 等于 *1* 或 -1，或者
- $n = m$ 或 $n = -m$，或者
- m/n 和 n/m都不是整数。

命题 4.2 的证明用到了 Y. Cornulier [Cor] 的一个结果，该结果指出，只要 m/n 和 n/m 都不是整数，群 BS(m, n) 就没有任何具有无穷多个根的非平凡元素。为方便读者，我们在下面复述这一结果的证明。

在命题 4.2 的证明中，我们将使用 BS(m,n) 在与其作为 HNN 扩张的分解相关联的 Bass-Serre 树$\mathcal{T}$ 上的作用。就我们而言，树 $\mathcal{T}$的顶点集为 BS$(m,n)/\langle a \rangle$ ，其有向边对所有 $w \in$BS(m,n) 和 $0 \leq l \leq n-1$均连接 $w\langle a \rangle$ 与 $wa^l t\langle a \rangle$。左乘诱导了 BS(m,n) 通过有向图自同构在 $\mathcal{T}$上的作用。Bass-Serre 理论保证 $\mathcal{T}$确实是一棵树，并且 BS(m,n) 的作用在有向边和顶点上都是传递的。因此，顶点稳定子（分别为边稳定子）是 $\langle a \rangle$ （分别为 $\langle a^m \rangle$）的共轭。BS(m,n) 中不稳定任何 $\mathcal{T}$ 上顶点的非平凡元素称为双曲型；否则称为椭圆型。关于 Bass-Serre 理论，我们以 [Ser77, Chapitre I] 为标准参考文献；关于 Baumslag-Solitar 群及其 Bass-Serre 树，则参见 [CGLMS25, Sections 1 & 2]。

我们回顾下面的引理，它是对 [CGLMS25, 命题24] 的一个小幅变体。

引理 4.3。若 G 是一个可数群，且有正规子群 $N \subseteq G$，使得 N 有可数多个可 *amenable* 子群，并且 G/N 的每个子群都是有限生成的，那么 G有可数多个子群。

证明。记 $\pi\colon G \to G/N$ 为投影。G 的子群 H 由 $H \cap N$以及 $\pi(H)$的一个有限生成集的任意截面确定。这些截面至多有可数多个选项；若 H 可 amenable，则 $H \cap N$也至多有可数多个选项。□

命题证明 *4.2*。我们先证明正向蕴含。若 $G = \mathrm{BS}(\pm 1,\ m)$，则$G$ 由 [BLT19，推论 8，可知有可数多个可 amenable 子群。4]。若 $n = \pm m$，则G 在有限指数子群意义下同构于 $F_n \times \mathbb{Z}$。由引理 $F_n \times \mathbb{Z}$，群有可数多个可 amenable 子群4.3，同理，由引理 G，4.3也可得相同结论。

现在假设 m/n 和 n/m 不是整数。令 $\mathcal{T}$为与 G 的 HNN 扩张分解 $G = \langle a$相关联的 *Bass-Serre* 树，其中 $t \mid ta^m t^{-1} = a^n\rangle$，并令 $H \subseteq G$为一个可 amenable 子群。由于 H 没有非阿贝尔自由子群，且G 在 $\mathcal{T}$ 上的作用没有反转，根据 J. Tits 对群在树上作用的分类 [Tit70]，H 要么固定一个顶点，要么稳定 H 中某个双曲元素的轴，要么固定 $\partial\mathcal{T}$的一个端点。第一种情况下，H 是循环群。第二种情况下，ℓ 中某个双曲元素之轴的稳定子 G 分解为

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{Stab}_G(\ell) \longrightarrow D_\infty \longrightarrow 1$$

其中 D_∞ 是无限二面体群，核 K 是某个顶点稳定子的子群（因此要么是平凡群，要么是无限循环群）。无论哪种情况，根据引理4.3，可数多个子群 $\mathrm{Stab}_G(\ell)$ 中，ℓ 遍历 G的双曲元素之轴时，所得的子群只有可数多个。

