arXiv:2603.28382v1 [math.KT] 30 Mar 2026

基于代数离散莫尔斯理论的 Lawvere 理论 Anick 分解

Mirai Ikebuchi

2026年3月31日

摘要

受 Brown 的坍缩方法（或离散 Morse 理论）的启发，为求得 $\mathbb{Z}$在幺半群环 $\mathbb{Z}M$ 上的自由分解，我们运用代数离散莫尔斯理论计算 Lawvere 理论的同调群，这些同调群定义为某个特定模的 Tor。我们从归一化 bar 分解坍缩的角度，重新诠释由完备项重写系统导出的已知部分自由分解。这一视角得出同调不等式，可用于界定表示中等式公理的数量，并重现群公理化下界等经典结果。我们的主要贡献是将这些分解推广到高维。

1 引言

本文中，我们应用代数离散莫尔斯理论计算 Lawvere 理论的（上）同调群。在陈述结果之前，我们先介绍这项工作的背景与动机。

对于具有表示 $(\Gamma,\ R)$ 的幺半群（或群） M，存在一个 $\mathbb{Z}$ 作为幺半群环 $\mathbb{Z}M$ 上左模的部分自由分解：

$$\bigoplus_{R}\mathbb{Z}M \to \bigoplus_{\Gamma}\mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z} \to 0.$$

这意味着以下不等式

$$\#R - \#\Gamma \geq s(\mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})) - \mathrm{rank}(\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}M}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})) \tag{1}$$

其中， $s(H)$ 是阿贝尔群 H 的最小生成元个数，而 $\mathrm{rank}(H)$ 是 H 的无挠秩。

注意， $\mathbb{Z}M$ 可以写成 $\mathbb{Z}\Gamma^*/I$，其中 Γ^* 是由 Γ 生成的自由幺半群，而 I 是由 $U=\{u-v \mid (u,\ v)\in R\}$ 生成的 $\mathbb{Z}\Gamma^*$ 的理想。在 [1], 中，Anick 证明，给定 I 的一个极小（非交换）Gr¨obner 基 G，则存在一个 $\mathbb{Z}$ 的分解

$$\cdots \to F_n \to \cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

其中每个 F_n 都由*n*-链生成，它们是由 Γ 上的词构成的某些 n 元组；0-链集合与单元素集合、1-链集合与 Γ、2-链集合与 G 之间分别存在一一对应。若 Γ 和 G 有限，则对每个 n， n-链集合已知是有限的，因此 F_n 是有限生成的。Brown 观察到，若 U 是一个极小 Gr¨obner 基，它便提供了一种在不改变同伦类型的情况下坍缩归一化 bar 分解中胞腔的方案，而坍缩后的复形导出 Anick 的分解 [7]。Brown 的坍缩方法如今称为 CW 复形 [8] 上的离散 *Morse* 理论，并已推广到任意环 [11, 20] 上模的链复形。从这一观点来看，我们可以将 (1) 称为 Morse 不等式。

我们考虑 Lawvere 理论中的一个类似情形。单排序的 Lawvere 理论是一个具有有限积的小范畴，其中每个对象都是某个指定对象的有限次幂。这一概念

为泛代数提供了一个抽象框架 [14], ，并且每个 Lawvere 理论都可以由（Σ、 E）“呈现”，其中 Σ 是运算符号的集合， E 是由 Σ 中的符号和变量符号构成的等式公理集合。对于 Σ上的两个等式公理集合 E、E' ，如果 E 和 E'逻辑等价，那么（Σ、 E）和（Σ、 E'）呈现同构的 Lawvere 理论。（详见第 2 节。）

在 [10], Jibladze 和 Pirashvili 研究了 Lawvere 理论的上同调理论。他们证明，Lawvere 理论的两种上同调理论是一致的：一种是为一般代数结构 [18], 定义的 Quillen 上同调，另一种是为带有某类系数 [5],的小范畴定义的 Baues–Wirsching 上同调。此外，他们还证明，对于任意 Lawvere 理论 $\mathbf{L}$，都存在一个环群胚 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$ 以及一个左 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$-模 $\Omega_{\mathbf{L}}$ ，使得 $\mathbf{L}$ 的 Quillen 上同调和 Baues–Wirsching 上同调与 $\Omega_{\mathbf{L}}$ 在左 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$-模范畴上的 Ext 一致。

十年后，Malbos 和 Mimram 证明，如果 $\mathbf{L}$ 有一个表示 (Σ, E)，使得 E 是一个完备项重写系统，那么就存在一个部分自由分解

$$\mathcal{F}_3 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0 \to \Omega_{\mathbf{L}} \to 0 \tag{2}$$

其中每个 $\mathcal{F}_i$ 都是自由的， $\mathcal{F}_1$ 由 Σ生成， $\mathcal{F}_2$ 由 E生成；如果 Σ, E是有限的 [15]，则 $\mathcal{F}_3$ 由一个有限集生成。

此外，作者证明了 [9]在关于次数 d 的一个条件下，存在一个右 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$-模$\mathcal{Z}_d$ ，使得我们有如下不等式

$$\#E - \#\Sigma + 1 \geq s(H_2(\mathbf{L}; \mathcal{Z}_d)) - \operatorname{rank}(H_1(\mathbf{L}; \mathcal{Z}_d)) + \operatorname{rank}(H_0(\mathbf{L}; \mathcal{Z}_d)) \quad (H_n(\mathbf{L}; \mathcal{Z}_d) = \operatorname{Tor}_n^{\mathcal{U}_{\mathbf{L}}}(\mathcal{Z}_d, \Omega_{\mathbf{L}})). \tag{3}$$

该不等式可用于从下方界定等式公理集合的大小。例如，考虑由符号集合 $\Sigma_0 = \{ \cdot\ , e, {}^{-1}\}$ 和群公理集合 E_0 表示的 Lawvere 理论$\mathbf{L}$ $= \mathbf{L}_{\mathrm{grp}}$ - - -

$$x \cdot e \approx x, \quad e \cdot x \approx x, \quad x \cdot x^{-1} \approx e, \quad x^{-1} \cdot x \approx e, \quad (x \cdot y) \cdot z \approx x \cdot (y \cdot z).$$

已知存在一个 E_1 上的完备项重写系统 Σ_0 ，其等价于 E_0 [12]。通过使用分解（2）计算$\mathbf{L}_{\mathrm{grp}}$ 的低维同调群，我们得到（（3）的右端） $= 0$。由于同调群不依赖于表示的选择，我们得出，对于 Σ_0 上任何与 E_0等价的等式公理集合 E ，均有 $\#E \geq \#\Sigma_0 - 1 = 2$ 成立。这给出了一个新的证明：在 Σ_0上不存在群的单个等式公理；这是一个经典结果，最初通过一些特定于群理论 [21, 17, 13]的方法证明。

本文旨在运用代数离散莫尔斯理论，将分解 (2) 推广到高维。本文的结构安排如下。

- 在第2节中，我们回顾 Lawvere 理论和方程表示的定义及基本性质。
- 在第3节中，我们介绍环拟群及环拟群上的模，随后阐述环拟群上的代数离散莫尔斯理论。
- 在第4节中，我们首先按照 Jibladze 和 Pirashvili [10]的做法，定义 Lawvere 理论 $\mathbf{L}$ 的包络环拟群 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$ 以及 K¨ahler 微分的$_{\mathbf{L}}$-模 $\Omega_{\mathbf{L}}$ 。然后，我们构造 Ω 的非归一化 bar 分解，并运用代数离散莫尔斯理论定义归一化 bar 分解。
- 在第5节中，我们将代数离散莫尔斯理论应用于归一化 bar 分解，从而得到 Lawvere 理论的 Anick 分解，这也是本文的主要结果。
- 在第6节中，我们将 Anick 分解应用于 Lawvere 理论，并证明了 Morse 不等式。

2 Lawvere 理论

令$\mathbf{n}$为集合 $\{1,\ldots,n\}$，其中 $n=0$，$\mathbf{1}$，.....。对于一个集合 S，令$\mathbf{Fam}_S^{\mathrm{op}}$为**集合**/$S$的满子范畴，其对象为 $f\colon \mathbf{n}\to S$，其中 $n=0$，$\mathbf{1}$，.....。注意，$\mathbf{Fam}_S^{\mathrm{op}}$有有限余积 $f_1+f_2\colon \mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2\to S$，其中$f_i\colon \mathbf{n}_i\to S\,(i=1,\ 2)$，因此$\mathbf{Fam}_S=(\mathbf{Fam}_S^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$有有限积。我们将 S^* 记作 Ob($\mathbf{Fam}_S$)。

注意，任意对象 $f\colon \mathbf{n}\to S$都可以看作一个字符串 $X_1\ldots X_n$，其取值范围为 S，对应于 $f(i)=X_i$；而 $X_1\ldots X_{n_1}$与 $Y_1\ldots Y_{n_2}$的积就是连接 $X_1\ldots X_{n_1}Y_1\ldots Y_{n_2}$。态射 $X_1\ldots X_n\to Y_1\ldots Y_m$是一个函数 $u\colon \mathbf{m}\to\mathbf{n}$，满足 $X_{u(i)}=Y_i$对每个 $i\in\mathbf{m}$都成立。此外，我们可以验证，$X_1\ldots X_n$与任意置换 $X_{\sigma(1)}\ldots X_{\sigma(n)}$同构，其中 $\sigma\colon \mathbf{n}\to\mathbf{n}$是一个双射。

定义 2.1。• 对于一个集合 S，S-排序的 *Lawvere* 理论 是一个具有有限积的小范畴 $\mathbf{L}$，并带有一个 Lawvere 理论的态射 $\iota\colon\mathbf{Fam}_S\to\mathbf{L}$，使得 $\mathbf{L}$ 的对象是函数$\mathbf{n}\to S$，且 ι 在对象上是恒等映射。我们通常称 $\mathbf{L}$ 为一个 S-排序的 Lawvere 理论，而不提及 ι。

- 两个 S-排序 Lawvere 理论之间的态射 $\iota\colon \mathbf{Fam}_S\to\mathbf{L}$，$\iota'\colon \mathbf{Fam}_S\to\mathbf{L}'$是一个函子 $F\colon \mathbf{L}\to\mathbf{L}'$，它在对象上是恒等映射、保持积，并满足 $F\circ\iota=\iota'$。
- S-排序 Lawvere 理论构成的范畴记为 $\mathbf{Law}_S$。

注意，给定 $\iota\colon \mathbf{Fam}_S\to\mathbf{L}$，等价于对每个 $X=X_1\times\cdots\times X_n\in S^*$，在 $\mathbf{L}$ 中选取一个积图表，其因子为 $X_1,\ldots,X_n$。因此，若一个范畴 $\mathbf{L}$ 满足 Ob($\mathbf{L}$) =Ob($\mathbf{Fam}_S$)，并且对每个 $\vec{X}=X_1\times\cdots\times X_k\in S^*$ 都选定了一个积图表 $\left\{\pi_i^{\vec{X}}\colon \vec{X}\to C_i\right\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$（位于 $\mathbf{L}$ 中），则它是一个 S-排序 Lawvere 理论。当我们处理一个 S-排序 Lawvere 理论 $\mathbf{L}$ 时，π_i^X或简称 π_i，表示所选积图表中的投影。两个 S-排序 Lawvere 理论 $\mathbf{L}\to\mathbf{L}'$ 之间的函子，若它是 Lawvere 理论的态射，并且将 $\mathbf{L}$ 中所选的积图表映射到 $\mathbf{L}'$ 中对应的积图表，则称为 S-排序 Lawvere 理论的态射。

注 2.2。对于 S 分类 Lawvere 理论中的对象，当它们是分类（S 中的元素，而非 S^*）时，我们记作 X、Y、..... ；对于 S^* 中的一般元素，则记作 $\vec{X}$、$\vec{Y}$、..... 。对于态射，当其余域是分类时（即 cod(f)，cod(g) $\in S$），我们记作 f、g、..... ；对于一般态射，则记作 $\vec{f}$、$\vec{g}$、..... 。

We 现在引入 S 分类 Lawvere 理论的方程表示这一概念。

定义 2.3。设 S 是一个分类集合，并且对每个分类 $X\in S$，V_X 是一个无限的、由 X 分类的变量符号集合。设 $V=\coprod_{X\in S}V_X$。

- 一个 S-分类签名 是一个集合 Σ（由运算符号组成），以及一个函数 $\alpha\colon \Sigma\to S^*\times S$。若对于 $f\in\Sigma$，$\alpha(f)=(X_1\ldots X_n,\ X)$，则记作 $f\colon X_1\times\cdots\times X_n\to X$。
- 一个类型为 X、属于 Σ 且 V 的项按如下方式归纳定义。(i) 任意一个类型为 X 的变量符号 $x\in V$ 都是类型为 X 的项。(ii) 若 $f\colon X_1\times\cdots\times X_n\to X$和 $t_1,\ldots,t_n$分别是类型为 $X_1,\ldots,X_n$的项，则形式表达式 $f(t_1,\ldots,t_n)$是类型为 X的项。
- $\mathrm{Term}_\Sigma(V)$表示 Σ 和 V 上的所有项的集合，而$\mathrm{Term}_\Sigma^X(V)$表示 Σ 和 V 上所有类型为 X 的项的集合。
- 对于一个项 t，Var(t)是 t中出现的变量集合。
- 互异变量的有限列表 $x_1,\ldots,x_n$称为上下文（或分类上下文）。我们常将上下文写作 $x_1\colon X_1,\ldots,x_n\colon X_n$，其中 X_i是 x_i的一个分类。
- 对于一个项 t和一个上下文 $x_1\colon X_1,\ldots,x_n\colon X_n$，满足 Var($t$) $\subseteq\{x_1,\ldots,x_n\}$，我们称形式表达式 $x_1\colon X_1,\ldots,x_n\colon X_n\vdash t$为一个上下文中的项。
- 对于变量为 t $x_1\colon X_1,\ldots,x_n$ 的项 X_n，以及排序分别为 $t_1,\ldots,t_n$ $X_1,\ldots,X_n$ 的项 $t[t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n]$，我们将 t 中每个变量 x_i 替换为 t_i 后得到的项记作 $t[t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n]$。

- 对于排序 $X \in S$，若项 $C \in \mathsf{Term}_\Sigma(V \cup \{\Box_X\})$ 中恰好出现一次 $\Box_X$，则称其为**重写上下文**；其中 $\Box_X$ 是一个新鲜符号，称为空位空位，其排序为 X。
- 对于一个带有排序为 X 的空位 $\Box_X$ 的重写上下文 C，以及一个排序为 X 的项 t，我们将 $C[t]$ 记作将 $\Box_X$ 替换为 t 后由 C 得到的项。
- 一个**方程** 是两个同一排序的项组成的对 (t_1, t_2)。方程写作 $t_1 \approx t_2$。
- 一个由签名和方程集组成的对 (Σ, E) 称为*(S-排序等式表示*。

例 2.4（阿贝尔群）。令 S 为单元素集 $\{X\}$，令 Σ 为 $\{0, -, +\}$，其运算为 $\alpha(0) = (\epsilon, X)$，$\alpha(-) = (X, X)$，$\alpha(+) = (XX, X)$。我们将 $t_1 + t_2$ 记作项 $+(t_1, t_2)$。以下方程集 E 给出了阿贝尔群理论的表示：

$$x + 0 \approx x, \quad x + (-x) \approx 0, \quad (x_1 + x_2) + x_3 \approx x_1 + (x_2 + x_3), \quad x_1 + x_2 \approx x_2 + x_1$$

其中 $x_1, x_2, x_3 \in V = V_X$。

例 2.5（幺半群上的左模）。令 $S' = \{X, Y\}$ 和 $\Sigma' = \{0, -, +, 1, \circ, \cdot\}$ 满足 $\alpha'(1) = (\epsilon,\ Y)\alpha'(\circ) = (YY,\ Y)$，$\alpha'(\cdot) = (YX,\ X)$，并且 α' 的定义与前一个例子中 0，$-$，$+$的定义方式相同。我们用 $t_1 \circ t_2$ 表示 $\circ(t_1,\ t_2)$，用 $t_1 \cdot t_2$ 表示项 $\cdot(t_1,\ t_2)$。那么，下面的方程集合 E' 与前一个例子中的方程一起给出了幺半群上的左模理论：

$$\begin{aligned} &1 \circ y \approx y, \quad y \circ 1 \approx y, \quad (y_1 \circ y_2) \circ y_3 \approx y_1 \circ (y_2 \circ y_3), \\ &y \cdot 0 \approx 0, \quad 1 \cdot x \approx x, \quad (y_1 \circ y_2) \cdot x \approx y_1 \cdot (y_2 \cdot x), \quad y \cdot (x_1 + x_2) \approx y \cdot x_1 + y \cdot x_2 \end{aligned}$$

其中 $x,\ x_i \in V_X$ 和 $y,\ y_i \in V_Y$。也就是说，第一行的方程表明 $\circ$ 是以 1 为单位元的幺半群乘法，第二行的方程则是数乘 $y \cdot x$ 所满足的规律。

定义 2.6. 我们将同一排序的项 $t, s \in \mathsf{Term}_\Sigma(V)$ 之间的等价关系 $t \approx_E s$ 定义为满足以下条件的最小等价关系：

1. 对任意 $t \approx s \in E$, $t \approx_E s$。
2. 设 t, s 为项，$x_1, \ldots, x_n$ 为出现在 t 或 s 中且排序为 $X_1, \ldots, X_n$ 的变量，并设 $t_1, \ldots, t_n$ 分别为排序为 $X_1, \ldots, X_n$ 的项。若 $t \approx_E s$，则 $t[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n] \approx_E s[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$。
3. 对任意重写上下文 C（其空位的排序为 X）以及排序为 X 的项 t, t'，若 $t \approx_E t'$，则 $C[t] \approx_E C[t']$。

我们将 $\approx_E$ 扩展到上下文中的项，定义为 $\Gamma \vdash t \approx_E \Delta \vdash s$ 当且仅当 $\Gamma = \Delta$ 且 $t \approx_E s$。

令 $\sim_\alpha$ 为 m元项组之间定义如下的等价关系：$(t_1,\ \ldots\ldots,\ t_m) \sim_\alpha (t'_1,\ \ldots\ldots,\ t'_m)$ 当且仅当，对于 $\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathsf{Var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathsf{Var}(t_m)$ 和 $\{y_1, \ldots, y_k\} = \mathsf{Var}(t'_1) \cup \cdots \cup \mathsf{Var}(t'_m)$，我们有 $k = n$ 且 $t_i[y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n] = t'_i$ 对每个 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ m$ 都成立。[1]

