arXiv:2603.28352v1 [math.NA] 30 Mar 2026

五次方程根的简单三角分类

Sawon Pratiher*

2022年3月19日

摘要

本文提出一种简单的三角方法，无需解方程即可确定五次方程有多少个实根、多少个复根。该方法将无四次项五次方程 $t^5+mt^3+nt^2+pt+q=0$ with $m<0$ 转化为三角方程 $f(\theta)=\alpha\cos^2\theta+\beta\cos\theta+\cos 5\theta+\gamma=0$，其依据是切比雪夫恒等式 $16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta=\cos 5\theta$。推导过程计算量小，概念上也很自然，将四次方程情形推广到了五次方程。由于阿贝尔–鲁菲尼定理指出，五次方程一般不存在代数解，因此，用一个简单的三角判据来判断其根的性质，尤其具有吸引力。

1 引言

五次方程在数学史上占据着独特的地位。它是第一个被证明不存在一般代数解的次数——阿贝尔 [1]证明了这一点，伽罗瓦后来又作了进一步阐释——这标志着一个转折点，并催生了现代代数。然而，五次多项式根的性质——实根有多少个——远比求出这些根本身简单，因此人们或许会期待相应地得到一个更简单的答案。

对于二次方程，判别式 b^2-4ac 可以立即给出答案。Loh [4]最近指出，甚至求根公式本身也有一种简单而自然的证明，或许早在数千年前就能被发现。对于四次多项式，同样的三角方法表明，只需一次代换，就能将根的分类问题转化为对$a\cos\theta+\cos 4\theta+b=0$的分析，用一道初等练习取代四次多项式繁复难用的判别式。

本文将同一思路推广至五次多项式。切比雪夫多项式 $T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$ 满足 $T_5(\cos\theta)=\cos 5\theta$，这一恒等式对五次多项式所起的结构性作用，与恒等式 $8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1=\cos 4\theta$ 对四次多项式所起的作用相同。通过代换 $t=u\cos\theta$ 匹配系数，可消去无四次项五次方程的首项和三次项，留下一个关于 $\cos^2\theta$、$\cos\theta$、$\cos 5\theta$及常数的剩余方程。统计该函数在 $[0,\pi]$上的零点数，并辅以边界符号分析，考察

*印度理工学院克勒格布尔分校，印度西孟加拉邦 721302。本文的研究成果，源于作者自初次在学校接触代数课程以来所开展研究的最终汇总。（电子邮件：sawon1234@gmail.com）

代换区间之外的根，即可将实根完整分类为一个、三个或五个。

推导只用到了切比雪夫恒等式、介值定理，以及有界区间之外三阶导数的正性。每一步都是常规计算。希望读者回想初次接触多项式方程时的情景，并体会余弦函数有界且振荡的特性如何使五次多项式的根结构在几何上清晰可见。

本文中所有多项式均为实系数，因此复根总是成共轭对出现。实系数且首项系数为正的五次多项式满足$P(t) \to +\infty$当 $t \to +\infty$且 $P(t) \to -\infty$当 $t \to -\infty$，从而保证至少有一个实根。因此，五次多项式恰有一个、三个或五个实根。

2 推导

2.1 无四次项五次方程

每个首一五次多项式 $z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ 都可以通过切尔恩豪斯代换 $t = z - a_4/5$ 化为无四次项的形式——其中不含 z^4 项。这是标准的变量代换（例如参见 [3]），所得方程形式如下：

$$P(t) = t^5 + mt^3 + nt^2 + pt + q = 0. \tag{1}$$

根据韦达关系 [7],，五个根满足 $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 0$，因此五个根的质心位于原点。知道其中任意四个根，就能确定第五个根。

2.2 切比雪夫恒等式

我们的方法的核心恒等式是

$$16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta = \cos 5\theta, \tag{2}$$

对所有 $\theta \in \mathbb{R}$ 均成立。这不过是在说，五次第一类切比雪夫多项式 $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ 满足 $T_5(\cos\theta) = \cos 5\theta$。切比雪夫多项式历史悠久且影响深远，源自切比雪夫在 19 世纪 50 年代对逼近理论的研究（参见例如 [5]）；它们所蕴含的多角恒等式自欧拉时代以来便已为人所知。或许较少受到关注的是，它们与多项式方程的根的结构之间存在着直接联系。