因此只需考虑群 H 固定一个端点 $\xi \in \partial\mathcal{T}$ 的情形。固定一条表示 ξ 的单侧测地线 $(\xi_n)_{n\geq 0}$，并定义 $K \subseteq G$ 为固定 ξ 的椭圆元素所构成的子群。于是

$$K = \bigcup_{m\geq 0} \mathrm{Fix}_G(\xi_{[m,\infty)})$$

它是射线 $\xi_{[m,\infty)} = (\xi_{m+n})_{n\geq 0}$，$m \geq 0$ 的逐点固定子群的递增并。因此 K 要么是平凡群、无限循环群，要么是无限循环群的直并。在最后一种情形下，$K \setminus \{e_G\}$ 中存在一个元素拥有无穷多个根。

断言([Cor])。如果 m/n 和 n/m 都不是整数，那么 $G = \mathrm{BS}(m,\ n)$ 不含有任意大阶根的非平凡元素。

命题的证明。令 $h\colon G/\langle a\rangle \to \mathbb{Z}$ 为高度函数，它将每个陪集 $g\langle a\rangle$ 映射为其中出现的 t 的带符号个数。函数 h 定义良好（它可经由 G对由 a 生成的正规子群取商而分解）。

设 $g \in G \setminus \{e_G\}$ 固定 $\mathcal{T}$ 中的一个顶点 $v = w\langle a\rangle$，因此对于唯一的 $\zeta_g(v) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，有 $g = wa^{\zeta_g(v)}w^{-1}$。若 g 也固定 $\mathcal{T}$ 中与 v 相邻的一个顶点 $v' = wa^l t\langle a\rangle$（也就是说，

$\mathcal{T}$ 中存在一条从 v 指向 v' 的有向边），则等式

$$wa^{\zeta_g(v)}w^{-1} = wa^l ta^{\zeta_g(v')}(wa^l t)^{-1}$$

这意味着 $\zeta_g(v') = (m/n)\zeta_g(v)$。通过归纳法，我们看到，对于 v, v'中 $\mathcal{T}_g$ 的 g 在 $\mathcal{T}$中的不动点子树里的任意一对顶点，都有 $\zeta_g(v') = (m/n)^{h(v')-h(v)}\zeta_g(v)$。由于 m/n的任何非平凡幂都不是整数，而 $\zeta_g(v)$始终是整数，我们推得h 和 ζ_g 在 $\mathcal{T}_g$上有界。

现在假设 $g \in G \setminus \{e_G\}$ 有无穷多个根，并令 $M > 0$ 为 $\{\zeta_g(v)$ 的一个上界: $v \in G/\langle a\rangle\}$。 g 在 $\mathcal{T}$ 上的作用不可能是双曲型的，因为 g 的根会具有任意小的平移长度。因此， g 及其任意根都是椭圆型的。现在令 $u \in G$ 满足 $u^N = g$，其中 $N \in \mathbb{N}_+$ 为某个值，并令 v' 为 $\mathcal{T}$中被 u固定的一个顶点。于是

$$N \leq N\big|\zeta_u(v')\big| = \big|\zeta_g(v')\big| \leq M. \qquad \square$$

因此 K 必定是循环的。若 ξ 不被 G 的任何双曲元素固定，则 $H \subseteq \mathrm{Stab}_G(\xi) = K$, 因此 H有可数多个选项。

否则，设 $g \in G$ 是一个平移长度最小的双曲元素 $d \in \mathbb{N}_+$。那么 $\mathrm{Stab}_G(\xi) = K \rtimes \mathbb{Z}$, 其中右侧的生成元是 g，且 g 的共轭作用将每个 $\mathrm{Fix}_G(\xi_{[m,\infty)})$ 映到 $\mathrm{Fix}_G(\xi_{[m+d,\infty)})$。同样，引理4.3 表明 $\mathrm{Stab}_G(\xi)$ 有可数多个子群；又因为 $\partial\mathcal{T}$ 中由 G 的双曲元素固定的端点有可数多个，所以我们得出 H 取值于一个可数集。这就完成了对 $\mathrm{BS}(m,n)$ 有可数多个可 amenable 子群的证明。

