通用余笛卡尔纤维化的合成构造

¨CHRISTIAN SATTLER 和 DAVID WARN

Abstract. 我们给出一种与模型无关的 (∞,1)-范畴的有向单值余笛卡尔纤维化构造，并证明相对于这类纤维化的直化等价。关键步骤是证明余笛卡尔纤维化沿局部化下降；为此，我们分析局部化的映射空间。在此过程中，我们引入连接构造的一个有向版本，从而给出任意函子的满像的序列余极限描述。

arXiv:2603.28688v1 [math.CT] 30 Mar 2026

1. 引言

在普通范畴论中，人们往往可以用临时的方法构造范畴及其间的函子：规定对象和态射是什么，以及函子如何作用于它们。但在高阶范畴论中，这将涉及无穷层次的相容性条件，很快便会变得难以实行，因此需要一种更为系统的方法。在 Lurie 的奠基性著作中，这种方法借助了同伦结构的集合模型，尤其是拟范畴。相比之下，近年来关于高阶范畴论基础与应用的研究，越来越多地采用由此形成的 (∞,1)-范畴这一高层次语言；它与模型无关且具有同伦不变性。

在这种方法中（可以称之为形式的或综合的方法），(∞-范畴)泛性质发挥着核心作用。例如，在普通范畴论中，可以通过规定其对象为函子、态射为自然变换，来定义函子范畴 Fun(A, B)。在综合方法中，我们不再关注定义，而是依赖泛性质；在此例中，泛性质表明，函子 $X \to \mathrm{Fun}(A, B)$ 与函子 $X \times A \to B$ 相对应。

具有基础重要性的是（大的）(∞, 1)-范畴 $\mathcal{S}$ （由 ∞-群胚构成）和 Cat_∞ （由 (∞, 1)-范畴构成）；它们也都具有泛性质，这些泛性质称为直化–解直化。具体而言， $\mathcal{S}$ 是左纤维化 $p\colon \mathcal{S}_\bullet \to \mathcal{S}$ 的目标。于是，每个函子 $F\colon X \to \mathcal{S}$ 都确定了一个在 X 上的左纤维化，即拉回 $F^*p\colon X \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_\bullet \to X$；这就是 F 的解直化。 $\mathcal{S}$ 的泛性质表明，每个在 X 上且具有小纤维的左纤维化，都以这种方式由一个函子 $F\colon X \to \mathcal{S}$ （其直化）得到，并且该函子在可缩选择意义下唯一。类似地，Cat_∞ 是余笛卡尔纤维化 $q\colon \mathrm{Cat}_{\infty\bullet} \to \mathrm{Cat}_\infty$ 的目标，其泛性质表明，函子 $X \to \mathrm{Cat}_\infty$ 与在 X 上具有小纤维的余笛卡尔纤维化相对应，二者由沿函子 $F\colon X \to \mathrm{Cat}_\infty$ 拉回 q 的同一操作联系起来。[1] 简言之，我们可以称 $\mathcal{S}_\bullet \to \mathcal{S}$ 为万有左纤维化，而 $\mathrm{Cat}_{\infty\bullet} \to \mathrm{Cat}_\infty$ 为万有余笛卡尔纤维化。

万有余笛卡尔纤维化的存在性是高阶范畴论的一项基础性技术结果。自 Lurie 首次证明以来，已有更简单的处理方法 [7], ，该结果也已推广到 [3, 5], 拓扑斯中的内范畴 ∞，并在单纯型类型论的框架下得到证明 [8] [4]。但与模型无关的证明是否可能，这个问题仍未解决。表面看来，这似乎不太可能：如果不知道一个（∞,1）-范畴究竟是什么，又如何构造（∞,1）-范畴的（∞,1）-范畴呢?

[1] 在普通范畴的情形下，（余）笛卡尔纤维化称为格罗滕迪克（反）纤维化，而对函子 $X \to \mathrm{Cat}$ 进行解直化的操作称为格罗滕迪克构造。

在本文中，我们给出 Cat_∞ 的一种构造，并使用与模型无关的方法证明其泛性质，所需假设仅比左纤维化的直化–解直化多一点。由此得到的论证既简洁又具有一般性：我们预计它也适用于 ∞-拓扑斯中的内范畴，以及构造性框架。本文可视为合成同伦论计划的延续；事实上，我们使用了同伦类型论中的思想。

1.1. **概述**。 对于余笛卡尔纤维化 $p\colon E \to B$，其基底中的每个态射 $f\colon B(x, y)$ 都会在纤维上诱导一个传输 函子 $f_!\colon E(x) \to E(y)$。若相应映射 $B(x, y) \to \mathrm{Map}(E(x)\ E(y))$ 是空间等价，我们就称 p 为有向单值 。若存在某个 $x : B$，使得有等价 $F \simeq E(x)$，我们就称范畴[2] F 由 p 分类 。

我们的第一个主要结果是，存在足够多的 有向单值余笛卡尔纤维化，具体来说如下。

定理 7.7。 给定一个函子 $q\colon Y \to X$，存在一个有向单值余笛卡尔纤维化$p\colon E \to B$，使得 p 对 q 的每个纤维进行分类。

这是对“所有”范畴的“范畴”这一朴素想法的细化。它表明，对于任何一组范畴，只要这组范畴足够小、可以由一个范畴来索引，就存在一个由这些范畴组成的范畴。

我们的第二个主要结果是关于任意有向单值余笛卡尔纤维化的直化定理。

定理 8.1。 设 $p\colon E \to B$ 是一个有向单值余笛卡尔纤维化，且 C 是一个范畴。给定一个余笛卡尔纤维化 $q\colon D \to C$，其中 p 将 q的每个纤维分类，则存在一个函子$f\colon C \to B$ 以及一个 $D \simeq C \times_B E$ 上的范畴等价 C。此外，给定两个函子f、$g\colon C \to B$，从$\mathrm{Map}(f$、$g)$到余笛卡尔函子空间 $f^*p \to g^*p$ 的典范映射是可逆的。

上述第二个断言意味着，q 的直化 $f\colon C \to B$ 在适当意义下是唯一的。它所涉及的映射定义于第 2.14 节。

两个定理的关键要素，是证明余笛卡尔纤维化沿着余笛卡尔图、序列余极限和局部化下降（参见引理 6.1 和 6.2 以及定理 5.7）。其中，局部化是迄今为止最难处理的情形。我们证明，如果 $i\colon C \to D$ 将 D 表示为在某个态射集合 $W \subseteq \mathrm{Ar}(C)$ 处对 C 的局部化，那么沿着 i 进行拉回会诱导出一个全忠实函子

$$\mathrm{CocartFib}(D) \xhookrightarrow{i^*} \mathrm{CocartFib}(C)$$

其像由满足以下性质的余笛卡尔纤维化 $p\colon E \to C$ 组成：对于任意态射 $f \in W$，传输函子 $f_!$ 均可逆。幸运的是，对于这样的余笛卡尔纤维化 $p\colon E \to C$，要说明 i^* 的逆是什么并不困难：它应当是将 $E[V^{-1}]$ 在态射集合 V 处局部化所得，其中这些态射是属于W的态射的余笛卡尔提升。大部分工作都在于证明 $E[V^{-1}] \to D$ 是余笛卡尔纤维化，且其沿 i 的拉回是 $p\colon E \to C$（参见引理 5.5）。这归结为关于 $E[V^{-1}]$ 的映射空间的一些相当具体的断言（引理 5.1）；我们利用局部化的映射空间的一般函子性描述来证明这些断言（参见例 3.6）。

另一个要素是一种与模型无关的方法，可以将任意范畴分解为更简单的部分。具体而言，给定任意函子 $f\colon X \to Y$，我们说明如何将 f 的满像构造为序列 $X \to X_1 \to X_2 \cdots$ 的余极限，其中每个 X_n 都是涉及 X 和 X_{n-1} 的余逗号的局部化（参见引理 7.2）。这是 Rijke 连接构造的有向类比

[2]从现在起，我们用 范畴 表示 (∞,1)-范畴。

构造 [9]。将其应用于核心包含 $C^{\simeq} \to C$，我们便可由下降推出定理 8.1。

给定一个余笛卡尔纤维化 $p\colon E \to X$，其有向单值完备化应当是其直化 $X \to \mathsf{Cat}_\infty$ 的满像分解。在我们的设定中，我们不想假设 Cat_∞ 存在，因为我们正试图构造它；但我们仍可以通过展开有向并构造（参见引理 7.6），将这一想法转化为有向单值完备化的构造 。在无向情形中，Uemura 最近运用这一想法定义了族的单值完备化 [10]。

致谢。 感谢 Dani¨el Apol 与我们进行了有益的讨论。

2. Preliminaries

本节将介绍本文其余部分所用的、关于空间与范畴的一些基本概念和结果。关于合成范畴论更深入的发展，我们参考 Cisinski、Cnossen、Nguyen 和 Walde 正在进行的工作 [2]。我们允许自己在高度抽象的层面上开展讨论，通常会省略诸如构造某些图表可交换的见证等细节，并希望读者能在自己感兴趣的精确设定[3] 中补全这些细节。

我们将空间的概念以及范畴空间 $\mathsf{Cat}^{\simeq}$ 作为原始概念。对于范畴 C和 D，我们将函子空间 $C \to D$的空间记作 $\mathsf{Map}(C, D)$。我们假设函子可以复合，且函子复合在同伦意义下满足结合律。因此，范畴构成了有时称为野性 范畴的结构。[4] 我们假设存在一个终端范畴 $\mathbb{1}$。我们假设可以构造拉回、推出和函子范畴。我们将后者记作 $\mathsf{Fun}(C, D)$。我们用 $\mathsf{Ob}(C)$表示 $\mathsf{Map}(\mathbb{1}, C)$，并将其称为 C的对象空间 。我们将 $c : C$ 理解为$c\colon \mathsf{Ob}(C)$。

我们将 $\mathbb{I}$ 记作由对象 $0,1 : \mathbb{I}$ 及一个态射 $0 \to 1$自由生成的范畴。我们将 $\mathsf{Ar}(C)$记作函子范畴 $\mathsf{Fun}(\mathbb{I}, C)$。我们将 C中的映射空间记作 $C(x, y)$。函子范畴中的态射称为自然变换，并表示为 2-胞腔。

2.1. 逗号范畴与切片范畴。 给定具有共同陪域的函子 $F\colon B \to A$ 和 $G\colon C \to A$，逗号范畴 $F \downarrow G$ 可由范畴的拉回给出

$$\begin{array}{ccc} F \downarrow G & \longrightarrow & \mathrm{Ar}(A) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle (\mathsf{dom},\mathsf{cod})} \\ B \times C & \xrightarrow{F \times G} & A \times A. \end{array}$$

等价 地，逗号范畴由下列弱方 re.

$$\begin{array}{ccc} F \downarrow G & \longrightarrow & C \\ \downarrow & \nearrow\!\!\nearrow & \downarrow{\scriptstyle G} \\ B & \xrightarrow[F]{} & A. \end{array}$$

在逗号记号中，我们用范畴代替其上的恒等函子。例如， $A \downarrow G$ 和 $F \downarrow A$ 表示以恒等函子 $A \to A$为对象的逗号。我们也用对象代替从终端范畴选取它们的函子。例如， $a \downarrow G$ 和

[3]例如，拟范畴、$(\infty, 1)$-拓扑斯中的内范畴，或单纯型类型论。[4]此处我们使用“野性”一词，强调我们从不需要无穷多个相容性条件；我们尚未研究所需的相容性条件究竟有多少。

$F \downarrow a$ 表示带有函子 $a\colon 1 \to A$的逗号。给定 $F\colon C \to A$ 和 $a\colon A$，当 F 的含义可由上下文明确时，我们也可以用 $a \downarrow C$ 表示 $a \downarrow F$。切片 $A \downarrow a$ 也记作 A/a。

2.2. 范畴论基本定理。 我们假设范畴论基本定理成立，该定理指出 $\mathbb{I}$ 能够检测范畴等价。等价地，函子 $F\colon C \to D$可逆，当且仅当它

- 满射：对每个 $d\colon D$，都存在 $c\colon C$，使得 $F(c) \simeq d$，
- 全忠实：对于 $x, y\colon C$，F在态射上的作用 $C(x, y) \to D(Fx, Fy)$ 是可逆的。

