arXiv:2603.28614v1 [math.CO] 30 Mar 2026

竞赛图树形图的格雷码

Marthe Bonamy * Michael Hoffmann †
Cl´ement Legrand-Duchesne ‡ G¨unter Rote §

2026年3月31日

摘要

我们研究 Knuth 提出的以下问题：给定一个有向图 G和一个根 r，能否将以 r G 为根的树形图排列起来，使得任意两个相邻的树形图仅相差一条弧？这种排列称为枢轴格雷码，也可以表述为树形图重构图中的一条哈密顿路径；该重构图由 G 的树形图在弧翻转操作下构成，也称为 G的翻转图。我们对竞赛图给出了肯定答案，并探讨了若干条件，说明有向图的翻转图可能不包含哈密顿圈。

一种格雷码是固定集合中元素的一种线性或循环排列（通常是介于 0 和 $2^n - 1$之间的数的位表示），使得相邻元素恰好只有一位不同。格雷码最初是为了避免不同步的物理开关所引入的错误而提出的，因为开关在两个相邻二进制数之间切换时会经历一段过渡期。格雷码也可以看作重构图中的一条哈密顿路径，甚至一个哈密顿圈：该图的顶点是所枚举的对象，任意两个汉明距离为一的对象之间都有一条边（参见 M¨utze 关于组合结构格雷码的详尽综述 [M¨ut23]）。

在图的生成树背景下 G，可以考虑两种类型的格雷码。最一般的一种是具有旋转门性质的排列：序列中的每棵生成树都由前一棵通过一次边交换得到，也就是移除一条边并添加另一条边。最早的此类算法由 Cummins 在 1966 [Cum66]中给出。事实上，Cummins 证明了，任意图 G的生成树在边交换下形成的重构图，也称为 G的翻转图，是边哈密顿的。也就是说，对于翻转图的每一条边，都存在一条经过该边的哈密顿圈。Shank [Sha68] 随后为这一结果给出了简短而简单的证明。截至目前，已知最高效的生成树格雷码枚举算法，在连续输出之间的平均延迟为常数，由 Smith [Smi97]提出。最后，图 G的生成树是由 G 的边构成的拟阵的基，而 Holzmann 和 Harary [HH72] 将 Shank 对任意拟阵的基在元素交换下形成的重构图的证明推广了

*法国国家科学研究中心、波尔多计算机科学研究实验室、波尔多大学´，法国（marthe.bonamy@u-bordeaux.fr）
†苏黎世联邦理工学院计算机科学系¨，瑞士（hoffmann@inf.ethz.ch）
‡雅盖隆大学数学与计算机科学学院理论计算机科学系，波兰克拉科夫（clement.legrand-duchesne@uj.edu.pl）。§柏林自由大学信息学研究所（rote@inf.fu-berlin.de）。

Shank 对任意拟阵的基在元素交换下形成的重构图的证明。

生成树的第二类格雷码具有强旋转门性质，也就是说，每一步中加入和删除的边共享一个端点。这类格雷码也称为枢轴格雷码。

问题 1. 每个图 G都存在针对其生成树的枢轴格雷码吗？

尽管很容易证明，对于任意图 G，相应的重构图都是连通的，但所有图是否都存在生成树的枢轴格雷码仍是一个未解问题。事实上，构造生成树格雷码的一种主要方法，是将生成树划分为两个集合：包含特定边 e 的生成树和不包含该边的生成树。接着，可以分别对这两个集合应用归纳法，考虑将G/e 收缩 e 后的图，以及删除 $G-e$ 后 e 的图。然而，将边 e 反收缩并不能保持强旋转门性质，因为与 e关联的边在 G/e 中相邻，但在 G中并不相邻。尽管如此，某些图类已经构造出了生成树的枢轴格雷码，具体来说，扇图 [CGS24]以及更一般的外平面图 [BM24]。

正如 Knuth 指出的 [Knu11，习题 7.2.1.6–102], 问题 1 可由有向图的以根为根的树形图存在格雷码立即推出：只需将每条边替换为两个方向相反的弧。更准确地说，有向图 G 以 r 为根的树形图，是 G 中从 r向外定向的生成树。给定两棵恰好相差一条弧的树形图，新增和删除的弧必定指向同一个顶点u；为了使该顶点 u 能从 r到达， G 树形图上的格雷码自然具有强旋转门性质。设计这种格雷码的问题由 Knuth 提出，估计难度为 46/50：

问题 2（习题 7.2.1.6–102，见 [Knu11]）。每个有向图 G是否都存在一个枢轴格雷码，使其覆盖以给定顶点为根的树形图？

1967年，Chen [Che67，定理 1] 声称，对于任意有向图 G和顶点 $r \in V(G)$，以 G 为根的 r 树形图的翻转图包含一个哈密顿圈，前提是树形图至少有三个。Rao 和 Raju [RR72] 在1972年给出了这一断言的反例：他们构造了一族有向图，其翻转图是一条路径。这些有向图并非偶然出现的特例：我们刻画了树形图在翻转图中的度为 1 的情形。在第 2.2 节中，我们构造了更多种类的反例，即翻转图为不平衡二分图、因而不含哈密顿圈的有向图。然而，正如我们将要证明的，这些反例的不平衡程度不会超过一；因此，它们并不与翻转图中存在哈密顿路径相矛盾。最后，我们的主要结果是为任意竞赛图的树形图构造枢轴格雷码（见第 3 节）：

定理 1. 设 G 是一个竞赛图， r 是 G 的一个顶点。以 r 为根的 G 的树形图的翻转图存在一条哈密顿路径。

1 预备知识

1.1 符号约定与术语表

给定有向图 $G = (V, E)$，我们用 $u \to v$ 或 uv 表示一条从 u 指向 v 的弧。我们用 $N^+(v) = \{u\colon v \to u\}$ 表示 v 的出邻域，并用 $\deg^+(v) = |N^+(v)|$ 表示其出度。类似地，我们用 $N^-(v) = \{u\colon u \to v\}$ 表示其入邻域，并用 $\deg^-(v) = |N^-(v)|$ 表示其入度。出度为零的顶点称为汇点。有向（多重）图 G 的支撑是一个具有相同顶点集的无向图；若 G 中至少有一条弧从 u 指向 v 或反向，则在 u 和 v 之间连一条边。给定 G 中一个称为根的固定顶点 r，我们将 G 的任意生成有向树称为树形图，其中所有弧的方向均背离 r。若两个树形图除一条弧外均相同，则称它们相差一次弧翻转。在树形图 T 中翻转弧 uv，即删除进入 v 的唯一一条弧，并用弧 uv 替换，从而得到另一个与 T 相差一次弧翻转的树形图。以 r 为根的 G 的翻转图，是无向图 $\mathcal{F}_r(G)$；其节点为以 r 为根的 G 的树形图，且每对相差一次弧翻转的树形图之间都有一条边。

给定一个以 r 为根的有向图 G 及其一个顶点 u，用 $D_G(u)$ 表示 u 的后代，即满足从 r 到 v 的所有路径都经过 u（包括 u）的顶点 v。给定 G 的一个树形图 A，当且仅当在 A 中，u 不是 v 的后代时，弧 $uv \in E(G) \setminus E(A)$ 才可以翻转。现在我们证明一个辅助引理，它允许我们将子树形图扩展为树形图。

引理 2. 设 G 是一个有向图，r 是 G 的一个顶点，且 G 至少存在一个以 r 为根的树形图。任何以 r 为根的 G 的有向子树 T 都可以补全为一个树形图。

证明。我们对 $|V(T)|$ 使用归纳法。设 A 是 G 的一个树形图，T 是 G 的一个有向子树，二者均以 r 为根。设 X 是 G 中不属于 T 的顶点集合。取一条从 r 到 X 中某个顶点的极小路径 P；这样的路径存在，因为 A 是一个以 r 为根的树形图。设 v 和 u 分别为 P 中最后一个和倒数第二个顶点。由 P 的极小性可知，$u \to v$ 且 u 属于 $V(T)$；因此，将弧 uv 加入 T，即可扩展 T。 □

1.2 梯子图和超立方体的哈密顿性

我们先介绍梯子图和超立方体中一些简单的哈密顿路径构造，这些构造将在其他构造中用到。一个长度为 n 的梯子图由两条路径 $a_1, \ldots, a_n$ 和 $b_1, \ldots, b_n$ 组成，每条路径的长度为n，并且在 a_i 和 b_i 之间对所有 i都添加一条边。梯子图中的一个顶点若满足层 i，则称其处于该层，当 $v \in \{a_i, b_i\}$。

引理 3. 设 F 为长度 n的梯子图，且 i、$j \le n$ 为满足$i \neq j$的整数。设 u 是一个处于第 i层的顶点。那么 F 存在一条从 u 出发、到达某个处于第 j层顶点的哈密顿路径。