对于逆向蕴含，考虑 m, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 它不满足命题陈述中的任何条件。由于 $\mathrm{BS}(m, n)$ 与 $\mathrm{BS}(-m,-n)$ 同构，我们不妨假设 $m > 0$；又由于 $\mathrm{BS}(m,n)$ 包含 $\mathrm{BS}(m^2, n^2)$（例如参见 [Lev15，定理 1.3]），我们也不妨假设 $n > 0$。现在 $m \geq 2$，我们可以写作 $n = km$，其中$k \geq 2$。

与之前一样，令 $\mathcal{T}$ 为与 G 的 HNN 扩张分解相关联的 Bass-Serre 树。令 $\widetilde{\mathcal{T}}$ 为 $\mathcal{T}$ 的子树，其顶点集为 $\{wt^{-1}\langle a\rangle : w$ 是 $\{a, t^{-1}\}\}$ 中的一个有限词。~树 $\mathcal{T}$ 是一棵以 $\langle a\rangle$ 为根的有根完全 m 叉树。

~**断言**。 $\mathcal{T}$ 中 a^m 的不动点是 $\mathcal{T}$ 的顶点。

命题的证明。元素 a^m 固定 $\langle a\rangle$，且不固定它的任何邻点

$$t\langle a\rangle, at\langle a\rangle, a^2t\langle a\rangle, \cdots, a^{km-1}t\langle a\rangle$$

因为 $k \geq 2$, 所以 a^m 的不动点子树 $\mathcal{T}_{a^m}$ 包含于 $\widetilde{\mathcal{T}}$ 中。现在令 $wt^{-1}\langle a\rangle$ 为 $\widetilde{\mathcal{T}}$ 的一个顶点，并将 $w = a^{n_1}t^{-1}a^{n_2}t^{-1}\cdots a^{n_l}$ 写作某个 $l \in \mathbb{N}_+$ 和 n_1, ..., $n_l \in \mathbb{N}$, 于是

$$\begin{aligned} a^m wt^{-1} &= a^m a^{n_1}t^{-1}a^{n_2}t^{-1}\cdots a^{n_l}t^{-1} = a^{n_1}t^{-1}a^{km}a^{n_2}t^{-1}\cdots a^{n_l}t^{-1} \\ &= a^{n_1}t^{-1}a^{n_2}t^{-1}a^{k^2m}\cdots a^{n_l}t^{-1} = \cdots = a^{n_1}t^{-1}a^{n_2}t^{-1}\cdots a^{n_l}t^{-1}a^{k^l m} \end{aligned}$$

因此 $a^m(wt^{-1}\langle a\rangle) = wt^{-1}\langle a\rangle$。我们由此得出 $\mathcal{T}_{a^m} = \widetilde{\mathcal{T}}$。 $\square$

~设 ξ_1, ξ_2 是 $\mathcal{T}$ 的不同端点，并将它们与从 $\langle a\rangle$出发的 $\mathcal{T}$ 中的测地线对应。设 $\xi_1 \setminus \xi_2$的一个顶点为 $gt^{-1}\langle a\rangle$，则 $(gt^{-1})a^m(gt^{-1})^{-1}$ 固定 ξ_1，但不固定 ξ_2。

~因此，这些可 amenable 子群 $\mathrm{Stab}_G(\xi)$ $\xi \in \partial\mathcal{T}$ 两两不同；由于 $m \geq 2$，这类子群有不可数多个。命题得证。□

4.3. 性质（CS）。如果一个可数群 G 满足性质（CS），那么对于每个弱包含于左正则表示 λ 的酉表示 $\pi\colon G \to B(\mathcal{H})$，都存在 $B(\mathcal{H})$强算子拓扑中 $\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ 的一个邻域 U，使得 $\pi^{-1}(U)$包含于可 amenable 根 $R_a(G)$。回忆一下，若对所有 $f \in \mathbb{C}[G].$，$\|\pi(f)\| \leq \|\lambda(f)\|$，则称 π 弱包含于 λ。这一概念由[BKKO17] 引入，作为群 G 满足 Connes–Sullivan 关于连通李群的子群在齐性空间上 amenable 地作用的猜想的一个充分条件；该猜想由 R. Zimmer [Zim78]证明。已知，具有 $H^2_{\mathrm{b}}(G, \ell^2(G/R_a(G))) \neq 0$的线性群和离散群 G 满足性质（CS） [BKKO17，定理 8.4 和 8.6]。