2.3. 全子范畴与宽子范畴。 我们假设可以构造子范畴，并且它们具有预期的映入泛性质。也就是说，若 C 是一个范畴，且 P 是 C 的对象上的一个谓词（即一个单态射 $P \hookrightarrow \mathsf{Ob}(C)$），那么存在一个范畴 C_P 及一个函子$i\colon C_P \to C$，使得对任意范畴 X，映射

$$\mathrm{Map}(X, C_p) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, C)$$

是单态射，其像由满足以下条件的函子 $F\colon X \to C$ 张成：对于每个对象 $x\colon X$，$F(x)$ 都属于 P（换言之，$\mathsf{Ob}(F)\colon \mathsf{Ob}(X) \to \mathsf{Ob}(C)$ 经由 $P \hookrightarrow \mathsf{Ob}(C)$ 分解）。我们将C_P 由 C 张成的全子范畴 P称为.....。

我们同样假设可以构造宽 子范畴。也就是说，设 C 为一个范畴，且设P 为 C 上态射 的一个谓词，并且它在复合下封闭。[5] 那么存在一个范畴C_P 及一个函子 $i\colon C_P \to C$，使得对于任意范畴 X，映射

$$\mathrm{Map}(X, C_p) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, C)$$

是单态射，其像由满足以下条件的函子 $F\colon X \to C$ 张成：对于 X中的每个态射 f，映射 $F(f)$ 都属于 P。

2.4. 伴随。 给定范畴 C和 D，以及函子 $L\colon C \to D$和 $R\colon D \to C$，一个伴随 $L \dashv R$ 由一个在 $C \times D$上方的范畴等价 $e\colon C \downarrow R \simeq L \downarrow D$ 构成。我们称 e 展示了 L作为 R的左伴随。左伴随若存在则唯一；并且，R 有左伴随，当且仅当对于每个$c\colon C$，范畴 $c \downarrow R$ 都有一个始对象。另一种展示 L 为 R 的左伴随的等价方式，是给出一个自然变换$\eta\colon \mathsf{id}_C \to RL$，使得对于每个 c，$\eta_c\colon c \to RLc$ 是 $c \downarrow R$中的始对象。

我们也会在野性情形下使用伴随。

2.5. 空间、群胚与可扩张性。 给定一个范畴 C，我们将映射空间 $\mathsf{Map}(\mathbf{1}, C)$视为 C 的对象 空间，并记作 $\mathsf{Ob}(C)$。野函子 Ob 有一个全忠实左伴随，它将空间 X 映至由 X个终端范畴的余积[6]构成的群胚 $DX = \bigsqcup_X 1$（等价地，也就是 $\mathbf{1}$ 与 X 的张量积）。我们通常不显式写出从空间到范畴的这一包含映射。[7] 由此得到空间与群胚之间的等价，也就是说，与所有态射均可逆的范畴之间的等价。

我们要求定义 DX 的余积是可扩张的，即满足下降。明确地说，这意味着（野）函子

$$\mathsf{Cat}/DX \to \mathsf{Cat}^X$$

它计算范畴在 DX 上的纤维，并且是可逆的（因此其逆是左伴随$\bigsqcup_X$）。这意味着，给定群胚上的范畴 C 由其纤维族确定；群胚上的范畴函子也同样如此。

[5]这包括零元 复合，也就是说，我们假设 P 包含 C 的所有同构。[6]在更传统的语境中，术语余积 仅用于 X 为集合的情形。[7]我们不知道它有什么约定俗成的记号。

2.6. 左纤维化与右纤维化。 若函子 $D \to C$ 与左端点包含 **0**: $1 \to \mathbb{I}$（分别地，右端点包含 **1**: $1 \to \mathbb{I}$）正交，我们称它为左纤维化（分别地，右纤维化）；也就是说，空间方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(\mathbb{I}, D) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(\mathbb{I}, C) \\ {\scriptstyle \mathsf{dom}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{dom}} \\ \mathrm{Ob}(D) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}(C) \end{array}$$

i是笛卡尔的。若确实如此，则可以证明，范畴的方形图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ar}(D) & \longrightarrow & \mathrm{Ar}(C) \\ {\scriptstyle \mathsf{dom}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{dom}} \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

也是笛卡尔的（通过证明笛卡尔间隙映射是满射且全忠实）。我们将 C 上的左（分别为右）纤维化的（野性）范畴记为 $\mathbf{LFib}(C)$（分别为 $\mathbf{RFib}(C)$）。

2.7. 共终函子。我们称函子 $F\colon C \to D$ 是左（分别为右）共终的，如果它与左（分别为右）纤维化正交。我们假设每个函子 $F\colon C \to D$ 都可分解为一个左共终函子 $C \to E$，后随一个左纤维化 $E \to D$。由此可知，这一分解是唯一的。对偶地，每个函子都能唯一地分解为一个右共终函子，后随一个右纤维化。

2.8. 左 Kan 延拓。对于左纤维化 $p\colon E \to C$ 以及任意函子 $F\colon C \to D$，我们可以将复合 $Fp\colon E \to D$ 分解为一个左共终映射 $E \to \overline{E}$，后随一个左纤维化 $\overline{E} \to D$。这定义了一个左伴随 $F_! \colon \mathbf{LFib}(C) \to \mathbf{LFib}(D)$，它对应于基变换函子 $F^* \colon \mathbf{LFib}(D) \to \mathbf{LFib}(C)$（该函子将 D 上的左纤维化沿 F 拉回）。

左 Kan 延拓有一种有用的纤维逐点描述。对于 $E \to C$ 一个左纤维化以及 $d : D$ 任意对象，我们有一个函子 $E \downarrow d \to E_d$ 到 $E \to D$ 在 d 上的纤维。相关断言是，该函子将 E_d 呈现为 $E \downarrow d$ 上的自由群胚，即在其所有箭头处局部化。对偶地，若 $E \to C$ 是右纤维化，则我们有一个函子 $d \downarrow E \to E_d$，它将 E_d 呈现为 $d \downarrow E$ 上的自由群胚。

抽象地说，我们有如下范畴的松弛交换方块

$$\begin{array}{ccc} E \downarrow d & \xrightarrow{\mathsf{cod}} & 1 \\ {\scriptstyle \mathsf{dom}}\downarrow & \nearrow\!\!\nearrow & \downarrow{\scriptstyle d} \\ C & \xrightarrow[F]{} & D. \end{array}$$

这诱导出一个松弛交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LFib}(D) & \xrightarrow{F^*} & \mathrm{LFib}(C) \\ {\scriptstyle d^*}\downarrow & \nearrow\!\!\nearrow & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{dom}^*} \\ \mathrm{LFib}(1) & \xrightarrow[\mathsf{cod}^*]{} & \mathrm{LFib}(E \downarrow d), \end{array}$$

而相关断言是，其伴随变换 $\mathsf{cod}_!\mathsf{dom}^* \to d^* F_!$ 可逆。更一般地，对于来自任意 逗号范畴的松弛交换方块，同一性质也成立：对于函子 $F\colon A \to B$ 和 $G\colon C \to B$，我们有 $G^* F_! \simeq \mathsf{cod}_!\mathsf{dom}^*$，其中 $\mathsf{dom}\colon F \downarrow G \to A$ 且 $\mathsf{cod}\colon F \downarrow G \to C$。

对偶地，对于右纤维化的左 Kan 延拓的限制，我们有 $G^* F_! \simeq \mathsf{dom}_!\mathsf{cod}^*$，其中 $\mathsf{cod} : G \downarrow F \to A$，而 $\mathsf{dom} : G \downarrow F \to C$。

2.9. **Yoneda 引理**。设 C 是一个具有始对象 c的范畴。我们采用如下形式的 Yoneda 引理：函子 $c\colon 1 \to C$ 是左共终的。特别地，对于具有任意对象 c 的范畴 C，我们可以构造余切片范畴 $c \downarrow C$，并注意到其始对象是 c上的恒等态射。因此，相应的函子 $1 \to c \downarrow C$ 是左共终的。由于 cod : $c \downarrow C \to C$ 是一个左纤维化，这意味着它给出了 $c\colon 1 \to C$的唯一（左共终，左纤维化）分解。

特别地，假设 $F\colon C \to D$ 是某个函子。由于 $1 \to c \downarrow C$ 和 $1 \to Fc \downarrow D$ 都是左共终的，根据 2-out-of-3，诱导函子 $c \downarrow C \to Fc \downarrow D$ 也左共终。这表明$Fc \downarrow D$ 是沿着 $F\colon C \to D$对 $c \downarrow C$ 作出的左 Kan 延拓。对偶地，终对象的包含是右共终的，而 C/c 的左 Kan 延拓为 D/Fc。

由于 $D \downarrow Fc$在 $d\colon D$上的纤维是映射空间 $D(d,\ Fc)$，因此我们可以用左 Kan 延拓 $F_!$: RFib(C) $\to$ RFib(D) 作用于可表右纤维化，来表示 D 的映射空间。

2.10. **左纤维化的下降**。 我们假设左纤维化沿推出下降。这意味着，对于范畴的任意推出方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle l} \\ C & \xrightarrow[k]{} & D, \end{array}$$

所诱导的方形图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LFib}(D) & \xrightarrow{k^*} & \mathrm{LFib}(C) \\ {\scriptstyle l^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow \\ \mathrm{LFib}(B) & \xrightarrow[g^*]{} & \mathrm{LFib}(A) \end{array}$$

是一个范畴的拉回方块。这是左纤维化的直化–反直化的结果。

2.11. **函子范畴中的极限与余极限**。给定范畴 C 和 D，我们假设求值函子族 ev$_c$: Fun(C, D) $\to D$，其中 $c\colon C$，创建（余）极限。这意味着，只要每一层都存在（余）极限，它们就按层给出。沿任意函子 $f\colon C' \to C$进行限制 f^*: Fun(C, D) $\to$Fun(C', D) 时，这种按层给出的（余）极限仍被保留。

实际上，我们只用它来描述推出、拉回、序列余极限和始对象。我们也在 LFib(C) 中应用它，即 Fun($C, \mathcal{S}$)。此时需要的结论是，对于 $f\colon C' \to C$，限制 f^*: LFib(C) $\to$LFib(C') 保持推出和序列余极限。

2.12. **序列余极限的映射空间**。 （野性）范畴 C 中的一个序列 由一族对象 $a\colon \mathbb{N} \to$ Ob(C)以及态射 $f_n\colon a_n \to a_{n+1}$（其中 $n\colon \mathbb{N}$）组成。此类序列 $a_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \xrightarrow{f_1} \cdots$的序列余极限是其下方的一个始余锥。

序列余极限是滤过余极限，因此与空间中的拉回可交换，进而也与取值于空间的函子范畴中的拉回可交换，例如左纤维化(C)和右纤维化(C)。

考虑范畴序列 $A_0 \xrightarrow{F_0} A_1 \xrightarrow{F_1} \cdots$，其余极限为 A_∞，余投影为 $i_n\colon A_n \to A_\infty$。由于序列余极限是滤过的， A_∞ 的映射空间有一个简单的描述：对于对象 x、 $y\colon A_0$，我们在其下有一个余锥

$$A_0(x, y) \longrightarrow A_1(F_0x, F_0y) \longrightarrow \cdots$$

其顶点 $A_\infty(i_0x、\ i_0y)$ 由 i_n 对态射的作用给出，这表明空间 $A_\infty(i_0x、\ i_0y)$ 是一个序列余极限。利用这一事实，可以证明 Ob 和 Map(𝕀、 –) 与序列余极限可交换。

2.13. **余笛卡尔纤维化**。 给定函子 $p\colon E \to B$ 以及 E中的态射 $f\colon x \to y$，若对所有 :，以下空间方块

$$\begin{array}{ccc} E(y,z) & \xrightarrow{-\circ f} & E(x,z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(py,pz) & \xrightarrow[-\circ pf]{} & B(px,pz) \end{array}$$

均为笛卡尔方块。令 $\mathrm{Ar}_{\mathsf{cocart}}(p) \subseteq \mathrm{Ar}(E)$ 表示由 p-余笛卡尔映射张成的全子范畴。可以证明，以下范畴方形图的笛卡尔间隙映射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ar}_{\mathsf{cocart}}(p) & \xrightarrow{\mathsf{dom}} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \mathrm{Ar}(B) & \xrightarrow{\mathsf{dom}} & B \end{array}$$