请注意，我们无法指定这两个层 j 的顶点中，哪一个是这条哈密顿路径的端点。事实上，由于 F 是二分的，奇偶性论证表明，从 u 出发的哈密顿路径，其端点可能只能是层 j 的两个顶点中的一个。

证明。不失一般性，假设 $j > i$ 和 $u = a_i$。考虑路径 P_1、P_2和 P_3，其中 $P_1 = a_i$、……、a_1、b_1、……、b_i和 $P_3 = b_j$、……、b_n、a_n、……、a_j，而 P_2通过曲折前进，从 b_i到某个顶点 $v \in \{a_j, b_j\}$（见图1）：

$$P_2 = b_i, b_{i+1}, a_{i+1}, a_{i+2}, b_{i+2}, b_{i+3}, \ldots, v$$

将三条路径 P_1、P_2和 P_3 首尾相接，便得到一个哈密顿圈，终点为层级 j 的顶点 $w \neq v$。注意，w 取决于$j - i$的奇偶性。

□

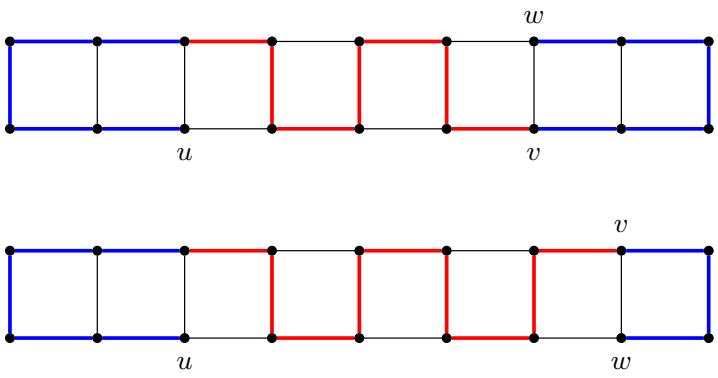


图1：梯子图中的两条哈密顿路径，其端点位于不同的层。路径 P_1 和 P_3 以蓝色绘出，路径 P_2 以红色绘出。

维度为 的超立方体 K_2^d，其维度为 d，是一个具有 2^d 个顶点的图，顶点由 $\{0,1\}^d$ 索引；当两个顶点恰好在一个坐标上不同时，它们相邻。维度至少为 2 的超立方体是边哈密顿的：

引理4. 设 K_2^d 为维度 $d \geq 2$ 的超立方体，且 $uv \in E(G)$。超立方体 K_2^d 有一个包含边 uv 的哈密顿圈。 □

列出二进制字符串是 Gray 最初考虑的问题 [格雷53],因此，关于超立方体哈密顿性的证明有很多种，例如二进制反射格雷码。由此，只需利用超立方体的边传递性，便可推知超立方体是边哈密顿的。

1.3 约化

现在我们证明若干约化规则，这些规则能够保持有向图的翻转图，或者至少保持其中存在哈密顿路径这一性质。我们考虑的操作包括删除、细分、收缩和复制一条弧。

弧删除。 给定一个固定的有向图 G，我们将通过删除弧 $u \to v$ 得到的有向图记为 $G - uv$。

观察5. 设 uv 是以 r 为根的有向图 G 的一条弧。$G - uv$ 的翻转图同构于由不包含 uv 的树形图所诱导的 $\mathcal{F}_r(G)$ 的子图。由此可直接推出，任何未出现在 G 的任何树形图中的弧，都可以从 G 中删除，而不影响其翻转图。

设 G 是以某个顶点 r 为根的有向图 G。如果有向图 H 满足 $V(H) = V(G)$ 且 $E(G) \subseteq E(H)$，并且对于 $E(H) \setminus E(G)$ 中的每条弧 $u \to v$，u 都是 G 中 v 的后代，我们就称有向图 H 构建在 G 上。我们称这样的弧 $u \to v$ 为 H 的回边。

引理 6. 如果 H 构建在 G 上，那么 $\mathcal{F}_r(H)$ 与 $\mathcal{F}_r(G)$ 同构。

证明。$E(H) \setminus E(G)$ 中的弧 uv 不会出现在 H 的任何树形图中。否则，设 A 是 H 的一棵树形图，其中有 $uv \in E(A)$。不失一般性，假设选择 uv，使得从根 r 到 v 的路径上，$E(A) \setminus E(G)$ 中只有弧 uv。于是存在一条从 r 到 u 的路径，该路径使用 G 中的弧且避开 v，这与 u 是 G 中 v 的后代矛盾。因此，H 的树形图恰好就是 G 的树形图，而根据定理 5，H 和 G 的翻转图同构。 □

弧收缩。将通过收缩弧 $u \to v$ 得到的有向图记为 G/uv；也就是说，用顶点 w 替换 u 和 v，其中 $N^-(w) = N^-(u) \cup N^-(v) \setminus \{u, v\}$，且 $N^+(w) = N^+(u) \cup N^+(v) \setminus \{u, v\}$。就翻转图而言，弧收缩不如边删除那样效果良好。事实上，即使某条弧属于 G 的所有树形图，收缩该弧也可能改变翻转图。例如，图 G 有三个顶点 r、u 和 v，以 r 为根，并包含弧 ru、uv 和 rv；它有两棵树形图：一棵包含 ru 和 uv，另一棵包含 ru 和 rv。然而，收缩 ru 后只剩下一条弧，因此 G 的树形图数量没有保持不变。另请回想引言中提到的另一种可能出现的问题：收缩后图中的重构序列并不对应原图中的重构序列。例如，考虑图 G，它有四个顶点 r、x、y、z，以 r 为根，并包含四条弧 $r \to x$、$r \to y$、$x \to z$ 和 $y \to z$（见图 2a）。将 xz 收缩为一个顶点 u 后，可以将弧 ru 翻转为 yu（见图 2b）。然而，r 和 y 在 G 中的出邻域不相交，因此这一翻转并不对应原图中的翻转。



(a) G (b) G/xz

图 2：一个有向图 G，其中将 xz 收缩到 u 会产生在 G中不可行的翻转。本文始终用带圆圈的顶点表示有向图的根，此处为 r。

然而，某些收缩仍能保留哈密顿路径的存在性。设 G为一个有向图，r 为其根，rx 为 r的一条出弧。设$G' = G/rx$ 为将 rx 收缩到新根 r'后得到的有向图。令 $\mathcal{T}_{/rx}$ 表示 G 中包含弧rx的树形图集合。

引理 7. 设 A' 为 G'的一个树形图。如果$\mathcal{F}_{r'}(G')$ 包含一条从 A'出发的哈密顿路径，那么 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/rx}]$ 包含一条从任意树形图 A 出发的哈密顿路径，其中收缩 rx 后得到 A'。

证明。令 ϕ 为一个映射，它将 G 的任意一条弧 uv 映射到弧 $r'v$ （如果 $u \in \{r, x\}$ ），否则映射到弧 uv 。对于每个以 r 为根且包含弧 rx 的树形图 T，我们有 $E(T/rx) = \phi(E(T))$。

令 T' 为 G' 的一个树形图。令 $M_{T'}$ 为 $N_G^+(x) \cap N_G^+(r)$ 中在 T' 里与 r' 相邻的出邻点集合；令 $H_{T'}$ 为 G 中所有以 r 为根、包含弧 rx 且满足 $= T/rx = T'$ 的树形图 T 的集合。我们首先证明，$H_{T'}$ 在 $\mathcal{F}_r(G)$ 中诱导出一个维度为 $|M_{T'}|$ 的超立方体。对于满足 $z \in M_{T'}$ 的每条弧 $r'z \in E(T')$，被 ϕ 映射到 $r'z$ 的弧为 rz 和 xz。对于 T' 中的任何其他弧，G 中恰有一条弧被 ϕ 映射到该弧。因此，$H_{T'}$ 与 $M_{T'}$ 的子集一一对应。此外，$H_{T'}$ 中的两个树形图 T_0 和 T_1 相差一次翻转，当且仅当存在某个 $z \in M_{T'}$ 使得 $rz \in T_i$ 和 $xz \in T_{1-i}$，且 $T_0 - z = T_1 - z$。因此，$H_{T'}$ 在 $\mathcal{F}_r(G)$ 中诱导出的子图同构于偏序集 $(M_{T'}, \subset)$ 的哈斯图，即一个维度为 $|M_{T'}|$ 的超立方体。