性质（CS）强于 C*-单纯性：每个具有性质（CS）且可 amenable 根平凡的群都是 C*-单群 [BKKO17，命题 8。2]事实上，没有非平凡有限正规子群且没有可 amenable 的正规样子子群的离散群是 C*-单群 [BKKO17，定理 6。2], 而性质（CS）意味着不存在可 amenable 的正规样子子群。要看出这一点，只需注意，若子群 $H \subseteq G$ 是可 amenable 且近正规的，那么其准正则表示 $\lambda_{G/H}$ 弱包含于左正则表示中，但 G 在 $\lambda_{G/H}$ 下的像在强算子拓扑中不是离散的。结合定理C，可得以下结论。

推论 4.4。设 G 是一个具有有限可 *amenable* 根的可数群，并假设存在一个非退化的 $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$，它允许一个可 *amenable* 边界 μ*-SRS*，且该边界不同于 G的某个有限正规子群上的狄拉克质量。那么 G 不具有性质（*CS*）。

事实上，可 amenable 边界 μ-SRS η 使我们能够显式构造 G 的一个酉表示，从而见证性质（CS）的失效。沿用 [BdlH20 中的记号，F.5], 我们定义直积分 $\mathcal{H}_\Pi$ of $(\ell^2(G/H))_{H \in \mathrm{Sub_{am}}(G)}$为如下希尔伯特空间

$$\mathcal{H}_\Pi = \int_{\mathrm{Sub_{am}}(G)} \ell^2(G/H)\, \mathrm{d}\eta(H),$$

也就是说，$\mathcal{H}_\Pi$ 由所有映射 $H \in \mathrm{Sub_{am}}(G) \mapsto v_H \in \ell^2(G/H)$ 组成，满足

$$\int_{\mathrm{Sub_{am}}(G)} \|v_H\|^2_{\ell^2(G/H)}\, \mathrm{d}\eta(H) < \infty$$

并且对每个 $g \in G$，$H \in \mathrm{Sub_{am}}(G) \mapsto (v_H)_{gH}$ 都是可测的。于是，$\mathcal{H}_\Pi$ 是一个希尔伯特空间，其内积为

$$\langle v, w \rangle = \int_{\mathrm{Sub_{am}}(G)} \langle v_H, w_H \rangle_{\ell^2(G/H)}\, \mathrm{d}\eta(H)$$

对每个 $v = (v_H)_H$, $w = (w_H)_H \in \mathcal{H}_\Pi$。

定义 4.5. 我们将所有拟正则表示族 $(\lambda_{G/H})_{H \in \mathrm{Sub_{am}}(G)}$ 的直积分定义为酉表示 $\Pi\colon G \to B(\mathcal{H}_\Pi)$，其定义如下

$(\Pi(g)v)_H = \lambda_{G/H}(g)v_H$ 对每个 $g \in G$、 $v \in \mathcal{H}_\Pi$ 和 $H \in \mathrm{Sub_{am}}(G)$均成立。定义 π 为由向量 $v = (\delta_H)_{H\in \mathrm{Sub_{am}}(G)} \in \mathcal{H}_\Pi$生成的 Π 的循环子表示。

每个准正则表示 $\lambda_{G/H}$ 都弱包含于左正则表示 λ，因为 $H \in \mathrm{Sub_{am}}(G)$。因此，$\pi$ 弱包含于 λ。下面的结果表明，这种表示提供了一个具体的见证，说明群G不满足性质（CS）。

命题 4.6. 设 G 是一个具有有限可 *amenable* 根的可数群，并假设存在一个非退化的 $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$，它具有一个可 *amenable* 边界 μ*-SRS*，且该边界不同于 G的某个有限正规子群上的狄拉克质量。