是全忠实的。若该间隙映射可逆，我们就称 p 是一个余笛卡尔纤维化 。等价地，间隙映射是满射，也就是说，对于满足 $f\colon B(px,y)$ 的对象 $x\colon E$ 和 $y\colon B$，存在 y 的一个提升 $y'\colon E$，并且存在其 p-余笛卡尔提升 $f'\colon E(x,y')$，其中 f。

余笛卡尔纤维化在基变换下保持不变。也就是说，对于余笛卡尔纤维化 $p\colon E \to B$ 和任意函子 $x\colon C \to B$， p 的基变换 $x^*p\colon E \times_B C \to C$ 也是余笛卡尔纤维化。在此语境下，我们可以将 $E \times_B C$ 记作 x^*E 。 x^*E 中的映射是 x^*p-余笛卡尔的，当且仅当它在 E 中的像是 p-余笛卡尔的。

对于底为 B 的余笛卡尔纤维化 $p_0\colon E_0 \to B$ 和 $p_1\colon E_1 \to B$，若范畴在 B 上的函子$F\colon E_0 \to E_1$ 将 p_0-余笛卡尔映射映为 p_1-余笛卡尔映射，我们称其为余笛卡尔的。我们用 $\mathrm{CocartFib}(B)$ 表示由此得到的底为 B 的（野性）余笛卡尔纤维化范畴。若余笛卡尔函子 $F\colon E_0 \to E_1$ 在 B 上逐纤维地全忠实，则它是全忠实的。这意味着，可以逐纤维地检测余笛卡尔函子的可逆性。

2.14. **余笛卡尔传输**。给定余笛卡尔纤维化 $p\colon E \to B$ 和范畴 C，我们有函子 $C \to \mathrm{Ar}_{\mathsf{cocart}}(p)$ 与函子 $C \to \mathrm{Ar}(B) \times_B E$ 之间的对应。函子 $C \to \mathrm{Ar}_{\mathsf{cocart}}(p)$ 的数据等价于两个函子 $F, G\colon C \to E$，以及一个自然变换 $\alpha\colon F \to G$ 的数据，且其所有分量都是 p-余笛卡尔的。函子 $C \to \mathrm{Ar}(B) \times_B E$ 的数据则是函子 $F\colon C \to E$ 和 $G_0\colon C \to B$，以及自然变换 $\alpha_0\colon pF \to G_0$。因此，给定后一组数据，我们有 G_0 的唯一提升 $G\colon C \to E$，以及 α_0 的提升 $\alpha\colon F \to G$，使得 α 的各分量都是 p- 余笛卡尔的。

特别地，拉回余笛卡尔纤维化在协变意义下是函子性的。也就是说，给定一个范畴 C（例如终端范畴）以及函子 $x,\ y\colon C \to B$和一个自然变换$f\colon x \to y$，我们得到一个函子 $f_!\colon x^*E \to y^*E$，它是关于 C 的余笛卡尔纤维化之间的函子。 $f_!$ 在E 中的像具有余笛卡尔分量，并以适当的意义提升 f。因此，赋值 $x \mapsto x^*E$ 定义了一个（野性的）函子 $\mathrm{Fun}(C,\ B) \to \mathrm{CocartFib}(C)$。

2.15. **空间中的下降与左纤维化**。 空间范畴 $\mathcal{S}$ 的一个优良性质是，它具有所有余极限，且这些余极限满足下降。抽象地说，这意味着给定某个空间图表 $X\colon J \to \mathcal{S}$，函子

$$\mathcal{S}/\operatorname{colim}_J X \longrightarrow \lim_{j:J} \mathcal{S}/X_j$$

由基变换非正式地给出，是范畴等价。由于这个函子有一个左伴随（非正式地由 colim_J 给出），这意味着伴随的单位和余单位都是可逆的。余单位可逆意味着余极限是万有的，即在基变换下稳定。单位可逆意味着由笛卡尔方形张成的 $\mathbf{Ar}(\mathcal{S})$ 的宽子范畴在余极限下封闭。

由于 $\mathbf{LFib}(C)$ 中的余极限和拉回是逐点计算的，$\mathbf{LFib}(C)$ 中的余极限也满足下降。

我们仅对推出和序列余极限使用下降。

2.16. 余逗号的映射空间。 范畴张量 $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$ 的 余逗号 是范畴的推出：

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup A & \xrightarrow{(\mathsf{id},[0,1])} & B \sqcup C \\ {\scriptstyle f\sqcup g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [k,l]} \\ A \times \mathbb{I} & \longrightarrow & f \uparrow g. \end{array}$$

更谨　慎地说，这意味着余逗号由松弛交换方块自由生成

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle l} \\ B & \xrightarrow[k]{} & f \uparrow g. \end{array}$$

根据左纤维化的下降，松弛交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LFib}(f \uparrow g) & \xrightarrow{k^*} & \mathrm{LFib}(B) \\ {\scriptstyle l^*}\downarrow & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathrm{LFib}(C) & \xrightarrow[g^*]{} & \mathrm{LFib}(A) \end{array}$$

将 $\mathbf{LFib}(f \uparrow g)$ 表示为一个逗号范畴。我们有一种通用构造，可用于求出从逗号范畴出发的投影的左伴随；在此处，利用 g^* 具有左伴随，且 $\mathbf{LFib}(B)$ 有一个被 f^* 保持的始对象。由此可知，左伴随 $k_!$ 和 $l_!$ 分别将这些松弛方块分类

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LFib}(B) & \xrightarrow{g_! f^*} & \mathrm{LFib}(C) \\ \| & {\scriptstyle \eta f^*}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\ \mathrm{LFib}(B) & \xrightarrow[f^*]{} & \mathrm{LFib}(A) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{LFib}(C) & = & \mathrm{LFib}(C) \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle !}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\ \mathrm{LFib}(B) & \xrightarrow[f^*]{} & \mathrm{LFib}(A) \end{array}$$

特别地，单位 $\mathsf{id}_{\mathrm{LFib}(B)} \to k_! k^*$ 和 $\mathsf{id}_{\mathrm{LFib}(C)} \to l_! l^*$ 可逆，这意味着包含映射 k 和 l 到余逗号中是全忠实的。此外，伴随变换 $g_! f^* \to l^* k_!$ 可逆，而 $k^* l_!$: $\mathbf{LFib}(C) \to \mathbf{LFib}(B)$ 是始函子。

2.17. 局部化与拉回。 从空间到范畴的包含映射有一个左伴随 $|-|$，我们称之为局部化。例如，在计算左 Kan 延拓时就会用到它。局部化保持有限积。为说明这一点，对于范畴 B 和 C的积，我们利用 $- \times C$ 有一个右伴随 $\mathbf{Fun}(C, -)$，且该右伴随保持群胚。

推论 2.1。 考虑一个范畴的笛卡尔方形图

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A \end{array}$$

其中 A 是一个群胚。经过局部化后，该方形图仍然是笛卡尔的 $n.$

证明。由可扩张性，我们可以逐纤维地在 $a : A$ 上进行讨论。于是，断言归结为局部化保持 B_a 和 C_a 的积这一事实。□

2.18. **来自箭头范畴的左伴随**。 下面的引理给出了来自箭头范畴的左伴随的简单描述。

引理 2.2。 考虑函子 $m\colon C \to \mathrm{Ar}(D)$，它对应于函子 f^*、$g^*\colon C \to D$ 之间的自然变换 $f^* \to g^*$。假设 f^*和 g^*有左伴随 $f_!$、$g_!\colon D \to C$，且 C 有推出。那么 $m\colon C \to \mathrm{Ar}(D)$ 有一个由推出给出的左伴随

$$\begin{array}{ccc} g_!\mathsf{dom} & \longrightarrow & g_!\mathsf{cod} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_!\mathsf{dom} & \longrightarrow & m. \end{array}$$

证明。 给定 Ar(D) 中的一个对象 $x \to y$ 以及 $c : C$，我们需要证明虚线方块补全的空间

$$\begin{array}{ccc} x & \dashrightarrow & f^*x \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \dashrightarrow & g^*c \end{array}$$

自然等价于虚线方形图补全所构成的空间

$$\begin{array}{ccc} g_!x & \longrightarrow & g_!y \\ \downarrow & & \vdots \\ f_!x & \dashrightarrow & c. \end{array}$$

这显而易见。 □

2.19. 范畴的 2-极限与 2-余极限。范畴的极限与余极限具有 (∞, 2)-范畴泛性质。以范畴 C and D 的余积为例。先验地，它具有 (∞, 1)-范畴泛性质，这表明映射空间 Map($C \sqcup D, X$) 等价于映射空间 Map(C, X) $\times$ Map(D, X) 的积。但实际上还有更强的结论：我们有范畴等价 Fun($C \sqcup D, X$) $\simeq$ Fun(C, X) $\times$ Fun(D, X)。为此，注意到 Map(Y, Fun($C \sqcup D, X$)) 和 Map(Y, Fun(C, X) $\times$ Fun(D, X)) 都等价于 Map(C, Fun(Y, X)) $\times$ Map(D, Fun(Y, X)）。类似地，我们有 Fun($X, C \times D$) $\simeq$Fun(X, C) $\times$ Fun(X, D)。

我们将在构造逗号范畴和范畴的局部化等过程中，隐式地使用这类结果。

2.20. **余笛卡尔纤维化与 Conduché 条件**。我们称函子 $p\colon E \to B$为 *Conduché* 纤维化[8]，如果对于对象 $x, z\colon E$ 和 $b\colon B$，空间方块

$$\begin{array}{ccc} |x \downarrow \mathrm{fib}_p(b) \downarrow z| & \longrightarrow & E(x,z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(px,b) \times B(b,pz) & \longrightarrow & B(px,pz) \end{array}$$

是笛卡尔的。这里，$x \downarrow \mathrm{fib}_p(b) \downarrow z$ 表示迭代逗号范畴，其对象由提升 $y\colon E$ 给出，提升的是 b，其态射为 $x \to y$ 和 $y \to z$。

引理 2.3. 每个余笛卡尔纤维化都是 *Conduch´e* 纤维化。

证明。考虑一个余笛卡尔纤维化 $p\colon E \to B$。逗号范畴 $x \downarrow \mathrm{fib}_p(b)$ 有一个由 p-余笛卡尔映射 $x \to y$ 张成的核反射子范畴。此子范畴等价于空间 $B(px, b)$。由此可证明，局部化 $|x \downarrow \mathrm{fib}_p(b) \downarrow z|$ 等价于$B(px, b) \downarrow z$，其中函子 $B(px, b) \to E$将映射 $f\colon px \to b$发送到 $f_!x$。对 $B(px, b)$ 取纤维，并利用 $x \to f_!x$ 是余笛卡尔的，即得所需结论。□

引理 2.4. 考虑余笛卡尔纤维化 $p\colon E \to B$，其具有态射 $f\colon B(b, c)$，且余笛卡尔纤维传输函子 $f_!\colon E_b \to E_c$ 可逆。则 f 具有所有 p-笛卡尔提升，并且 f 的提升是 p-笛卡尔的，当且仅当它是 p-余笛卡尔的。

证明。假设 $f\colon \overline{y} \to z$是 p-余笛卡尔提升 f；我们断言 f也是 p-笛卡尔的。因此，设 $x\colon E$位于 $a\colon B$之上。我们要证明 $E(x, y) \to E(x, z) \times_{B(a,c)} B(a, b)$ 可逆。令 $g\colon B(a, b)$；我们需要证明，从 $E(x, y) \to B(a, b)$ 的纤维中 g上的点到 $E(x, z) \to B(a, c)$ 的纤维中 fg上的点的空间映射是可逆的。第一个空间等价于映射空间 $\mathrm{fib}_q(b)(g_!x, y)$，第二个空间等价于 $\mathrm{fib}_q(c)((fg)_!x, z) \simeq \mathrm{fib}_q(c)(f_!g_!x, f_!y)$。该映射等价于 $f_!$的作用，根据假设它是可逆的。因此，f 是 p-笛卡尔的。⁻