现在我们证明，对于 $\mathcal{F}_{r'}(G')$ 中任意相邻的 S'、T'，以及 $H_{S'}$ 中任意树形图 S ，在 $\mathcal{F}_r(G)$ 中存在一条从 S 出发的路径$[\mathcal{T}_{/rx}]$ ，它恰好经过$H_{S'}$，随后终止于 $H_{T'}$ 中的某个树形图。对 $\mathcal{F}_{r'}(G')$ 的哈密顿路径上的边迭代应用这一结论，即可得到该引理。令$S \in H_{S'}$。由于 $H_{S'}$在 $\mathcal{F}_r(G)$ 中诱导出一个维度为 $|M_{S'}|$的超立方体，因此其中包含一条从 S 出发并终止于某个 $S_2 \in H_{S'}$的哈密顿路径。令 $a'b'$ 为在 S' 中翻转后得到 T'的那条弧。注意，b' 不可能等于 r'，因为r' 是 G'的根，所以 b' 也是 G的一个顶点。若 $a' = r'$，则根据收缩的定义，存在 $a \in \{r, x\}$ 使得 $b' \in N_G^+(a)$。否则，a'并非收缩的结果，我们令 $a := a'$。在这两种情况下，S' 中从 r' 到 a' 的路径都避开 b'，因为可以翻转弧 $a'b'$ 以得到T'，因此，在 S_2 中也存在一条从 r到 a且避开 b'的路径，因为 $b' \notin \{r, x\}$。因此，a 不是 S_2 中 b' 的后代，且可以在 S_2中翻转弧 ab' 。将所得树形图记为 T。由于 $\phi(ab') = a'b'$，我们有 $T/rx = T'$，至此证明完成。

□

弧细分。 以下观察表明，我们可以通过在某个有向图的每个双边形中细分一条弧，将问题 2 限制为有向图。

观察 8。 细分一条弧不会改变翻转图。

证明。设 G 是以 r 为根的有向图，G' 是将弧 uw 细分后得到的有向图，并以 v 表示该操作中新引入的顶点。我们构造从 G 的树形图到 G' 的树形图的双射 ϕ 。给定一个包含 uw 的树形图 A，令 $\phi(A)$ 表示通过引入顶点 v 对 uw 进行细分后得到的 G' 的树形图。给定一个不包含 uw 的树形图 A ，令 $E(\phi(A)) = E(A) \cup \{uv\}$。显然，$\phi$ 是一个双射，并且 ϕ 保持汉明距离，即对于任意树形图 A_1 和 A_2，$\text{dist}_{\mathcal{F}_r(G')}(\phi(A_1)\ \phi(A_2)) \leq \text{dist}_{\mathcal{F}_r(G)}(A_1, A_2)$。此外，注意到 G' 的所有树形图都包含弧 uv ，因为 v 的入度为一；因此，ϕ^{-1} 也保持汉明距离，这就证明了 $\mathcal{F}_r(G)$ 与 $\mathcal{F}_r(G')$ 同构。

□

弧复制。 下面的引理表明，将 问题 2推广到有向多重图并不会增加其难度。

引理 9. 设 G 是一个以 r为根的有向多重图。设 e 是 G 的一条弧， G' 是通过复制 e 从 G得到的有向多重图，即添加一条弧 e'，使其首尾端点与 e相同。如果 $\mathcal{F}_r(G)$ 存在哈密顿路径（或圈），那么 $\mathcal{F}_r(G')$ 也存在哈密顿路径（或圈）。

证明。对于每个包含 e的树形图 A，记 A' 为通过在 e'中翻转 A 得到的树形图。设 A 和 B 是 $\mathcal{F}_r(G)$中相邻的两个树形图，它们通过翻转一条弧 f相邻。如果 A和 B 都包含 e，那么 $\{A, A', B, B'\}$在 $\mathcal{F}_r(G')$中构成一个四圈： A和 A' （分别为 B 和 B'）通过将 e 翻转为 e' 而相邻，而 A' 通过在弧 f上翻转与 B' 相邻。如果只有 A包含 e，那么 $f = e$，因此 $\{A, A', B\}$ 在 $\mathcal{F}_r(G')$中构成一个三角形，因为如果 e 可以在 B中翻转，那么 e' 也可以在其中翻转。将 $\mathcal{F}_r(G)$的哈密顿路径（或圈） $P = (A_1, \dots A_p)$上的边替换为适当的路径（经过三角形或四圈，具体取决于 A_i 和 A_{i+1} 是否包含 e），便可构造出 $\mathcal{F}_r(G')$的一条哈密顿路径 P' （或圈），使得每当 P经过一个含有 $e \in A_i$的树形图 A_i 时， P' 都会经过 A_i 和 A_i' （见图 3）。 □

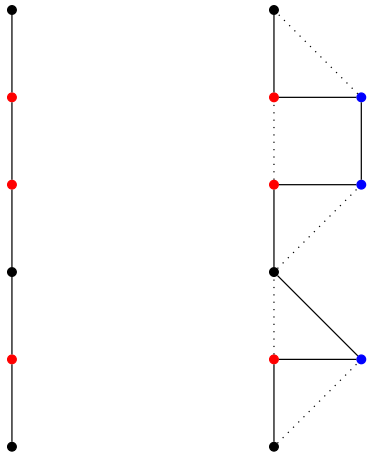


图 3：根据 $\mathcal{F}_r(G)$ 的一条哈密顿路径构造 $\mathcal{F}_r(G')$ 的一条哈密顿路径。在左侧 $\mathcal{F}_r(G)$ 的哈密顿路径中，与包含 e 的树形图对应的顶点以红色绘制。右侧是 $\mathcal{F}_r(G')$ 的一条哈密顿路径。与包含 e 的树形图对应的顶点以红色绘制，与包含 e' 的树形图对应的顶点以蓝色绘制。虚线边是在翻转图中存在、但未用于该哈密顿路径的边。

2 没有哈密顿圈的有向图及其翻转图

本节中，我们给出若干反例，说明有向图的翻转图可能不包含哈密顿圈。

2.1 翻转图可以是路径

在 [RR72], Rao 和 Raju 证明了，每个双向有向环的翻转图都是一条路径。下面回顾他们的证明:

引理 10 ([RR72])。 设 G 为将 n-圈的每条边替换为一个双边形后得到的有向图。的翻转图是一个包含 n 个顶点的路径。

证明。设 $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 是 G 的顶点，其中 v_1 是根，且每个顶点 v_i 都与 v_{i-1} 和 v_{i+1} 相接，指标按模 n 计算。在 G 中，从 v_1 到 v_i 只有两条路径：第一条是 $v_1, \ldots, v_i$，第二条是 $v_1, v_n, \ldots, v_i$。因此，以 r 为根的 G 的每个树形图，都唯一对应于一个指标区间 $[1, i]$，使得对每个 $j \in [1, i]$，v_j 都是沿着使用弧 v_1v_2 的路径到达的。在这些树形图中，只有进入叶顶点的弧可以交换。因此， G 的重构图是一条包含 n 个顶点的路径（见图 4）。 □

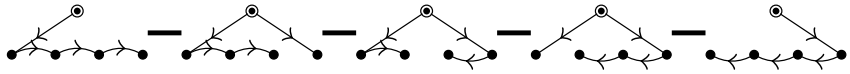


图 4：双向有向 5-环的翻转图

2.2 不平衡二分翻转图

定理 11。 设 G 是一个以 r 为根的有向图，其中所有顶点的入度至多为二。则翻转图 $\mathcal{F}_r(G)$ 是二分的。

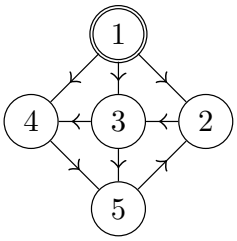
证明。 我们可以如下将树形图的奇偶性表示为乘法 权重：如果 xz 和 yz 是同一顶点 z 在 G中的两条入弧，我们任意地将权重 $w_{wz} = +1$ 赋予其中一条弧，并将 $w_{yz} = -1$ 赋予另一条弧。每条作为某个顶点唯一入弧的弧，其权重均为 $+1$。于是，树形图 $w(A) \in \{+1, -1\}$ 的权重 A 就是其各条弧权重的乘积。翻转一条弧会改变该权重的符号，因此该权重定义了翻转图的一个二部划分。

□

如果两个二部划分类的大小至少相差 1，那么这就构成了又一个反例：该有向图的翻转图中不存在哈密顿圈。例如，图 5中的图具有一个含十三个顶点的二分翻转图，如图 6所示。我们还会在定理 1的证明中看到另一个有七个树形图的例子，见图 8。

如果两个二部划分类的大小相差至少 2，这将立即妨碍翻转图中存在哈密顿路径。然而，我们可以证明，对于入度至多为 2 的有向图，其翻转图的二部划分两部分大小至多相差 1（而且很容易判断它们是否相差 1，即树形图总数是否为奇数）。