令 π 为由向量 $v = (\delta_H)_{H\in \mathrm{Sub_{am}}(G)}$ 生成的直积分表示 Π 的循环子表示（定义 4.5）。那么， $B(\mathcal{H}_\pi)$中的恒等算子在强算子拓扑下不是孤立点。

证明。 我们证明，对于 $B(\mathcal{H}_\pi)$ 中单位元的每个强算子拓扑邻域 U，都存在一个元素 $g \in G \setminus \{e_G\}$，使得 $\pi(g) \in U$。由于表示 π 由v生成，只需对如下形式的邻域验证这一点

$$U = \{T \in B(\mathcal{H}_\pi) : \left\|\pi(g_i^{-1})T\pi(g_i)v - v\right\|_{\mathcal{H}_\pi} < \varepsilon \text{ for all } i = 1, \dots, m\}$$

对每个 $\varepsilon > 0$和 g_1、……、 $g_m \in G$。

现在，可以仿照定理 C 的证明，来处理 $j = 2$。事实上，式 (4.2) 中的收敛性与作用的非奇异性 $G \curvearrowright \mathrm{Sub_{am}}(G)$ 合在一起意味着存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 $(w_n)_{n\geq 0} \in G^{\mathbb{N}}$， 使得 $\eta(\{H \in \mathrm{Sub_{am}}(G) : w_k h w_k^{-1} \in H\}) \geq 1-\delta$，其中 $\delta > 0$ 的选取满足

$$\begin{aligned}(g_i)_*\eta(\{H \in \mathrm{Sub_{am}}(G) : w_k^{-1}hw_k \in H\}) &= \eta(\{H \in \mathrm{Sub_{am}}(G) : w_k^{-1}hw_k \in g_i H g_i^{-1}\}) \\ &\geq 1 - \varepsilon^2/2m\end{aligned}$$

对每个 $i = 1$、……、 m。令 $g \coloneqq w_k^{-1}hw_k \in G \setminus \{e_G\}$。由并集界可得

$$\eta(\{H \in \mathrm{Sub_{am}}(G) : g_i^{-1}gg_i \in H\}) > 1 - \varepsilon^2/2.$$

我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\pi(g_i^{-1}gg_i)v - v\right\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 &= \int_{\mathrm{Sub_{am}}(G)} \left\|\lambda_{G/H}(g_i^{-1}gg_i)\delta_H - \delta_H\right\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \mathrm{d}\eta(H) \\ &= 2\eta(\{H \mid g_i^{-1}gg_i \notin H\}) \leq \varepsilon^2\end{aligned}$$

对每个 $i = 1$、……、 m，最终可得 $\pi(g) \in U$。 □

References

[ABB+17] Miklos Abert、Nicolas Bergeron、Ian Biringer、TsachikGelander、Nikolay Nikolov、JeanRaim- bault 和 Iddo Samet。关于李群中格序列的 L^2-不变量的增长。*Ann. of Math. (2)*, 185(3):711–790，2017年。[Cited 见第1页。][ADR00] C. Anantharaman-Delaroche 和 J. Renault。*Amenable groupoids*，第36卷，*Monographies de L'Enseignement Mathématique [Monographs of L'Enseignement Mathématique]*。L'Enseignement Math´ematique，日内瓦，2000年。前言由 Georges Skandalis 撰写，附录 B 由 E. Germain 撰写。[Cited 见第4页。]