由于 $f_!$ 是满射，c 的每个提升都是某个 f的余笛卡尔提升的目标。因此，这个提升也同时是笛卡尔提升，所以 f 拥有所有笛卡尔提升。笛卡尔提升的唯一性意味着，任何笛卡尔提升都是余笛卡尔提升。□

3. Pulling back a reflective subcategory

在本节中，我们简要介绍一种简单的方法。该方法由 Kelly 提出，适用于普通范畴 [6],，用于沿着右伴随 f^* 拉回反射子范畴 $C \hookrightarrow A\colon\ B \to A$。也就是说，我们给出包含函子 $C \times_A B \hookrightarrow B$的左伴随公式。注意，$C \times_A B$是 B 的全子范畴，其对象 b 满足：f^*b 属于 $C \hookrightarrow A$的像。

我们尤其关注沿着函子 $m^*\colon \mathsf{RFib}(C) \to \mathsf{Ar}(\mathsf{RFib}(W))$ 拉回由同构张成的反射子范畴 $\mathsf{RFib}(W) \hookrightarrow \mathsf{Ar}(\mathsf{RFib}(W))$；这将使我们能够计算 C的局部化中的映射空间。

构造 3.1. 考虑范畴 A，B，C，以及函子 $f^*\colon B \to A$和 $g^*\colon C \to A$。假设 f^* 和 g^* 分别有左伴随 $f_!$ 和 $g_!$，且 B 有推出。由以下推出方块，我们得到一个自函子 $S\colon B \to B$，并带有一个指点 $s\colon \mathsf{id}_B \to S$：

$$\begin{array}{ccc} f_!f^* & \xrightarrow{\varepsilon_f} & \mathsf{id}_B \\ {\scriptstyle f_!\eta_g f^*}\downarrow & & \downarrow \\ f_!g^*g_!f^* & \longrightarrow & S. \end{array}$$

[8]虽然这是真的，但并不显然：函子 p 是 Conduch´e 纤维化，当且仅当它是可指数化的；这里的意思是，沿 p 的基变换存在右伴随 [1]。我们不使用这一点。

注意，上述方形图在伴随 $f_! \dashv f^*$ 下转置为方形图

$$\begin{array}{ccc} f^* & \xrightarrow{\mathsf{id}} & f^* \\ {\scriptstyle \eta_g f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^* s} \\ g^* g_! f^* & \longrightarrow & f^* S. \end{array} \tag{1}$$

引理 3.2. 考虑构造 *3.1* 中的余跨 $B \xrightarrow{f^*} A \xleftarrow{g^*} C$。给定 $x, y\colon B$，其中 $f^* y$ 位于 C 中，映射 $s_x\colon x \to Sx$ 与 y 正交，也就是说，空间的映射 $B(Sx, y) \to B(x, y)$ 是可逆的。

证明。 由于 s_x 是 $f_! \eta_g f^* x$ 的余基变换，只需证明 $f_! \eta_g f^* x$ 与 y 正交。在伴随 $f_! \dashv f^*$ 下转置后，只需证明 $\eta_g f^* x$ 与 $f^* y$ 正交。这是显然的，因为 $f^* y$ 位于 C 中。□

构造 3.3. 考虑构造 3.1 中的范畴余跨 $B \xrightarrow{f^*} A \xleftarrow{g^*} C$。假设 B 存在序列余极限。定义 $S^\infty\colon B \to B$ 为该序列的序列余极限

$$\mathsf{id}_B \xrightarrow{s} S \xrightarrow{sS} SS \xrightarrow{sSS} \cdots.$$

我们将 S^∞ 视为由序列复合 $\mathsf{id}_B \to S^\infty$指向的对象 .

引理 3.4. 考虑构造 *3.1* 中的范畴余跨 $B \xrightarrow{f^*} A \xleftarrow{g^*} C$。假设 B 有序列余极限，f^* 保留这些序列余极限，并且 $C \hookrightarrow A$ 对序列余极限封闭。那么 S^∞ 的取值落在 $C \times_A B \hookrightarrow B$中。

证明。 设 $b\colon B$。我们要证明 $f^* S^\infty b$属于 C。由于 f^*保留序列余极限，这就是以下序列的余极限

$$f^* b \xrightarrow{f^* s_b} f^* S b \xrightarrow{f^* s_{Sb}} f^* SS b \xrightarrow{f^* s_{SSb}} \cdots.$$

根据方形图 **(1)**，该序列中的每个映射都经过 C中的某个对象分解。因此，该余极限等价于 C 中对象的一个序列余极限；由于 C 对序列余极限封闭，它属于 C。□

推论 3.5. 考虑一个范畴余跨 $B \xrightarrow{f^*} A \xleftarrow{g^*} C$，其伴随分别为 $f_! \dashv f^*$ 和 $g_! \dashv g^*$。假设 g^* 是全忠实的，B 有推出和序列余极限，f^* 保留序列余极限，并且 $C \hookrightarrow A$ 对序列余极限封闭。那么，构造 *3.3* 中的自然变换 $\mathsf{id}_B \to S^\infty$ 表明 S^∞ 是到子范畴 $C \times_A B \hookrightarrow B$上的反射子。

证明。 结合引理 3.2 和引理 3.4。 □

例 3.6。 设 C 为一个范畴，且 $m\colon W \to \mathbf{Ar}(C)$ 是任意函子。考虑范畴的推出方块

$$\begin{array}{ccc} W \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\mathsf{fst}} & W \\ {\scriptstyle \overline{m}}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle j} \\ C & \xrightarrow[i]{} & C[W^{-1}]. \end{array}$$

那么 $i\colon C \to C[W^{-1}]$是将 C在态射集 mw处局部化所得，适用于 $w\colon W$。根据右纤维化的下降，所诱导的范畴方形图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{RFib}(C[W^{-1}]) & \xhookrightarrow{i^*} & \mathrm{RFib}(C) \\ {\scriptstyle j^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m^*} \\ \mathrm{RFib}(W) & \xhookrightarrow[\Delta]{} & \mathrm{Ar}(\mathrm{RFib}(W)) \end{array}$$

是笛卡尔的。 Δ的反射子是 cod: Ar(RFib(W)) $\to$RFib(W)。推论 3.5 的所有条件都已满足，因此我们得到反射子 $i_!$: RFib(C) $\to$RFib($C[W^{-1}]$) 的描述，它是序列 id $\xrightarrow{s} S \xrightarrow{sS} SS \to \cdots$的序列余极限。

将 m写成函子 k, l: $W \to C$之间的自然变换 $k \to l$后，限制 m^*对应于映射 $l^* \to k^*$，因此我们可以使用引理 2.2，对 $m_!$作出更明确的描述，进而也对自函子 S作出更明确的描述。具体而言，我们有 $m_!\Delta \simeq l_!$，并且在右纤维化(C)上有以下自函子的推出方块：

$$\begin{array}{ccc} k_!l^* & \longrightarrow & k_!k^* \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ l_!l^* & \longrightarrow & m_!m^*, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} m_!m^* & \longrightarrow & \mathrm{id}_{\mathrm{RFib}(C)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l_!k^* & \longrightarrow & S. \end{array}$$

给定一个预层 P : 右纤维化(C)，我们将 SP 视为对传输映射 $P(lw) \to P(kw)$（其中 w: W）自由地、非递归地添加逆元 后的结果。事实上，($l_!k^*P$)(c)中的一个对象，粗略地说，由一个对象 w : W 、一个映射 f: $c \to lw$ 以及一个元素 p: $P(kw)$ 组成；我们将其视为在 p 处的 $P(lw) \to P(kw)$ 的“逆元”，随后沿f作限制。定义 $m_!m^*$ 的推出方块中的对象 $k_!l^*$、 $k_!k^*$和 $l_!l^*$ ，描述了构造($l_!k^*P$)(c)中对象的方式；根据某个逆律，这些对象本应已经属于 $P(c)$。

因此，(S^nP)(c) 的一个对象，大致对应于 P at some point$x$ 的一个对象： C，以及一条连接 x with c 的之字形链，其中至多包含 n 个“逆向”折返，且它们全都具有 $kw \to lw$ 的形式。

特别地，上述例子给出了局部化 $C[W^{-1}]$的映射空间（即可表预层）的描述。我们尤其关注这一描述的函子性 。为此，我们采用粘合这一组织手段。

4. Gluing a functor

给定一个函子 p: $A \to B$，其粘合 Gl(p) 是逗号范畴 $B \downarrow p$.[9] 换言之，Gl(p) 由函子 π_1: Gl(p) $\to B$和 π_2: Gl(p) $\to A$ 余自由生成，并带有一个自然变换α: $\pi_1 \to p\pi_2$。本节回顾这一构造的一些基本结果。

引理 4.1。 令 p: $A \to B$，并假设 A 和 B具有形状为 J的余极限。那么 粘合(p)也具有该形状的余极限，并且 π_1、 π_2 保留形状为 J的余极限。

证明。直接可得。 □

构造 4.2。 粘合对松弛方块中的函子具有函子性：给定一个范畴的松弛交换方块

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & C \\ \downarrow{\scriptstyle p} & \nearrow\!\!\nearrow & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \longrightarrow & D, \end{array}$$

我们得到一个函子 Gl(p) $\to$ Gl(q)，它将该松弛方块与松弛三角形 α的拼接分类为： $\pi_1 \to p\pi_2$。

引理 4.3. 考虑一个范畴的交换方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & C \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ B & \xrightarrow[v]{} & D \end{array}$$

[9]这一构造也称为 ***Artin*** 粘合。

其左伴随为 $f \dashv u$ 和 $g \dashv v$。诱导函子 $U\colon \mathrm{Gl}(p) \to \mathrm{Gl}(q)$ 有一个左伴随$F\colon \mathrm{Gl}(q) \to \mathrm{Gl}(p)$，它由上述方形图的伴随变换诱导。

特别地，交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}(p) & \xrightarrow{\pi_1} & B \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ \mathrm{Gl}(q) & \xrightarrow[\pi_1]{} & D, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}(p) & \xrightarrow{\pi_2} & A \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ \mathrm{Gl}(q) & \xrightarrow[\pi_2]{} & C. \end{array}$$

具有可逆伴随变换，即伴随变换 $g\pi_1 \to \pi_1 F$ 和 $f\pi_2 \to \pi_2 F$ 可逆。

证明。考虑对象 $x\colon b \to pa$属于 $\mathbf{Gl}(p)$，以及对象 $y\colon d \to qc$属于 $\mathbf{Gl}(q)$。映射 $y \to Ux$由方形图中的虚线数据给出

$$\begin{array}{ccccc} d & & \longrightarrow & & qc \\ \vdots & & & & \vdots{\scriptstyle q(?)} \\ vb & \longrightarrow & vpa & \xrightarrow{\sim} & qua. \end{array}$$

映射 $Fy \to x$ 由方形图中的虚线数据给出

$$\begin{array}{ccccc} gd & \longrightarrow & gqc & \longrightarrow & pgc \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle p(?)} \\ b & & \longrightarrow & & pa. \end{array}$$

这些是自然等价的。 □

4.1. 笛卡尔映射。 给定一个函子 $p\colon A \to B$，我们可以通过余笛卡尔纤维化的限制来理解投影 $\pi_2\colon \mathbf{Gl}(p) \to A$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}(p) & \longrightarrow & \mathrm{Ar}(B) \\ {\scriptstyle \pi_2}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{cod}} \\ A & \xrightarrow[p]{} & B. \end{array}$$

$x \to Y$ $\mathbf{Ar}(B)$ 中的态射若为 π_2-笛卡尔，则称其为笛卡尔 态射。等价地，它在 $\mathbf{Ar}(B)$ 中的像是笛卡尔的，也就是说，B 中的下列方形图是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 x & \longrightarrow & \pi_1 y \\ {\scriptstyle \alpha_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_y} \\ q\pi_2 x & \longrightarrow & q\pi_2 y_{\circ} \end{array}$$