定理 12. 设 G 是以 r 为根的有向图，其中所有顶点的入度至多为二。两个二部划分类的大小之差至多为 *1*。



$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

图 5：一个具有 13 个树形图、且其翻转图中没有哈密顿圈的图。右侧是它的加权拉普拉斯矩阵（定义见定理 12），其中第 i 行和列对应标记为 i 的顶点。

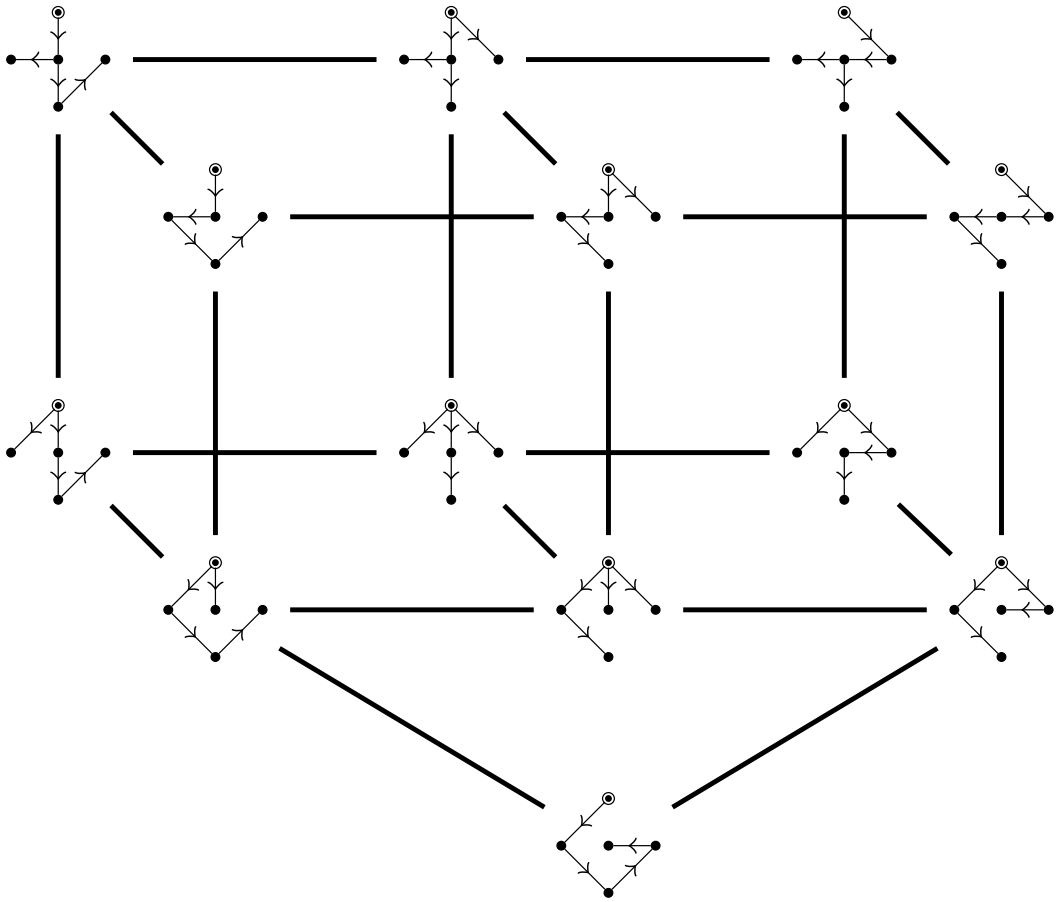


图 5 所示图的翻转图图 6

证明. 记 $w(A)$ 为定理 11 的证明中定义的权函数。我们断言

$$\left|\sum_A w(A)\right| \leq 1.$$

对所有树形图 A 求和得到的 $\sum_A w(A)$ 表示“正”树形图与“负”树形图数量之差。

根据加权矩阵树定理（例如参见 [CK78]），可以计算这个和。该定理如下：设 $L = (L_{ij}$为加权拉普拉斯矩阵，其对每条弧 $L_{ij} = -w_{ij}$ 的对应元素为 $i \to j$，而 $L_{ij} = 0$

对于所有不对应任何弧的非对角元。对角元~L_{ii} 的取值使列和为零。设 L 为矩阵 L 删去对应于根的行和列后得到的矩阵。那么

$$\sum_{A} w(A) = \det \tilde{L}.$$

在我们的例子中，矩阵 L 如下所示：对于有两条入弧的顶点，其对应的 L 列有两个元素 $+1$ 和 -1，因此，这一列中用于平衡列和的对角元素为零。对于只有一条入弧的顶点，其对应的 L列有一个元素 $+1$，因此，对角元素为 -1。

~因此，矩阵 L具有以下性质。

- 所有元素均为 0、 $+1$或 -1。
- 每列至多有两个非零元素。
- 如果某列有两个非零元素，它们的符号相反。

由网络流问题产生的矩阵具有相同的性质。Heller-Tompkins 定理 [HT56] 刻画了满足前两条性质的矩阵中的全幺模矩阵，并由此推出在此~情形下， L 是全幺模矩阵，特别是，其行列式为 0 或 ± 1。

这可以直接看出：如果存在零列，则行列式为零。如果某一列只有一个非零元素，我们沿该列展开行列式，得到一个满足相同条件的更小矩阵。重复这一过程，我们最终要么在某一步找到零列，要么将矩阵化简为大小为 1×1 的平凡矩阵，或者化简为一个每一列~都包含一个 $+1$ 和一个 -1的矩阵。在第一种和第三种情况下，$\det L = 0$；在第二种~情况下，$\det L = \pm 1$。

□

该过程可以很容易地通过组合方法实现。删除根所在的行，意味着根的所有邻点都失去一条入弧。一个只有一条入弧的顶点 j 对应于一个只有一个非零元素的列 j，例如 L_{ij}。展开该列会删除行 i 和列 j。在图中，这对应于移除从 i出发的所有边，这意味着 i 的出邻点的入度将减少，于是该过程可以继续进行。

如果这个过程在拆解整个图之前停止，则行列式为零；否则为 ± 1。

2.3 翻转图中度为一的树形图

翻转图中阻止哈密顿圈存在的另一项性质，是存在度为一的顶点；即使翻转图不是二分的（因此不是一条路径），也可能出现这种情况。例如，绘制在 图 7 中的图就是具有这一性质的有向图。

翻转图中的度为一的顶点可如下刻画：

观察 13. 设 G 是以 r 为根的有向图， A 是 G 的一棵树形图，并且 A 在翻转图 $\mathcal{F}_r(G)$中度为一，这是通过翻转某条弧 uv得到的。于是 $G - uv$ 建立在 A之上。

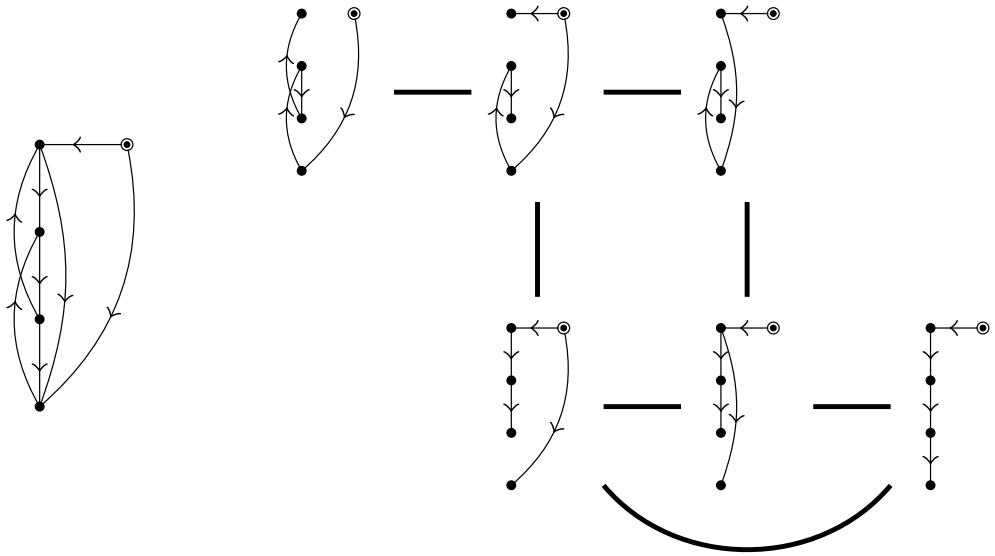


图 7：一个有向图及其翻转图，其中包含一个度为一的顶点

证明。设 $xy \in E(G - uv) \setminus E(A)$。反设 $x \notin D_A(y)$。于是，在 A中，弧 xy 可以翻转，因为 x 在 A中无需经过 y 即可从 r 到达。因此 $xy = uv$，矛盾。□