[AGV14] Mikl´os Ab´ert、Yair Glasner 和 B´alint Vir´ag。关于不变随机子群的 Kesten 定理。 *Duke Math. J.*，163(3):465–488，2014年。[Cited 见第7页。][Alp25] Andrei Alpeev。通过泊松边界刻画可数群的 C*-单纯性。2025年。 [Cited on page 4.][BB05] James Belk 和 Kenneth S. Brown。Thompson 群 F中元素的森林图。*Internat. J. Algebra Comput.*，15(5-6):815–850，2005年。[Cited on 第13页。][BCdlH94] Mohammed Bekka、Michael Cowling 和 Pierre de la Harpe。某些约化C^*-代数为单的群。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*，(80):117–134 (1995)，1994年。 [Cited见第1页。][BdlH20] Bachir Bekka 和 Pierre de la Harpe。 *Unitary representations of groups, duals, and charac-ters*，第250卷，*Mathematical Surveys and Monographs*。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2020年。 [Cited on page 21.][BE12] Laurent Bartholdi 和 Anna Erschler。置换扩张的增长。 *Invent. Math.*，189(2):431–455，2012年。 [Cited on page 15.][BE17] Laurent Bartholdi 和 Anna Erschler。泊松-富斯滕贝格边界与群的增长。*Probab. Theory Related Fields*，168(1-2):347–372，2017年。[Cited on 第15页。][BFS14] Uri Bader、Alex Furman 和 Roman Sauer。 L^2-上正规性的弱概念及其秩以内的消失。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(12):3177–3189，2014年。[Cited 见第4页。][BKKO17] Emmanuel Breuillard、Mehrdad Kalantar、Matthew Kennedy 和 Narutaka Ozawa。离散群的 C^*-单纯性与唯一迹性质。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*，126:35–71，2017年。[Cited on 第1、3、4、16和21页。][BLT19] Oren Becker、Alexander Lubotzky 和 Andreas Thom。稳定性与不变随机子群。 *Duke Math. J.*，168(12):2207–2234，2019年。[Cited on 第19页。][BO18] Erik B´edos 和 Tron Omland。关于既为单且/或具有唯一迹的约化扭曲群 C*-代数。 *J. Noncommut. Geom.*，12(3):947–996，2018年。[Cited on 第9页。][Bow15] Lewis Bowen。自由群的不变随机子群。 *Groups Geom. Dyn.*，9(3):891–916，2015年。 [Cited on page 1.][BS62] Gilbert Baumslag 和 Donald Solitar。某些由两个生成元、一个关系定义的非 Hopf 群。*Bull. Amer. Math. Soc.*，68:199–201，1962年。[Cited on 第18页。][BSW94] J. J. A. M. Brands、F. W. Steutel 和 R. J. G. Wilms。离散样本中极大值的数量。 *Statist. Probab. Lett.*，20(3):209–217，1994年。 [Cited on page 10.][CF25] Kunal Chawla 和 Joshua Frisch。泊松边界的不可实现性。2025年。 [Cited on第14页。][CFI16] Indira Chatterji、Talia Fern´os 和 Alessandra Iozzi。中位数类与 CAT(0) 立方复形上作用的超刚性。 *J. Topol.*，9(2):349–400，2016年。附录由 Pierre-Emmanuel Caprace 撰写。[Cited 见第4页。][CFP96] James W. Cannon、William J. Floyd 和 Walter R. Parry。Richard Thompson 群简介。 *Enseign. Math. (2)*，42(3-4):215–256，1996年。[Cited 见第3页。][CGdlS21] Alessandro Carderi、Damien Gaboriau 和 Mikael de la Salle。图的非标准极限及若干轨道等价不变量。 *Ann. H. Lebesgue*，4:1235–1293，2021年。 [Cited on page 7.][CGLMS25] Alessandro Carderi、Damien Gaboriau、Fran¸cois Le Maˆıtre 和 Yves Stalder。关于 Baumslag-Solitar 群的子群空间 I：完美核与表型。 *Rev. Mat. Iberoam.*，41(5):1711–1758，2025年。[Cited 见第18和19页。][Cor] Yves Cornulier。Baumslag-Solitar 群 BS(2, 3) 是否包含一个具有任意多个根的非平凡元素？（答复）。MathStackExchange。https://math.stackexchange.com/q/4287709（版本：2021-10-26）。[Cited on 第4、18和19页。][Cor14] Yves Cornulier。拓扑全群（据 Matui、Juschenko、Monod 等）。*Astérisque*，(361):Exp. No. 1064, viii, 183–223，2014年。[Cited on 第16页。][dlHP11] Pierre de la Harpe 和 Jean-Philippe Pr´eaux。 C^*-单群：融合自由积、HNN 扩张及 3 维流形的基本群。 *J. Topol. Anal.*，3(4):451–489，2011年。[Cited 见第18页。]