对于由上下文中的项组成的 m元组 $(\Gamma \vdash t_1, \ldots, \Gamma \vdash t_m)$ 和 $(\Delta \vdash s_1, \ldots \Delta \vdash s_m)$，我们将 $\sim_\alpha$ 定义为：$(\Gamma \vdash t_1, \ldots, \Gamma \vdash t_m) \sim_\alpha (\Delta \vdash s_1, \ldots, \Delta \vdash s_m)$ 当且仅当 $\Gamma = x_1 \colon X_1, \ldots, x_n \colon X_n$，$\Delta = y_1 \colon X_1, \ldots, y_n \colon X_n$，且 $t_i[y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n] = s_i$ 对 $i = 1, \ldots, m$ 成立。此外，我们定义等价关系 $\approx_{E,\alpha} \colon (\Gamma \vdash t_1, \ldots, \Gamma \vdash t_m) \approx_{E,\alpha} (\Delta \vdash s_1, \ldots, \Delta \vdash s_m)$ 当且仅当 $\Gamma = x_1 \colon X_1, \ldots, x_n \colon X_n$，$\Delta = y_1 \colon X_1, \ldots, y_n \colon X_n$，且 $t_i[y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n] \approx_E s_i$ 对 $i = 1, \ldots, m$ 成立。我们用 $\Gamma \mid_E (t_1, \ldots, t_m)$ 表示 $(\Gamma \vdash t_1, \ldots, \Gamma \vdash t_m)$ 关于 $\approx_{E,\alpha}$ 的等价类。

定义 2.7. 给定 (Σ, E)，我们可以如下构造一个 S-排序的 Lawvere 理论 $\mathsf{Syn}(\Sigma, E)$：

- $\mathrm{Ob}(\mathsf{Syn}(\Sigma, E)) = S^*$,

[1] 符号 α 源自理论计算机科学中的 *alpha equivalence*，意为这两个表达式除了变量重命名之外完全相同。

- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Syn}(\Sigma,E)}(X_1 \dots X_n, Y_1 \dots Y_m)$ 是等价类的集合 $\Gamma \mid_E (t_1, \dots, t_n)$，其中 $\Gamma = x_1 : X_1, \dots, x_n : X_n$ 且 $\Gamma \vdash t_i : Y_i$，对于 $i = 1, \dots, m$,
- $(\Delta \mid_E (s_1, \dots\dots, s_l)) \circ (\Gamma \mid_E (t_1, \dots\dots, t_m)) = (\Gamma \mid_E (s_1[t_1/y_1, \dots, t_m/y_m], \dots\dots, s_l[t_1/y_1, \dots, t_m/y_m]))$ 对任意 $\Delta = y_1 : Y_1, \dots\dots, y_m : Y_m$, $\Delta \vdash s_i : Z_i$，以及上述的 Γ, t_i。

我们称 $\mathrm{Syn}(\Sigma, E)$ 为由 (Σ, E) 表示的 S-排序 *Lawvere* 理论。对于 $\mathrm{Syn}(\Sigma, \emptyset)$，我们记作 $\mathrm{Syn}(\Sigma)$。

我们有函子 $U_{\mathbf{Law}_S}$：遗忘 函子 $\mathbf{Law}_S \to \mathbf{Set}^{S^* \times S}$，其中 $\mathbf{Set}^{S^* \times S}$ 是从离散范畴 $S^* \times S$ 到**集合** 的函子范畴，定义如下：

$$U_{\mathbf{Law}_S}(\iota : \mathbf{Fam}_S \to \mathbf{L})(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{L}}(X, Y)$$
$$U_{\mathbf{Law}_S}(f : \mathbf{L} \to \mathbf{L}')_{(X,Y)} = f|_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{L}}(X,Y)} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{L}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{L}'}(X, Y).$$

将签名 Σ 与函子 $S^* \times S \to$ **集合**、$(X_1 \dots X_k,\ X) \mapsto \{f : X_1 \times \cdots \times X_k \to X \mid f \in \Sigma\}$ 等同起来后，$\mathrm{Syn}(-)$: **集合**$^{S^* \times S} \to \mathbf{Law}_S$ 是遗忘函子 $U_{\mathbf{Law}_S}$ 的左伴随。因此，我们称 $\mathrm{Syn}(\Sigma)$ 为由 Σ 生成的 S-排序自由 Lawvere 理论。

在本节余下部分中，我们将看到项与 $\mathrm{Syn}(\Sigma$ 中的态射之间存在一种对应关系).

定义 2.8. 设 $\mathbf{L}$ 是一个 S-排序的 Lawvere 理论。

- 设 $\vec{\pi} : \vec{X} \to \vec{Y}$ 是 $\mathbf{L}$ 中的一个态射，从 $\vec{X} = X_1 \times \cdots \times X_n$ 到 $\vec{Y} = Y_1 \times \cdots \times Y_m$，且满足 $m \le n$。若存在一个单射 $u : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$，使得 $X_{u(i)} = Y_i$，并且对于任意 $i = 1, \dots, m$，均有 $\pi_i^Y \vec{\pi} = \pi^X_{u(i)}$，则称 $\vec{\pi}$ 为一个部分置换。若 $m = n$，即 u 是一个双射，则部分置换称为置换。
- 若一个态射 $\vec{\omega} : X \to Z$ 属于 $\mathbf{L}$ 并满足以下条件，则称其为高效态射：对于任意一对部分置换 $\vec{\pi} : \vec{X} \to \vec{Y}$ 和态射 $\vec{\omega}' : \vec{Y} \to \vec{Z}$，若 $\vec{\omega} = \vec{\omega}'\vec{\pi}$，则 $\vec{\pi}$ 是一个置换。

在 $\mathrm{Syn}(\Sigma, E)$ 中，任意部分置换 $\vec{\pi}$ 都可写成 $(x_1, \dots, x_n \mid_E (x_{u(1)}, \dots, x_{u(m)}))$，其中 $u : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ 是某个单射；u 是双射当且仅当 $\vec{\pi}$ 是置换。此外，任意置换都是同构。

引理 2.9。 对于分类 $X_1, \dots, X_m \in S$，设 $H = \{\vec{\omega} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Syn}(\Sigma)) \mid \vec{\omega}$ 是高效的，且其余域为 $X_1 \times \cdots \times X_m\}$。我们在 H 上定义等价关系 $\sim_\Pi$ 如下：$\vec{\omega} \sim_\Pi \vec{\omega}'$ 当且仅当存在一个置换 $\vec{\pi}$ 使得 $\vec{\omega} = \vec{\omega}'\vec{\pi}$。那么，下面的映射是一个良定义的双射：

$$\phi : H/\!\sim_\Pi \xrightarrow{\cong} \mathrm{Term}_\Sigma^{X_1}(V) \times \cdots \times \mathrm{Term}_\Sigma^{X_m}(V)/\!\sim_\alpha,$$
$$[\vec{\omega}]_{\sim_\Pi} \mapsto [(t_1, \dots, t_m)]_{\sim_\alpha} \quad (\vec{\omega} = (\Gamma \mid_\emptyset (t_1, \dots, t_m))).$$

此外，对于任意带有 $\phi([\vec{\omega}]_{\sim_\Pi}) = [(t_1, \dots\dots, t_m)]_{\sim_\alpha}$ 的 $[\vec{\omega}]_{\sim_\Pi} \in H_{\sim_\Pi}$，$\vec{\omega}$ 是置换，当且仅当 $(t_1, \dots\dots, t_m)$ 是一个由互异变量组成的 m-元组。

证明。我们首先证明 ϕ 定义良好。设 $\vec{\omega} = (\Gamma \mid_\emptyset (t_1, \dots\dots, t_m)) \in H$，且 $\Gamma = y_1, \dots\dots, y_n$。对于置换 $\vec{\pi} = (x_1, \dots\dots, x_n \mid_\emptyset (x_{u(1)}, \dots\dots, x_{u(m)}))$、$\vec{\omega}\vec{\pi} = (x_1, \dots\dots, x_n \mid_\emptyset (t'_1, \dots\dots, t'_m))$，其中 $t'_i = t_i[x_{u(1)}/y_1, \dots, x_{u(n)}/y_n]$。根据定义，$(t_1, \dots\dots, t_m) \sim_\alpha (t'_1, \dots\dots, t'_m)$。

我们构造一个 ψ 的逆映射 ϕ。给定项 $t_1, \dots\dots, t_m$，其分类分别为 $X_1, \dots\dots, X_m$，令 $\{x_1, \dots, x_n\} = \mathrm{Var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Var}(t_m)$，且 $\vec{\omega} = (x_1, \dots, x_n \mid_\emptyset (t_1, \dots, t_m))$。为证明 $\vec{\omega}$ 是高效的，假设 $\vec{\omega} = \vec{\omega}'\vec{\pi}$，其中 $\vec{\omega}'$ 是一个态射，$\vec{\pi}$ 是一个部分置换。由于 $\vec{\pi}$ 可写为 $\vec{\pi} = (x_1, \dots, x_n \mid_\emptyset (x_{u(1)}, \dots, x_{u(n')}))$，其中某个单射 $u : \{1, \dots, n'\} \to \{1, \dots, n\}$，且 $\vec{\omega}' = (y_1, \dots, y_{n'} \mid_\emptyset (t'_1, \dots, t'_m))$，其中 $t'_1, \dots\dots, t'_m$ 是一些项，因此对于任意 $i = 1, \dots\dots, m$，有 $t_i = t'_i[x_{u(1)}/y_1, \dots, x_{u(n')}/y_{n'}]$。由于 $\{x_1, \dots, x_n\} = \mathrm{Var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Var}(t_m)$，$u$ 是一个双射，因此 $\vec{\pi}$ 是一个置换。所以，$\vec{\omega}$ 是高效的。

令 $\psi([(t_1, \dots, t_m)]_{\sim_\alpha}) = [\vec{\omega}]_{\sim_\Pi}$。根据 $(\Gamma \mid_E (t_1, \dots, t_m))$ 的定义，可以看出 ψ 是良定义的。此外，直接验证可知，ϕ 和 ψ 互为逆映射。

引理的第二个陈述显然可由 ϕ 的构造得出。 □

3 Ri环拟群、模与代数离散莫尔斯理论

本节回顾 [16] 中提出的环群胚及环拟群上的模的基本定义和相关事实。随后，我们将介绍环拟群上的模之链复形的代数离散莫尔斯理论。

3.1 环群胚与模的预备知识

一个环群胚是一个小的**阿贝尔群**富化范畴。环拟群 $\mathcal{R}$ 的一个双边理想是 Hom 函子 $\mathcal{R}(-,-) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(-,-) : \mathcal{R}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{R} \to$ **阿贝尔群**的子对象，其中该函子范畴由从 $\mathcal{R}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{R}$ 到**阿贝尔群**的加性函子构成。对于集合 $U \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{R})$，我们将双边理想记作 (U)

$$(U)(X,Y) = \left\{ \sum_{r_1,r_2} r_1 u r_2 \;\middle|\; u \in U \cap \mathcal{R}(i',j'), r_1 \in \mathcal{R}(j',j), r_2 \in \mathcal{R}(i,i') \right\}$$

其中求和遍历 r_1, r_2的有限组合。对于环群胚 $\mathcal{R}$ 及其双边理想 I，商环拟群是满足 $\mathrm{Ob}(\mathcal{R}/I) = \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ 且 $(\mathcal{R}/I)(i,j) = \mathcal{R}(i,j)/I(i,j)$ 的环群胚 $\mathcal{R}/I$，其中任意$i,j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$。

对于一个箭图（即有向多重图） $Q = (Q_0, Q_1)$，由 Q 自由生成的环群胚是环群胚 $\mathbb{Z}Q$，满足 $\mathrm{Ob}(\mathbb{Z}Q) = Q_0$；并且对于任意 $v_1, v_2 \in Q_0$, $\mathbb{Z}Q(v_1, v_2)$ 都是由 v_1 到 v_2 的路径集合在 Q 中的自由阿贝尔群。此外，对于集合 $U \subset \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}Q)$，由 (Q,U)表示的环群胚是商环拟群 $\mathbb{Z}Q/(U)$。

环群胚 $\mathcal{R}$ 上的一个（左） $\mathcal{R}$-模是一个加性函子 $\mathcal{R} \to \mathbf{Ab}$。一个右 $\mathcal{R}$-模是一个加性函子 $\mathcal{R}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$。在本文中，对于左 $\mathcal{R}$-模，我们通常直接称其为 $\mathcal{R}$-模。两个（左或右） $\mathcal{R}$-模之间的 $\mathcal{R}$-线性映射 M，N是一个自然变换 $M \to N$。

命题 3.1。 [16] （左或右） $\mathcal{R}$-模的范畴是一个有足够多投射对象的阿贝尔范畴。

定义 3.2。 设 $\mathcal{R}$ 是一个环群胚，并设 $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})}$ 是一个集合族。由自由左 $\mathcal{R}$–模生成的$\mathcal{X}$是左 $\mathcal{R}$-模 $F(\mathcal{X})$，定义为

$$F(\mathcal{X})(i) = \bigoplus_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})} \bigoplus_{x \in \mathcal{X}_j} \mathcal{R}(i,j)\, x,$$

以生成元 $x \in \mathcal{X}_j$为指标的 $\mathcal{R}(i,\ j)$ 副本的直和。左 $\mathcal{R}$-模的一个态射 $F(\mathcal{X}) \to M$由元素 $x \in F(\mathcal{X})(j)$（对于 $x \in \mathcal{X}_j$）的像唯一确定。

命题 3.3. 对于任意左 $\mathcal{R}$-模 M，存在一个 $\mathcal{R}$-模的正合序列

$$F(\mathcal{Y}) \xrightarrow{\phi} F(\mathcal{X}) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中:

- $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_i)$ 是由 生成元 $x \in \mathcal{X}_i$ 构成的集合族，用于 $M(i)$;
- $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_i)$ 是由关系构成的集合族，其中每个 $r \in \mathcal{Y}_i$ 都是形如 $u \cdot x$ 的元素的有限 $\mathbb{Z}$-线性组合，且满足 $u \in \mathcal{R}(i,j)$, $x \in \mathcal{X}_j$;
- 映射 ϕ 对这些关系进行编码，而 M 在同构意义下，是由 $\mathcal{X}_i$ 生成并满足关系 $\mathcal{Y}_i$ 的唯一模。

具体而言，通常通过列出以下内容来写出左 $\mathcal{R}$-模 M 的表示:

- 生成元 $x \in \mathcal{X}_j$，每个生成元都标记了其所属的对象 j；

- 关系，即形式上的 $\mathbb{Z}$-线性组合

$$\sum_k u_k \cdot x_k = 0$$

其中 $u_k \in \mathcal{R}(i,\ j_k)$ 和 $x_k \in \mathcal{X}_{j_k}$。

定义 3.4. 右 $\mathcal{R}$-模 M 与左 $\mathcal{R}$-模 N 的张量积 是余端

$$M \otimes_{\mathcal{R}} N := \int^{i\in\mathcal{R}} M(i) \otimes_{\mathbb{Z}} N(i),$$

也就是说，它是这对映射的余核

$$\bigoplus_{r\colon i\to j} M(j) \otimes_{\mathbb{Z}} N(i) \rightrightarrows \bigoplus_{i\in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})} M(i) \otimes_{\mathbb{Z}} N(i),$$

其中，对生成元 $m \otimes n \in M(j) \otimes N(i)$，这两个箭头定义为

$$M(r)(m) \otimes n \qquad \text{and} \qquad m \otimes N(r)(n),$$

对每个态射 $r\colon i \to j \in \mathcal{R}$。

3.2 环拟群的代数离散莫尔斯理论

本小节基于 [20]，但将其推广到了环拟群上的模。

设 $\mathcal{R}$ 是一个环群胚，$\mathbf{K} = (K_\bullet, \delta_\bullet)$ 是一个左 $\mathcal{R}$-模的链复形。假设每个 K_n 都是由集合族 $I_n = \{I_{n,x}\}_{x\in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})}$生成的自由 $\mathcal{R}$-模，并且还假设 $I_{n,x} \cap I_{m,y} = \emptyset$，除非 $n = m$，$x = y$。那么，每个 $\delta_n\colon K_n \to K_{n-1}$ 都可以写成如下形式

$$\delta_n(\alpha) = \sum_{\beta \in \bigcup_x I_{n-1,x}} [\alpha : \beta]_\delta \beta$$

其中 $[\alpha\colon \beta]_\delta$ 对每个 $\alpha \in I_{n,y}$, $\beta \in I_{n-1,x}$ 都是 $\mathcal{R}$ 中从 x 到 y 的态射。若不会引起混淆，我们省略下标 δ。

令 $G_{\mathbf{K}} = (V_{\mathbf{K}}, E_{\mathbf{K}})$ 为有向（简单）图，其顶点集合 $V_{\mathbf{K}}$ 是集合 $\bigcup_{n,x} I_{n,x}$，边集合 $E_{\mathbf{K}}$ 由满足 $[\alpha\colon \beta]$ 有定义且非零的 $\alpha \to \beta$ 构成。

定义 3.5。 部分匹配 $\mathcal{M}$ 是 $E_{\mathbf{K}}$ 的一个子集，且其中没有任何顶点与超过一条边关联。对于部分匹配 $\mathcal{M}$，定义 $G_{\mathbf{K}}^{\mathcal{M}} = (V^{\mathcal{M}_{\mathbf{K}}}\quad E_{\mathbf{K}}^{\mathcal{M}})$ 为 $V^{\mathcal{M}_{\mathbf{K}}} = V_{\mathbf{K}}$, $E_{\mathbf{K}}^{\mathcal{M}} = (E_{\mathbf{K}} \setminus \mathcal{M}) \cup \{(\beta \to \alpha) \mid (\alpha \to \beta) \in \mathcal{M}\}$。

对于部分匹配 $\mathcal{M}$，若不存在 $\mathcal{M}$ 中的边与顶点 α 关联，则称其为 $\mathcal{M}$-临界，或简称临界。我们用 $\mathrm{Cr}_n(\mathcal{M})$ 表示临界顶点的集合。此外，若存在 β 使得 $\alpha \to \beta \in \mathcal{M}$，则称顶点 α 为 $\mathcal{M}$-可收缩，或简称可收缩；若存在 β 使得$\beta \to \alpha \in \mathcal{M}$，则称 α 为 $\mathcal{M}$-冗余，或简称冗余。