2.3 三角代换

关键步骤如下。假设 $m < 0$，并设

$$u = \frac{2\sqrt{-m}}{\sqrt{5}}. \tag{3}$$

（ $m \geq 0$ 的情形将在第7节讨论。）将 $t = u\cos\theta$ 代入（1），并将等式两边除以 $u^5/16$，得到

$$16\cos^5\theta + \frac{16m}{u^2}\cos^3\theta + \frac{16n}{u^3}\cos^2\theta + \frac{16p}{u^4}\cos\theta + \frac{16q}{u^5} = 0. \tag{4}$$

在 (3) 中对 u 的选取经过了专门设计，使得 $16m/u^2 = 16m/(-4m/5) = -20$，从而 $\cos^3\theta$ 的系数恰好与切比雪夫恒等式 (2) 匹配。完成这一匹配后，(4) 变为

$$16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + \alpha\cos^2\theta + (\beta+5)\cos\theta + \gamma = 0, \tag{5}$$

其中我们定义三**角参数**:

$$\boxed{\alpha = \frac{16n}{u^3}, \qquad \beta = \frac{16p}{u^4} - 5, \qquad \gamma = \frac{16q}{u^5}.} \tag{6}$$

从 (5) 中减去切比雪夫恒等式 (2)——也就是说，根据 (2)，左边的各项 $16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ 等于 $\cos 5\theta$——我们得到**约化三角方程**:

$$\boxed{f(\theta) = \alpha\cos^2\theta + \beta\cos\theta + \cos 5\theta + \gamma = 0.} \tag{7}$$

至此，整个约化过程就完成了。只需一次代换、一次除法，以及一次切比雪夫恒等式的应用。五次多项式已转化为一个关于 θ 的三角方程，其中只有三个参数： α、 β 和 γ。

注 1。 当 $n = 0$ （无四次项五次方程没有 t^2 项）时，我们有 $\alpha = 0$，约化方程便简化为 $f(\theta) = \beta\cos\theta + \cos 5\theta + \gamma = 0$，其结构形式与四次方程的三角方程完全相同——一个余弦项加上一个多角余弦项，再加一个常数。$\cos^2\theta$ 项是五次多项式中真正的新特征。

2.4 为什么成立：双射

由于 $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ 是连续且严格递减的双射，因此映射 $\theta \mapsto u\cos\theta$ 是从 $[0,\pi]$ 到 $[-u,u]$ 的双射。直接计算可得:

命题2。对所有 $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta) = \frac{16}{u^5}P(u\cos\theta). \tag{8}$$

证明。 方程 (5) 写作 $16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + \alpha\cos^2\theta + (\beta+5)\cos\theta + \gamma = 16P(u\cos\theta)/u^5$，根据 (6) 中 α, β, γ 的定义，该式成立。利用切比雪夫恒等式，我们可以将前两项与 $5\cos\theta$ 替换为 $\cos 5\theta$，从而得到左侧的 $f(\theta)$。 □

直接推论是:

推论 3。 f 在 $[0,\pi]$ 中的零点与 P 在 $[-u,u]$ 中的根一一对应。具体而言，$\theta_0 \in [0,\pi]$ 满足 $f(\theta_0) = 0$，当且仅当 $t_0 = u\cos\theta_0$ 是 P 的一个根。

在端点处计算 (8):

$$f(0) = \frac{16\,P(u)}{u^5}, \qquad f(\pi) = \frac{16\,P(-u)}{u^5}. \tag{9}$$

由于 $u^5 > 0$, $f(0)$ 的符号与 $P(u)$ 的符号相同，而 $f(\pi)$ 的符号与$P(-u)$ 的符号相同。用三角参数表示:

$$f(0) = \alpha + \beta + 1 + \gamma, \qquad f(\pi) = \alpha - \beta - 1 + \gamma. \tag{10}$$

2.5 那么 [-u,u] 之外的根呢?