3 竞赛图树形图的格雷码

我们证明以下对定理 1的加强：

定理 14。设 G 是一个有向多重图，r 是 G 的一个顶点，且 $G - r$ 的支撑是一个团（特别地，G 中两个顶点 u 和 v 之间可以有弧，且方向可能相反）。那么，翻转图 $\mathcal{F}_r(G)$ 为空，或包含一条哈密顿路径。

首先，我们注意到定理 14在如下意义下是最优的：存在一些竞赛图，其翻转图包含一条哈密顿路径，却不含哈密顿圈。图 G所示于图 8，其翻转图就是这样的竞赛图的一个例子；还要注意，G符合定理 11的条件。

本节余下部分将证明定理 14。首先，根据定理 9，只需证明定理 14对不含重弧的有向图成立。令 $\mathcal{G}$ 表示由满足以下条件的对 (G, r) 组成的集合：是一个有向图，r 是 G 中的一个根，且 $G - r$ 的支撑是一个团。注意，$\mathcal{G}$ 在以下操作下保持不变：

- r的关联弧的删除：$\forall u$，$(G - ru,\ r) \in \mathcal{G}$
- 弧 ru 的收缩（r与其关联）：令 G' 为从 G中移除 r 和 u，并将它们替换为顶点 w 所得的图；对于所有 $x \in N^+$，若有 r，则添加弧 wx （$\cup N^+$）；若有 u，则添加弧 wx 。于是 $(G',\ w) \in \mathcal{G}$

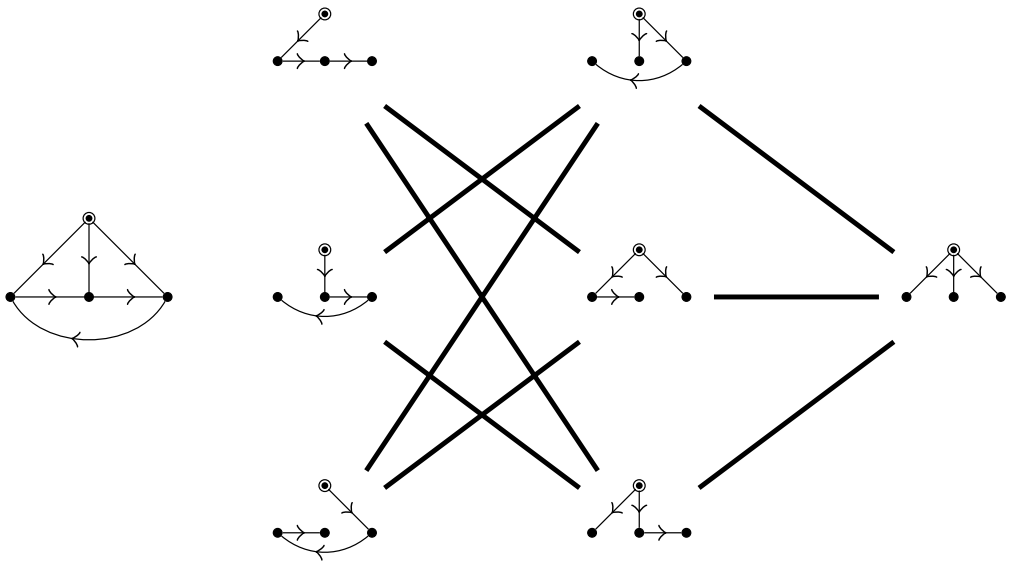


图 8：一个有向图，具有七个树形图，其翻转图是二分的，因此没有哈密顿圈。

我们采用归纳法。令 $(G,\ r) \in \mathcal{G}$。以 r 为终点的弧不属于任何树形图，因此根据定理 5，不失一般性地假设$N^-(r) = \emptyset$。如果 r 只有一个出邻点 u，那么弧 ru 包含在所有以 G为根的 r树形图中。因此，根据定理7，$\mathcal{F}_r(G)$ 与 $\mathcal{F}_u(G-r)$ 同构；由归纳法可知，二者均存在哈密顿路径，或均为空。

如果 r 至少有两个出邻点 u和 v，那么它们之间有一条弧，比如说 $u \to v$，因为 $G-r$ 的支撑是一个团。顶点 u 和 v也可能由弧 $v \to u$相连，但在证明的这个阶段我们不必考虑这一点。我们按如下方式选择 u 和 v：在所有满足 $uv \in G$的配对 $(u,\ v) \in N^+(r)^2$ 中，选择使 u 的出邻域规模最大的那一对。

的树形图集合 G 可以划分为四种类型的树形图：不包含弧 $e = ru$的树形图，包含 ru 和$f = rv$的树形图，包含 ru 和 $g = uv$ 的树形图，以及包含 ru 但既不包含 rv也不包含 rv的树形图。这些类型将 $\mathcal{F}_r(G$划分为四个子集，我们将依次记为 $\mathcal{T}_{-e}$、$\mathcal{T}_{/e/f}$、$\mathcal{T}_{/e/g}$ 和 $\mathcal{T}_{-f-g/e}$。

3.1 各类型的结构

引理15。 如果以 r 为根的 G 的翻转图非空，不同类型的树形图会在 $\mathcal{F}_r(G)$ 中形成以下结构：

- $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-e}]$ 为空或包含一条哈密顿路径 P_{-e}，
- $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-f-g/e}]$ 为空或包含一条哈密顿路径 $P_{-f-g/e}$，
- $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}]$ 包含一个生成梯。

证明。 直接应用定理 5，可得 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-e}]$ 与 $\mathcal{F}_r(G-e)$同构，因此由归纳法可知 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-e}]$ 为空，或也存在一条哈密顿路径 P_{-e}。

利用定理 5 和7，可得 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-f-g/e}]$ 与$\mathcal{F}_w(H)$同构，其中 H 由 G 通过将 e 收缩为 w 并删除 wv得到。由归纳法， $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-f-g/e}]$ 为空，或存在一条哈密顿路径 $P_{-f-g/e}$。

最后请注意， $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f}]$ 和 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/g}]$ 通过将弧 f 翻转为弧 g而同构。它们也与 $\mathcal{F}_w(H)$同构，其中 H 由 G 收缩 e 和 g 为 w得到。此外，请注意， $\mathcal{F}_r($ $G)[\mathcal{T}_{/e/f}\cup\mathcal{T}_{/e/g}]$ 非空，因为根据应用于由边 e 和 g组成的 G 子树的定理 2， H 存在树形图当且仅当 G 存在树形图。结合以上所有论证及定理7，我们可推得 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}]$ 包含一个生成梯（见图 9）。

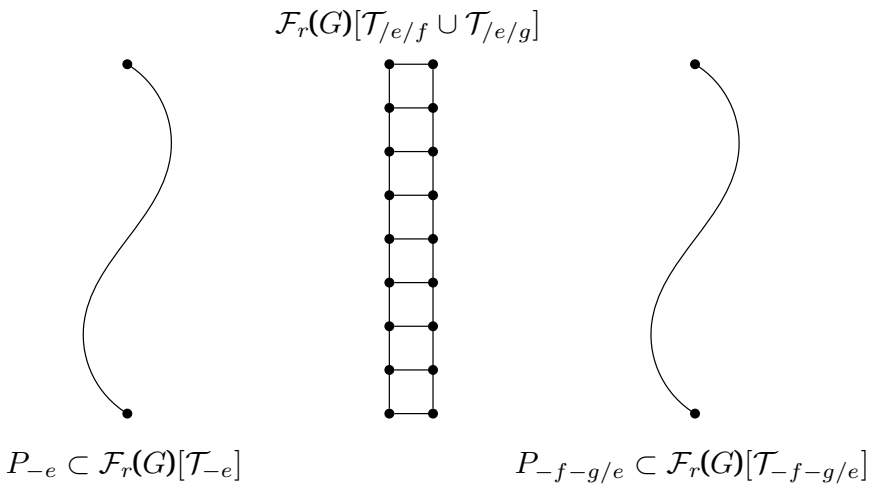


图 9：不同类型树形图中的生成结构。

□

3.2 组装这些部分

定理 14 的证明。首先我们说明，不失一般性，可以假设 $\mathcal{T}_{-f-g/e}$ 和 $\mathcal{T}_{-e}$ 非空。若二者皆为空，则由定理 15 $\mathcal{F}_r(G) = \mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}]$ 含有一个生成梯，定理 14 便可由定理 3 直接推出。若 $\mathcal{T}_{-f-g/e}$ 为空而 $\mathcal{T}_{-e}$ 非空，则根据定理 15， $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-e}]$含有一条哈密顿路径 P_{-e}。在 P_{-e}的一个端点处对 e 进行翻转，即可在 $\mathcal{T}_{/e/f}\cup\mathcal{T}_{/e/g}$中得到一个树形图。根据定理 15 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}]$ 含有一个梯子图，因此也含有一个哈密顿圈，可用它将 P_{-e} 扩展为 $\mathcal{F}_r(G)$的一条哈密顿路径。同理，我们可以假设 $\mathcal{T}_{-e}$ 非空。