我们用 $\alpha \xrightarrow{+}_{\mathcal{M}} \beta$ 表示 $\mathcal{M}$ 中的边 $\beta \to \alpha$，用 $\alpha \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}} \beta$ 表示 $E_{\mathbf{K}} \setminus \mathcal{M}$中的边 $\alpha \to \beta$。此外，用 $\alpha \xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}} \beta$（分别用 $\alpha \xrightarrow{-+}_{\mathcal{M}} \beta$）表示某个 γ 的路径 $\alpha \xrightarrow{+}_{\mathcal{M}} \gamma \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}} \beta$（分别为 $\alpha \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}} \gamma \xrightarrow{+}_{\mathcal{M}} \beta$）。

定义 3.6。 满足以下条件的部分匹配 $\mathcal{M}$ 称为莫尔斯匹配：(i) 对任意 $\alpha \to \beta \in \mathcal{M}$，若 $\alpha \in I_{n,\,x}$，则 $\beta \in I_{n-1,\,x}$ 且 $[\alpha :\ \beta] = \pm 1_x$；(ii) $G_{\mathbf{K}}^{\mathcal{M}}$中不存在无限路径$\alpha_1 \xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}} \alpha_2 \xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}} \dots$。

对于 $\alpha \in \bigcup_x I_{n,\,x}$, $\alpha' \in \bigcup_x I_{n-1,\,x}$，令 $\mathcal{M}(\alpha,\ \alpha')$ 为 $G_{\mathbf{K}}^{\mathcal{M}}$ 中路径 $p = \alpha = \alpha_0 \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}} \alpha_1 \xrightarrow{+}_{\mathcal{M}} \dots \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}} \alpha_{2k+1} = \alpha'$ 的集合，即 $\alpha_0 \xrightarrow{-+}_{\mathcal{M}} \alpha_2 \xrightarrow{-+}_{\mathcal{M}} \alpha_4 \xrightarrow{-+}_{\mathcal{M}} \dots \xrightarrow{-+}_{\mathcal{M}} \alpha_{2k} \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}} \alpha_{2k+1}$。

定理 3.7。 对于莫尔斯匹配 $\mathcal{M}$, 令 $K_n^{\mathcal{M}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Cr}_n(\mathcal{M})} K_{n,\ \alpha}$。 定义 $\delta_n^{\mathcal{M}}$如下

$$\begin{aligned}
\delta_n^{\mathcal{M}} &: K_n^{\mathcal{M}} \to K_{n-1}^{\mathcal{M}} \\
\delta_n^{\mathcal{M}}(\alpha) &= \sum_{\alpha' \in \mathrm{Cr}_{n-1}(\mathcal{M})} \sum_{p \in \mathcal{M}(\alpha, \alpha')} w(p), \\
w(p) &= (-1)^k [\alpha_{2k} : \alpha_{2k+1}][\alpha_{2k} : \alpha_{2k-1}] \dots [\alpha_2 : \alpha_3][\alpha_2 : \alpha_1][\alpha_0 : \alpha_1]\alpha' \\
&\quad (p \text{ is the path } \alpha = \alpha_0 \to \cdots \to \alpha_{2k+1} = \alpha' \text{ in } \mathcal{M}(\alpha, \alpha')).
\end{aligned}$$

那么， $\delta_n^{\mathcal{M}}$中的和是有限的，而$\mathbf{K}^{\mathcal{M}} = (K_\bullet^{\mathcal{M}}, \delta_\bullet^{\mathcal{M}})$是一个与$\mathbf{K}$同伦等价的链复形。

证明可用与 [20, 定理 1]相同的方法完成。

4 Lawvere 理论的巴尔分解

遵循 Beck [6], Barr [4], 和 Quillen [19, 18], 的思路，代数范畴$\mathbf{C}$中对象 C 上的模 被定义为切片范畴$\mathbf{C}/C$中的一个阿贝尔群对象。Jibladze 和 Pirashvili [10] 证明，对于任意 S排序的 Lawvere 理论$\mathbf{L}$，$\mathbf{L}$上的模范畴等价于某个环群胚 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$ 上的左模范畴，该环群胚称为L的包络环拟群 。我们将在下文给出 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$ 的构造。

设 $\vec{X} \in \mathbf{Ob(L)}$。通过以下表示 $\left(Q^{\vec{X}}, U^{\vec{X}}\right)$定义环群胚 $\mathcal{R}^{\vec{X}}{}_{\mathbf{L}}$。$Q^{\vec{X}}$的顶点集合为$\bigcup_{Y \in S} \mathbf{L}(\vec{X}, Y)$。箭图 $Q^{\vec{X}}$对每个 $\vec{\sigma} = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle : \vec{X} \to \vec{Y}$, $\omega\colon\ \vec{Y} \to Z$以及 $i = 1, \dots, n$都含有一条从 σ_i 到 $\omega\vec{\sigma}$、记作 $\partial_i(\omega)_{\vec{\sigma}}$的边。关系集合 $U^{\vec{X}}$ 包含

$$\partial_i(\pi_i)_{\vec{\sigma}} = 1_{\sigma_i}, \quad \partial_i(\pi_j)_{\vec{\sigma}} = 0 \quad (i \neq j)$$

对每个 $\vec{\sigma} = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ 和

$$\partial_i(\omega \circ \langle \omega_1', \dots, \omega_k' \rangle)_{\vec{\sigma}} - \sum_{j=1}^{k} \partial_j(\omega)_{\langle \omega_1' \circ \vec{\sigma}, \dots, \omega_k' \circ \vec{\sigma} \rangle} \partial_i(\omega_j')_{\vec{\sigma}}$$

对每个 $\omega\colon\ \vec{Y}'' = Y_1'' \times \cdots \times Y_k'' \to Z$, $\omega_j'\colon\ \vec{Y}' \to \vec{Y}''(j = 1, \dots, k)$, $\vec{\sigma}\colon\ \vec{Y} \to \vec{Y}'$。

对于 $\vec{\alpha}\colon\ \vec{X} \to \vec{X}'$，定义一个加性函子 $\mathcal{R}_{\mathbf{L}}^{\vec{\alpha}}\colon\ \mathcal{R}^{\vec{X}'}{}_{\mathbf{L}} \to \mathcal{R}^{\vec{X}}{}_{\mathbf{L}}$，如下

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathbf{L}}^{\vec{\alpha}}(\vec{\sigma}) &= \vec{\sigma}\vec{\alpha} \quad \text{for an object } \vec{\sigma} \text{ in } \mathcal{R}_{\mathbf{L}}^{\vec{X}'}, \\
\mathcal{R}_{\mathbf{L}}^{\vec{\alpha}} \partial_i(\omega)_{\vec{\sigma}} &= \partial_i(\omega)_{\vec{\sigma}\vec{\alpha}} \quad \text{for a morphism } \partial_i(\omega)_{\vec{\sigma}} \text{ in } \mathcal{R}_{\mathbf{L}}^{\vec{X}'}.
\end{aligned}$$

定义 4.1。 $\mathbf{L}$ 的包络环拟群 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$ 定义如下。

- $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$ 的对象是$\mathbf{L}$ 中余域属于 S的态射。
- 对于 $f\colon\ \vec{X}' \to Y$, $g\colon\ \vec{X} \to Z$ 在 $\mathbf{L}$中,

$$\mathcal{U}_{\mathbf{L}}(f, g) = \bigoplus_{\vec{\alpha} : \vec{X} \to \vec{X}'} \mathcal{R}_{\mathbf{L}}^{\vec{X}}(f \circ \vec{\alpha}, g)$$

- 复合定义如下。对于 $r\colon\ f \to g, r'\colon\ g \to h$, $(f\colon\ \vec{X} \to Y, g\colon\ \vec{X}' \to Y', h\colon\ \vec{X}'' \to Y'')$, $r' \circ r$ $(\vec{\beta}\colon\ \vec{X}'' \to \vec{X})$ 的第 $\vec{\beta}$ 个分量为

$$(r' \circ r)_{\vec{\beta}} = \sum_{\vec{\alpha} : \vec{X}' \to \vec{X}, \vec{\alpha}' : \vec{X}'' \to \vec{X}', \vec{\alpha} \circ \vec{\alpha}' = \vec{\beta}} r'_{\vec{\alpha}'} \circ \mathcal{R}_{\mathbf{L}}^{\vec{\alpha}'} r_{\vec{\alpha}}.$$

注记 4.2。 在 $[10, 3.3]$, , $\mathbf{L}$ 的包络环拟群称为环拟群值函子 $\vec{X} \mapsto \mathcal{R}_{\mathbf{L}}^{\vec{X}}$ 的全环拟群 $\mathcal{R}_{\mathbf{L}}[\mathbf{L}^{\mathrm{op}}]$。

我们用 $\partial_{i_1}(\omega_1)_{\vec{\sigma}_1} \dots \partial_{i_k}(\omega_k)_{\vec{\sigma}_k}$ 代替 $\mathrm{in}_{(1_{\vec{X}})}(\partial_{i_1}(\omega_1)_{\vec{\sigma}_1} \dots \partial_{i_k}(\omega_k)_{\vec{\sigma}_k})$。此外，对于任意 ω，我们用 $\vec{\alpha}^*$ 代替 $\mathrm{in}_{\vec{\alpha}}(1_{\omega\vec{\alpha}})$。于是，以下结论由定义立即得出。

引理 4.3。 1. $\mathrm{in}_{\vec{\alpha}}(\partial_1(\omega_1)_{\vec{\sigma}_1} \dots \partial_{i_k}(\omega_k)_{\vec{\sigma}_k}) = \partial_{i_1}(\omega_1)_{\vec{\sigma}_1} \dots \partial_{i_k}(\omega_k)_{\vec{\sigma}_k}\vec{\alpha}^*$,

2. $\vec{\alpha}^*\partial_i(\omega)_{\vec{\sigma}} = 在_{\vec{\alpha}}(\partial_i(\omega)_{\vec{\sigma}\vec{\alpha}}) = \partial_i(\omega)_{\vec{\sigma}\vec{\alpha}}\vec{\alpha}^*$.

由此引理可知，$\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$ 的任意态射都可以写成有限个形如 $\partial_{i_1}(\omega_1)_{\vec{\sigma}_1} \dots \partial_{i_k}(\omega_k)_{\vec{\sigma}_k}\vec{\alpha}^*$ 的态射之和。

定义 4.4。 K $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$-模的 *Kähler* 微分 $\Omega_{\mathbf{L}}$ 由生成元和关系定义如下。对于每个 $\omega\colon Y_1 \times \dots \times Y_n \to Z$，$\Omega_{\mathbf{L}}$ 在 $\Omega_{\mathbf{L}}(\omega)$ 中有一个生成元 $d(\omega)$，并满足以下关系

$$d(\omega \circ \langle \omega_1', \dots, \omega_n' \rangle) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\omega)_{\langle \omega_1', \dots, \omega_n' \rangle} d(\omega_i'),$$

$$\vec{\alpha}^* d(\omega) = d(\omega\vec{\alpha}).$$

注意，对于任意 $\omega\colon \vec{X} = X_1 \times \dots \times X_n \to X$，由于 $\omega = \omega 1_{\vec{X}} = \omega\langle \pi_1, \dots\dots, \pi_n \rangle$，我们有 $d(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\omega)_{1_{\vec{X}}} d(\pi_i) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\omega)_{1_{\vec{X}}} \pi_i^* d1_{X_i} \in \Omega_{\mathbf{L}}$。

4.1 非归一化 bar 分解

在本小节中，我们定义 $\Omega_{\mathbf{L}}, \dots \xrightarrow{\delta_2^u} B_1^u \xrightarrow{\delta_1^u} B_0^u \xrightarrow{\delta_0^u} \Omega_{\mathbf{L}}$ 的非归一化 bar 分解。对于 $n > 0$，定义 B_n^u 为由以下元素生成的自由 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$-模

$$(\omega_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n) \in B_n^u(\omega_1\vec{\omega}_2 \dots \vec{\omega}_n)$$

对于 ω_1 的每个 n-元组：$\vec{X}_1 \to Y$, $\vec{\omega}_i\colon \vec{X}_i \to \vec{X}_{i-1}$ ($\vec{X}_i \in S^*$, $Y \in S$, $i = 2, \dots\dots, n$)。对于 $n = 0$，定义 B_0^u 为由以下元素生成的自由 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$-模

$$()_X \in B_0^u(1_X)$$

对于每个 $X \in S$。首先，定义 $\delta_0^u\colon B_0^u \to \Omega_{\mathbf{L}}$ 和 $\delta_1^u\colon B_1^u \to B_0^u$ 为

$$\delta_0^u(()_X) = d(1_X), \quad (X \in S)$$

$$\delta_1^u(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\omega)_{1_{\vec{X}}} \left(\pi_i^{\vec{X}}\right)^* ()_{X_i} - \omega^*()_Y \quad (\omega : \vec{X} \to Y, \vec{X} \in S^*, Y \in S).$$

为定义 $n > 1$ 上的 $\delta_n^u\colon B_n^u \to B_{n-1}^u$，我们给出半单纯结构 $d_j\colon B_n^u \to B_{n-1}^u (j = 0, \dots\dots, n)$，定义如下

$$d_0(\omega_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n) = \sum_{i=1}^{m_2} \partial_i(\omega_1)_{\vec{\omega}_2}(\omega_{2,i}, \vec{\omega}_3, \vec{\omega}_4, \dots, \vec{\omega}_n) \quad (\vec{\omega}_2 = \langle \omega_{2,1}, \dots, \omega_{2,m_2} \rangle),$$

$$d_j(\omega_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n) = (\omega_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_{j-1}, \vec{\omega}_j\vec{\omega}_{j+1}, \vec{\omega}_{j+2}, \dots, \vec{\omega}_n) \quad (0 < j < n),$$

$$d_n(\omega_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n) = \vec{\omega}_n^*(\omega_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_{n-1}).$$

然后，定义 $\delta_n^u : B_n^u \to B_{n-1}^u$ 为

$$\delta_n^u(\omega_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_k(\omega_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n).$$

我们可以通过以下引理证明$\delta_n^u \delta_{n+1}^u = 0$。

引理 4.5。 $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ 如果 $i < j$。

证明。 假设 $i = 0$ 和 $j = 1$。那么，我们有

$$\begin{aligned} d_0 d_1(\omega_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n) &= d_0(\omega_1 \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3, \dots, \vec{\omega}_n) \\ &= \sum_{j=1}^{m_2} \partial_j(\omega_1 \vec{\omega}_2)(\omega_{3,j}, \vec{\omega}_4, \dots, \vec{\omega}_n) \quad (\vec{\omega}_3 = \langle \omega_{3,1}, \dots, \omega_{3,m_3} \rangle) \\ d_0 d_0(\omega_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n) &= \sum_{i=1}^{m_2} \partial_i(\omega_1) d_0'(\omega_{2,i}, \vec{\omega}_3, \dots, \vec{\omega}_n) \quad (\vec{\omega}_2 = \langle \omega_{2,1}, \dots, \omega_{2,m_2} \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{m_2} \partial_i(\omega_1) \sum_{j=1}^{m_3} \partial_k(\omega_{2,i})(\omega_{3,j}, \vec{\omega}_4, \dots, \vec{\omega}_n). \end{aligned}$$

其他情况显然成立。 □

为了证明 $\ker \delta_{n+1}^u = \operatorname{im} \delta_n^u$，我们对每个满足以下条件的 ω in $\mathbf{L}$ 和 $n \geq 0$，定义阿贝尔群同态 $s_0 : \Omega_{\mathbf{L}}(\omega) \to B_0^u(\omega)$ 和 $s_{n+1} : B_n^u(\omega) \to B_{n+1}^u(\omega)$

$$s_{n+1}(\partial_i(\omega')_{\vec{\sigma}} c) = \partial_i(\omega')_{\vec{\sigma}} s_{n+1}(c) \tag{4}$$

对任意 $c \in B_n^u(\omega)$。对于 $d\omega = \sum_{i=1}^n \partial_i(\omega)_{\langle \pi_1, \dots, \pi_n \rangle} \pi_i^* d1_{X_i} \in \Omega_{\mathbf{L}}(\omega)$，令 $s_0(d\omega) = \sum_{i=1}^n \partial_i(\omega)_{\langle \pi_1, \dots, \pi_n \rangle} \pi_i^*()_{X_i}$。容易看出， s_0 定义良好。

对于 $c = \vec{\alpha}^*(\omega_1, \dots, \vec{\omega}_n) \in B_n^u(\omega_1 \dots \vec{\omega}_n \vec{\alpha})$，令 $s_{n+1}(c) = (-1)^n(\omega_1, \dots, \vec{\omega}_n, \vec{\alpha})$，于是 s_{n+1} 延拓为满足 (4) 的唯一阿贝尔群同态。

引理 4.6。 $\delta_0 s_0 = 1_{B_0^u}$，并且对每个 n， $s_n \delta_n + \delta_{n+1} s_{n+1} = 1_{B_n^u}$。

证明。 第一个等式可表示为

$$\delta_0(s_0(d\omega)) = \delta_0\left(\sum_{i=1}^n \partial_i(\omega)_{\langle \pi_1, \dots, \pi_n \rangle} \pi_i^*()_{X_i}\right) = \sum_{i=1}^n \partial_i(\omega)_{\langle \pi_1, \dots, \pi_n \rangle} \pi_i^* d(1_{X_i}) = d\omega.$$

对于带有 $n = 0$ 的第二个等式，我们有

$$\begin{aligned} s_0(\delta_0(\alpha^*()_Y)) &= s_0(d(\alpha)) \\ &= s_0\left(\sum_{j=1}^m \partial_j(\alpha)_{\langle \pi_1, \dots, \pi_m \rangle} \pi_j^* d(1_{X_j})\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \partial_j(\alpha)_{\langle \pi_1, \dots, \pi_m \rangle} (\pi_j^{\vec{X}})^*()_{X_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_1(s_1(\alpha^*()_Y)) &= -\delta_1((\alpha)) \\ &= -\sum_{j=1}^m \partial_j(\alpha)_{\langle \pi_1, \dots, \pi_m \rangle} (\pi_j^{\vec{X}})^*()_{X_j} + \alpha^*()_Y \end{aligned}$$

因此， $s_0 \delta_0 + \delta_1 s_0 = 1_{B_0^u}$。

要证明 $s_n \delta_n + \delta_{n+1} s_{n+1} = 1_{B_n^u}$ 对于 $n > 0$，只需证明 $d_{n+1} s_{n+1} = 1_{B_{n+1}^u}$ 和 $d_k s_{n+1} = -s_n d_k$ 对于 $k = 0, \dots, n$，因为这样我们就有