代换 $t = u\cos\theta$ 只能捕捉 $[-u, u]$ 中的根。对于四次多项式，外部分析很简单： P 在 $[-u, u]$ 之外是凸的，因此每侧至多有一个根。对于五次多项式，论证只稍微复杂一些，而非对称端行为（当 $t \to +\infty$ 时，$P(t) \to +\infty$；当 $t \to -\infty$ 时， $P(t) \to -\infty$）则带来了新的变化。

引理 4 （三阶导数正性）。 若 $m < 0$，则 $P'''(t) > 0$ 对所有 $|t| > u$成立。

证明。 我们计算 $P'''(t) = 60t^2 + 6m$。对于 $|t| > u$，有 $t^2 > u^2 = -4m/5$，所以 $60t^2 > -48m$，因此 $P'''(t) = 60t^2 + 6m > -48m + 6m = -42m > 0$。 □

P'''为正，意味着 P''在每条半直线上严格递增，进而意味着 P' 在每条半直线上至多有一个拐点，最终得到:

推论 5. 多项式 P 在半直线(u, ∞) 和$(-\infty, -u)$上各至多有三个根。一般而言（以及本文的所有示例中），每条半直线上至多有一个根。

与四次多项式的关键区别在于非对称端行为。由于当 $t \to +\infty$ 时， $P(t) \to +\infty$:

- 在 (u, ∞) 上：当且仅当 $P(u) < 0$，即 $f(0) < 0$ 时，至少有一个根。
- 在 $(-\infty, -u)$ 上：由于当 $t \to -\infty$ 时， $P(t) \to -\infty$，因此当且仅当$P(-u) > 0$，即 $f(\pi) > 0$ 时，至少有一个根。

注意这种不对称性：在右侧，外部根要求 $f(0) < 0$ (多项式先降到零以下，然后再上升至 $+\infty$)；在左侧，则要求 $f(\pi) > 0$ (多项式先升到零以上，然后再骤降至 $-\infty$)。这就是奇次多项式与偶次多项式之间的奇偶性反转。

命题 6 (外部根检测)。 在一般情况下（每条半直线上至多有一个根），外部根数为

$$N_{\text{ext}} = N_{\text{ext}}^{+} + N_{\text{ext}}^{-}, \quad \textit{where} \quad N_{\text{ext}}^{+} = \mathbf{1}_{f(0)<0}, \quad N_{\text{ext}}^{-} = \mathbf{1}_{f(\pi)>0}. \tag{11}$$

3 临界点分析

为了计算 f 在 $[0,\pi]$上的零点，我们研究其临界点。对式（7）求导：

$$f'(\theta) = -2\alpha\cos\theta\sin\theta - \beta\sin\theta - 5\sin 5\theta. \tag{12}$$

利用 $\sin 5\theta = \sin\theta \cdot U_4(\cos\theta)$，其中 $U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$ 是四次第二类切比雪夫多项式 [5]，，并注意到在 $(0,\ \pi)$ 上 $\sin\theta > 0$，f 的内部临界点满足**临界点方程**：

$$g(x) := 80x^4 - 60x^2 + 2\alpha x + (\beta + 5) = 0, \quad x = \cos\theta \in (-1, 1). \tag{13}$$

命题 7. 函数 f 在开区间 $(0,\ \pi)$内至多有四个临界点。因此，f 在 $[0,\pi]$ 中至多有五个零点——这与五次多项式至多有五个实根相符。

证明。 方程 (13) 是关于 x 的四次多项式，因此在 $(-1,\ 1)$ 内至多有四个实根；每个根都唯一对应一个 $\theta = \arccos x \in (0,\ \pi)$。内部临界点至多有四个，因此 f 至多有五个单调区间，进而至多有五个零点。 □

备注 8。 当 $\alpha = 0$ （即 $n = 0$）时，临界点方程化简为双二次方程$80x^4 - 60x^2 + (\beta + 5) = 0$，可用闭式求解：

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - (\beta + 5)}}{8}.$$

这给出了仅用 β 表示 f 的显式临界点，使零点计数完全初等化。

一个有用的整体界为：

引理 9. 对于所有 θ，$|f(\theta) - \gamma| \le |\alpha| + |\beta| + 1$。

证明。 $|\alpha\,\text{余弦}^2\theta + \beta\,\text{余弦}\,\theta + \text{余弦}\ 5\theta| \le |\alpha| \cdot 1 + |\beta| \cdot 1 + 1$。 □

4 根的分类

令 N_{int} 表示 f 在 $[0,\pi]$ 中的零点数，令 N_{ext} 表示 P 在$[-u,u]$之外的根数。由推论 3 和命题 6 可得：

$$N_{\text{real}} = N_{\text{int}} + N_{\text{ext}} \ \in \ \{1, 3, 5\}. \tag{14}$$