引理 4.4。 给定一个函子 $p\colon A \to B$ 是一个函子，$\mathrm{Gl}(p)$ 中的笛卡尔映射满足以下闭包性质。

(1) 任意同构都是笛卡尔的。给定：$x \to y$ 中的映射 f 和 $g\colon y \to z$，其中 g 是笛卡尔的，则 f 是笛卡尔的，当且仅当 gf 是笛卡尔的。*(2)* 给定交换方块 $vp \simeq qu$，其中 v 保持拉回，则诱导函子 $\mathrm{Gl}(p) \to \mathrm{Gl}(q)$ 保持笛卡尔态射。*(3)* 假设 A 和 B 有推出，p 保持这些推出，且 B 中的推出满足下降。则对于 $\mathrm{Gl}(p)$ 中任意跨度 $y \xleftarrow{f} x \xrightarrow{g} z$，若 f 和 g 是笛卡尔的，则映射 $y \to y \sqcup^x z$、$z \to y \sqcup^x z$ 也是笛卡尔的。

(4) 假设 A 和 B 有推出，p 保持这些推出，且 B 中的推出在基变换下稳定。则对于 $\mathrm{Gl}(p)$ 中任意一个四条边都是笛卡尔映射的方形图，余间隙映射也是笛卡尔的。

(5) 假设 A 和 B 存在推出，p 保持它们，且 B 中的推出满足下降。那么对于 $\mathrm{Gl}(p)$ 中任意跨度映射，若涉及的七个映射全都是笛卡尔映射，则其在推出上诱导的映射也是笛卡尔映射。

(6) 假设 A 和 B 存在序列余极限，p 保持它们，且 B 中的序列余极限满足下降。那么 $\mathrm{Gl}(p)$ 中的笛卡尔态射在超限复合下封闭。

(7) 假设 A 和 B 存在序列余极限，p 保持它们，且序列余极限与 B 中的拉回复合。给定 $\mathrm{Gl}(p)$ 中的一列映射

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & \cdots & & x_\infty \\ {\scriptstyle f_0}\downarrow & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle f_\infty} \\ y_0 & \longrightarrow & y_1 & \longrightarrow & \cdots & & y_\infty, \end{array}$$

若垂直映射 f_n 全都是笛卡尔映射，则序列余极限上诱导的映射 f_∞ 也是笛卡尔映射。

证明。

(1) 这是函子 π_2 的笛卡尔态射的粘合。(2) 设 $q\colon C \to D$。在范畴的方形图中

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}(p) & \longrightarrow & \mathrm{Ar}(B) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ar}(v)} \\ \mathrm{Gl}(q) & \longrightarrow & \mathrm{Ar}(D), \end{array}$$

水平函子创建笛卡尔态射。根据假设，右侧函子保持笛卡尔态射，因此左侧函子也保持笛卡尔态射。

(3) 由于 p 保持推出，我们不妨在 $\mathbf{Ar}(B)$ 中而非 $\mathbf{Gl}(p)$ 中进行论证。此处的结论可直接由下降推出。(4) 同上。(5) 考虑 $\mathbf{Gl}(p)$ 中的一个图表

$$\begin{array}{ccccc} b & \longleftarrow & a & \longrightarrow & c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y & \longleftarrow & x & \longrightarrow & z \end{array}$$

其中所有映射都是笛卡尔的。由第 (3) 部分，映射 $y \to y \sqcup^x z$ 是笛卡尔的，因此由第 (1) 部分，$b \to y \sqcup^x z$ 也是；由对称性可知，$c \to y \sqcup^x z$ 也是。现在由第 (4) 部分即可得证。

(6) 同上，这归结为 $\mathbf{Ar}(B)$ 中的断言；在那里，这不过是说 B 中的序列余极限满足下降这一假设。

(7) 这归结为 $\mathbf{Ar}(B)$ 中的断言，在那里它仅仅是序列余极限与拉回可交换这一假设。

□

4.2. **反射子范畴的拉回与粘合**。考虑范畴余跨的一个映射，

$$
\begin{array}{ccccc}
B_u & \xrightarrow{f_u^*} & A_u & \xleftarrow{g_u^*} & C_u \\
\uparrow{\scriptstyle q} & & \uparrow{\scriptstyle p} & & \uparrow{\scriptstyle r} \\
B_d & \xrightarrow[f_d^*]{} & A_d & \xleftarrow[g_d^*]{} & C_d
\end{array}
\tag{2}
$$

其中每个余跨（行）都满足推论 3.5 的假设。由引理 4.1 和 4.3，我们得到一个余跨

$$\mathrm{Gl}(q) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Gl}(p) \xleftarrow{g^*} \mathrm{Gl}(r)$$

它同样满足推论 3.5 的假设。

分别将拉回 $B_u \times_{A_u} C_u$ 和 $B_d \times_{A_d} C_d$ 记为 D_u 和 D_d，并将诱导函子 $D_d \to D_u$ 记为 t。注意，$\mathrm{Gl}(t)$——由分量分别属于 D_u 和 D_d 的对象所张成的 $\mathrm{Gl}(q)$ 的全子范畴——等价于拉回 $\mathrm{Gl}(q) \times_{\mathrm{Gl}(p)} \mathrm{Gl}(r)$。此外，根据引理 4.3，反射子 $S^\infty\colon \mathrm{Gl}(q) \to \mathrm{Gl}(t)$ 逐分量计算。

我们想知道，对于对象 $x : \mathrm{Gl}(q)$，单位映射 $x \to S^\infty x$ 何时是笛卡尔的。由于它分解为一个超限复合

$$x \longrightarrow Sx \longrightarrow SSx \longrightarrow \cdots,$$

自然会想要寻找一些条件，以确保该序列中的每个映射都是笛卡尔的。根据定义，$s_x\colon x \to Sx$ 是沿着 $\varepsilon_f x\colon f_! f^* x \to x$ 对 $f_! \eta_g f^* x\colon f_! f^* x \to f_! g^* g_! f^* x$ 进行余基变换得到的。若 $x\colon \mathrm{Gl}(q)$ 满足 $\eta_g f^* x$ 和 $\varepsilon_f x$ 都是笛卡尔的，就称其为良好的。因此，我们不禁要问：只要 x 是良好的，Sx 是否也会是良好的。

引理 4.5. 设给定一个如(2)所示的范畴图表，其中两个余跨都满足推论 *3.5* 的假设。此外，假设：

(1) B_u 和 A_u 中的序列余极限与推出满足下降。*(2)* 函子 p、q、f^*、g^* 保留序列余极限与推出。[10] *(3)* $g_!\colon \mathrm{Gl}(p) \to \mathrm{Gl}(r)$ 保留笛卡尔态射。*(4)* $f_!\colon \mathrm{Gl}(p) \to \mathrm{Gl}(q)$ 保留每个满足 $\eta_g y\colon y \to g^* g_! y$ 为笛卡尔映射的笛卡尔映射 $x \to y$。*(5)* 对于 $c\colon C$，$f_! g^* c$ 这个对象在 $\mathrm{Gl}(q)$ 中是良好的。

那么，对于任意良好的 $x\colon \mathrm{Gl}(q)$，我们都有 Sx 也是良好的，并且单位映射 $x \to S^\infty x$ 是笛卡尔的。

明确地说，给定对象 $x_u : B_u$ 和 $x_d : B_d$，以及一个映射 $m\colon x_u \to p x_d$，确定一个良对象 $x : \mathrm{Gl}(q)$，单位映射 $x \to S^\infty x$ 是笛卡尔的这一陈述意味着，B_u 中的方形图

$$
\begin{array}{ccc}
x_u & \xrightarrow{\eta} & h_{u!} x_u \\
{\scriptstyle m}\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
q x_d & \xrightarrow[q\eta]{} & q h_{d!} x_d
\end{array}
$$

是笛卡尔的，其中 $h_{u!}$ 和 $h_{d!}$ 分别表示反射子 $B_u \to D_u$ 和 $B_d \to D_d$。

证明。假设 $x : \mathrm{Gl}(q)$ 是良好的；我们要证明 Sx 也是良好的。也就是说，我们要证明 $\eta_g f^* Sx$ 和 $\varepsilon_f Sx$ 是笛卡尔的。由于 $\eta_g f^*$ 和 ε_f 的定义域与陪域都保持推出，特别是保持定义 Sx 的推出，因此这些态射由下面的

[10] 注意，如果 f_u^*、f_d^*、g_u^*、g_d^* 都保持余极限，那么 f^* 和 g^* 也都保持余极限。

跨度的映射，因此我们可以应用引理 4.4 的第 (5) 部分。我们知道，这些图表中的所有带标记映射

$$\begin{array}{ccccc} f^*f_!g^*g_!f^*x & \longleftarrow & f^*f_!f^*x & \xrightarrow{f^*\varepsilon_f x} & f^*x \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_g f^*f_!g^*g_!f^*x} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_g f^*x} \\ g^*g_!f^*f_!g^*g_!f^*x & \xleftarrow[g^*g_!f^*f_!\eta_g f^*x]{} & g^*g_!f^*f_!f^*x & \xrightarrow[g^*g_!f^*\varepsilon_f x]{} & g^*g_!f^*x \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccc} f_!f^*f_!g^*g_!f^*x & \xleftarrow{f_!f^*f_!\eta_g f^*x} & f_!f^*f_!f^*x & \xrightarrow{f^*\varepsilon_f x} & f_!f^*x \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_f f_!g^*g_!f^*x} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_f x} \\ f_!g^*g_!f^*x & \xleftarrow[f_!\eta_g f^*x]{} & f_!f^*x & \xrightarrow[\varepsilon_f x]{} & g^*g_!f^*x \end{array}$$

是笛卡尔的；随后由引理 4.4 的第 (1) 部分可知，未标记的态射是笛卡尔的，因此 Sx 是良好的。

根据假设， x是良好的，即 $\varepsilon_f x$和$\eta_g f^*x$是笛卡尔的。由引理 4.4 的第 (2) 部分可知， f^*和 g^*保持笛卡尔态射，而根据假设， $g_!$也保持它们，因此 $f^*\varepsilon_f x$和$g^*g_!f^*\varepsilon_f$是笛卡尔的。为验证 $f_!$保持笛卡尔映射 $\eta_g f^*x$，我们应用条件 (4)，注意到 $\eta_g g^*g_!f^*x$ 是可逆的，因此特别是笛卡尔的。我们还需要知道 $f_!$保持笛卡尔映射 $f^*\varepsilon_f x$；事实上，根据假设， $\eta_g f^*x$是笛卡尔的。剩余的两个映射 $\eta_g f^*f_!g^*g_!f^*x$和 $\varepsilon_f f_!g^*g_!f^*x$根据条件 (5)（取 $c = g_!f^*x$）均为笛卡尔的。由此证明，若 x 是良好的，则 Sx也是。

若 x 是良好的，则根据引理 4.4 的第 (3) 部分， $s_x\colon x \to Sx$ 是笛卡尔的。由于 Sx 也是良好的，定义 $S^\infty x$ 的序列 $x \xrightarrow{s_x} Sx \xrightarrow{s_{Sx}} SSx \to \cdots$ 中的每个映射都是良好的。根据引理 4.4 的第 (6) 部分，超限复合 $x \to S^\infty x$ 也是良好的，正如所需。□

5. Localising a cocartesian fibration

设 C 是一个范畴， W 是 C中的一个态射集。本节证明，沿局部化函子 $i\colon C \to C[W^{-1}]$，余笛卡尔纤维化满足下降。给定一个余笛卡尔纤维化$q\colon E \to C$，若对 W 中的每个态射 $f\colon x \to y$，q 的纤维上的传输函子$f_!\colon E_x \to E_y$ 都可逆，则称它反演 W。任意 $C[W^{-1}]$ 上的余笛卡尔纤维化沿 i 拉回，都会得到一个 C 上反演 W 的余笛卡尔纤维化。我们希望知道，每个 反演 W 的余笛卡尔纤维化是否都以这种方式得到。

给定一个余笛卡尔纤维化 $q\colon E \to C$，它将 W映为等价，令 W_u为 W中态射的 q-余笛卡尔提升所成的集合。复合 $E \to C \to C[W^{-1}]$沿 $i_u\colon E \to E[W_u^{-1}]$延拓为函子 $p\colon E[W_u^{-1}] \to C[W^{-1}]$。本节的大部分内容将用于证明 q'是一个余笛卡尔纤维化，且 q 是 q'的拉回。这两条陈述都涉及局部化 $E[W_u^{-1}]$和 $C[W^{-1}]$的映射空间。我们将看到，它们可以归结为以下更具体的陈述。