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k d_k s_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s_n d_k + (-1)^{2(n+1)} 1_{B_n^u} \\ &= -s_n \delta_n + 1_{B_n^u}. \end{aligned}$$

我们可以证明 $d_{n+1}s_{n+1}=1_{B^u_{n+1}}$ 如下

$$\begin{aligned} d_{n+1}s_{n+1}(\vec{\alpha}^*(\omega_1,\vec{\omega}_2,\ldots,\vec{\omega}_n)) &= d_{n+1}\big((-1)^{n+1}(\omega_1,\vec{\omega}_2,\ldots,\vec{\omega}_n,\vec{\alpha})\big) \\ &= (-1)^{n+1}\vec{\alpha}^*(\omega_1,\vec{\omega}_2,\ldots,\vec{\omega}_n), \end{aligned}$$

而且 $d_k s_{n+1}=-s_n d_k$ 也很直接。 □

注 4.7。 当有 $(\omega_1,\ \vec{\omega}_2,\ \ldots,\ \vec{\omega}_n)$ 时，我们常写作"$\vec{\omega}_i\,(i=1,\ \ldots,\ n)$"，而对于 $i=1$，它表示 $\vec{\omega}_1=\omega_1$。

4.2 归一化 bar 分解

在本小节中，我们通过将代数离散莫尔斯理论应用于上一小节定义的非归一化 bar 分解，来定义归一化 bar 分解。其非正式的思路如下：我们希望将胞腔 $(\omega_1,\ \vec{\omega}_2,\ \ldots,\ \vec{\omega}_n)$ 视为"归一化"的，当且仅当对于每个 $i\in\{1,\ldots,n\}$，$\vec{\omega}_i$ 都不是部分置换。此外，对于任意置换 $\vec{\pi}$，我们不希望将两个胞腔 $(\omega_1,\ \vec{\omega}_2,\ \ldots,\ \vec{\omega}_n)$、$(\omega_1,\ \vec{\omega}_2,\ \ldots,\ \vec{\omega}_i\vec{\pi},\ \vec{\pi}^{-1}\vec{\omega}_{i+1},\ \ldots,\ \vec{\omega}_n)$ 都视为"归一化"的。我们将定义一个莫尔斯匹配 $\mathcal{M}'$，使得 $\mathcal{M}'$-临界胞腔恰好是按此意义"归一化"的胞腔。

我们在**L**中的态射上定义等价关系 $\sim_\Pi$，即对于某个置换$\vec{\pi}$，$\vec{\omega}\sim_\Pi\vec{\omega}'\iff\vec{\omega}=\vec{\omega}'\vec{\pi}$。对于每个等价类 $[\vec{\omega}]_{\sim_\Pi}$，我们选取一个代表元 $\vec{\omega}'\in[\vec{\omega}]_{\sim_\Pi}$。对于恒等映射的等价类，我们选取恒等映射本身作为代表元。注意，任意态射 $\vec{\omega}$ 都可以唯一分解为 $\vec{\omega}=\vec{\omega}'\vec{\pi}$，其中 $\vec{\omega}'$ 是所选代表元，$\vec{\pi}$是某个置换。

~~一个态射是高效的，~~且是其等价类$[\vec{\omega}]_{\sim_\Pi}$的所选代表元，则称其为本质的。

引理 4.8。 任意态射 $\vec{\omega}$ 都可以唯一分解为 $\vec{\omega}=\vec{\omega}'\vec{\pi}$，其中 $\vec{\omega}'$ 是某个本质态射，$\vec{\pi}$是某个部分置换。

证明。 至少存在一种这样的分解，因为若 $\vec{\omega}$ 是本质的，我们可以取 $\vec{\omega}'=\vec{\omega}$ 和 $\vec{\pi}=$id；若 $\vec{\omega}$ 不是本质的，则其存在性由定义可得。

假设有两种这样的分解：$\vec{\omega}=\vec{\omega}'\vec{\pi}'=\vec{\omega}''\vec{\pi}''$，其中 $\vec{\omega}'$是本质的，ω'' 和 $\vec{\pi}'$、$\vec{\pi}''$是部分置换。由于 $\vec{\pi}'$、$\vec{\pi}''$ 是部分置换，它们可以写为 $\vec{\pi}'=\langle\pi_{u(1)}、\ldots\ldots、\pi_{u(n)}\rangle$，$\vec{\pi}''=\langle\pi_{v(1)}、\ldots\ldots、\pi_{v(k)}\rangle$，其中 u：$\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,m\}$、$v$：$\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,m\}$是一些单射。令 w：$\{1,\ldots,m\}\to\{1,\ldots,n\}$ 为 u 的任意一个截面，即满足对任意 $i=1$、……、n，都有 $wu(i)=i$ 的函数，并令 $\vec{\iota}=\langle\pi_{w(1)}、\ldots\ldots、\pi_{w(m)}\rangle$。那么，$\vec{\pi}'\vec{\iota}$ 是一个恒等映射，因此 $\vec{\omega}\vec{\iota}=\vec{\omega}'=\vec{\omega}''\vec{\pi}''\vec{\iota}$。由于 $\vec{\omega}'$ 是本质的，$\vec{\pi}''\vec{\iota}=\langle\pi_{wv(1)}、\ldots\ldots、\pi_{wv(k)}\rangle$ 必须是恒等映射，所以 $k=n$；又因为 w 是 u 的任意一个截面，故 $v=u$。 □

对于一个胞腔 $\tau=$（ω_1，$\vec{\omega}_2$，……，$\vec{\omega}_n$）以及一个指标 $i\in\{1,\ldots,n-1\}$，考虑以下六个谓词：

P（τ，i）：$i<n$，$\vec{\omega}_i$是本质的，$\vec{\omega}_{i+1}$是一个部分置换，而 $\vec{\omega}_i\vec{\omega}_{i+1}$既非本质的，也不是部分置换，

P'（τ，i）：$\vec{\omega}_i$不是本质的，也不是部分置换，

Q（τ，i）：$\vec{\omega}_i$是一个恒等映射，并且对于满足所有 $\vec{\omega}_i$，……，$\vec{\omega}_{i'}$都是恒等映射的最大整数 $i'\in\{i,\ldots,n\}$，$i'-i$ 是奇数，

Q'（τ，i）：与 Q（τ，i相同，但 $i'-i$是偶数。

$R(\tau,i)$：$i=1,\omega_1=\pi_k$：$X_1\times\cdots\times X_n\to X_k$对某些 $n>1$和 $k<n$而言，$\vec{\omega}_2$是恒等映射；对于使 $\vec{\omega}_j$ 不是恒等映射的最小整数 $j>1$，j是奇数。

$R'(\tau,\ i)$：与 $R(\tau,\ i)$ 相同，但 j是偶数。

定义一组边 $\mathcal{M}'$ 为

$$\tau = (\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_{i+1}, \ldots, \vec{\omega}_n) \to (\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_i\vec{\omega}_{i+1}, \ldots, \vec{\omega}_n) \in \mathcal{M}'$$

当且仅当以下 (1) 或 (2) 成立时：(1) $R(\tau,\ i)$ 成立；(2) 对每个 $j < i,\ P(\tau,\ i)$ 或 $Q(\tau,\ i)$ 成立，且 $\vec{\omega}_j$ 是本质的并且不是恒等映射。

引理 4.9。 $\mathcal{M}'$ 是一个部分匹配。

证明。根据定义显然，$\mathcal{M}'$ 中不存在源相同的两条边 e.

假设有两条边具有相同的目标，$\tau = (\omega_1,\ \vec{\omega}_2、\ldots\ldots、\vec{\omega}_i,\ \vec{\omega}_{i+1}、\ldots\ldots、\vec{\omega}_n) \to \tau''$ 和 $\tau' = (\omega'_1,\ \vec{\omega}'_2、\ldots\ldots、\vec{\omega}'_i,\ \vec{\omega}'_{i+1}、\ldots\ldots、\vec{\omega}'_n) \to \tau''$。于是，对于 $j \neq i,\ i+1$，我们有 $\omega_1 = \omega'_1, \vec{\omega}_j = \vec{\omega}'_j$，并且 $\vec{\omega}_i\vec{\omega}_{i+1} = \vec{\omega}'_i\vec{\omega}'_{i+1}$。

- 以下情况成立：(1) 对于（$\tau,\ i$）成立，且 (1) 对于（$\tau',\ i$）成立：由 $R(\tau,\ i)$，可得 $i = 1, \omega_1 = \pi_k$ 对某个 k 成立，且 $\vec{\omega}_2 = \mathrm{id}$；由 $R(\tau',\ i)$ 和 $\omega_1\vec{\omega}_2 = \omega'_1\vec{\omega}'_2$，可得 $\omega_1 = \omega'_1$ 和 $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}'_2$。
- 以下情况成立：(1) 对于（$\tau,\ i$）成立，且 (2) 对于（$\tau',\ i$）成立：我们证明这种情况不可能发生。如上所述，$i = 1, \omega_1 = \pi_k$ 对某个 k 成立，且 $\vec{\omega}_2 = \mathrm{id}$。假设 $P(\tau',\ 1)$ 成立。那么，ω'_1 是本质的，且 $\vec{\omega}'_2$ 是部分置换。由于 $\pi_k = \omega'_1\vec{\omega}'_2$ 且 $\pi_k = \mathrm{id}\pi_k$，由前面的引理可得 $\omega'_1 = \mathrm{id}$，这与 $P(\tau',\ 1)$ 矛盾。假设 $Q(\tau',\ 1)$ 成立。在这种情况下，$\omega'_1 = \vec{\omega}'_2 = \mathrm{id}$，但这与 $\omega_1\vec{\omega}_2 = \pi_k$ 矛盾：对于 $n > 0,\ X_1 \times \cdots \times X_n \to X_k$。
- 当 (τ, i) 的 (2) 和 (τ', i) 的 (2) 均成立时：注意，只有以下两种子情况可能发生：$P(\tau, i)$ 和 $P(\tau', i)$ 均成立，或者 $Q(\tau, i)$ 和 $Q(\tau', i)$ 均成立。在前一种子情况下，我们可以应用前面的引理；在后一种子情况下，显然 $\omega_i = \vec{\omega}'_i = \vec{\omega}_{i+1} = \vec{\omega}'_{i+1} =$ 是恒等映射。

□

根据定义，τ 是 $\mathcal{M}'$-可收缩的，当且仅当 (1) 或 (2) 成立。若一个 $\mathcal{M}'$-可收缩胞腔 τ 满足 (1)，则称其为类型 R；若 τ 满足 (2)，且对某个 $i,\ P(\tau, i)$（分别为 $Q(\tau, i)$）成立，则称其为类型 P（分别为 Q）。

引理 4.10。 $\tau' = (\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n)$ 是 $\mathcal{M}'$-冗余的，当且仅当以下条件之一成立：(1') $R'(\tau', 1)$；或 (2') 存在 i 使得 $P'(\tau', i)$ 或 $Q'(\tau', i)$ 成立，并且对于任意 $j < i,\ \vec{\omega}_j$ 都是本质的且不是恒等映射。

证明。以下三个等价关系很容易验证。首先，对于 $\tau = (\omega_1, \mathrm{id}\ \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n),\ R'(\tau', 1)$ 成立当且仅当 $R(\tau, 1)$ 成立。其次，对于任意指标 i，当 $P'(\tau', i)$ 时，(2') 成立当且仅当对于 $P(\tau, i)$，(2) 对 $\tau = (\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_{i-1}, \vec{\omega}'_i, \vec{\pi}, \vec{\omega}_{i+1}, \ldots, \vec{\omega}_n)$ 成立，其中 $\vec{\omega}'_i$ 是本质的，$\vec{\pi}$ 是部分置换，且 $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}'_i\vec{\pi}$。最后，对于 $\tau = (\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_{i-1}, \mathrm{id}\ \vec{\omega}_{i+1}, \ldots, \vec{\omega}_n)$，当 $Q'(\tau', i)$ 时，(2') 成立当且仅当 $Q(\tau, i)$ 时 (2) 成立。无论哪种情况，$\tau \to \tau'$ 都属于 $\mathcal{M}'$，因此“若”部分得证。

假设对于“仅当”部分，τ' 是 $\mathcal{M}'$-冗余的。那么，存在 $i, \vec{\omega}'_i,\ \vec{\omega}''_i$，使得 $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}'_i\vec{\omega}''_i$，并且 $\tau \to \tau'$ 属于 $\mathcal{M}'$，其中 $\tau = (\omega_1,\ \vec{\omega}_2,\ \ldots,\ \vec{\omega}'_i,\ \vec{\omega}''_i,\ \ldots,\ \vec{\omega}_n)$。特别地，$\tau$ 是 $\mathcal{M}'$-可收缩的，因此满足条件（1）或（2）。如果 $R(\tau,\ i)$ 成立，那么 $i = 1, \omega_1 = \omega'_1 = \pi_k$，且 $\vec{\omega}''_1 =$ 是恒等映射，所以 $R(\tau',\ 1)$ 成立。满足（2）的情形可类似证明。□

引理 4.11. $\tau = (\omega_1,\ \vec{\omega}_2,\ \ldots,\ \vec{\omega}_n)$ 是 $\mathcal{M}'$-临界的，当且仅当对于任意的，$\vec{\omega}_i$ 都是本质的且不是恒等映射 i.

证明。显然，如果 τ 是 $\mathcal{M}'$-可收缩的或 $\mathcal{M}'$-冗余的，那么 $\omega_1, \ldots, \vec{\omega}_n$ 中有些不是本质的或恒等映射。为证明反方向，假设某个 $\vec{\omega}_i$ 不是本质的或恒等映射，并设 i 是这类指标中最小的一个。如果 $\vec{\omega}_i$ 是恒等映射，则 $Q(\tau, i)$ 或 $Q'(\tau, i)$ 成立，因此 τ 不是 $\mathcal{M}'$-临界的。如果 $\vec{\omega}_i$ 是部分置换但不是恒等映射，由于 $\vec{\omega}_{i-1}$ 是本质的且不是恒等映射，$P(\tau, i-1)$ 成立，因此 τ 是 $\mathcal{M}'$-可收缩的。如果 $\vec{\omega}_i$ 不是本质的，也不是部分置换，则 $P'(\tau, i)$ 成立，因此 τ 是 $\mathcal{M}'$-冗余的。 □

对于 $\tau = (\omega_1,\ \vec{\omega}_2,\ \ldots\ldots,\ \vec{\omega}_n)$，令 $I(\tau)$ 为满足以下条件的最大指标 i：$\omega_1,\ \vec{\omega}_2,\ \ldots\ldots,\ \vec{\omega}_{i-1}$ 均为本质的且不是恒等映射。这里，$I(\tau) = 1$ 表示 ω_1 不是本质的，或是恒等映射。此外，令 $N(\tau)$ 为满足 $\vec{\omega}_i$ 是部分置换的 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 的数量。

引理4.12。 对于任意路径 $\tau \xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}'} \tau''$，有 $N(\tau) \leq N(\tau'')$。

证明。对于任意边 $\tau \xrightarrow{+}_{\mathcal{M}'} \tau'$with $\tau = (\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_i\vec{\omega}_{i+1}, \ldots, \vec{\omega}_n)$，$\tau' = (\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n)$，根据条件$P(\tau', i)$，$Q(\tau', i)$，$R(\tau', i)$，我们可以看出 $\vec{\omega}_{i+1}$是一个部分置换，而 $\vec{\omega}_i\vec{\omega}_{i+1}$不是部分置换、 $\vec{\omega}_i = \mathrm{id}$，或者对于某个 k，有 $\vec{\omega}_i = \pi_k$。在这两种情况下，我们都有 $N(\tau') = N(\tau) + 1$。此外，对于任意边$\tau' \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}'} \tau''$，显然有 $N(\tau') - 1 \leq N(\tau'')$。因此，对于任意路径 $\tau \xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}'} \tau''$，都有 $N(\tau) \leq N(\tau'')$。 □

引理4.13. 如果 $\tau \xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}'} \tau''$and τ'' 是 $\mathcal{M}'$-冗余的，那么 $N(\tau) < N(\tau'')$ 或 $I(\tau) < I(\tau'')$。

证明。考虑一条边 $\tau' = (\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n) \to (\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_i\vec{\omega}_{i+1}, \ldots, \vec{\omega}_n) = \tau$，它属于 $\mathcal{M}$，即 $\tau \xrightarrow{+}_{\mathcal{M}'} \tau'$。如果 $\tau' \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}'} \tau''$，那么 τ'' 可以写成以下形式之一：(a) 对某个 $k \in \{1, \ldots, m\}$，$(\omega_2, _k, \vec{\omega}_3, \ldots, \vec{\omega}_n)$，其中$\vec{\omega}_2 = \langle \omega_2, 1, \ldots, \omega_{2,m} \rangle$；(b) $(\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_{n-1})$；或 (c) 对于 $j = 1, \ldots, n-1, j \neq i$，$d_j(\tau')$。

情形 (a)：若 ω_1不是部分置换，则有 $N(\tau) < N(\tau'')$。假设 ω_1是部分置换，并导出矛盾。注意，对于 $X \in S$， $\omega_1 = \mathrm{id}_X$；或者对于某个 k， $\omega_1 = \pi_k$。若 $\omega_1 = \mathrm{id}_X$，则由于 τ'是 $\mathcal{M}'$-可收缩的， $Q(\tau',\ 1)$ 成立，因此 $\vec{\omega}_2 = \mathrm{id}_X$且 $\tau'' = \tau$。若 $\omega_1 = \pi_k$，则由于 τ'是 $\mathcal{M}'$-可收缩的， $R(\tau',\ 1)$ 成立，因此 $\vec{\omega}_2 = \mathrm{id} = \langle \pi_1, \ldots, \pi_m \rangle$ 且 $\tau'' = \tau$。因此，在这两种情况下，边 $\tau' \to \tau''$ 都属于 $\mathcal{M}'$，这与 $\tau' \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}'} \tau''$ 矛盾。

情形 (b)：如果 τ 属于 P' 类型，且 τ' 属于 P 类型，那么 $I(\tau'') = I(\tau') = I(\tau) + 1$。假设 τ 属于 Q' 类型，且 τ' 属于 Q 类型。如果 $\vec{\omega}_i, \ldots \vec{\omega}_n$ 都是恒等映射，那么 $\tau'' = \tau$，这与 $\tau' \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}'} \tau''$ 矛盾。否则， τ'' 必须是 $\mathcal{M}'$-可收缩的 Q 类型。

情形 (c)：如果 $j < i$，由于 $\vec{\omega}_j$， $\vec{\omega}_{j+1}$ 不是部分置换，因此我们有 $N(\tau) < N(\tau'')$。如果 $j > i$，根据与情形 (b) 类似的论证，我们有$I(\tau) < I(\tau'')$。 □

定理 4.14。 $\mathcal{M}'$ 是一个莫尔斯匹配。

证明。 由前两个引理可知，不存在无限的 $\tau_1 \xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}} \tau_2 \xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}'} \ldots$ n-胞腔序列，因为字典序对 $(N(\tau_k)\ I(\tau_k))$ 虽然递增，但同时至多为 (n, n)。

此外，容易验证，对于 $\mathcal{M}'$ 中的任意一条边 $\tau \to \tau'$， $[\tau\colon \tau']_{\delta^u} = \mathrm{id}$ 或 $-\mathrm{id}$。 □

设 $(B_\bullet, \delta_\bullet) = \left(B_\bullet^{u,\mathcal{M}'}, \delta_\bullet^{u,\mathcal{M}'}\right)$。我们将考虑如何显式地描述 $\delta_n(\tau)$。

设 $\Phi\colon B_{n-1}^u \to B_{n-1}$ 是如下定义的映射。对于 $\tau = (\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_{n-1})$，若 τ 是 $\mathcal{M}'$-临界的，则 $\Phi(\tau) = \tau$。若某个 $\vec{\omega}_i$ 是部分置换，则 $\Phi(\tau) = 0$。否则，将非本质的 $\vec{\omega}_{I(\tau)}$分解为 $\vec{\omega}_{I(\tau)} = \vec{\omega}'_{I(\tau)}\vec{\pi}$，其中 $\vec{\omega}'_{I(\tau)}$ 是本质的，而 $\vec{\pi}$ 是部分置换。若 $I(\tau) < n-1$，则 $\Phi(\tau) = \Phi(\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}'_{I(\tau)}, \vec{\pi}\vec{\omega}_{I(\tau)+1}, \ldots, \vec{\omega}_{n-1})$。若 $I(\tau) = n-1$，则 $\Phi(\tau) = \vec{\pi}^*(\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}'_{n-1})$。

引理 4.15。 $\delta_n(\tau) = \Phi\delta_n^u(\tau)$.