现在给出三个分类定理。

定理 10 （五个实根）。 $P(t) = 0$的所有五个根均为实根，当且仅当 $N_{\text{int}} + N_{\text{ext}} = 5$。所有五个根都位于 $[-u,u]$ 的一个充分条件是 $f(0) \ge 0$且 $f(\pi) \le 0$，并且 f 在 $[0,\pi]$ 中有五个零点。在这种情况下，这些根是

$$t_k = u\cos\theta_k, \qquad k = 1, \ldots, 5,$$

其中 $0 \le \theta_1 < \cdots < \theta_5 \le \pi$ 是 f的五个零点。

证明。 根据命题 6， $f(0) \geq 0$ 表示 $P(u) \geq 0$，因此 N_{ext}^{+} 为偶数（故通常为零）。同理， $f(\pi) \leq 0$ 表示 $P(-u) \leq 0$，因此 N_{ext}^{-} 为偶数（故为零）。所以，五个根都必须位于内部。 □

定理 11 (三个实根)。 五次多项式 $P(t) = 0$ 恰有三个实根（以及一对复根共轭对）当且仅当 $N_{\text{int}} + N_{\text{ext}} = 3$。一般情形如下：

(a) $N_{\text{int}} = 3$ 且 $N_{\text{ext}} = 0$：三个实根均位于 $[-u, u]$ 中。这要求 $f(0) \geq 0$、$f(\pi) \leq 0$，并且 f 在 $[0, \pi]$ 中恰有三个零点。*(b)* $N_{\text{int}} = 1$ 且 $N_{\text{ext}} = 2$：每一侧各有一个内部根和一个外部根。当 $f(0) < 0$ 且 $f(\pi) > 0$ 时会出现这种情况。*(c)* $N_{\text{int}} = 2$ 且 $N_{\text{ext}} = 1$：两个内部根和一个外部根。当 $f(0) < 0$ 或 $f(\pi) > 0$ 中恰有一个成立时，会出现这种情况。

定理 12 (一个实根)。 五次多项式 $P(t) = 0$ 恰有一个实根（以及两对复根共轭对）当且仅当 $N_{\text{int}} + N_{\text{ext}} = 1$。一般情形如下：

(a) f 在 $[0, \pi]$ 和 $N_{\text{ext}} = 0$ 中恰有一个零点：唯一的实根位于 $[-u, u]$。

(b) f 在 $[0, \pi]$ 和 $f(\pi) > 0$ 中没有零点：唯一的实根位于 $(-\infty, -u)$。*(c)* f 在 $[0, \pi]$ 和 $f(0) < 0$ 中没有零点：唯一的实根位于 (u, ∞)。

在所有情况下，至少存在一个实根这一结论都源于多项式的奇数次。

4.1 实用的决策程序

实际使用时，分类方法包括以下步骤 s:

1. 根据 (6) 计算 $u = \overline{2\sqrt{-m}/5}$ 和三角参数 α， β， γ。2. 求出 $f(0) = \alpha + \beta + 1 + \gamma$ 和 $f(\pi) = \alpha - \beta - 1 + \gamma$。3. 确定 N_{ext}：通常， $N_{\text{ext}}^{+} = \mathbf{1}_{f(0)<0}$ 和 $N^{-}{}_{\text{ext}} = \mathbf{1}_{f(\pi)>0}$。4. 通过求解四次多项式 (13) 得到 $x \in (-1, 1)$，进而令 $\theta = \arccos x$，求出 f 在 $(0, \pi)$ 内的临界点。5. 求出 f 在临界点以及 $\theta = 0$， π 处的值。计算符号变化，以确定 N_{int}。6. 得出结论： $N_{\text{real}} = N_{\text{int}} + N_{\text{ext}} \in \{1, 3, 5\}$。

作为方法的 5 个使用示例

推导的计算简便性使其很自然地可以作为一种方法：计算 α, β, γ，考察 $f(\theta)$，然后读出根的结构。

5.1 完美示例：$P(t) = t^5 - 5t^3 + 5t$

首先考虑最优雅的情形：$m = -5$, $n = 0$, $p = 5$, $q = 0$，得到 $u = 2$。参数为 $\alpha = 0$, $\beta = 16 \cdot 5/16 - 5 = 0$, $\gamma = 0$，而约化方程则简单地写作

$$f(\theta) = \cos 5\theta = 0. \tag{15}$$

$[0, \pi]$ 中的零点为 $\theta_k = (2k-1)\pi/10$，对于 $k = 1$，2，3，4，5，而五个实根为

$$t_k = 2\cos\frac{(2k-1)\pi}{10}, \qquad k = 1, \ldots, 5.$$

由于 $P(t) = t(t^4 - 5t^2 + 5)$，四次多项式因子的根为 $t^2 = (5 \pm \sqrt{5})/2$，从而得到五个根 $t = 0$，$\pm\sqrt{(5+\sqrt{5})/2} \approx \pm 1.902$，$\pm\sqrt{(5-\sqrt{5})/2} \approx \pm 1.176$。五个根都位于 $[-2, 2] = [-u, u]$ 中。边界值 $f(0) = 1 > 0$ 和 $f(\pi) = -1 < 0$ 证实了 $N_{\text{ext}} = 0$。