对于 A中的 $\mathcal{T}_{-f-g/e}$，令 A' 和 A'' 分别表示通过在 f 中（分别在 g中）对 A进行翻转而得到的 $\mathcal{T}_{/e/f}$ （分别为$\mathcal{T}_{/e/g}$）中的树形图。

暂且假设 $P_{-f-g/e}$ 的端点 A_1 和 A_2 具有不同的A'_i。根据定理 15， $\mathcal{F}_r(G)$ $[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}]$ 包含一个梯子图，因此根据定理 3，它包含一条从 A'_1 到 A'_2 或 A''_2 的哈密顿路径。结合 $P_{-f-g/e}$ （由定理 15 得到），可得到$\mathcal{F}_r(G)$ $[\mathcal{T}_{/e/f}\cup\mathcal{T}_{/e/g}\cup\mathcal{T}_{-f-g/e}]$的一个哈密顿圈。最后， $\mathcal{T}_{-e}$ 中的所有树形图都可以通过翻转边 e与 $\mathcal{T}_{/e/f}\cup\mathcal{T}_{/e/g}\cup\mathcal{T}_{-f-g/e}$中的某个树形图相邻，因此 $\mathcal{F}_r(G)$包含一条以 $\mathcal{T}_{-e}$ 为起点的哈密顿路径（见图 10）。

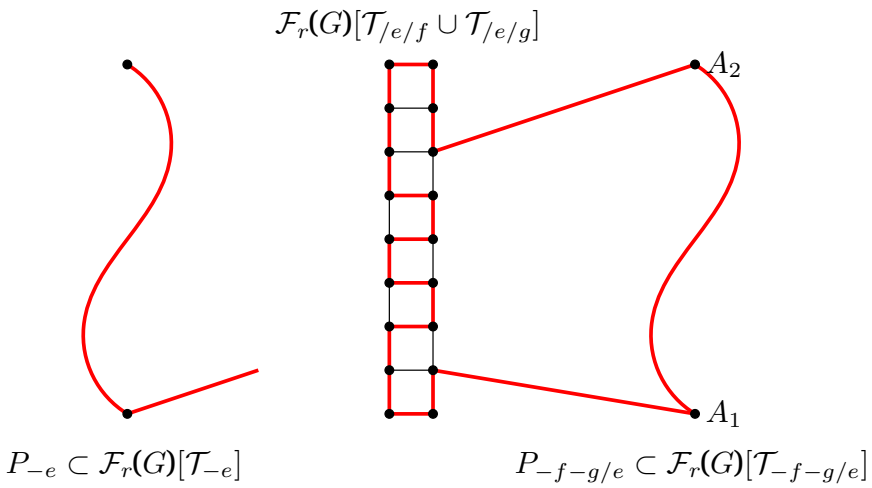


图 10：若 $A'_1 \neq A'_2$，则存在哈密顿路径。

因此，不失一般性，我们可以假设 $P_{-f-g/e}$ 的端点 A_1 和A_2 具有 $A'_1 = A'_2$ （以及 $A''_1 = A''_2$）。由于 A'_i 是由 A_i通过翻转弧 f得到的，这意味着 A_1 和 A_2 仅在一条进入 v的弧上不同，因此定理 15 中的路径 $P_{-f-g/e}$ 实际上是 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-f-g/e}]$的一个哈密顿圈。对于 $\mathcal{T}_{-f-g/e}$ 中的每个树形图 A， $A' = A'_1$ 都成立；或者存在两个在 $P_{-f-g/e}$ 上相邻的树形图 A 和 B，使得 $A' \neq B'$。在第二种情况下， $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-f-g/e}]$ 包含一条端点为 A 和 B的哈密顿路径，因此我们回到了上一段的情形。

因此，我们可以假设，对于每个 $A \in \mathcal{T}_{-f-g/e}$，都有 $A' = A'_1$ 和 $A'' = A''_1$。现在我们来刻画满足这一条件的竞赛图的结构：

引理 16. 设 G 是一个以顶点 w为根的有向图，且 $G - w$ 的支撑是一个团。设 $v \in V(G)$，使得在任何不包含 wv、以 w 为根的树形图中对 wv 进行翻转，都会得到相同的树形图 A。则有以下结论：

(1) $\mathcal{F}_w(G - wv)$ 是一个团，

(2) 除 v 以外的所有顶点，在 $G - wv$ 中都各有一条从 w 到它们的路径，

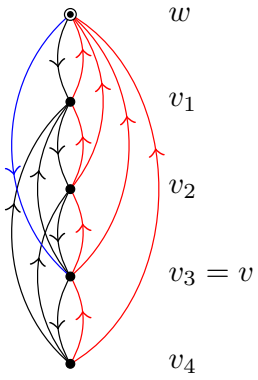
(3) $G - wv$ 中所有从 w 到 v 的路径长度至少为 *2*，

(4) $G - wv$ 具有如下结构：

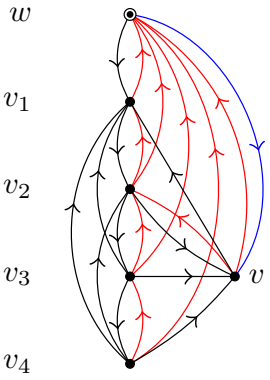
(a) 如果 $\mathcal{F}_w(G - wv)$ 是一个单顶点，那么 $G - wv$ 构建在有向路径 $w, v_1, \ldots, v_n$ 上，其中 $v = v_k$ 对某个固定的 $k > 1$ 成立。换句话说，G 包含图 $L_{k,n}$ （图 *11a* 中以黑色绘出）作为子图，而 $E(G)$ 中的弧 $\setminus E(L_{k,n})$ 要么终止于 w，要么具有形式 $v_{i+1} \to v_i$ （图 *11a* 中以红色绘出）。

(b) 如果 $\mathcal{F}_w(G - wv)$ 是一个至少包含两个顶点的团，那么 $G - wv$ 由有向路径 $w, v_1, \ldots, v_n$ 以及一个额外顶点 v和所有弧 $v_i v$ 组成，其中 $i \geq k - 1$ 对于某个固定的 $1 < k \leq n$。换言之， G包含图$M_{k,n}$ (在图 *11b*中以黑色绘出)作为

一个子图，并且 $E(G) \setminus E(M_{k,n})$ 中的弧要么是 $v \to v_{k-1}$，要么以 w 为终点，要么具有 $v_{i+1} \to v_i$ (在图 *11b* 中以红色绘出)的形式。



(a) (4a) 的示意图，其中 $n = 4$ 和 $k = 3$



(b) (4b) 的示意图，其中 $n = 4$和 $k = 3$

图 11：竞赛图 G的结构，使得 $G-wv$中以 w 为根的所有树形图在 wv中翻转后都生成同一棵树。弧 wv 以蓝色绘制，黑色弧存在于 G 中，而红色弧是可选的。

定理 *16* 的证明。以 $G-wv$ 为根的 w 所有树形图除一条进入 v 的弧外，都有相同的弧，因为它们在 wv中翻转后会得到同一个树形图。因此 $\mathcal{F}_w(G-wv)$ 是一个团，这就证明了 (1)。

从 w在 $G-wv$中进行广度优先搜索。如果广度优先搜索的每一层都只包含一个顶点，那么 $G-wv$由一条有向路径 $w, v_1, \ldots, v_n$ 以及一些回边构成，换言之， $G-wv$ 建基于一条有向路径。事实上， G 包含所有弧v_iv_j，其中 $i > j+1$，因为 $G-w$ 具有完全支撑（见 图 11a）。其他可能的回边要么以 w为终点，要么是形如 $v_{i+1} \to v_i$的弧，这就证明了 (4a)。此外，注意到 $G-wv$ 中以 w为根的树形图只有一个。

如果广度优先搜索的某一层包含多个顶点，反设存在一个与 v 不同的顶点 x，它有两个深度不大于 x 的入邻点（即位于同一层或上一层）。因此， w 到 x 之间在 $G-wv$中至少有两条路径。根据定理 2，这两条路径都可以补全为以 w为根的 $G-wv$ 树形图。这两个树形图进入 x的弧不同，因此在 wv 中翻转后会得到不同的树形图，矛盾。所以，每一层要么只含一个顶点，要么含有两个顶点 v_k和 v 以及 $v_k \notin N_G^+(v)$。因此，除 v 外，所有顶点在广度优先搜索中至多有一个深度较小的入邻点。设 v的深度为k。由于 G 具有完全支撑，所有深度至少为 k 的其他顶点都是 v 的入邻点。因此， $G-wv$ 包含一个以路径 w、v_1、……、v_n 为生成子图的图，并带有一个额外顶点 v，使得若 $i \geq k-1$，则 $v_i \to v$。此外，由于 $G-w$ 具有完全支撑， $G-w$还包含所有形如 $v_j \to v_i$ 且满足 $i > j+1$的回弧，或形如 $v \to v_i$ 且满足 $i < k-1$的回弧。换言之，图$M_{k,\ n}$ （图 11b 中以黑色绘出）是 $G-wv$的子图。最后， G 还可以包含其他回弧，即 $v \to v_{k-1}$、进入 w的弧，或形如 $v_{i+1} \to v_i$的弧，这就证明了（4b）。