证明。 对于一个 $\mathcal{M}'$-临界胞腔 τ'，假设 $\mathcal{M}'(\tau, \tau')$ 包含一条路径 p,

$$\tau \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}'} \tau^0 \xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}'} \tau^1 \xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}'} \ldots \xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}'} \tau^k = \tau'$$

其中，对于每个 $l = 0, \ldots, k$， $\tau^l = (\omega_1^l, \vec{\omega}_2^l, \ldots, \vec{\omega}_{n-1}^l)$ 都是一个 $\mathcal{M}'$-冗余胞腔。注意， τ^l不包含部分置换，即 $N(\tau^l) = 0$，因为 $\tau^k = \tau'$是 $\mathcal{M}'$-临界的，这意味着 $N(\tau') = 0$，且$N(\tau^l) \leq N(\tau')$。因此，每个 τ^l 都不属于类型 Q 或 R，所以它满足 $P'(\tau^l, I(\tau^l))$。

每个 τ^l都与边 $\tau^l \xrightarrow{+}_{\mathcal{M}'} (\omega_1^l, \ldots, \vec{\omega}_{I(\tau^l)-1}^l, \vec{\omega}_{I(\tau^l)}^{l\prime}, \vec{\pi}^l, \vec{\omega}_{I(\tau^l)+1}^l, \ldots, \vec{\omega}_{n-1}^l) = \tau^{l\prime}$关联，其中$\vec{\omega}_{I(\tau^l)}^{l\prime}$是本质的，且 $\vec{\pi}^l$是部分置换。若 $\tau^{l\prime} \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}'} \tau^{l+1}$，由于 τ^{l+1}不包含部分置换，这样的 τ^{l+1}便唯一确定为 $\tau^{l+1} = (\omega_1^l, \ldots, \vec{\omega}_{I(\tau^l)-1}^l, \vec{\omega}_{I(\tau^l)}^{l\prime}, \vec{\pi}^l\vec{\omega}_{I(\tau^l)+1}^l, \ldots, \vec{\omega}_{n-1}^l)$。因此，从 τ^0到一个 $\mathcal{M}'$-临界胞腔 $\tau' = \tau'(\tau^0)$至多存在一条路径 $p(\tau^0)$；当且仅当 τ^0是 $\mathcal{M}'$-可收缩时，这样的路径不存在。（若 τ^0是 $\mathcal{M}'$-临界的，则 $p(\tau^0)$是τ^0上的长度为 0 的路径。）对于这条路径，我们有 $w(p(\tau^0)) = [\tau^{k-1\prime}\colon \tau^k][\tau^{k-1\prime}\tau^{k-1}] \ldots [\tau^{1\prime}\colon \tau^2][\tau^{1\prime}\colon \tau^1][\tau^{0\prime}\colon \tau^1][\tau^{0\prime}\colon \tau^0]$

以及 $[\tau^{l\prime}\colon\ \tau^{l+1}][\tau^{l\prime}\colon\ \tau^{l}] = (-1)^{2I(\tau^{l})+1} = -1$。（注意，长度 k 也由 τ^0、$k = k(\tau^0)$唯一确定。）

我们有

$$\delta_n(\tau) = \sum_{\tau \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}'} \tau^0} (-1)^{k(\tau^0)} w\big(p(\tau^0)\big)[\tau : \tau^0]\tau'(\tau^0) = \sum_{\tau \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}'} \tau^0} [\tau : \tau^0]\tau'(\tau^0)$$

而这等于 $\Phi\delta_n^u(\tau)$，因为 $\delta_n^u(\tau) = \sum_{\tau^0}[\tau\colon\ \tau^0]\tau^0$。

□

5 Anick 分解

本节将简要回顾重写和 Anick 分解的基本概念，然后在归一化 bar 分解上构造一个莫尔斯匹配，从而为 Lawvere 理论给出 Anick 分解。

5.1 抽象重写系统

设 X 是一个集合，$\to$ 是 X 上的一个二元关系。我们用 $\to^+$ 表示 $\to$ 的传递闭包，用 $\to^*$ 表示 $\to$ 的自反传递闭包，用 $\leftrightarrow^*$ 表示 $\to^*$ 的对称闭包。

我们称 $\to$ 是良基的，如果其中不存在由 X 中的元素构成的无限序列 $a_1 \to a_2 \to \dots$。如果对于任意满足 $a \leftrightarrow^* b$ 的 $a,\ b \in X$，都存在 $c \in X$ 使得 $a \to^* c$ 且$b \to^* c$，则称 $\to$ 具有*Church-Rosser* 性质。如果 $\to$ 是良基的且具有 Church-Rosser 性质，则称 $\to$ 是完备的。若不存在 $b \in A$ 使得 $a \to b$，则称元素 $a \in X$ 是 $\to$-不可约的。如果 $a \to^* a'$ 且 a' 是$\to$-不可约的，则称元素 a' 是 $a \in X$ 的一个 $\to$-标准形。

引理 5.1. 设 $\to_1$ 是 A 上一个良基且具有 Church-Rosser 性质的关系，$\to_2$ 是 A 上一个满足以下条件的良基关系：对于任意$a,\ a' \in X$，若 a' 是 a的一个 $\to_2$-标准形，则 a' 是 a 的一个 $\to_1$-标准形。那么，$\to_2$ 具有 Church-Rosser 性质，且 $\leftrightarrow_2^* \subset \leftrightarrow_1^*$。

证明。假设 $a \leftrightarrow_2^* b$。由于 $\to_2$ 是良基的，存在 $\to_2$-标准形 $a',\ b'$ 分别是 $a,\ b$的标准形。根据条件 $a',\ b'$ 分别是 $\to_1$-标准形 $a,\ b$，因此 $a' = b'$，因为 $\to_1$ 满足 Church-Rosser 性质。因此，$a \to_2^* a'$ 和 $b \to_2^* b'$ 意味着 $\to_2$ 满足 Church-Rosser 性质。

假设 $a \leftrightarrow_2^* b$，并令 a' 为 $a,\ b$的 $\to_2$-标准形。那么，根据条件，a' 也是 $a,\ b$ 的 $\to_1$-标准形，因此 $a,\ b \to_1^* a'$，这意味着 $a \leftrightarrow_1^* b$。 □

5.2 Anick 分解回顾

本小节回顾幺半群环上模的 Anick 分解，并按照 [20, 11]介绍如何通过莫尔斯匹配构造这些分解。本小节的内容在后续章节中并未从技术上用到，但有助于理解下一小节中 Lawvere 理论的 Anick 分解的主要构造。此外，我们还按照 [7]，用重写系统来描述 Anick 分解。

设 A 为一个集合。对于一个词 $u \in A^*$，$|u|$ 表示 u 的长度。对于两个词 u、$v \in A^*$ 和一个整数 $i \in \{1, \dots, |u|\}$，若对于某些 u_1、$u_2 \in A^*$，有 $u = u_1 v u_2$，且满足$|u_1| = i - 1$，则称 v 是 u在位置 i 处的子词。

集合 A^* 上的半同余关系 是 A^* 上的一个二元关系 $\to$，满足：对于任意 u、v、u'、$v' \in A^*$，若 $u \to v$，则 $u'uv' \to u'vv'$。若半同余关系 $\to$ 是等价关系，则称其为同余 关系。对于 A^* 上的任意同余关系 $\sim$，商集 $A^*/\!\sim$ 具有由 A^* 上的连接诱导的幺半群结构。

对于 $R \subset A^* \times A^*$，我们将包含 $R \subset A^* \times A^*$ 的 A^* 上最小的半同余关系记作 $\to_R$，将包含 R 的 A^* 上最小的同余关系记作 $\sim_R$。此外，我们将集合 $\{l \in A^* \mid (l,\ r) \in R\}$ 记作 R_{L}。

设 N 为一个幺半群。N 的表示 是由集合 A（其元素为生成元）和集合 $R \subset A^* \times A^*$（其元素为关系词）组成的一对，使得 N 与 $A^*/\!\sim_R$同构。

若关系词集合 $R \subset A^* \times A^*$ 满足 $\to_R$ 良基，则称其为终止的。若 $\to_R$ 分别具有 Church-Rosser 性质或完备，则称 R 为*Church-Rosser*或完备。此外，若 $\to_R$ 满足相应条件，则称词 $u \in A^*$ 为 R-不可约。若词 u不是 R-不可约的，即对于某个 u_1， $u = u_1 l u_2$ ，且 $u_2 \in A^*$ 和 $l \in R_{\mathrm{L}}$，则称其为 R-可约。若对于任意 $(l, r) \in R$， l都是 $(R \setminus \{(l, r)\})$-不可约的，且 r 是 R-不可约的，则称 R 为约化的。

如果 R 是完备的，那么每个等价类 $[u]_{\sim_R}$ 都包含唯一一个 R-不可约词，称为 u的-标准形。

假设 N 由（A, R）表示，其中 R是约化且完备的。我们将 n-链定义如下: .

定义 5.2。 0-链 是 0 元组()。1-链 是 $a \in A$对应的 1 元组(a)。对于 $n > 1$，若每个 u_i都是 R-不可约的，$(u_1, \ldots, u_{n-1})$是一个$(n-1)$-链， $u_{n-1}u_n$是 R-可约的，并且 $u_{n-1}u_n$ 的每个真前缀都是 R-不可约的，则 n元组$(u_1, \ldots, u_n)$是一个 n-链。

注意，如果$(u_1, \ldots, u_n)$是一个 n-链，那么 $u_{n-1}u_n$可以写成 $u_{n-1}u_n = wl$，其中 $w \in A^*$和 $l \in R_{\mathrm{L}}$ 满足相应条件; 并且对于任意 $w, w \in A^*$、 $l \in R_{\mathrm{L}}$、 $w' \neq 1$，都不能将其写成 $u_{n-1}u_n = wlw'$。

Anick 证明，存在平凡左 $\mathbb{Z}N$-模 $\mathbb{Z}$ 的一个自由分解

$$\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0 \tag{5}$$

其中 F_n 是由 n 链的集合 [1] 生成的自由左 $\mathbb{Z}N$-模。

文献 [7, 20, 11] 证明，该分解可由归一化 bar 分解上的莫尔斯匹配得到,

$$\ldots \xrightarrow{\delta_3} B_2^s \xrightarrow{\delta_2} B_1^s \xrightarrow{\delta_1} B_0^s \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

其中 B_n^s 是由满足条件 $u_i \neq 1$ 的词的 n 元组（u_1，.....， u_n）生成的自由左 $\mathbb{Z}N$-模，其中对任意 $i = 1$，... ...， n， ϵ 是典范增广，而 δ_n 定义为

$$\delta_n(u_1, \ldots, u_n) = u_1(u_2, \ldots, u_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (u_1, \ldots, u_i u_{i+1}, \ldots, u_n).$$

如下给出这样的莫尔斯匹配 $\mathcal{M}^s$ 。

定义 5.3. 我们将 $\mathcal{M}^s$ 定义为图 $G_{B_\bullet^s}$ 中形如以下形式的边的集合

$$(u_1, \ldots, u_i, u'_{i+1}, u''_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n) \to (u_1, \ldots, u_n) \tag{6}$$

其中 $u'_{i+1}u''_{i+1} = u_{i+1}$，$(u_1$，.....， u_i， $u'_{i+1})$ 是一条 $(i+1)$-链，而 i 是小于 n 的最大整数，使得 $(u_1$，.....， $u_i)$ 是一条 i- 链。

我们大多省略 $\mathcal{M}^s$ 是莫尔斯匹配的证明，只说明 $\mathcal{M}^s$ 中任意两条边没有共同的目标：假设 $\mathcal{M}^s$ 包含两条边 $(u_1, \ldots, u_i, u'_{i+1}, u''_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n) \to (u_1, \ldots, u_n)$ 和 $(u_1, \ldots, u_i, v'_{i+1}, v''_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n) \to (u_1, \ldots, u_n)$。注意， u'_{i+1} 和 v'_{i+1} 是 u_{i+1}的前缀。由于 $(u_1, \ldots, u_i, u'_{i+1})$ 和 $(u_1, \ldots, u_i, v'_{i+1})$ 是 $(i+1)$-链，因此对于某些 $w, w' \in A^*$,l, $l' \in R_{\mathrm{L}}$，有 $u_i u'_{i+1} = wl$ 和 $u_i v'_{i+1} = w'l'$。若 u'_{i+1} 是 v'_{i+1} 的真前缀（分别地，若 v'_{i+1} 是 u'_{i+1}的真前缀），则与每个真前缀 $u_i v'_{i+1}$ （分别地， $u_i v'_{i+1}$）都是 R-不可约的假设矛盾。因此我们有 $u'_{i+1} = v'_{i+1}$, $u''_{i+1} = v''_{i+1}$。

最后我们指出， n-链恰好就是 $\mathcal{M}^s$-临界胞腔。根据定义，(6) 的目标不是 n-链，而源不是 $(n+1)$-链，因为 $u_i u'_{i+1}$ 是 R-不可约的。反过来，假设 $(v_1, \ldots, v_n)$ 不是 n-链。令 i 为小于 n 且使 $(v_1, \ldots, v_i)$ 为 i-链的最大整数。如果 $v_i v_{i+1}$ 是 R-可约的，那么对于某些 w、 $w' \in A^*$、 $l \in R_{\mathrm{L}}$、 $w' \neq 1$，有 $v_i v_{i+1} = wlw'$ ，因此 $(v_1, \ldots, v_i, wl, w', v_{i+2}, \ldots, v_n) \to (v_1, \ldots, v_n)$ 属于 $\mathcal{M}^s$。否则，$(v_1, \ldots, v_n) \to (v_1, \ldots, v_i v_{i+1}, \ldots, v_n)$ 属于 $\mathcal{M}^s$。因此，$(v_1, \ldots, v_n)$ 不是 $\mathcal{M}^s$- 临界的。

5.3 项

设 Σ 为一个 S-排序签名。

对于项 t 和由 p 正整数组成的有限序列，我们如下定义项 $t|_p$： $t|_\epsilon = t$ 当序列 ϵ为空时；若 $t = f(t_1、\ldots\ldots、t_n)$ 且 $i \in \{1,\ldots,n\}$，则 $t|_{ip'} = t_i|_{p'}$。否则，$t|_{ip'}$未定义。此外，对于由项 $\vec{t} =(t_1、\ldots\ldots、t_m)$ 组成的m元组，若 $p = ip'$，则定义 $\vec{t}|_p = t_i|_{p'}$； $i \in \{1,\ldots,m\}$。否则，$\vec{t}|_p$未定义。我们将 Pos($\vec{t}$) 定义为满足 $\vec{t}|_p$有定义的序列 p所构成的集合。我们称 Pos($\vec{t}$) 中的元素为$\vec{t}$中的位置。若对于 t中的某个位置 p，有 $t' = t|_p$，则称 t'是 t的子项。

从现在起，我们将项元组 $\vec{t}$与 Syn(Σ) 中的态射 ($\Gamma\ |_\emptyset\ \vec{t}$) 视为相同。

我们称项 $t'\colon \vec{X}' \to Y$是项 $t\colon \vec{X} \to Y$的广义子项，记作 $t' \preceq_{\mathrm{gs}} t$，如果存在 t的子项 $t''\colon \vec{X} \to Y$ 以及 $\vec{s}\colon \vec{X} \to \vec{X}'$，使得 $t'' = t'\vec{s}$。换言之，如果 Var(t) $=\{x_1,\ldots,x_n\}$且 Var(t') $=\{y_1,\ldots,y_m\}$，那么 $t' \preceq_{\mathrm{gs}} t$当且仅当存在 s_1，……，s_m，使得 $t'[s_1/y_1,\ldots,s_m/y_m]$是 t的子项。此外，如果 t' 是 t 的广义子项且 $t' \neq t$，那么称 t' 是 t的真广义子项，记作 $t' \prec_{\mathrm{gs}} t$。注意，$\preceq_{\mathrm{gs}}$ 是一个偏序，并且任何项关于 $\preceq_{\mathrm{gs}}$ （模 $\sim_\alpha$）都只有有限多个下界。