这是双二次方程的五次多项式类比：当所有三角参数都为零时，根在 θ 域中均匀分布，并且在切比雪夫映射下对应于单位根。

5.2 三个实根的示例

例13. 考虑 $P(t) = t^5 - 5t^3 + t - 5 = 0$。这里 $m = -5$, $n = 0$, $p = 1$, $q = -5$，所以 $u = 2$。三角参数为

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{16}{16} - 5 = -4, \qquad \gamma = \frac{16(-5)}{32} = -\frac{5}{2}.$$

约化方程为 $f(\theta) = -4\cos\theta + \cos 5\theta - 5/2 = 0$。边界值为 $f(0) = -4 + 1 - 5/2 = -11/2 < 0$ 和 $f(\pi) = 4 - 1 - 5/2 = 1/2 > 0$。由于 $f(0) < 0$，因此在 $(2, \infty)$ 中至少有一个根；由于 $f(\pi) > 0$，因此在 $(-\infty, -2)$ 中至少有一个根。所以 $N_{\text{ext}} \geq 2$。数值分析表明，恰有一个内部零点，得到 $N_{\text{int}} = 1$ 和 $N_{\text{real}} = 3$。三个实根为 $t \approx -2.043, -1.205, 2.286$，而两个复根构成共轭对 $t \approx 0.481 \pm 0.811i$。

5.3 一个实根的例子

例14。 考虑 $P(t) = t^5 - 5t^3 + t^2 + 2t + 5 = 0$，其具有非零的 t^2 系数。这里 $m = -5$, $n = 1$, $p = 2$, $q = 5$，所以 $u = 2$。参数为

$$\alpha = \frac{16}{8} = 2, \qquad \beta = \frac{32}{16} - 5 = -3, \qquad \gamma = \frac{80}{32} = \frac{5}{2}.$$

约化方程为 $f(\theta) = 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + \cos 5\theta + 5/2 = 0$。边界值为 $f(0) = 2 - 3 + 1 + 5/2 = 5/2 > 0$ 和 $f(\pi) = 2 + 3 - 1 + 5/2 = 13/2 > 0$。由于 $f(0) > 0$，在 $(2, \infty)$ 中没有根。由于 $f(\pi) > 0$，在 $(-\infty, -2)$ 中至少有一个根。数值检验证实，在整个区间 $[0, \pi]$ 上 $f > 0$，因此 $N_{\text{int}} = 0$ 且 $N_{\text{real}} = 1$。唯一的实根是 $t \approx -2.335$，四个复根组成两对共轭对。

这个例子展示了该方法的完整一般性：$\cos^2\theta$ 项（由非零的 $n = 1$ 产生）并非平凡项，但分析过程完全相同。

6 约化五次方程（$n = 0$）

当 $n = 0$ 时，无四次项五次方程没有二次项： $P(t) = t^5 + mt^3 + pt + q$。于是$\alpha = 0$，三角方程化简为

$$f(\theta) = \beta \cos\theta + \cos 5\theta + \gamma = 0,$$

其结构与四次多项式的三角方程完全相同：倾斜项（$\beta \cos\theta$）、振荡项（$\cos 5\theta$）和位移项（γ）。临界点方程变为双二次方程$80x^4 - 60x^2 + （\beta + 5） = 0$，可以用闭式求解。这是五次方程三角法中最简单、最优雅的情形。

7 $m \geq 0$的情形

当 $m \geq 0$时，无法使用代换 $t = u\cos\theta$，其中 $u = 2\sqrt{-m/5}$。原则上，双曲代换 $t = v\cosh\phi$，其中 $v = 2\sqrt{m/5}$，可以通过恒等式 $16\cosh^5\phi - 20\cosh^3\phi + 5\cosh\phi = \cosh 5\phi$，使 $\cosh^3\phi$ 的系数相匹配；但由于 cosh 在 $[0, \infty)$ 上无界且单调递增，零点与根之间的对应关系不够简洁。当 $m = 0$时，切比雪夫恒等式无法吸收 t^3 项（因为该项不存在），因此该方法不适用。这些扩展留待未来研究。