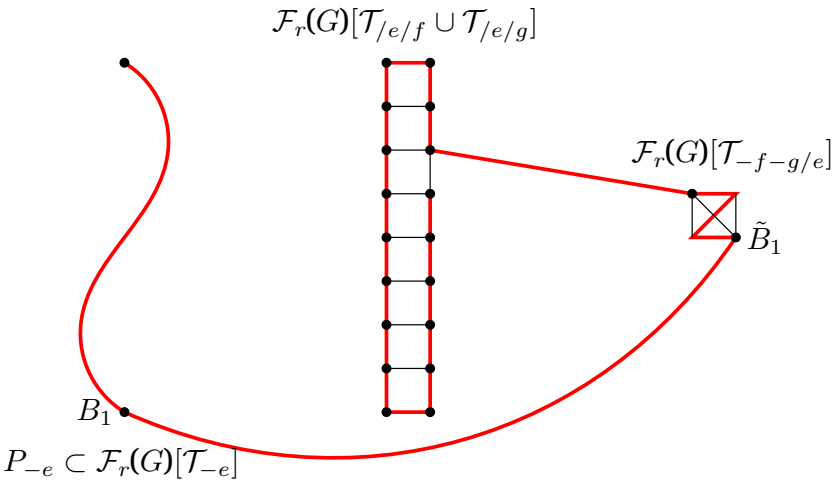
注意，在这两种情况下，$v \neq v_1$ 因为 $wv \notin G - wv$，所以 $k > 1$，这意味着(3)。此外，根据定义，回弧从不属于从根到某个顶点的路径，因此除 v 外，所有顶点都只有一条路径从 w 到达它们，该路径位于$G - wv$中，这就证明了(2)。□

根据 定理 16 应用于 G/e，其中 w 是 ru 和 v 的收缩：$= v$，可知 G/e 具有 (4) 所描述的结构，其中 k 和 n 满足，并且 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-f-g/e}]$是一个团（根据 (1)）。

˜对于每个 $B \in \mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-e}]$，令 B 为通过在 e中翻转而得到的 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g} \cup \mathcal{T}_{-f-g/e}]$ 的树形图。令 B_1 和 B_2 为 P_{-e}的端点。˜ ˜现在我们对 B_1 和 B_2的类型进行分类讨论。

˜ ˜**3.2.1** B_1 **或** B_2 **属于** $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-f-g/e}]$。

那么 $\mathcal{F}_r(G)$包含一条哈密顿路径，该路径首先经由 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-e}]$，访问 P_{-e}，然后访问 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-f-g/e}]$ 中的所有顶点，最后访问 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}]$（见图 12）。



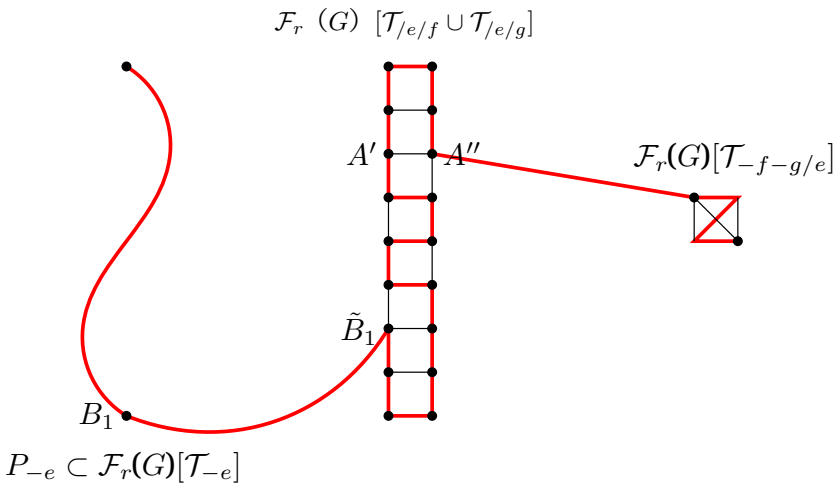
˜图 12：当 $B_1 \in \mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-f-g/e}]$时的哈密顿路径。

˜ ˜**3.2.2** B_1 **或** B_2 **属于** $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}] \setminus \{A', A''\}$。

˜不失一般性，假设 B_1 属于 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}] \setminus \{A', A''\}$。根据定理 3，$\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}]$ 包含一条哈密顿路径˜，其起点为 B_1，终点为 A' 或 A''。因此，$\mathcal{F}_r(G)$包含一条哈密顿路径，依次经过 P_{-e}、$\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}]$，最后经过 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-f-g/e}]$（见图 13）。

˜ ˜**3.2.3** B_1 **和** B_2 **属于** $\{A', A''\}$。

回想一下，G/e 具有 (4) 中 定理 16 所述的形式，因为 $A' = A'_1$并且 $A'' = A''_1$ 对所有 $A \in \mathcal{T}_{-f-g/e}$都成立。另请回想，$w$ 是由 G/e收缩 r 和 u得到的顶点。我们称 G中一个顶点的深度i 为它到 w 的距离 i，在 $G - f - g/e$ 中（也就是到 $\{r, u\}$的距离为 i



˜图 13：当 $B_1 \in \mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g} \setminus \{A', A''\}]$ 时的哈密顿路径。

在 $G-f-g$中）。我们按照 $V(G) \setminus \{r,u,v\}$ 中的标记方式为顶点标记：定理 16：令 v_i 为 $V(G-f-g/e) \setminus \{w,v\}$ 中唯一一个 i 在以根 w 为起点的广度优先搜索中，深度为 $G-f-g/e$的顶点。

˜ ˜ ˜情形1： $B_1 \neq B_2$。

不失一般性，假设 $B_1 = A'$ 和 ˜$B_2 = A''$。

断言 16.1。 r 在 G 中的出邻域由 u （其深度为 *0*）、 v_1 （其深度为 *1*）和 v （其深度至少为 *2*）组成。

断言证明。根据定义， u 是 r 的出邻点，且深度为 0（因此在图11中对应于 w ）。根据定理 16 的(3)， v 的深度至少为 2。另一方面， r 在 G中的其他出邻点都是 w在 $G-f-g/e$ 中的出邻点，因此深度为 1，所以 $\{u,v\} \subseteq N^+$（r） $\subseteq \{u,v_1,v\}$。如果 v_1 不是 r 在 G中的出邻点，那么 r 在 G_{-e}中的出度为 1，因此 $\mathcal{T}_{-e}$ 中的所有˜ ˜个树形图都包含边 $f = rv$。于是 B_1 和 B_2 都属于 $\mathcal{T}_{/e/f}$ 中的˜ ˜，所以 $B_1 = B_2 = A'$，这就产生了矛盾。■

假设 $uv_1 \notin E$（G）。那么 $v_1u \in E$（G），因为 $G-r$的支撑是一个团。回顾一下，（u，v）的选取方式是：在所有满足（）的顶点对（ $u\ v\ \in N^+\ r^{\ 2}$ $uv \in E\ G$ $|N_G^+\ u\ | \geq |N_G^+\ v_1\ | \geq 2$ $\{u,v_2\} \subseteq$，）（）中，使 N^+（u） $N_G^+\ v_1$ x u G v 最大，因此（）（），因为（）。因此，存在，它是的出邻点，且不同于。我们有 $x \in N^+_{G-f-g/e}(w)$，所以 x的深度为 1，即 $x = v_1$，矛盾。

因此 $uv_1 \in E(G)$，并且根据断言 16.1， $N_G^+(u) = \{v_1, v\}$。于是， v_1同时是 r和 u的出邻点。考虑从 w开始进行广度优先搜索所得到的 $G-f-g/e$ 的树形图 A。由于 v_1 的深度为一， $wv_1 \in E(A)$，并且收缩e时，有两个 G 的树形图 A_1 和 A_2 映射到 A：其中一个包含弧 ru和 rv_1，另一个包含弧 ru 和 uv_1。所以它们都包含 e，但都不包含 f 或 g。然而，在它们中翻转 f 会得到两个不同的树形图：由于 $v \neq v_1$，弧 uv_1 包含在 A_1' 中，但不包含在 A_2'中。这与 A' 在 $\mathcal{T}_{-f-g/e}$上为常数这一事实矛盾。˜ ˜因此，我们不能有 $B_1 \neq B_2$。