引理 5.1. 设 $q\colon E \to C$ 是一个余笛卡尔纤维化，它将 W 映为等价，并设 W_u 为 W中态射的 q-余笛卡尔提升所成的集合。

(1) 对于对象 x、 y： E，以下空间方块是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} E(x,y) & \longrightarrow & E[W_u^{-1}](i_u x, i_u y) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ C(qx,qy) & \longrightarrow & C[W^{-1}](iqx, iqy). \end{array}$$

(2) 对于对象 x、y： E 和 c： C，以下方形图是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} |x \downarrow E_c \downarrow i_u y| & \longrightarrow & E[W_u^{-1}](i_u x, i_u y) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ C(qx,c) \times C[W^{-1}](ic, iqy) & \longrightarrow & C[W^{-1}](iqx, iqy). \end{array}$$

这里， $x \downarrow E_c \downarrow i_u y$ 表示迭代逗号范畴，其对象由 p 在 c 上的纤维中的一个对象 z，以及态射 $x \to z$ 和 $i_u z \to i_u y$组成。

我们将借助引理 4.5 来证明这一点。事实上，我们证明一个稍微一般化的结果。称 Conduch´e 纤维化 q: $E \to C$ 反转 W，如果 W 中的态射都有 q-余笛卡尔提升和 q-笛卡尔提升，且二者重合。[11]

引理 5.2。 设 p: $E \to C$ 是一个反转 W 的 *Conduch´e* 纤维化，且 W_u 是 W 中态射的 q-余笛卡尔提升（等价地， q-笛卡尔提升）的集合。那么 p 满足引理 *5.1* 的结论。

我们将引理 5.2 的证明推迟到下一小节，但首先指出，它是引理 5.1 的直接推广。

由引理 *5.2* 证明引理 *5.1*。 根据引理 2.3 和 2.4，任何将 W 取逆的余笛卡尔纤维化，也是将 W取逆的 Conduch´e 纤维化。□

5.1. **为主要引理的证明做准备**。 在本小节中，我们始终在引理 5.2 的语境下工作，并着手证明该引理。

我们先确立一套更系统的记号，并在证明引理之前一直沿用。记 A_d 和 A_u 分别表示 C 和 E；我们系统地使用下标 d 和 u，分别表示发生在 A_d 和 A_u层面的事物。因此，我们写作 W_d 而非 W。我们也将 W_d 与其态射空间等同。因此， W_d 是一个带有函子 $W_d \to$**Ar**(A_d) 的空间。我们将局部化函子 $A_d \to A_d[W_d^{-1}]$ 记为 i_d。我们将 W_u 记为 $W_d \times_{\mathrm{Ar}(A_d)}$ **Ar**(A_u) 的全子范畴，其对象由底层箭头在 A_u 中是 q-余笛卡尔的对象（等价地，q-笛卡尔的对象）张成。与之前一样，我们将函子 $A_u[W_u^{-1}] \to A_d[W_d^{-1}]$ 记为 q'。我们将函子$W_u \to W_d$ 记为 p，并将函子 $W_d \to$**Ar**(A_d) 和 $W_u \to$**Ar**(A_u) 分别记为 m_d 和 m_u。我们将 m_d与 **dom** 和 **cod** 的复合分别记为 s_d, t_d: $W_d \to A_d$，并类似地定义 s_u, t_u: $W_u \to A_u$。

我们强调 W_d 与 W_u 之间的不对称性：重要的是，我们将 W_d 视为群胚，将 W_u 视为范畴。由于 W_u 恰好由 W_d 的 q- 余笛卡尔（等价地， q- 笛卡尔）提升构成，以下两个范畴的方形图都是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} W_u & \xrightarrow{s_u} & A_u \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q} \\ W_d & \xrightarrow{s_d} & A_d, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} W_u & \xrightarrow{t_u} & A_u \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q} \\ W_d & \xrightarrow{t_d} & A_d. \end{array}$$

在下面的引理中， q^* 指沿着 q： $A_u \to A_d$对右纤维化进行的限制 **RFib**(A_d) $\to$ **RFib**(A_u)。给定一个对象 a_u： A_u，我们将由单位 $ʏa_u \to q^* q_! ʏa_u$给出的 **Gl**(q^*) 中的对象记为 $ʏ^{\mathrm{Gl}} a$，其中 $ʏa_u$表示可表右纤维化 **dom**： $A_u/a_u \to A_u$。注意， $q^* q_! ʏa_u$ 是右纤维化 $q \downarrow qa_u \to A_u$，而单位 $ʏa_u \to q^* q_! ʏa_u$ 逐纤维地由 q 在态射上的作用 $A_u(b, a_u) \to A_d(qb, qa_u)$给出。

[11]这可以理解为：对于 W 中的态射 $x \to y$，双函子 $E_x \nrightarrow E_y$ 是可表且可逆的。

引理 5.3。 设 $A_d, A_u, q, W_d, W_u, p, t_d, t_u$ 如上。假设给定如下的范畴笛卡尔方形图，其中 C_d 是一个群胚：

$$\begin{array}{ccc} C_u & \xrightarrow{k_u} & A_u \\ {\scriptstyle r}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q} \\ C_d & \xrightarrow{k_d} & A_d. \end{array}$$

那么：

(1) 函子 $k_!\colon \mathrm{Gl}(r^*) \to \mathrm{Gl}(q^*)$ 保笛卡尔态射。*(2)* 对任意 $a_u\colon A_u$，余单位 $k_!k^* \text{ょ}^{\mathrm{Gl}}a \to \text{ょ}^{\mathrm{Gl}}a$ 是笛卡尔的。*(3)* 对任意 $x\colon \mathrm{Gl}(p)$，余单位 $k_!k^*t_!x \to t_!x$ 是笛卡尔的。

证明。

(1) 设 $x \to y$ 是 $\mathsf{Gl}(r^*)$ 中的一个笛卡尔映射。记 $x_u \to C_u$ 为右纤维化 $\pi_1 x$，并类似地定义 x_d, y_u, y_d。因此，$x \to y$ 是笛卡尔的这一事实意味着 $x_u \simeq x_d \times_{y_d} y_u$。利用左 Kan 延拓的逐点公式，我们需要证明：对于 $a_u : A_u$ 且 $a_d \coloneqq qa_u$，以下空间方块是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} |a_u \downarrow x_u| & \longrightarrow & |a_u \downarrow y_u| \\ \downarrow & & \downarrow \\ |a_d \downarrow x_d| & \longrightarrow & |a_d \downarrow y_d|. \end{array}$$

由于 C_d 是一个群胚，y_d 也是群胚，因此 $a_d \downarrow y_d$ 也是群胚。因此根据推论 2.1，只需证明局部化之前，上面的方形图是一个范畴的笛卡尔方形。这可由拉回粘贴推出。

(2) 给定 $a_u, b_u :\ A_u$ 满足 $a_d \coloneqq qa_u$ 和 $b_d \coloneqq qb_u$，我们需要证明以下空间方块是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} |b_u \downarrow C_u \downarrow a_u| & \longrightarrow & A_u(b_u, a_u) \\ \downarrow & & \downarrow \\ |b_d \downarrow C_d \downarrow a_d| & \longrightarrow & A_d(b_d, a_d). \end{array}$$

在 C_d 上逐纤维地工作，并利用 $C_u \simeq C_d \times_{A_d} A_u$，这归结为一个 Conduch´e 条件。

(3) 为了描述 $k_!k^*t_!x$，我们利用 $k^*t_!$ 可以改写为先限制再作左 Kan 延拓（见第 2.8 节）。因此，对于 $a_u :\ A_u$ 且满足 $a_d \coloneqq qa_u$，我们需要证明以下空间方块是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} |a_u \downarrow C_u \downarrow x_u| & \longrightarrow & |a_u \downarrow x_u| \\ \downarrow & & \downarrow \\ a_d \downarrow C_d \downarrow x_d & \longrightarrow & a_d \downarrow x_d. \end{array}$$

利用推论 2.1，并在 C_d, x_d 上逐纤维地处理，可将其归结为 Conduch´e 条件。

□

引理 5.4. 沿用前面的记号和假设，下面的范畴图表满足引理 *4.5* 的所有假设。此外，对于任意 a_u： A_u，对象 $よ^{\mathrm{Gl}}a$： Gl(q^*) 是好的。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{RFib}(A_u) \arrow[r, "m_u^*"] & \mathrm{Ar}(\mathrm{RFib}(W_u)) & \mathrm{RFib}(W_u) \arrow[l, hook', "\Delta"'] \\
\mathrm{RFib}(A_d) \arrow[u, "q^*"] \arrow[r, "m_d^*"'] & \mathrm{Ar}(\mathrm{RFib}(W_d)) \arrow[u, "\mathrm{Ar}(p^*)"'] & \mathrm{RFib}(W_d) \arrow[u, "p^*"'] \arrow[l, hook', "\Delta"]
\end{tikzcd}$$

证明。 显然，这两个余跨（行）都满足推论 3.5 的假设，且引理 4.5 的条件 (1) 和 (2) 也都成立。

我们有 Gl(Ar(p^*)) $\simeq$ Ar(Gl(p^*))，其中左伴随 $\Delta_!$: Gl(Ar(p^*)) $\to$ Ar(p^*) 对应于 Δ^* cor- responding to cod: Ar(Gl(p^*)) $\to$ Gl(p^*)。若 Gl(Ar(p^*)) 中的态射经 dom 和 cod 映射后都成为 Gl(p^*) 中的笛卡尔态射，则该态射是笛卡尔的。由此可知， $\Delta_!$ 保持笛卡尔态射，即引理 4.5 的条件 (3) 得以满足。我们还有，对于 x： Gl(Ar(p^*))，单位 $\eta_\Delta x$: $x \to \Delta^*\Delta_! x$ 是笛卡尔的，当且仅当 x 作为 Gl(p^*) 中的态射是笛卡尔的。

函子 m^*: Gl(q^*) $\to$ Gl(Ar(p^*)) 对应于函子态射 $t^* \to s^*$ Gl(q^*) $\to$Gl(p^*)。根据引理 2.2，左伴随 $m_!$: Gl(Ar(p^*)) $\to$ Gl(q^*) 由以下推出给出：

$$\begin{tikzcd}
s_!\mathsf{dom} \arrow[r] \arrow[d] & s_!\mathsf{cod} \arrow[d] \\
t_!\mathsf{dom} \arrow[r] & m_!. \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

我们断言，对于任意 x: Gl(p^*)，映射 $s_! x \to t_! x$ 都是笛卡尔的。这相当于证明下面的空间方块是笛卡尔的：

$$\begin{tikzcd}
|a_u \downarrow_s x_u| \arrow[r] \arrow[d] & |a_u \downarrow_t x_u| \arrow[d] \\
a_d \downarrow_s x_d \arrow[r] & a_u \downarrow_t x_u.
\end{tikzcd}$$

这由推论 2.1 以及 $s_u \to t_u$ 的分量是 q-笛卡尔的这一事实得出。

现在我们证明， $m_!$ 保持 Gl(Ar(p^*)) 中满足以下条件的每个笛卡尔映射 $x \to y$： y 确定 Gl(p^*) 中的一个笛卡尔映射。记 $x_0 \to x_1$, $y_0 \to y_1$ 为 Gl(p^*) 中由 x， y 确定的映射。 $x \to y$ 是笛卡尔的这一事实意味着 $x_0 \to y_0$ 和 $x_1 \to y_1$ 是笛卡尔的；由复合与消去可知， $x_0 \to x_1$ 也是如此。现在， $m_! x \to m_! y$ 是由下面的跨度映射诱导的推出上的映射：

$$\begin{tikzcd}
t_! x_0 \arrow[d] & s_! x_0 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & s_! x_1 \arrow[d] \\
t_! y_0 & s_! y_0 \arrow[l] \arrow[r] & s_! y_1
\end{tikzcd}$$

上述图表中的每个映射都是笛卡尔的：要么根据引理 5.3 的第 (1) 部分，要么因为$s_! \to t_!$ 始终是笛卡尔的。因此，根据引理 4.4 的第 (5) 部分， $m_! x \to m_! y$ 是笛卡尔的。这就证明了引理 4.5 的条件 (4)。

还需验证对于所有 a_u： A_u， $よ^{\mathrm{Gl}}a$ 都是良好的，并且对于所有 y： Gl(p^*)， $m_! \Delta^* y$ 都是良好的。回忆一下，对象 x： Gl(q^*) 是良好的，当且仅当 $\varepsilon_m x$ 和 $t^* x \to s^* x$ 都是笛卡尔的。注意， $m_! \Delta^* y$