[DM14] Artem Dudko 和 Konstantin Medynets。Higman-Thompson 群的有限因子表示。 *Groups Geom. Dyn.*，8(2):375–389，2014年。[Cited 见第 3 页。][EG93] G. A. Elliott 和 T. Giordano。离散群的可和作用。 *Ergodic Theory Dynam.Systems*，13(2):289–318，1993年。[Cited on 第 4 页。][Eis09] Bennett Eisenberg。并列打破纪录的选手人数。 *Statist. Probab. Lett.*，79(3):283–288，2009年。[Cited on 第 10 页。][EK23] Anna Erschler 和 Vadim A. Kaimanovich。群上的树状结构及其相关边界。 *Geom. Funct. Anal.*，33(3):694–748，2023年。[Cited on 第 10 页。][Ers11] Anna Erschler。花环积和自由后交换群上随机游走的泊松-富斯滕贝格边界。 *Comment. Math. Helv.*，86(1):113–143，2011年。[Cited on 第 8 页。][FG10] Hillel Furstenberg 和 Eli Glasner。平稳动力系统。载于 *Dynamical numbers—interplay between dynamical systems and number theory*，第 532 卷 *Contemp. Math.*，第 1–28 页。Amer. Math. Soc.，罗德岛州普罗维登斯，2010年。[Cited on 第 5 页和第 16 页。][FHTVF19] Joshua Frisch、Yair Hartman、Omer Tamuz 和 Pooya Vahidi Ferdowsi。Choquet-Deny 群与无限共轭类性质。 *Ann. of Math. (2)*，190(1):307–320，2019年。[Cited 见第 3 页。][Fur73] Harry Furstenberg。齐性空间上的边界理论与随机过程。载于 *Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972)*，第 XXVI 卷 *Proc. Sympos. Pure Math.*，第 193–229 页。Amer. Math. Soc.，罗德岛州普罗维登斯，1973年。[Cited on 第 7 页。][Fur02] Alex Furman。群上的随机游走与随机变换。载于 *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*，第 931–1014 页。North-Holland，阿姆斯特丹，2002年。[Cited on 第 5 页。][GMT24] Elia Gorokhovsky、Nicol´as Matte Bon 和 Omer Tamuz。有限生成群的定量诺伊曼引理。 *Israel J. Math.*，262(1):487–500，2024年。[Cited 见第 14 页。][GW16] Eli Glasner 和 Benjamin Weiss。非奇异作用的弱混合性质。 *ErgodicTheory Dynam. Systems*，36(7):2203–2217，2016年。[Cited on 第 7 页。][HK23] Yair Hartman 和 Mehrdad Kalantar。平稳 C^*-动力系统。 *J. Eur. Math. Soc.(JEMS)*，25(5):1783–1821，2023年。附录由 Uri Bader、Hartman 和 Kalantar 合著。[Cited 见第 1、2、3、4、6 和 9 页。][HY18] Yair Hartman 和 Ariel Yadin。交集不变随机子群的富斯滕贝格熵。 *Compos. Math.*，154(10):2239–2265，2018年。[Cited 见第 1 页。][Jaw94] Wojciech Jaworski。局部紧群开子半群的指数有界性与可 amenability。 *Canad. J. Math.*，46(6):1263–1274，1994年。[Cited on 第 6 页。][Kai83] Vadim A. Kaimanovich。具有非平凡逃逸边界的非阿贝尔离散群实例。 *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*，123:167–184，1983年。微分几何、李群与力学，V。[Cited 见第 8 页。][Kai05] Vadim A. Kaimanovich。可 amenability 与刘维尔性质。第 149 卷，第 45–85 页。数学中的概率论。[Cited on 第 4 页。][Ken20] Matthew Kennedy。 C^*-简单性的内在刻画。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.(4)*，53(5):1105–1119，2020年。[Cited on 第 1 页。][KK17] Mehrdad Kalantar 和 Matthew Kennedy。离散群约化 C^*-代数的边界。 *J. Reine Angew. Math.*，727:247–267，2017年。[Cited on 第 1 页和第 9 页。][LB M18] Adrien Le Boudec 和 Nicol´as Matte Bon。同胚群的子群动力学与 C^*-简单性。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，51(3):557–602，2018年。 [Cited on pages 3,第 5 页和第 14 页。][Lev07] Gilbert Levitt。广义 Baumslag-Solitar 群的自同构群。 *Geom.Topol.*，11:473–515，2007年。[Cited on 第 18 页。][Lev15] Gilbert Levitt。Baumslag-Solitar 群的商群与子群。 *J. Group Theory*，18(1):1–43，2015年。 [Cited on page 20.][LM16] Yash Lodha 和 Justin Tatch Moore。一个由分段射影同胚构成的非可 amenable 有限表示群。 *Groups Geom. Dyn.*，10(1):177–200，2016年。[Cited 见第 3 页。]