如果存在同一排序的项 l、r，使得 Var(r) $\subset$Var(l)，则 ($\Gamma\ |_\emptyset$ (l、r)) 是 Syn(Σ) 中的一个重写规则态射；我们将该重写规则记作 $\Gamma\ |_\emptyset\ l \to r$，或简记为 $l \to r$。项重写系统（*TRS*）是由重写规则组成的集合。

对于重写规则 $\Gamma\ |_\emptyset\ l \to r$($\Gamma = x_1、\ldots、x_n$) 和项 t、t'，如果存在一个重写上下文 C 和 n 个项 $\vec{s}$=($s_1、\ldots、s_n$)，使得 $t = C[l\vec{s}]$ 且 $t' = C[r\vec{s}]$，那么我们称 t通过 $\Gamma\ |_\emptyset\ l \to r$重写为 t'。如果 t 通过 R中的某个规则重写为 t'，我们记作 $t \to_R t'$。

注意，t 可以由 $l \to r$ 写出，当且仅当 l 是 t的广义子项。此外，不难证明，将 R 视为方程集时，$\approx_R$ 与 $\leftrightarrow_R^*$（$\to_R$的自反对称传递闭包）一致。

我们可以验证，$\to_R$与等价关系 $\sim_\alpha$相容，也就是说，如果 $t \sim_\alpha t'$、$s \sim_\alpha s'$ 且 $t \to_R s$，那么 $t' \to_R s'$。因此，我们可以将 Syn(Σ) 中的态射 ($\Gamma\ |_\emptyset\ t$)、($\Gamma\ |_\emptyset\ s$) 之间的 $\to_R$ 定义为 ($\Gamma\ |_\emptyset\ t$) $\to_R$ ($\Gamma\ |_\emptyset\ s$) $\Longleftrightarrow t \to_R s$。

我们称 R 是终止的、*Church-Rosser*，或完备，如果 $\to_R$ 分别是良基的、Church-Rosser 或完备的；并将 R-不可约 或 R-范式 分别称为 $\to_R$-不可约或 $\to_R$-范式。对于任意两个项 t、s，当且仅当 t 和 s 的 R- 范式相同（例如，参见 [2, 定理 2.19], ），我们有 $t \approx_R s$。如果对于任意规则 $l \to r \in R$，l 都是 $R \setminus \{l \to r\}$-不可约的，且 r 是 R-不可约的，则称项重写系统 R 是约化的。

引理 5.4. 对于任意终止项重写系统 R，R 是 Church-Rosser 的，当且仅当对于任意项 t，都存在唯一的 R-不可约项 $\hat{}t$，使得 $t \to_R^* \hat{}t$。

证明。假设 R 是 Church-Rosser 的。若对于某个项 t，$t \to_R^* s_1$ 和 $t \to_R^* s_2$ 与不可约项 R 和 s_1, s_2 有关，那么根据 Church-Rosser 性质，我们有 $s_1 = s_2$。反过来，假设对于任意项 t，都存在唯一的 R-不可约项 t，使得 $t \to_R^* t$。对于满足 $t_1 \approx_R t_2$的项 t_1, t_2，设 t_1, t_2 是满足 $t_1 \to_R^* \hat{}t_1$ 和 $t_2 \to_R^* \hat{}t_2$的 R-不可约项。那么，由对 $t_1 \leftrightarrow_R^* t_2$ 的长度作归纳法，很容易证明 $\hat{}\ t_1 = \hat{}t_2$。 □

命题 5.5. 对于任意完备项重写系统 R，都存在一个约化的完备项重写系统 R'，使得 $\leftrightarrow_R^* = \leftrightarrow_{R'}^*$。

证明. 设 R 是一个完备项重写系统，且 $R'' = \{l \to \hat{}r \mid l \to r \in R, \hat{}r$ 是 $r\}$的 R-标准形。由于 $\to_{R''} \subset \to_R^+$ 且 R 终止，因此 $\leftrightarrow_{R''}^* \subset \leftrightarrow_R^*$ 且 R'' 终止。任意 R''-不可约项 t都是 R-不可约的，因为 R 和 R'' 的规则左部集合相同。于是，我们可以应用定理 5.1 得出 R'' 是 Church-Rosser。

我们通过再次应用定理 5.1 来证明 $\leftrightarrow_R^* \subset \leftrightarrow_{R''}^*$。$R$-不可约项也是 R''-不可约的，因为 $\to_{R''} \subset \to_R^+$。如果 $\hat{}t$ 是 R的标准形，那么我们通过关于 $\to_{R''}$这一良基关系对 t 作良基归纳，证明 $\hat{}t$ 是 t 的 R''标准形。如果 t 是 R-不可约的，那么 $t = \hat{}t$。否则，存在 t' 使得 $t \to_{R''} t'$。由于 R 是完备的，且 $t \to_R^* t'$，我们有 $t' \to_R^* \hat{}t$。根据归纳假设，我们有 $t' \to_{R''}^* \hat{}t$，因此 $t \to_R^* \hat{}t$。所以，我们可以应用定理 5.1，得到 $\leftrightarrow_R^* \subset \leftrightarrow_{R''}^*$，进而得到 $\leftrightarrow_R^* = \leftrightarrow_{R''}^*$。

设 $R' = \{l \to r \in R'' \mid l \text{ 是 } (R'' \setminus \{l \to r\})\text{-不可约的}\}$。根据定义， R' 是约化的。我们证明 R' 是完备的，且 $\leftrightarrow^*_{R''} = \leftrightarrow^*_{R'}$。由于 $\to_{R'} \subset \to_{R''}$ 和 R'' 是终止的， R' 也是终止的，$\approx_{R'} \subset \approx_{R''}$ ，并且任意 R''-不可约项都是 R'-不可约的。我们证明任意 R''-可约项都是 R'-可约的。假设 t 是 R''-可约的，且可以通过某个 $l \to r \in R'' \setminus R'$改写。于是，存在 $l' \to r' \in R'' \setminus \{l \to r\}$可以改写 l。由于 l' 是 l的真广义子项，我们有 $l' \to r' \in R'$ ，并且 t 可以通过 $l' \to r'$改写。

我们通过关于 t 的良基关系 $\to_{R''}$ 进行良基归纳，证明若 $\hat{}t$ 是 t 的 R''-标准形，则 $\hat{}t$ 是 t 的 R'-标准形。若 t 是 R''- 不可约的，则 $t = \hat{}t$。否则， t 是 R'- 可约的，因此存在 t' ，使得 $t \to_{R'} t'$ 且 $t \to_{R''} t'$。由于 R'' 是完备的，$t' \to^*_{R''} \hat{}t$。由于 R' 是完备的，且 $t \to^*_{R''} t'$，我们有 $t' \to^*_{R'} \hat{}t$。根据归纳假设，我们有 $t' \to^*_{R'} \hat{}t$，因此 $t \to^*_{R''} \hat{}t$。所以，我们可以应用定理 5.1，得出 R' 满足 Church-Rosser 性质，且 $\leftrightarrow^*_{R''} \subset \leftrightarrow^*_{R'}$，从而 $\leftrightarrow^*_{R''} = \leftrightarrow^*_{R'}$。 □

一对态射 $\vec{t}\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times \cdots \times Y_m$, $\vec{t}'\colon X'_1 \times \cdots \times X'_k \to Y_1 \times \cdots \times Y_m$（属于 Syn(Σ)）的合一子是由两个态射 $\vec{s}\colon \vec{Z} \to X_1 \times \cdots \times X_n$, $\vec{s}'\colon \vec{Z} \to X'_1 \times \cdots \times X'_k$ 组成的一对 $(\vec{s}, \vec{s}')$（属于 Syn(Σ)），满足 $\vec{t}\vec{s} = \vec{t}'\vec{s}'$。如果 $\vec{t}\vec{s}$ 是本质的，并且对于任意其他合一子 $(\vec{r}, \vec{r}')$，都存在 $\vec{u}$，使得 $\vec{r} = \vec{s}\vec{u}$ 且 $\vec{r}' = \vec{s}'\vec{u}$，则该合一子是最一般的。

Church-Rosser 性质 终止项重写系统的性质可通过临界对的概念轻松检验 .

定义 5.6. 设 $(\Gamma_i \mid_\emptyset l_i \to r_i) \in R$ $(i = 1,2)$。若存在 $p \in \mathrm{Pos}(l_1)$，使得 $l_1|_p$ 不是变量，并且 $(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$ 是 $(l_1|_p, l_2)$ 的最一般合一子，则称对 $(r_1\vec{s}_1, t)$ 为一个临界对 ，其中 t 是通过将位置 p 处的子项替换为 $r_2\vec{s}_2$，从 $l_1\vec{s}_1$ 得到的项。

引理 5.7. 终止项重写系统 R 是 Church-Rosser 的，当且仅当对于 R的任意临界对 (t, t')，都存在一个项 s ，使得 $t \to^*_R s$ 且 $t' \to^*_R s$。

证明。 例如，参见 [2,推论 6.2.5], □

5.4 观察

在本小节中，我们注意到，5.2 中的一些概念无法简单地推广到 Lawvere 理论。

例如，考虑 $S = \{X\}$, $\Sigma = \{+, 0\}$ 满足 $\alpha(+) = (XX, X)$, $\alpha(0) = (\epsilon, X)$，以及由以下规则组成的项重写系统 R

$$\rho_1 = (x \mid_\emptyset x + 0 \to x), \quad \rho_2 = (x \mid_\emptyset 0 + x \to x)$$

我们在范畴 Syn(Σ, R) 上进行讨论。显然， R 是约化的。 R 是终止的，因为应用 R 中的一条规则后，项中 0 的数量会严格减少；而 R 的 Church-Rosser 性质可由定理 5.7 证明。

我们可以 i 在 Syn(Σ, R) 中将 $(\Gamma \mid_R t)$ 与 Syn(Σ) 中的 $(\Gamma \mid_\emptyset \hat{}t)$ 视为相同，其中 $\hat{}t$ 是 R-标准形 t.

我们称 1-元胞 (ω) 为 1-链，若 $\omega = (x_1, x_2 \mid_\emptyset x_1 + x_2)$ 或 $\omega = (\mid_\emptyset 0)$，且其中恰好包含一个 Σ 符号。仿照定理 5.2，我们可以将 2-胞腔 $((x_1, \ldots, x_m \mid_\emptyset t), (y_1, \ldots, y_n \mid_\emptyset (s_1, \ldots, s_m)))$ 定义为 2-链，若 $(x_1, \ldots, x_m \mid_\emptyset t)$ 是 1-链，$t' = t[s_1/x_1, \ldots, s_m/x_m]$ 是 R-可约的，并且 t' 的每个真广义子项都是 R-不可约的。这意味着，对于某个 $\rho = (\Gamma \mid_\emptyset l \to r)$， $t = l$ 属于 R。因此，在我们的例子中，有两个 2-链：$((x_1, x_2 \mid_\emptyset x_1 + x_2), (x \mid_\emptyset (x, 0)))$ 和 $((x_1, x_2 \mid_\emptyset x_1 + x_2), (x \mid_\emptyset (0, x)))$。

类似地，我们可能想将 n-链定义为一个 n-胞腔 $(\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n)$，使得 $(\omega_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_{n-1})$ 是一个 $(n-1)$-链，t 是 R-可约的，并且 t 的每个真广义子项都是 R-不可约的，其中$\omega_{n-1}\omega_n = (\Gamma \mid_\emptyset t)$。然而，这一定义无法给出定理 5.3 中那样的部分匹配 $\mathcal{M}$。例如，考虑图 1 中所示的 2-胞腔 $\tau = ((x_1, x_2 \mid_\emptyset x_1 + x_2), (\mid_\emptyset (0, 0)))$，以及两个 3-胞腔 $\tau_1 = ((x_1, x_2 \mid_\emptyset x_1 + x_2), (x \mid_\emptyset (0, x)), (\mid_\emptyset 0))$ 和 $\tau_2 = ((x_1, x_2 \mid_\emptyset x_1 + x_2), (x \mid_\emptyset (x, 0)), (\mid_\emptyset 0))$。由于 τ 不是 2-链，而 $(x_1, x_2 \mid_\emptyset x_1 + x_2)$ 是 1-链，并且由于 $(x \mid_\emptyset (0, x))(\mid_\emptyset 0) = (x \mid_\emptyset (x, 0))(\mid_\emptyset 0) = (\mid_\emptyset (0, 0))$，根据定理 5.3，$\mathcal{M}$ 应同时包含 $\tau_1 \to \tau$ 和 $\tau_2 \to \tau$，但这样一来 $\mathcal{M}$ 就不是部分匹配。

为了解决这个问题，我们将以如下方式定义 n-链：其中一个 τ_1， τ_2 是一个 3-链，另一个则与 τ 在 $\mathcal{M}$ 中相邻。

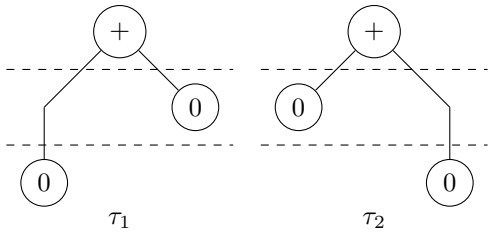


图 1

5.5 莫尔斯匹配

我们在一个 S-排序的 Lawvere 理论 $\mathbf{L}$ 的归一化 bar 分解 $B_\bullet$ 上构造莫尔斯匹配 $\mathcal{M}$。从现在起，我们将 $\mathcal{M}'$-临界胞腔（即 $B_\bullet$ 的生成元）简称为 胞腔。

假设$\mathbf{L}$ 由 (Σ, R) 表示，其中 R 是 Σ上的约化且完备的项重写系统。那么，$\mathbf{L}$ 中的一个态射$\vec{\omega}: \vec{X} \to \vec{Y}$ 唯一对应于 Syn(Σ, R) 中的 $(\Gamma \mid_R \vec{s})$，也对应于 Syn(Σ) 中的 $(\Gamma \mid_\emptyset \vec{t})$，其中 $\vec{t}$ 是 $\vec{s}$的R-标准形。此外，如果 $\vec{\omega}$ 是本质的，那么 Γ 唯一确定为 $\vec{t}$中的变量列表。因此，对于本质的 $\vec{\omega} = (\Gamma \mid_R \vec{t})$，我们只写作 $\vec{t}$。另外，当我们将 $\vec{t}\vec{t}'$ 写作 R-不可约的 $\vec{t}, \vec{t}'$时，我们指的是 Syn(Σ) 中的态射 $(\Gamma \mid_\emptyset \vec{t})(\Gamma' \mid_\emptyset \vec{t}')$，它可能是 R-可约的。我们用 $\vec{t} \star \vec{t}'$ 表示 $\vec{t}\vec{t}'$的 R-标准形。特别地，采用这一记法，我们有

$$d_j(t_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_n) = (t_1, \vec{t}_2, \ldots \vec{t}_{j-1}, \vec{t}_j \star \vec{t}_{j+1}, \vec{t}_{j+2}, \ldots, \vec{t}_n)$$

对于 $0 < j < n$。（回顾 4.1 中 d_j 的定义。）

注意，根据定理 2.9，如果 $\vec{\omega}_i$ 不是部分置换，则 $\vec{t}$ 至少包含一个函数符号。对于 $f \in \Sigma$，我们也将 $t = f(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 与 f 视为相同。特别地，如果存在某个 $f \in \Sigma$，使得 t 具有 $f(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 的形式，我们就记作 $t \in \Sigma$；否则记作 $t \notin \Sigma$。

令 $R_{\mathrm{L}} = \{l \mid \exists r.\, l \to r \in R\}$、$P(\vec{t}) = \{(p,\ l) \mid p \in \mathrm{Pos}(\vec{t}),\ l \in R_{\mathrm{L}},\ \vec{t}|_p = l\vec{s}$，其中 $\vec{s}\}$。

我们在 R_{L} 上固定一个良基全序 $<$，即满足 R_{L} 中不存在无限递增序列的全序 $<$。我们将 $<$ 扩展到 $\mathbb{Z}^*_{>0} \times R_{\mathrm{L}}$，规定：若 p 在 $\mathbb{Z}^*_{>0}$ 上的字典序中小于 p'，或 $p = p'$ 且 $l < l'$，则 $(p,\ l) < (p',\ l')$。将 $P(\vec{t}) \subset (\mathbb{Z}^*_{>0} \times R_{\mathrm{L}}) \cup \{-\infty\}$ 中的最大值记为 $\mathbf{p}(\vec{t})$，其中 $-\infty$ 被视为最小值；也就是说，当且仅当 $\vec{t}$ 是 R-不可约时，$\mathbf{p}(\vec{t}) = -\infty$。

下面的引理根据定义显然成立。

引理 5.8。对于任意 $\vec{t}$，$\vec{s}$，$\mathbf{p}(\vec{t}) \le \mathbf{p}(\vec{t}\vec{s})$。

定义 5.9。对于任意 X，0-元胞 $()_X$ 是一个 0-链。若 $t_1 \in \Sigma$，则 1-元胞 (t_1) 是一个 1-链。对于 $n > 1$，若 $\tau' = (t_1,\ \vec{t}_2,\ \ldots\ldots,\ \vec{t}_{n-1})$ 是一个 $(n-1)$-链，$\mathbf{p}(t_1\vec{t}_2 \ldots \vec{t}_{n-1}) < \mathbf{p}(t_1\vec{t}_2 \ldots \vec{t}_n)$，并且存在 $\vec{s}$，使得 $(\vec{t}_n,\ \vec{s})$ 是 $((t_1\vec{t}_2 \ldots \vec{t}_{n-1})|_p,\ l)$ 关于 $(p,\ l)$ 的最一般合一子 $= \mathbf{p}(t_1\vec{t}_2 \ldots \vec{t}_n)$，则 n-元胞$\tau = (t_1,\ \vec{t}_2,\ \ldots\ldots,\ \vec{t}_n)$ 是一个 n-链。

例 5.10. 考虑上一小节中的项重写系统。于是，$R_{\mathrm{L}} = \{x + 0, 0 + x\}$，并且我们令$x + 0 < 0 + x$。我们有 $\mathbf{p}(x + 0) < \mathbf{p}(0 + 0)$，因此 $\tau_1 = ((x_1, x_2 \mid_\emptyset x_1 + x_2), (x \mid_\emptyset (x, 0)), (\mid_\emptyset 0))$ 是一个 3-链。另一方面，$\mathbf{p}(0 + x) = \mathbf{p}(0 + 0)$，因此 $\tau_2 = ((x_1, x_2 \mid_\emptyset x_1 + x_2), (x \mid_\emptyset (0, x)), (\mid_\emptyset 0))$ 不是一个 3-链。