~ ~ ~ ~情况 2： $B_1 = B_2$。由于 $B_1 = B_2$，树形图 B_1 和 B_2 相邻，而 P_{-e} 实际上是一个哈密顿圈。现在我们仿照推出~ ~之后的论证，推导出 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-f-g/e}]$ 包含一个哈密顿圈。对于每个树形图 B，要么 $B = B_1$ 成立，其中 B 属于 $\mathcal{T}_{-e}$；要么存在两个树形图 B_3 和 B_4，它们在 P_{-e}上相邻，且满足 $B_3 \neq B_4$。在第二种情况下，$\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{-e}]$ 包含一条端点为 B_3 和 B_4的哈密顿路径，因此我们回到了前面某一节（第 3.2.2 节或第 3.2.3 节）的情形，或前一段的情形。

因此我们可以假设，对于每个 $B \in \mathcal{T}_{-e}$，$\mathcal{F}_r(G)[B]$ 是一个圈。现在可应用于 G，其中$w := r$ 以及 $v := u$；并应用于 G/e，其中 $w := w$ 以及 $v := v$ 以精确描述 G的结构。

断言 16.2。 G要么有一条哈密顿路径，要么 r 在G 中的出邻域由 u和 v 组成，其中 u的深度为零，v 的深度为三。此外，$\mathcal{T}_{-e}$ 的所有树形图都包含 f。

断言证明。 我们采用与断言 16.1类似的方法。根据(4)，将定理 16应用于 G/e，其中 $w := w$以及 $v := v$，可得 $\{u, v\} \subseteq N_G^+(r) \subseteq N_{G-f-g/e}^+(w) \cup \{u\} \subseteq \{u, v, v_1\}$，并且 u 的深度为 0，而 v 的深度至少为 2（根据(3)）。

如果 v 的深度至少为四，那么根据定理 16 的 (4)，将其应用于带有 $w := w$ 和 $v := v$的 G/e，图 G/e 中存在两条从根 w到 v_1的路径：w, v, v_1和 w, v, v_2, v_3, v_1。由于 $v \in N_G^+(r)$，图 $G - e$中也存在两条从根 r到 v_1的路径：r, v, v_1 和 r, v, v_2, v_3, v_1。根据定理 16 的 (2)，将其应用~于带有 $w := r$ 和 $u := v$的 G，这与 B 对于$B \in \mathcal{T}_{-e}$为常数这一事实矛盾。因此，v 的深度为二或三。

由于在 G中，f 总是可以被翻转（因为它与根相邻），所以~的一个树形图包含 f，这意味着对于每个 $B \in \mathcal{T}_{-e}$，$B = A'$。因此，$\mathcal{T}_{-e}$ 的每个树形图都包含 f，因为在 e 中翻转会得到 A'。所以 v_1 不是 r的出邻点，否则路径 $r, v_1, \ldots, v_{k-1}, v$ 可以根据定理 2 补全为一个既不包含 e 也不包含 f 的树形图，这就产生了矛盾，由此证明 $N_G^+(r) = \{u, v\}$。

现在我们可以证明 v 的深度恰好为三。反设 v 的深度为二。根据 定理 16 应用于 G/e 且 $w := w$ 以及$v := v$，由 G 诱导的子图 $\{r, u, v, v_1, v_2\}$只可能是图14所示的几种情形。对于这些情形中的任意一种，至多有



图14：当 v 的深度为 $G[r, u, v, v_1, v_2]$ 时，可能的图。黑色弧包含在 G 中，红色弧则是可选的。

的两个树形图 $G[r, u, v, v_1, v_2]$ 包含弧 e和 f。我们还从(4) 观察到，对于每个 $3 \leq i \leq n$，v_{i-1} 是 v_i的唯一入邻点 v_i

它不是其后代之一。因此， G 的所有树形图都包含路径 v_2，$\ldots v_3$，而 $\mathcal{T}_{/e/f}$ 至多包含两个树形图。这意味着 $\mathcal{T}_{/e/f} \cup T_{/e/g}$ 是一条边或一个 4 圈。无论哪种情况， $\mathcal{T}$ 都包含一条哈密顿路径，依次经过 $\mathcal{T}_{-e}$、 $\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}$，最后经过 $\mathcal{T}_{-f-g/e}$。 ■

我们先回顾一下关于 r、 u、 v 和 v_1 的出邻域，我们有 $N^+(r) = \{u, v\}$，由断言 16.2 可知；又有 $N^+(u) = \{v_1, v\}$，因为 v_1 的深度为一，且 $v_1 \notin N^+(r)$。将定理 16 的 (4) 应用于 G/e，其中 $w := w$ 且 $v := v$，可得 $\{v_1\} \subseteq N^+(v) \subseteq \{u, v_1, v_2\}$，以及 $N^+(v_1) = \{v_2\}$。因此，$N^+(\{r, u, v, v_1\}) \cap (\{v_i : i \geq 3\} \setminus \{v\}) = \emptyset$，并且在 $\mathcal{T}_{/e/g}$ 的每个树形图中，从 r 到 v_2 的路径只有两种可能：要么是 r、u、v、v_2，要么是 r、u、v、v_1、v_2。再次将定理 16 的 (4) 应用于 G/e，其中 $w := w$ 且 $v := v$，对于所有 $i \geq 3$， $N^-(v_i) \cap (\{r, u, v\} \cup \{v_j : j < i\}) = \{v_{i-1}\}$，直接归纳可得，在 $\mathcal{T}_{/e/g}$ 的每个树形图中，从 r 到 v_i 的路径只有两种可能： r、u、v、v_2、……、v_i，或者 r、u、v、v_1、v_2、……、v_i。因此， $\mathcal{T}_{/e/g}$ 中至多有两个树形图。这意味着 $\mathcal{F}_r(G)[\mathcal{T}_{/e/f} \cup \mathcal{T}_{/e/g}]$ 要么是一条边，要么是一个 4 圈。无论哪种情况，都存在一条哈密顿路径 $\mathcal{F}_r(G)$，它先经过 $\mathcal{T}_{-e}$，然后经过 $\mathcal{T}_{/e/f}$（因为根据断言 16.2， $\mathcal{T}_{-e}$ 的所有树形图都包含 f，所以在 e 中进行翻转会得到 A'），接着经过 $\mathcal{T}_{/e/g}$，最后经过 $\mathcal{T}_{-f-g/e}$。

□

致谢

本研究始于 Order & Geometry 2024 研讨会（参见 https://sites.google.com/view/ordergeometry2024）。第三作者获得波兰国家科学中心资助，资助项目编号为 UMO- 2019/34/E/ST6/00443 和 UMO-2023/05/Y/ST6/00079，资助计划为 WEAVE- UNISONO。

参考文献

[BM24] Nastaran Behrooznia 和 Torsten M¨utze。通过枢轴交换枚举外平面图的生成树。预印本，arXiv:2409.15793[cs.DM](2024)，2024年。[CGS24] Ben Cameron、Aaron Grubb 和 Joe Sawada。图的生成树的枢轴格雷码，附扇图。图论与组合数学，40(4)：26页，2024年6月。[Che67] Wai-Kai Chen。有向树图中的哈密顿回路。《*IEEE*电路理论汇刊》，14(2)：231–233，1967年。[CK78] S. Chaiken 和 D. J. Kleitman。矩阵树定理。组合理论期刊 *A* 辑，24：377–381，1978年。[Cum66] Richard Cummins。树图中的哈密顿回路。《*IEEE*电路理论汇刊》，13(1)：82–90，1966年。[Gra53] Frank Gray。脉冲编码通信。美国专利第*2632058*号，1953年。

[HH72] Carlos A. Holzmann 和 Frank Harary。关于拟阵的树图。《*SIAM*应用数学杂志》，22(2)：187–193，1972年。[HT56] I. Heller 和 C. B. Tompkins。Dantzig定理的推广。载于 H. W. Kuhn 和 A. W. Tucker 编，《线性不等式及相关系统》，《数学研究年刊》第38卷，第247–254页。普林斯顿大学出版社，1956年。[Knu11] Donald E. Knuth。《组合算法，第1部分》，《计算机程序设计艺术》第4A卷。Addison-Wesley，2011年。[M¨ut23] Torsten M¨utze。组合格雷码——最新综述。电子组合数学期刊，DS26：93，2023年。[RR72] V. V. Bapeswara Rao 和 N. Narasimha Raju。关于有向图的树图。《*IEEE*电路理论汇刊》，19(3)：282–283，1972年。[Sha68] Herbert Shank。关于树图中哈密顿回路的一则注记。《*IEEE*电路理论汇刊》，15(1)：86–86，1968年。[Smi97] Malcolm James Smith。《生成树》。博士论文，维多利亚大学，1997年。