[MMS04] Igor Mineyev、Nicolas Monod 和 Yehuda Shalom。双曲群的理想双测地线及其应用。 *Topology*，43(6):1319–1344，2004年。[Cited 见第 4 页。[MS04] Nicolas Monod 和 Yehuda Shalom。负曲率空间中的余循环超刚性与有界上同调。 *J. Differential Geom.*，67(3):395–455，2004年。[Cited on 第 4 页。[MS06] Nicolas Monod 和 Yehuda Shalom。轨道等价刚性与有界上同调。*Ann. of Math. (2)*，164(3):825–878，2006年。[Cited on 第 4 页。[Osi16] Denis Osin。拟双曲群。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，368(2):851–888，2016年。[Cited 见第 4 页。[Pow75] Robert T. Powers。由两个生成元生成的自由群所关联的 C*-代数的简单性。 *Duke Math. J.*，42:151–156，1975年。[Cited 见第 1 页。[Qi97] Yongcheng Qi。关于离散样本中极大值个数的注记。 *Statist. Probab. Lett.*，33(4):373–377，1997年。 [Cited on page 10.[Ser77] Jean-Pierre Serre。 *Arbres*， *amalgames*，SL_2。Ast´erisque，第 46 号。法国数学会，巴黎，1977年。附英文摘要，由 Hyman Bass 协助撰写。[Cited 见第 18 页。[ST10] Roman Sauer 和 Andreas Thom。用于计算群与群胚的 L^2-Betti 数的谱序列。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*，81(3):747–773，2010年。[Cited on page 7.[SZ94] Garrett Stuck 和 Robert J. Zimmer。高秩半单群遍历作用的稳定子。 *Ann. of Math. (2)*，139(3):723–747，1994年。[Cited 见第 1 页。[Tit70] Jacques Tits。关于树的自同构群。载于 *Essays on Topology andRelated Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)*，第 188–211 页。施普林格，纽约-柏林，1970年。 [Cited on page 19.[Var86] Nicholas Th. Varopoulos。群与簇上的势论。 *C. R. Acad.Sci. Paris Sér. I Math.*，302(6):203–205，1986年。[Cited on 第 8 页。[Why01] Kevin Whyte。高阶鲍姆斯拉格-索利塔群的大尺度几何。 *Geom. Funct.Anal.*，11(6):1327–1343，2001年。[Cited on 第 18 页。[Zim78] Robert J. Zimmer。可平均遍历群作用及其在随机游走泊松边界上的应用。 *J. Functional Analysis*，27(3):350–372，1978年。[Cited 见第 4 页和第 21 页。]*Email address*，Anna Cascioli：acasciol@uni-muenster.deUniversity of Münster, Einsteinstrasse 62, Münster 48149, Germany*URL*：https://annacascioli.github.io/*Email address*，Mart´ın Gilabert Vio：gilabert@math.univ-lyon1.fr, martingilabertvio@gmail.comInstitut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre1918, 69622 Villeurbanne, France*URL*：https://martingilabertvio.github.io/*Email address*，Eduardo Silva：eduardo.silva@uni-muenster.de, edosilvamuller@gmail.comUniversity of Münster, Einsteinstrasse 62, Münster 48149, Germany*URL*：https://edoasd.github.io/eduardo_silva_math/