就是 $t_!y$。我们有， $\varepsilon_m x$ 是下列方形图的余间隙映射。

$$\begin{array}{ccc} s_!t^*x & \longrightarrow & s_!s^*x \\ \downarrow & & \downarrow \\ t_!t^*x & \longrightarrow & x, \end{array}$$

映射 $s_!t^*x \to t_!t^*x$ 始终是笛卡尔的，如上所示。根据引理 4.4 的第 (1) 和 (4) 部分，如果余单位 $t_!t^*x \to x$ 和 $s_!s^*x \to x$ 都是笛卡尔的，那么$\varepsilon_m x$ 就是笛卡尔的。在这里考虑的情形中，x 或者是 $ɏ^{\mathrm{Gl}}a$ ，或者是 $t_!c$；由引理 5.3 的第 (2) 和 (3) 部分可知这一点。

映射 $t^*ɏ^{\mathrm{Gl}}a \to s^*ɏ^{\mathrm{Gl}}a$ 是笛卡尔的，这直接源于 $s_u \to t_u$ 的分量都是 q-余笛卡尔的这一事实。

映射 $t^*t_!y \to s^*t_!y$ 是笛卡尔的，这意味着方形图

$$\begin{array}{ccc} t_u w_u \downarrow_t y_u & \longrightarrow & s_u w_u \downarrow_t y_u \\ \downarrow & & \downarrow \\ t_d w_d \downarrow_t y_d & \longrightarrow & s_d w_d \downarrow_t y_d \end{array}$$

是笛卡尔的；这再次可由 $s_u w_u \to t_u w_u$ 是 q-余笛卡尔的这一点，以及推论 2.1 得出。□

现在我们终于可以回到主要引理了。回想一下，我们在陈述引理后更改了记号，因此引理陈述中的 E 和 C 分别对应于 A_u 和 A_d。

引理 5.2 的证明。 我们需要证明引理 5.1 的两个部分。第 (1) 部分中的方形图恰好是单位映射 $ɏ^{\mathrm{Gl}}y \to S^\infty ɏ^{\mathrm{Gl}}y$ 在对象 x 上取值所对应的方形图： A_u。根据引理 5.4 和 4.5，这是一个笛卡尔方形。

对于第 (2) 部分，设 $y : A_u$ 和 $c : A_d$，并考虑范畴的笛卡尔方形图[12]

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{fib}_q(c) & \xrightarrow{k_u} & A_u \\ {\scriptstyle r}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \{c\} & \xrightarrow{k_d} & A_d. \end{array}$$

如果对象 $x : \mathsf{Gl}(q^*)$ 的余单位 $k_!k^*x \to x$ 是笛卡尔的，就称它为良好。所需结论恰好是 $S^\infty ɏ^{\mathrm{Gl}}y$ 是良好的陈述。由于 $k_!k^*$ 和 q^* 保持序列余极限，并且 $\mathsf{RFib}(A_u)$ 中的序列余极限与拉回可交换，因此良好对象的任意序列余极限都是良好的。由引理 5.3 的第 (2) 部分可知， $ɏ^{\mathrm{Gl}}y$ 是良好的。我们断言，若 $x : \mathsf{Gl}(q^*)$ 是良好且优良的，则 Sx 也良好。于是，对每个 n， $S^n ɏ^{\mathrm{Gl}}y$ 都是良好且优良的（由引理 5.4 和 4.5），因此 $S^\infty ɏ^{\mathrm{Gl}}y$ 是良好的。

由于 $k_!k^*$ 保持推出，特别是保持定义 Sx 的推出，根据引理 4.4 的第 (5) 部分，只需证明下图中的每个带标记映射都是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccccc} k_!k^*m_!\Delta^*\Delta_!m^*x & \longleftarrow & k_!k^*m_!m^*x & \xrightarrow{k_!k^*\epsilon_m x} & k_!k^*x \\ {\scriptstyle \varepsilon_k\cdots}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_k\cdots} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_k x} \\ m_!\Delta^*\Delta_!m^*x & \xleftarrow[m_!\eta_\Delta m^*x]{} & m_!m^*x & \xrightarrow[\varepsilon_m x]{} & x. \end{array}$$

[12]这里， $\{c\}$ 是终端范畴，而函子 $k_d\colon \{c\} \to A_d$ 选取对象 c。

底部的态射是笛卡尔的，因为假设 x 良好。右侧的映射是笛卡尔的，因为假设x 良好。要证明左侧的映射是笛卡尔的，注意 $m_!\Delta^*\Delta_!m^*x \simeq t_!s^*x$ 并应用引理 5.3 的第 (3) 部分。要证明 $k_!k^*\varepsilon_m x$ 是笛卡尔的，我们应用引理 5.3 的第 (1) 部分。□

5.2. **沿局部化的下降**。 此时，我们将引理 5.1 视为一个黑箱，不再使用粘合，也不再使用局部化映射空间的序贯余极限描述。现在让我们改回用 C、 E、 W 分别代替 A_d、 A_u、 W_d。

我们记录关于局部化 $i\colon C \to C[W^{-1}]$的两个简单观察。首先，它是满射；事实上， i 的本质像到 $C[W^{-1}]$ 的包含映射有一个截面，这由 $C[W^{-1}]$的泛性质保证。其次，给定对象 x、 $y\colon C$，以及局部化中的一个映射 $f\colon ix \to iy$，存在一列对象 $x = x_0$、 x_1、……、 $x_n = y$ 和映射 $f_j\colon ix_j \to ix_{j+1}$，其复合为 f，并且每个 f_j 都具有以下形式之一：要么是 ig，其中 $g\colon x_j \to x_{j+1}$；要么是 $(ig)^{-1}$，其中 g 属于 W。这可以利用如下事实来证明： $i^*i_!C(-, y)$ 是 $C(-, y)$ 下的始预层，且具有使 W 可逆的性质。

引理 5.5. 设 $q\colon E \to C$ 是一个将 W 变为等价的余笛卡尔纤维化，并设 W_u 是 W 中态射的 q-余笛卡尔提升所成的集合。令 q' 为诱导函子 $E[W_u^{-1}] \to C[W^{-1}]$。那么 q' 是一个余笛卡尔纤维化，且下面的方形图是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_u} & E[W_u^{-1}] \\ {\scriptstyle q}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q'} \\ C & \xrightarrow{i} & C[W^{-1}]. \end{array}$$

证明。 分别将局部化 $C[W^{-1}]$ 和 $E[W_u^{-1}]$ 记为 C' 和 E'。由引理 5.1 的第 (1) 部分可知，间隙映射 $E \to E' \times_{C'} C$ 是全忠实的。特别地，这意味着对于 $c\colon C$，函子 $\mathrm{fib}_q(c) \to \mathrm{fib}_{q'}(ic)$ 是全忠实的。

利用 q 是余笛卡尔纤维化这一事实，我们可以重新表述引理 5.1 的第 (2) 部分。令 $x,\ y\colon E$ 且 $c\colon C$。注意，对于 $x\colon E$，逗号范畴 $x \downarrow E_c$ 有一个由 q-余笛卡尔映射张成的余反射子范畴。这意味着对于 $f\colon qx \to c$， $|x \downarrow E_c \downarrow i_u y|$ 在 f 上方的纤维就是映射空间 $E'(i_u f_! x, i_u y)$。由此可得下面的空间方块是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} E'(i_u f_! x, i_u y) & \longrightarrow & E'(i_u x, i_u y) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ C'(ic, iqy) & \longrightarrow & C'(iqx, iqy). \end{array}$$

由于 E' 中的每个对象都等价于一个形如 $i_u y$ 的对象，这意味着 $i_u g\colon i_u x \to i_u f_! x$ 是 q'-余笛卡尔的，其中 g 表示 q-余笛卡尔映射 $x \to f_! x$。

我们现在声称，给定 $a, b\colon C, f\colon C'(ia, ib)$，以及 $x : \mathrm{fib}_{q'}(ia)$，使得 x 属于 $\mathrm{fib}_q(a) \hookrightarrow \mathrm{fib}_{q'}(ia)$ 的像，则存在 $y : \mathrm{fib}_{q'}(ib)$ 以及一个 q'-余笛卡尔提升 $x \to y$ of f，此外， y 属于 $\mathrm{fib}_q(b) \hookrightarrow \mathrm{fib}_{q'}(ib)$ 的像。由于 q'-余笛卡尔映射在复合下封闭，只需考虑 f 的形式为 ig 或 $(ig)^{-1}$ （其中 g 属于 W）的情形。第一种情形已在上文处理过，因此我们考虑 $f = (ig)^{-1}$ 的情形。由于在此情形下 f 是可逆的，显然存在一个 q'-余笛卡尔提升，它由同构 $x \simeq y$ 给出。 y 属于 $\mathrm{fib}_q(b) \hookrightarrow \mathrm{fib}_{q'}(ib)$ 的像这一事实，可以通过考察下列方形图看出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{fib}_q(b) & \hookrightarrow & \mathrm{fib}_{q'}(ib) \\ {\scriptstyle g_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (ig)_!} \\ \mathrm{fib}_q(a) & \hookrightarrow & \mathrm{fib}_{q'}(ia), \end{array}$$

其中竖直映射是可逆的，而 x: $\mathrm{fib}_{q'}(ia)$ 是 y 在 $(ig)_!$ 下的像。现在令 a: C 且 x: $\mathrm{fib}_{q'}(ia)$ 任意。由于 i_u: $E \to E'$ 是满射，存在 y: E，使得 g: $i_u y \simeq x$。特别地，$q'g$ 给出了一个同构 f: $iqy \simeq ia$，而 g 正是 q' 的余笛卡尔提升。根据上面的断言，这意味着 x 属于 $\mathrm{fib}_q(a) \hookrightarrow \mathrm{fib}_{q'}(ia)$ 的像，因此该函子是满射的。这意味着间隙映射 $E \to E' \times_{C'} C$ 是满射的，因而是可逆的。这也意味着，上述断言与 i: $C \to C'$ 的满射性共同表明，q' 是一个余笛卡尔纤维化。□

注记 5.6. Conduch´e 纤维化具有直化–反直化对应，这一对应推广了（余）笛卡尔纤维化的相应对应 [1], ，因此很自然会问，我们的方法是否也适用于 Conduch´e 纤维化。事实上，主要工具引理 5.2 适用于 Conduch´e 纤维化。

然而，Conduch´e 纤维化的直化本质上比余笛卡尔纤维化的直化更复杂，因为 Conduch´e 纤维化由取值于范畴与其间双函子所成的带标记范畴的带标记 函子（即，不只是通常意义上的函子）分类。这主要是因为并非每个可逆双函子都是可表的。

一个具体体现是，引理 5.5不 适用于 Conduch´e 纤维化。事实上，设 F: $A \to B$ 是某个定义了可逆双函子但并非范畴等价的函子。例如，A可以是游荡幂等元，而 B 可以是游荡截面-收缩对。我们按如下方式构造一个 Conduch´e 纤维化 q: $E \to \Delta^3$: Δ^3 中对象 0、1、2、3 上方的纤维分别为 A、B、A、B，而由 Δ^3 的生成态射 $0 \to 1$、$1 \to 2$、$2 \to 3$ 所诱导的纤维间双函子分别为 F、F^{-1}和 F。可以看出，q 使态射 $0 \to 2$ 和 $1 \to 3$可逆。将 Δ^3 在这两个态射处局部化，得到终端范畴 1。由于 0、1 上方的纤维 A 和 B: Δ^3 并不等价，因此 q: $E \to \Delta^3$ 不可能是某个 Conduch´e 纤维化 $E' \to 1$的拉回。

定理 5.7. 设 C 是一个范畴，W 是一个态射集，且 i: $C \to C[W^{-1}]$ 是相应的局部化。则沿 i 进行基变换所给出的（野性）函子 $i^* : \mathrm{CocartFib}(C[W^{-1}]) \to \mathrm{CocartFib}(C)$ 是全忠实的，其像由使 W 成为同构的余笛卡尔纤维化所张成。