引理 5.11. 0-链的集合与 S之间、1-链的集合与 Σ之间，以及 2-链的集合与 R之间存在一一对应关系。

证明。由链的定义显然可得。 □

引理 5.12。如果 S, Σ, R 是有限集合，那么对于每个 n，n-链的集合都是有限的。

证明。0-链和 1-链的集合显然是有限的。假设 $(n-1)$-链的集合是有限的。设 $(t_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_{n-1})$ 是一个 $(n-1)$-链。由于满足条件（即对于某个 $\vec{s}$，$(\vec{t}_n, \vec{s})$ 是 $\left((t_1\vec{t}_2 \ldots \vec{t}_{n-1})|_p, l\right)$ 的最一般合一子）的 $l \in R_{\mathrm{L}}$、$\vec{t}_n$ 和 $p \in \mathrm{Pos}\left(t_1\vec{t}_2 \ldots \vec{t}_{n-1}\right)$的选择数有限，因此使 $(t_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_n)$ 成为 n-链的 $\vec{t}_n$ 也只有有限个。

□

对于一个 n-胞腔 $\tau=(t_1,\vec{t}_2,\ldots,\vec{t}_n)$，定义 $L(\tau)$ 为 $\{1,\ldots,n\}$ 中满足条件（即 $(t_1,\vec{t}_2,\ldots,\vec{t}_{L(\tau)-1})$ 是一个 $(L(\tau)-1)$-链）的最大整数。

定义5.13。我们将$\mathcal{M}=\mathcal{M}_{\Sigma,\ R}$ 定义为如下形式的边的集合：

$$(t_1,\vec{t}_2,\ldots,\vec{t}'_{L(\tau)},\vec{t}''_{L(\tau)},\ldots,\vec{t}_n)\to(t_1,\vec{t}_2,\ldots,\vec{t}_n)=\tau,\quad(\vec{t}_{L(\tau)}=\vec{t}'_{L(\tau)}\vec{t}''_{L(\tau)}) \tag{7}$$

这些边满足以下条件之一：$L(\tau)=1$ 且 $t'_1\in\Sigma$；或者 $L(\tau)>1$，并且存在 $\vec{s}$，使得$(\vec{t}'_{L(\tau)},\ \vec{s})$是$(t|_p,\ l)$的最一般合一子，其中 $t=t_1\vec{t}_2\ldots\vec{t}_{L(\tau)-1}$ 满足$(p,\ l)=\mathbf{p}(t\vec{t}_{L(\tau)})$。我们称$\vec{t}_{L(\tau)}=\vec{t}'_{L(\tau)}\vec{t}''_{L(\tau)}$ 为 t-分解。

例5.14。再次考虑前一小节中的项重写系统，以及例 5.10 中 R_{L} 上的序。令 $\tau=((x_1,\ x_2\mid_\emptyset x_1+x_2),\ (\mid_\emptyset(0,\ 0)))$。那么，我们可以验证 $L(\tau)=2$ 且$(\mid_\emptyset(0,\ 0))=(x\mid_\emptyset(0,\ x))(\mid_\emptyset 0)$是$(0+0)$-分解。因此，$\mathcal{M}$ 包含边 $\tau_2=((x_1,\ x_2\mid_\emptyset x_1+x_2),\ (x\mid_\emptyset(0,\ x)),\ (\mid_\emptyset 0))\to((x_1,\ x_2\mid_\emptyset x_1+x_2),\ (\mid_\emptyset(0,\ 0)))$。

根据构造，在 $\mathcal{M}$ 中，任意两个不同的边都没有共同的源。此外，由于 $(\vec{t}'_{L(\tau)},\vec{t}''_{L(\tau)})$ 的选择是唯一的，因此在 $\mathcal{M}$ 中，任意两个不同的边都没有共同的目标。

引理5.15. 对于 $\mathcal{M}$ 中的任意一条边 (7)，胞腔 $\tau'=(t_1,\vec{t}_2,\ldots,\vec{t}_{L(\tau)-1},\vec{t}'_{L(\tau)})$ 是一个 $L(\tau)$-链，并且不存在 $\vec{s}$, $\vec{s}'$ 使得 $\vec{t}''_{L(\tau)}=\vec{s}\vec{s}'$，且 $(t_1,\vec{t}_2,\ldots,\vec{t}_{L(\tau)-1},\vec{t}'_{L(\tau)},\vec{s}')$ 是一个 $(L(\tau)+1)$-链。

证明。根据定义，显然 τ'是一个 $L(\tau)$-链。反设存在$\vec{s},\vec{s}'$，使得 $\vec{t}''_{L(\tau)}=\vec{s}\vec{s}'$，且 $\tau''=(t_1,\vec{t}_2,\ldots,\vec{t}_{L(\tau)-1},\vec{t}'_{L(\tau)},\vec{s}')$是一个$(L(\tau)+1)$-链。由于$\mathbf{p}(t\vec{t}'_{L(\tau)}\vec{s})\le\mathbf{p}(t\vec{t}_{L(\tau)})=\mathbf{p}(t\vec{t}'_{L(\tau)})$，且$\mathbf{p}(t\vec{t}'_{L(\tau)})<\mathbf{p}(t\vec{t}'_{L(\tau)}\vec{s})$，故产生矛盾。 □

由此引理可知，$\mathcal{M}$ 中的任意两条边都不相邻。因此，我们有

引理 5.16. $\mathcal{M}$ 是 $B_\bullet$上的部分匹配。

为证明 $\mathcal{M}$是莫尔斯匹配，我们在胞腔上定义一个关系 $\succ$，该关系是良基的，并且满足：对于任意 τ, τ'，$\tau\xrightarrow{+-}_{\mathcal{M}}\tau'\implies\tau\succ\tau'$。对于胞腔 $\tau=(t_1,\ \vec{t}_2,\ \ldots\ldots,\ \vec{t}_n)$，令 $T(\tau)=t_1\vec{t}_2\ldots\vec{t}_n$。

定义 5.17. 在 n-胞腔上定义关系 $\succ$如下。对于两个 n-胞腔 $\tau=(t_1,\ \vec{t}_2,\ \ldots\ldots,\ \vec{t}_n)$和 $\tau'=(t'_1,\ \vec{t}_2,\ \ldots\ldots,\ \vec{t}_n)$，当且仅当以下情况之一成立时，$\tau\succ\tau'$

1. $T(\tau)\succ_{\mathrm{gs}}T(\tau')\vee T(\tau)\to^+_R T(\tau')$,
2. $T(\tau)=T(\tau')$，$t_1\notin\Sigma$和 $t'_1\in\Sigma$，或者
3. $T(\tau)=T(\tau')$，并且存在 $i\in\{1,\ldots,n-1\}$，使得 $(t_1,\ \vec{t}_2,\ \ldots\ldots,\ \vec{t}_i)$ 是一个 i-链，且等于 $(t'_1,\ \vec{t}_2,\ \ldots\ldots,\ \vec{t}_i)$，并且以下条件之一成立
   (a) $\mathbf{p}(t_1\vec{t}_2\ldots\vec{t}_{i+1})<\mathbf{p}(t'_1\vec{t}_2\ldots\vec{t}_{i+1})$, or
   (b) $\mathbf{p}(t_1\vec{t}_2\ldots\vec{t}_{i+1})=\mathbf{p}(t'_1\vec{t}_2\ldots\vec{t}_{i+1})$ and $\vec{t}_{i+1}=\vec{t}_{i+1}\vec{s}$ for some $\vec{s}$.

引理 5.18。 $>$ 是良基的。

证明。首先，$\succ'$ 是项之间两个关系 $\succ_{\mathrm{gs}}$、$\to^+_R$ 的并。注意，$\succ_{\mathrm{gs}}$ 和 $\to^+_R$ 都是良基的。一般而言，集合 A 上两个良基关系 $>_1$ 和 $>_2$ 的并 $>_1\cup>_2$ 是良基的，当且仅当对任意 $x,\ z\in A$，$\exists y.\ x>_1 y>_2 z$ 蕴含 $\exists y.\ x>_2 y>^*_1 z$，其中 $>^*_1$ 是$>_1$ [3]的自反传递闭包。这适用于我们的情形，因为若对于某个 t'有 $t\succ_{\mathrm{gs}}t'$，则存在 $\vec{s}$，使得 $t'\vec{s}$ 是t的子项；此外，若 $t'\to^+_R t''$，则 $t\to^+_R t'''$，其中 t''' 是通过将 t中的子项 $t'\vec{s}$ 替换为 $t''\vec{s}$得到的项。

假设存在一个无限的 $\tau_1\succ\tau_2\succ\ldots$ n-胞腔序列。由于 $\succ'$是良基的，存在 k，使得对任意 $l\ge k$, $\tau_l\succ\tau_{l+1}$ 均由定理 5.17 中的 2 或 3 得出。

令 $\tau_l = (t_{l,1}, \vec{t}_{l,2}, \ldots\ldots, \vec{t}_{l,n})$。如果 $\tau_l \succ \tau_{l+1}$ 由 2 得出，则有 $t_{l+1,1} \notin \Sigma$，但 $\tau_{l+1} \succ \tau_{l+2}$ 不可能由 2 或 3 得出，因为 $(t_{l+1,1})$ 不是一个 1-链。因此，对于任意 $l \geq k$，$\tau_l \succ \tau_{l+1}$ 必定由 3 得出。由于 $\mathrm{Pos}(T(\tau))$ 上的关系 $< \times R_{\mathrm{L}}$ 是良基的，对于某个 $k'' \geq k'$ 以及某个本质的非恒等映射 $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots\ldots$，有 $\vec{t}_{k''} = \vec{t}_{k''+1}\vec{s}_1 = \vec{t}_{k''+2}\vec{s}_2\vec{s}_1 = \ldots$，但这是不可能的，因为每个 $\vec{s}_i$ 至少含有一个函数符号，而 $\vec{s}_1, \vec{s}_2\vec{s}_1, \ldots\ldots$ 中的函数符号数量均不超过 $T(\tau)$ 中函数符号的数量。 □

引理 5.19. 若 $\tau \xrightarrow{+}_{\mathcal{M}} \tau'' \xrightarrow{-}_{\mathcal{M}} \tau'$ 且 τ' 是 $\mathcal{M}$-冗余的，则 $\tau \succ \tau'$。

证明。令 $\tau = (t_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_n)$。若 $L(\tau) = 1$，则对于某个 $f \in \Sigma$ 和 $\vec{t}_1'$，使得 $t_1 = f\vec{t}_1'$，有 $\tau'' = (f, \vec{t}_1', \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_n)$。于是，$\tau'$ 可写成以下任一形式：(i) 对某些 $k = 1, \ldots, l$ $(\vec{t}_1' = \langle t_{1,1}', \ldots, t_{1,l}' \rangle)$，有 $(t_{1,k}', \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_n)$；(ii) $(f, \vec{t}_1', \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_{n-1})$；或 (iii) 对某些 $j = 2, \ldots, n-1$，有 $d_j(\tau'')$。对于 (i) 和 (ii)，$T(\tau')$ 是 $T(\tau)$ 的真广义子项。对于 (iii)，可以看出，若 $T(\tau) \neq T(\tau')$，则 $T(\tau) \to_R^+ T(\tau')$；并且若 $T(\tau) = T(\tau')$，定理 5.17 中的 2 成立。

如果 $L(\tau) > 1$，令 $\vec{t}_{L(\tau)} = \vec{t}_{L(\tau)}'\vec{t}_{L(\tau)}''$ 为 $(\vec{t}_1 \ldots \vec{t}_{L(\tau)-1})$-分解。再次，$\tau'$ 可以写成以下形式之一：(i') $(t_{2,k}, \vec{t}_3, \ldots\ldots, \vec{t}_n)$，其中 $k = 1, \ldots\ldots, m$，且 $\vec{t}_2 = \langle t_{2,1}, \ldots\ldots, t_{2,m} \rangle$；(ii') $(t_1, \vec{t}_2, \ldots\ldots, \vec{t}_{n-1})$；或 (iii') $d_j(\tau'')$，其中 $j = 1, \ldots\ldots, n-1$，$j \neq L(\tau)$。并且，在情形 (i') 或 (ii') 中，$T(\tau')$ 是 $T(\tau)$ 的真子项。因此，考虑 (iii')。

对于 $\tau'' = (s_1, \vec{s}_2, \ldots\ldots, \vec{s}_{n+1})$，如果 $\vec{s}_j\vec{s}_{j+1}$ 是 R-可约的，则有 $T(\tau) \to_R^+ T(\tau')$。假设 $\vec{s}_j\vec{s}_{j+1}$ 是 R-不可约的。如果 $j \geq L(\tau) + 1$，则有 $\vec{s}_j = \vec{t}_{j-1}$、$\vec{s}_{j+1} = \vec{t}_j$，并且

$$d_j(\tau'') = (t_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_{L(\tau)}', \vec{t}_{L(\tau)}'', \vec{t}_{L(\tau)+1}, \ldots, \vec{t}_{j-1}\vec{t}_j, \ldots \vec{t}_n).$$

于是，3(b) 在 $i = L(\tau) - 1$ 的情况下成立。

如果 $j < L(\tau)$，则有 $\vec{s}_j = \vec{t}_j$、$\vec{s}_{j+1} = \vec{t}_{j+1}$，并且 $d_j(\tau'') = (t_1, \vec{t}_2, \ldots\ldots, \vec{t}_j\vec{t}_{j+1}, \ldots\ldots, \vec{t}_{L(\tau)}', \vec{t}_{L(\tau)}'', \vec{t}_{L(\tau)+1}, \ldots\ldots, \vec{t}_n)$。于是，根据链的定义，3(a) 在 $i = j - 1$ 的情况下成立。 □

由上述引理，我们有

定理 5.20。 $\mathcal{M}$ 是一个莫尔斯匹配。

因此，如果 R 是一个完备项重写系统，

$$\cdots \to B_2^{\mathcal{M}} \xrightarrow{\delta_2^{\mathcal{M}}} B_1^{\mathcal{M}} \xrightarrow{\delta_1^{\mathcal{M}}} B_0^{\mathcal{M}} \to \Omega_{\mathbf{L}} \to 0$$

是 $\Omega_{\mathbf{L}}$ 的一个自由分解，而 $B_n^{\mathcal{M}}$ 是由 n-链生成的自由 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$-模。此外，当 S、Σ、R 是有限集合时，每个 $B_n^{\mathcal{M}}$ 都是有限生成的 $\mathcal{U}_{\mathbf{L}}$-模。

注 5.21。 假设一个 3-胞腔 $\tau = (f, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$ 是临界的。那么，由于 $(f, \vec{t}_2)$ 也是临界的，所以 $f\vec{t}_2 = l_1 \in R_{\mathrm{L}}$。此外，$\mathbf{p}(f\vec{t}_2\vec{t}_3) = (p, l_2)$，因此 $(f\vec{t}_2\vec{t}_3)|_p = l_2\vec{s}$ 对于某个 $\vec{s}$。我们可以检验，l_1, l_2 提供了一个临界对。（临界胞腔对应于临界对，这是一个颇为有趣的巧合，尽管“临界”一词的这两种用法源自彼此独立的领域，即莫尔斯理论和重写理论。）

6 Morse 不等式

对于右 $\mathcal{U}$-模 M，设 $H_n(\mathbf{L}; M) = \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{U}_{\mathbf{L}}}(M, \Omega_{\mathbf{L}})$。本节将定义一个适当的右模 M，以便得到 $\mathbf{L}$ 的 Morse 不等式。

若一个按 S 排序的 Lawvere 理论 L 由项重写系统 (Σ, R) 给出表示，则环群胚 $\mathcal{R}_{\mathbf{L}}^X$ 的表示为 $\left(Q^{\vec{X}}{}_{(\Sigma,R)} \; U^{\vec{X}}{}_{(\Sigma,R)}\right)$，其定义如下。箭图 $Q^{\vec{X}}_{(\Sigma,R)}$ 是第4节中定义的 $Q^{\vec{X}}$ 的子箭图，满足 $Q^X_{(\Sigma,R)}$ 的顶点集合与 Q^X 的相同，并且 $Q^X_{(\Sigma,R)}$ 仅包含形如 $\partial_i(f) \vec{\sigma} = \partial_i(x_1, \ldots, x_n \mid_R f(x_1, \ldots, x_n))$ 的边，其中 $f \in \Sigma$。关系集合 $U^X{}_{(\Sigma,R)}$ 包含

$$\kappa_i(\Gamma \mid_\emptyset l)_{\vec{\sigma}} = \kappa_i(\Gamma \mid_\emptyset r)_{\vec{\sigma}} \tag{8}$$

f对于每条规则 $\Gamma \mid_\emptyset l \to r \in R$ 和整数 i，其中 $\kappa_i(\Gamma \mid_\emptyset t)_{\vec{\sigma}} \in \mathbb{Z}Q(\sigma_i, t\vec{\sigma})$ 定义为

$$\kappa_i(x_1, \dots, x_m \mid_\emptyset x_j)_{\vec{\sigma}} = \begin{cases} \mathrm{id}_{\sigma_j} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\kappa_i(\Gamma \mid_\emptyset f(t_1, \dots, t_n))_{\vec{\sigma}} = \sum_{j=1}^{n} \partial_j(f)_{\vec{t\sigma}} \kappa_i(\Gamma \mid_\emptyset t_i)_{\vec{\sigma}}.$$

引理 6.1。 1. $\kappa_i(\Gamma' \mid_\emptyset t\langle t'_1, \dots\dots, t'_n\rangle)_{\vec{\sigma}} = \sum_j \kappa_j(\Gamma \mid_\emptyset t)_{\langle (\Gamma'|_R t'_1)\vec{\sigma}, \dots\dots, (\Gamma'|_R t'_n)\vec{\sigma}\rangle} \kappa_i(\Gamma' \mid_\emptyset t'_j)_{\vec{\sigma}}$，

Le

2. 对于任意规则 $\Gamma' \mid_\emptyset l \to r$，

$$\begin{aligned}
&\kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset s\langle t_1, \dots, t_n, l\rangle \vec{u})_{\vec{\sigma}} - \kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset s\langle t_1, \dots, t_n, r\rangle \vec{u})_{\vec{\sigma}} \\
&= \kappa_{n+1}(\Gamma \mid_\emptyset s)_{\langle (\Gamma'|_R t_1), \dots, (\Gamma'|_R t_n), (\Gamma'|_R l)\rangle \vec{u}\vec{\sigma}} \sum_j \big(\kappa_j(\Gamma' \mid_\emptyset l)_{(\Gamma''|_R \vec{u})\vec{\sigma}} - \kappa_j(\Gamma' \mid_\emptyset r)_{(\Gamma''|_R \vec{u})\vec{\sigma}}\big) \kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset u_j)_{\vec{\sigma}}
\end{aligned}$$