8 与四次多项式的比较

下表总结了四次多项式与五次多项式三角约化之间的相似之处和差异。

特征	**四次多项式**	**五次多项式**
切比雪夫恒等式	$\cos 4\theta$	余弦 5θ
代换	$t = \sqrt{-m}$余弦θ	$t = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{-m}$余弦$\theta$
要求	$m < 0$	$m < 0$
剩余项	$\cos\theta +$ 常数	$\cos^2\theta + \cos\theta +$ 常数
内部零点最大数	4	5
临界点方程	关于 $\cos\theta$ 的三次多项式	关于 $\cos\theta$ 的四次多项式
外部分析	$P'' > 0$ （凸性）	$P''' > 0$
每侧最大外部根数	1	3（一般情况下为 1）
端点行为	$P \to +\infty$ 两侧	$P \to -\infty$ 左， $+\infty$ 右
可能的实根数量	0, 2, or 4	1, 3, or 5

9 讨论

9.1 一般规律

本文针对五次多项式提出的方法，结合类似的四次多项式分析，揭示了一种普遍规律。对于一个 d 次多项式，切比雪夫恒等式 $T_d(\cos\theta) = \cos d\theta$ 可以吸收降幂多项式中最高次项和第三高次项（经过代换 $t = u\cos\theta$，其中 u 取适当值），从而得到一个包含 $\cos^k\theta$ 的余项三角方程，其中 $k = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ d-3$。这个余项的复杂程度随次数增加而上升，但核心机制始终不变：$[0,\pi]$ 上零点与有界区间内的根之间存在双射，再辅以边界符号分析来处理区间外的根。

9.2 为什么五次多项式如此特殊?

阿贝尔–鲁菲尼定理告诉我们，一般五次多项式的根不存在代数公式。布林–杰拉德标准形将五次多项式化为 $t^5 + pt + q = 0$（见 [3]），但即使是这种简化形式，也不存在根式闭式解。我们的三角方法并不求解五次多项式——它只是判定其根的性质——但只需借助切比雪夫恒等式和初等分析，就能做到这一点，从而完全绕开代数上的不可能性。

这里有一种令人欣喜的反讽：那个恒等式（用 $\cos\theta$ 的幂表示 $\cos 5\theta$），本来可以用来求解五次多项式，只要 $\cos 5\theta$ 能用根式求逆（但通常不能），结果却非常适合完成一个更简单的任务：判定这些根是实数还是复数。

9.3 教学价值

秉承 Loh [4], 的精神——他证明了求根公式的推导可以简单到初学代数的学生也能理解——我们希望，这种三角学视角能够揭开高次多项式根的结构之谜。关键的洞见在于，$\cos\theta$ 的有界值域将多项式约束转化为三角约束；这一想法既浅显又有力。只要学过切比雪夫恒等式和介值定理，学生就掌握了分类任意四次或五次多项式的根所需的一切工具，且 $m < 0$。

愿此文能鼓励读者以崭新的眼光看待旧事物：切比雪夫多项式最初源于逼近理论，如今却成为观察多项式根的几何的一种优雅视角。

参考文献

[1] N. H. 阿贝尔，关于代数方程的回忆录，其中证明了一般五次方程不可解，*Œuvres Compl`etes*，第 1 卷，1824 年，第 28–33 页。

[2] I. M. Gelfand、M.M. Kapranov 和 A. V. Zelevinsky，《判别式、结式与多维行列式》，Birkh¨auser，波士顿，1994 年。

[3] R. B. King，《超越四次方程》，Birkh¨auser，波士顿，2009 年。[4] P.-S. Loh，求根公式的一个简洁证明，《style id='6'>arXiv:1910.06709》，2019 年。[5] J. C. Mason 和 D. C. Handscomb，《切比雪夫多项式》，Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2003 年。[6] P. K. Rees，四次方程的判别式，《美国数学月刊》**29**（1922 年），第 4 期，150–153 页。[7] F. Vi`ete，《Opera Mathematica》，莱顿，1646 年。（关于韦达公式的现代处理，参见 D. Cox、J. Little 和 D. O'Shea，《理想、簇与算法》，第 4 版，Springer，2015 年。）