证明。 1. 对 t 的结构使用归纳法。

2. 利用 1，得到

$$\begin{aligned}
&\kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset s\langle t_1, \dots, t_n, l\rangle \vec{u})_{\vec{\sigma}} - \kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset s\langle t_1, \dots, t_n, r\rangle \vec{u})_{\vec{\sigma}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \kappa_j(\Gamma \mid_\emptyset s)_{\langle \tau_1, \dots, \tau_n, (\Gamma'|_R l)\rangle \vec{\rho}\vec{\sigma}} \kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset t_k \vec{u})_{\vec{\sigma}} + \kappa_{n+1}(\Gamma \mid_\emptyset s)_{\langle \tau_1, \dots, \tau_n, (\Gamma'|_R l)\rangle \vec{\rho}\vec{\sigma}} \kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset l\vec{u})_{\vec{\sigma}} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} \kappa_j(\Gamma \mid_\emptyset s)_{\langle \tau_1, \dots, \tau_n, (\Gamma'|_R r)\rangle \vec{\rho}\vec{\sigma}} \kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset t_j \vec{u})_{\vec{\sigma}} - \kappa_{n+1}(\Gamma \mid_\emptyset s)_{\langle \tau_1, \dots, \tau_n, (\Gamma'|_R r)\rangle \vec{\rho}\vec{\sigma}} \kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset r\vec{u})_{\vec{\sigma}} \\
&= \kappa_{n+1}(\Gamma \mid_\emptyset s)_{\langle \tau_1, \dots, \tau_n, (\Gamma'|_R l)\rangle \vec{\rho}\vec{\sigma}} (\kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset l\vec{u})_{\vec{\sigma}} - \kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset r\vec{u})_{\vec{\sigma}}) \\
&= \kappa_{n+1}(\Gamma \mid_\emptyset s)_{\langle \tau_1, \dots, \tau_n, (\Gamma'|_R l)\rangle \vec{\rho}\vec{\sigma}} \sum_j (\kappa_j(\Gamma' \mid_\emptyset l)_{\vec{\rho}\vec{\sigma}} - \kappa_j(\Gamma' \mid_\emptyset r)_{\vec{\rho}\vec{\sigma}}) \kappa_i(\Gamma'' \mid_\emptyset u_j)_{\vec{\sigma}}
\end{aligned}$$

其中 $\tau_i = (\Gamma' \mid_R t_i)$，$\vec{\rho} = (\Gamma'' \mid_R \vec{u})$。 □

引理 6.2. $\left(Q^{\vec{X}}{}_{(\Sigma,R)}\, U^{\vec{X}}{}_{(\Sigma,R)}\right)$ 是 $\mathcal{R}^{\vec{X}}_{\mathbf{L}}$ 的表示。

证明。考虑包含映射 $\iota : \mathbb{Z}Q^X_{(\Sigma,R)} \hookrightarrow \mathbb{Z}Q^X$。我们可以通过对 t 的结构进行归纳法证明，对于任意 $\Gamma \mid_\emptyset t$，$\iota(\kappa_i(\Gamma \mid_\emptyset t)_{\vec{\sigma}}) = \partial_i(\Gamma \mid_R t)_{\vec{\sigma}}$ 模 U^X。因此，对于任意规则 $\Gamma \mid_\emptyset l \to r \in R$，都有 $\iota(\kappa_i(\Gamma \mid_\emptyset l)_{\vec{\sigma}}) = \iota(\kappa_i(\Gamma \mid_\emptyset r)_{\vec{\sigma}})$ 模 U^X。此外，Q^X 的每条边 $\partial_i(\omega)_{\vec{\sigma}}$ 在 $\omega = (\Gamma \mid_R t)$ 的条件下，都模 U^X 等于 $\iota(\kappa_i(\Gamma \mid_\emptyset t)_{\vec{\sigma}})$。也就是说，存在一个加性函子 μ：$\mathbb{Z}Q^{\vec{X}} \to \mathbb{Z}Q^{\vec{X}}_{(\Sigma,R)}$，使得 $\mathbb{Z}Q^{\vec{X}} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}Q^{\vec{X}}{}_{(\Sigma,R)} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}Q^{\vec{X}}$ 是恒等函子，而 μ 取决于为每个 $\omega = (\Gamma \mid_R t)$ 选择的 $(\Gamma \mid_\emptyset t)$。我们任意固定这样一种选择，并证明

$$\mu(\partial_i(\omega\langle \omega'_1, \dots, \omega'_n\rangle)_{\vec{\sigma}}) = \mu\left(\sum_j \partial_j(\omega)_{\langle \omega'_1\vec{\sigma}, \dots, \omega'_n\vec{\sigma}\rangle} \partial_i(\omega'_i)_{\vec{\sigma}}\right) \mod U^{\vec{X}}_{(\Sigma,R)}$$

对于任意 ω、ω'_1、……、ω'_n、$\vec{\sigma}$ 和 i。假设为 $(\Gamma \mid_R t) = \omega$、$(\Gamma' \mid_R t'_i) = \omega'_i$、$(\Gamma' \mid_R s) = \omega\langle \omega'_1$、……、$\omega'_n\rangle$ 选取了 $(\Gamma \mid_\emptyset t)$、$(\Gamma' \mid_\emptyset t'_i)$、$(\Gamma' \mid_\emptyset s)$。那么，我们有

$$\begin{aligned}
\mu(\partial_i(\omega\langle \omega'_1, \dots, \omega'_n\rangle)_{\vec{\sigma}}) &= \kappa_i(\Gamma' \mid_\emptyset s)_{\vec{\sigma}}, \\
\mu\left(\sum_j \partial_j(\omega)_{\langle \omega'_1\vec{\sigma}, \dots, \omega'_n\vec{\sigma}\rangle} \partial_i(\omega'_i)_{\vec{\sigma}}\right) &= \sum_j \kappa_j(\Gamma \mid_\emptyset t)_{\langle \omega'_1\vec{\sigma}, \dots, \omega'_n\vec{\sigma}\rangle} \kappa_i(\Gamma' \mid_\emptyset t'_i)_{\vec{\sigma}} \\
&= \kappa_i(\Gamma' \mid_\emptyset t\langle t'_1, \dots, t'_n\rangle)_{\vec{\sigma}}.
\end{aligned}$$

因此，只需证明

$$\kappa_i(\Gamma' \mid_\emptyset s)_{\vec{\sigma}} = \kappa_i(\Gamma' \mid_\emptyset s')_{\vec{\sigma}} \mod U^{\vec{X}}_{(\Sigma,R)} \tag{9}$$

对于任意 s, s'，满足 $s \approx_R s'$。令 $\leftrightarrow_R$ 为 $\rightarrow_R$的对称闭包。则，$\approx_R$ 是 $\leftrightarrow_R$的自反传递闭包。由于 $s \approx_R s'$，存在项 $s_0, \ldots, s_N$使得 $s_0 = s \leftrightarrow_R s_1 \leftrightarrow_R \cdots \leftrightarrow_R s_N = s'$。我们对 N使用归纳法证明 (9)。若 $N = 0$，则 (9)显然成立，因为 $s = s'$。假设 $N > 0$ 且 $\kappa_i(\Gamma_0 \mid_\emptyset s)_{\vec{\sigma}} = \kappa_i(\Gamma_0 \mid_\emptyset s_{N-1})_{\vec{\sigma}}$。此外，假设 $s_{N-1} \rightarrow_R s_N = s'$。情形 $s_N \rightarrow_R s_{N-1}$ 可用类似方法证明。于是，s_{N-1} 和s'可写为 $s_{N-1} = u\langle v_1, \ldots, v_m, l\rangle\vec{w}$以及 $s' = u\langle v_1, \ldots, v_m, r\rangle\vec{w}$，其中某个规则为 $\Gamma_1 \vdash l \rightarrow r \in R$，上下文中的项为 $\Gamma_2 \vdash u, \Gamma_1 \vdash v_1, \ldots, v_m, \Gamma_0 \vdash \vec{w}$。根据前面的引理，我们有

$$\begin{aligned}
&\kappa_i(\Gamma_0 \mid_\emptyset s_{N-1})_{\vec{\sigma}} - \kappa_i(\Gamma' \mid_\emptyset s')_{\vec{\sigma}} \\
&= \kappa_{m+1}(\Gamma \mid_\emptyset u)_{\langle \tau_1, \ldots, \tau_m, (\Gamma_1 \mid_\emptyset l)\rangle \vec{\rho}\vec{\sigma}} \sum_j (\kappa_j(\Gamma'' \mid_\emptyset l)_{\vec{\rho}\vec{\sigma}} - \kappa_j(\Gamma'' \mid_\emptyset r)_{\vec{\rho}\vec{\sigma}})\kappa_i(\Gamma' \mid_\emptyset w_j)_{\vec{\sigma}} \in \left(U^{\vec{X}}_{(\Sigma,R)}\right).
\end{aligned}$$

其中 $\tau_i = (\Gamma_1 \mid_\emptyset v_i)$ 和 $\vec{\rho} = (\Gamma_0 \mid_\emptyset \vec{w})$。 □

我们将形式为 $\partial_{i_1}(f_1)_{\vec{\sigma}_1} \ldots \partial_{i_m}(f_m)_{\vec{\sigma}_m}$ 单项式 的称为系数。

对于一项 t 和一个变量 x，令 $\#_x t$ 表示变量 x 在 t中的出现次数。以下结论很容易证明。

引理 6.3. 对于任意的 $(x_1, \ldots, x_n \mid_\emptyset t)$、整数 $i = 1, \ldots, n$，以及态射 $\vec{\sigma}$ in $\mathbf{L}$，$\kappa_i(x_1, \ldots, x_n \mid_\emptyset t)_{\vec{\sigma}}$是 $\#_{x_i} t$ 个单项式之和。

定义 6.4. R 的次数 是 $\gcd\{\#_x l - \#_x r \mid l \rightarrow r \in R, x \in V\}$。

假设 R 的次数为 d。

引理 6.5. 如果存在 k单项式 $D_1, \ldots, D_k$ 以及 k' 单项式 $D'_1, \ldots, D'_{k'}$，使得 $D_1 + \cdots + D_k - D'_1 - \cdots - D'_{k'} \in \left(U^{\vec{X}}_{\Sigma(,R)}\right)$，那么 $k - k' \in d\mathbb{Z}$。

证明. 任意 $D_1 + \cdots + D_k - D'_1 - \cdots - D'_{k'} \in \left(U^{\vec{X}}_{\Sigma(,R)}\right)$ 都可以写成

$$\sum_j \pm D''_j \left(\kappa_{i_j}(\Gamma_j \mid_\emptyset l_j)_{\vec{\sigma}_j} - \kappa_{i_j}(\Gamma_j \mid_\emptyset r_j)_{\vec{\sigma}_j}\right) D'''_j$$

对于某些单项式 D''_j, D'''_j、规则 $\Gamma_j \mid_\emptyset l_j \rightarrow r_j \in R$、整数 i_j以及态射 $\vec{\sigma}_j$，它们属于 $\mathbf{L}$。因此，我们有 $k - k' = \sum_j \pm(\#_{i_j} l_j - \#_{i_j} r_j) \in d\mathbb{Z}$。 □

我们如下定义一个右 $\mathcal{U}_\mathbf{L}$-模 $\mathcal{Z}_d$ 。

引理 6.6. 设对任意 $\omega \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U}_\mathbf{L})$，$\mathcal{Z}_d(\omega) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$；并设对任意单项式 D，$\mathcal{Z}_d(D\vec{\alpha}^*) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$。那么，$\mathcal{Z}_d$ 可唯一地扩张为一个右 $\mathcal{U}_\mathbf{L}$-模。

证明。我们证明：对于 $\mathcal{U}_\mathbf{L}$ 中的任意态射 $r = \sum_i \epsilon_i D_i \vec{\alpha}_i$ $(\epsilon_i = \pm 1)$，若 $r = 0$，则 $\sum_i \epsilon_i \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} = 0$，即 $\sum_i \epsilon_i \in d\mathbb{Z}$。我们可以将 r 改写为以下形式：$r = \sum_j D'_j \vec{\beta}^*_j$，其中

$$D'_j = D^+_{j,1} + \cdots + D^+_{j,k_j} - D^-_{j,1} - \cdots - D^-_{j,k'_j},$$

对于单项式 $D^+_{j,1}$，……，D^+_{j,k_j}，$D^-_{j,1}$，……，D^-_{j,k'_j}，并且对任意 $j \neq j'$，$\vec{\beta}_j \neq \vec{\beta}_{j'}$。若 $r = 0$，则对每个 j，我们有 $D_j \in \left(U^{\vec{X}}_{\Sigma(,R)}\right)$，由前一个引理可得 $\sum_i \epsilon_i = \sum_j k_j - k'_j \in d\mathbb{Z}$。

□

引理 6.7。对于由 $\mathcal{X}$: $\mathrm{Ob}(\mathcal{U}_\mathbf{L}) \rightarrow$ **集合**生成的任意自由左 $\mathcal{U}_\mathbf{L}$-模 M，$\mathcal{Z}_d \otimes_{\mathcal{U}_\mathbf{L}} M$ 是由 $\coprod \mathcal{X}$ 生成的自由 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-模。

证明。 不难证明，映射 $1 \otimes rx \mapsto x$ 给出了一个同构。 □

定理 6.8. 设 R 是一个约化且完备的项重写系统，其次数为 d，且 $d = 0$ 或 d 是素数。那么，我们有

（弱莫尔斯不等式） $\#\mathrm{Cr}_n(\mathcal{M}_{\Sigma,R}) \geq s(H_n(\mathbf{L}; \mathcal{Z}_d))$

（强 Morse 不等式） $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\#\mathrm{Cr}_i(\mathcal{M}_{\Sigma,R}) \geq s(H_n(\mathbf{L};\mathcal{Z}_d)) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}秩 H_i(\mathbf{L};\mathcal{Z}_d)$

其中，$s(M)$是 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-模 M的最小生成元个数。

证明。 设 $C_n = \mathcal{Z}_d \otimes_{\mathcal{U}_\mathbf{L}} B^{\mathcal{M}_\Sigma}{}_{,n}{}^{R}$。由前面的引理可知，每个 C_n 都是由 $\mathrm{Cr}_n(\mathcal{M}_{\Sigma,R})$生成的自由 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-模。于是，我们有 $\#\mathrm{Cr}_n(\mathcal{M}_{\Sigma,R}) = \mathrm{rank}(C_n) \geq \mathrm{rank}(\ker(C_n \to C_{n-1})) \geq s(H_n(\mathbf{L};\mathcal{Z}_d))$，因为$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ 是主理想整环。此外，根据欧拉示性数的一个基本事实，我们有

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^n \#\mathrm{Cr}_i(\mathcal{M}_{\Sigma,R}) = \mathrm{rank}(\ker(C_n \to C_{n-1})) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}\,\mathrm{rank}(H_i(\mathbf{L};\mathcal{Z}_d)),$$

并且由于 $\mathrm{rank}(\ker(C_n \to C_{n-1})) \geq s(H_n(\mathbf{L};\mathcal{Z}_d))$，我们得到第二个不等式。 □

参考文献

[1] David J. Anick. 结合代数的同调。《美国数学会汇刊》，296(2):641–659，1986。

[2] Franz Baader 和 Tobias Nipkow. 《项重写及其他》。剑桥大学出版社，1998。[3] Leo Bachmair 和 Nachum Dershowitz. 交换、变换与终止性。载于 J¨org H. Siekmann 编，第八届自动演绎国际会议，第 5–20 页，柏林，海德堡，1986。Springer Berlin Heidelberg。[4] Michael Barr. 无环模型。第 17 号。美国数学会，2002。[5] Hans-Joachim Baues 和 G¨unther Wirsching. 小范畴的上同调。《纯粹与应用代数杂志》，38(2):187–211，1985。[6] Jonathan Mock Beck. 三元组、代数与上同调。博士论文，哥伦比亚大学，1967。[7] Kenneth S. Brown. 《重写系统的几何：*Anick-Groves-Squier* 定理的证明》，第 137–163 页。Springer New York，纽约，NY，1992。[8] Robin Forman. 胞腔复形的莫尔斯理论。《数学进展》，134(1):90–145，1998。[9] Mirai Ikebuchi. 同调方法所得重写规则数量的下界。*Log.Methods Comput. Sci.*，18(3)，2022。[10] M. Jibladze 和 T. Pirashvili. 代数理论的 Quillen 上同调与 Baues-Wirsching 上同调。*Cahiers de Topologie et G´eom´etrie Diff´erentielle Cat´egoriques*，47(3):163–205，2006。[11] Michael Joellenbeck 和 Volkmar Welker. 通过代数离散莫尔斯理论对剩余类域的分解，2005。[12] D. E. Knuth 和 P. B. Bendix. 《泛代数中的简单字问题》，第 342–376 页。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，1983。

[13] K. Kunen. 群的单一公理。自动推理杂志，9(3):291–308，1992年12月。

[14] F. W. Lawvere。代数理论的函子语义。博士论文，哥伦比亚大学，1963年。[15] P. Malbos 和 S. Mimram。项重写系统的同调计算。载于第一届计算与演绎形式结构国际会议（*FSCD 2016*），第 52 卷《莱布尼茨国际信息学会议录（*LIPIcs*）》，第 27:1–27:17 页，德国达格施图尔，2016 年。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik。[16] B. Mitchell。具有多个对象的环。《数学进展》，8(1):1–161，1972 年。[17] B. H. Neumann。群的又一个单一公理。《伊利诺伊数学杂志》，30(2):295–300，1986 年 6 月。[18] Daniel Quillen。同伦代数。施普林格，1967 年。[19] Daniel Quillen。交换环的（余）同调。载于《纯数学专题讨论会论文集》，第 17 卷，第 65–87 页，1970 年。[20] Emil Sk¨oldberg。代数视角下的莫尔斯理论。《美国数学会汇刊》，358(1):115–129，2006 年。[21] A. Tarski。代数的等式逻辑与等式理论。载于《数理逻辑贡献》，第 50 卷《逻辑与数学基础研究》，第 275–288 页。爱思唯尔，1968 年。