证明. 由于 i 是满射，i^* 是保守的。现在设 q: $E \to C$ 是一个使 W成为同构的余笛卡尔纤维化。由引理 5.5，我们得到一个余笛卡尔纤维化 q': $E[W_u^{-1}] \to C[W^{-1}]$，以及一个同构 η: $q \to i^* q'$。我们断言，(q', η) 是 $q \downarrow i^*$中的始对象。这意味着，对于任意其他余笛卡尔纤维化 p: $Y \to C[W^{-1}]$，余笛卡尔纤维化函子空间 $q' \to p$通过映射 $F \mapsto i^*(F)\eta$等价于余笛卡尔纤维化函子空间 $q \to i^* p$。

根据构造，空间 $\mathrm{Map}_{C[W^{-1}]}(q',\ p)$（由范畴在 $C[W^{-1}]$ 上的所有 函子组成，这些函子不必保持余笛卡尔映射）等价于 $\mathrm{Map}_C(q,\ i^*p)$ 的子空间，该子空间由满足以下条件的函子 F: $E \to i^*Y$ 张成：复合 $E \to Y$ 将 W_u 的每个态射都映为可逆态射。如果函子F: $E \to i^*Y$在 C 上保持余笛卡尔映射，那么 $E \to Y$ 也如此，因此 W_u 中的态射会被映为 Y 中同构的余笛卡尔提升，于是 $E \to Y$ 将 W_u 映为可逆态射。只需证明诱导函子 F': $E[W_u^{-1}] \to Y$ 也保持余笛卡尔映射。这是因为 $C[W^{-1}]$ 中的每个态射都可以写成 i 的像中的态射（其余笛卡尔提升由 F' 保持，因为 F 保持余笛卡尔映射）与同构（其余笛卡尔提升可逆，因此由任意函子保持）的复合。

因此，$q \mapsto q'$ 确定了一个左伴随，它从 $\mathrm{CocartFib}(C[W^{-1}])$ 映到 $\mathrm{CocartFib}(C)$ 中由将 W 变为可逆的余笛卡尔纤维化所张成的全子范畴。由于此伴随的单位可逆，且右伴随是保守的，因此这是（野性）范畴的一个等价。□

6. Other descent statements

本节证明了关于余逗号、序列余极限和群胚上的余笛卡尔纤维化的下降陈述。

引理 6.1。 给定范畴的一个余逗号松弛交换方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \nearrow\!\!\nearrow & \downarrow{\scriptstyle k} \\ B & \xrightarrow[h]{} & D, \end{array}$$

相应的（野）余笛卡尔纤维化范畴的松弛交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CocartFib}(D) & \xrightarrow{h^*} & \mathrm{CocartFib}(B) \\ {\scriptstyle k^*}\downarrow & \swarrow\!\!\swarrow & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathrm{CocartFib}(C) & \xrightarrow[g^*]{} & \mathrm{CocartFib}(A) \end{array}$$

是一个逗号松弛交换方块。

证明。 由于 h 和 k 是联合满射的， h^* 和 k^* 是联合保守的，因此函子$R\colon \mathsf{CocartFib}(D) \to f^* \downarrow g^*$是保守的。我们断言它具有一个左伴随且单位是可逆的；于是可推出它是（野）范畴的一个等价。

$f^* \downarrow g^*$的一个对象由余笛卡尔纤维化 $p\colon Y \to B$ 和 $q\colon Z \to C$，以及一个位于 A 之上的余笛卡尔函子 $f^*Y \to g^*Z$ 给出。这些数据由图表描述

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{u} & f^*Y & \xrightarrow{v} & Z \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \lrcorner & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \xleftarrow[f]{} & A & \xrightarrow[g]{} & C. \end{array}$$

令 W 表示 $Y \xleftarrow{u} f^*Y \xrightarrow{v} Z$ 的余逗号，并将到 W 中的包含映射记为 $s\colon Y \hookrightarrow W$ 和 $t\colon Z \hookrightarrow W$。我们断言，诱导函子 $r\colon W \to D$ 是一个余笛卡尔纤维化。

D 中有三类态射：来自 B 的态射、来自 C 的态射，以及形如 $hb \to kc$ 的“异态射”。沿着 h 和 k 对 r 作基变换，分别得到 p 和 q，这主要是因为 h 和 k 是全忠实的。这表明， r 对来自 C 的态射有余笛卡尔提升，其中 $t\colon Z \hookrightarrow W$ 将 q-余笛卡尔映射送到 r-余笛卡尔映射。它还表明， r 对来自 B 的态射有局部余笛卡尔提升。接下来只需证明它对异态射 $hc \to kc$ 有余笛卡尔提升，并且这些提升在与来自 B 或 C 的态射进行前复合和后复合时保持稳定。

考虑对象 $y\colon Y$和 $z\colon Z$。则映射空间 $W(sy, tz)$ 是 $y \downarrow f^*Y \downarrow z$ 的局部化，而映射空间 $D(hpy, kqz)$ 是 $pq \downarrow A \downarrow qz$ 的局部化。考虑由其底层态射在 Y 中为 p-余笛卡尔的对象张成的 $y \downarrow f^*Y \downarrow z$ 的余反射子范畴 $y \downarrow^{\mathsf{cocart}} f^*Y \downarrow Z$。于是，我们也可以将 $D(hpy, kqz)$ 等价地计算为 $y \downarrow^{\mathsf{cocart}} f^*Y \downarrow Z$ 的局部化。

现在考虑函子 $F\colon (y \downarrow^{\mathsf{cocart}} f^*Y \downarrow Z) \to (pq \downarrow A \downarrow qz)$。我们声称 F是 Kan纤维化，也就是说，它既是左纤维化，也是右纤维化。 F在对象 $a\colon A$上的纤维，其中 $m\colon pq \to fa$且 $n\colon ga \to qz$，是映射空间 $Z_{qz}(n_!v(m_!y, a)\ z)$。证明 F是 Kan纤维化，归结为以下事实：给定 $a, a'\colon A$，其映射为 $m\colon pq \to fa$、 $l\colon a \to a'$ 和 $n\colon ga' \to qz$，我们有 $(ng(l))_!v(m_!y, a) \simeq n_!v((f(l)m)_!y, a')$，因为 v 将余笛卡尔映射 $(m_!y, a) \to ((f(l)m)_!y, a')$ 送至 $g(l)$的一个 q-余笛卡尔提升。

假设 F 是 Kan纤维化，下降蕴含范畴的方形图

$$\begin{array}{ccc} y \downarrow^{\mathsf{cocart}} f^*Y \downarrow z & \longrightarrow & W(sy, tz) \\ \downarrow & & \downarrow \\ py \downarrow A \downarrow qz & \longrightarrow & D(hpy, kqz). \end{array}$$

是笛卡尔的。由于底部映射是满射（事实上是一个局部化），这意味着 $W(sy,\ tz) \to D(hpy,\ kqz)$ 的每个纤维都具有 $Z_{qz}(n_!v(m_!y,\ a)\ z)$ 的形式。特别地，异态射具有余笛卡尔提升：它们对应于同构 $n_!v(m_!y,\ a) \simeq n_!v(m_!y,\ a)$。从这个描述可以清楚地看出，它们在与来自 B 的态射的局部余笛卡尔提升进行前复合时保持稳定。由此完成了 r 是余笛卡尔纤维化的证明。

到余逗号 W 的包含映射定义了一个从 $Y \xleftarrow{u} f^*Y \xrightarrow{v} Z$ 到 Rr 的映射，该映射属于 $f^* \downarrow g^*$。此外，由于 $Y \simeq h^*W$ 和 $Z \simeq k^*W$，这个映射是可逆的。此外，这也定义了 R 的左伴随，这基本上由 W 作为余逗号的泛性质得出。由于 R 是保守的，且具有一个单位可逆的左伴随，因此 R 是可逆的。□

引理 6.2. 给定一个范畴的序列余极限图表

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \xrightarrow{f_0} & C_1 & \xrightarrow{f_1} & \cdots & & \\ & \searrow^{i_0} & & \searrow^{i_1} & & & \\ & & & & C_\infty, & & \end{array}$$

相应的（野）余笛卡尔纤维化范畴图表

$$\begin{array}{ccccc} \text{余笛卡尔纤维化}(C_\infty) & & & & \\ & \searrow^{i_1^*} & & \searrow^{i_0^*} & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{余笛卡尔纤维化}(C_1) & \longrightarrow & \text{余笛卡尔纤维化}(C_0) \end{array}$$

是一个序列极限图表。

证明。 由于 $\mathbb{I}$ 能检测范畴等价，且 $\mathsf{Map}(\mathbb{I},\ -)$ 与序列余极限相交换，因此范畴的序列余极限满足下降性，即 Cat/C_∞ 是 $\mathsf{Cat}/C_0 \xleftarrow{f_0^*} \mathsf{Cat}/C_1 \cdots$ 的序列极限。再次利用 $\mathbb{I}$ 的紧致性以及序列余极限与空间中的拉回相交换这一事实，可以验证：若一个 C_∞ 上的范畴对每个 n拉回到 C_n 后都是余笛卡尔纤维化，那么它本身就是余笛卡尔纤维化；对于 C_∞上的余笛卡尔纤维化函子，结论也类似。□

引理 6.3。 给定一个群胚 X，下面这个（野性）函子

$$\mathrm{CocartFib}(X) \to \mathsf{Cat}^X$$

它计算余笛卡尔纤维化的纤维，是（野性）范畴之间的一个等价。

证明。 每个 X 上的范畴都是余笛卡尔纤维化，其中余笛卡尔映射为同构态射。因此，$\mathsf{CocartFib}(X)$ 就是 X 上范畴的（野性）范畴。于是，该结论归结为范畴的（野性）范畴的可扩张性。□

7. A directed join construction

在本节中，我们描述一种依赖模型的方式，将一般范畴分解为更简单的部分。更确切地说，对于任意函子 $f\colon A \to B$，我们给出 f 的满像的序列余极限公式。这是对连接构造 [9], 的有向推广，该构造处理

A 和 B 为群胚的情形。我们主要关注 f 是核心包含 $C^{\simeq} \to C$的情形。

构造 7.1。设 A_0、A_1、B 为范畴，配有函子 $f_0\colon A_0 \to B$ 和 $f_1\colon A_1 \to B$。我们将 $A_0 \vec{*}_B A_1$ 定义为由函子 $i_0\colon A_0 \to A_0 \vec{*}_B A_1$ 和 $i_1\colon A_1 \to A_0 \vec{*}_B A_1$ 以及自然变换 $\alpha\colon i_0\mathsf{dom} \to i_1\mathsf{cod}$（其中函子的定义域为 $f_0 \downarrow f_1 \to A_0 \vec{*}_B A_1$）自由生成的范畴，并满足以下条件：$\alpha$ 沿 $A_0 \times_B A_1 \hookrightarrow f_0 \downarrow f_1$ 的限制是可逆的。该范畴带有一个函子 $A_0 \vec{*}_B A_1 \to B$，记作 $i_0 \vec{*} i_1$：

$$\begin{array}{ccccc} A_0 \times_B A_1 & \hookrightarrow & f_0 \downarrow f_1 & \xrightarrow{\mathsf{cod}} & A_1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{dom}} & \swarrow{\scriptstyle \alpha} & \downarrow{\scriptstyle i_1} \\ & & A_0 & \xrightarrow[i_0]{} & A_0 \vec{*}_B A_1 \xrightarrow{i_0 \vec{*} i_1} B. \end{array}$$

具体而言，我们可以将 $A_0 \vec{*}_B A_1$ 构造为 $A_0 \xleftarrow{\mathsf{dom}} f_0 \downarrow f_1 \xrightarrow{\mathsf{cod}} A_1$ 的余逗号的局部化，局部化所针对的态射集由如下态射构成：将生成 2-胞腔作用于 $f_0 \downarrow f_1$ 的对象，且该对象在 B 中对应的底层态射是可逆的。

引理 7.2. 设 A、B、X_0 为范畴，并设 $f\colon A \to B$ 和 $g_0\colon X_0 \to B$ 为函子。对于每个 $n : \mathbb{N}$，取 $g_n\colon X_n \to B$，即可得到一个位于 B 之上的范畴，其中 $X_{n+1} \coloneqq A \vec{*}_B X_n$、$g_{n+1} \coloneqq f \vec{*} g_n$。令 X_∞ 为序列 $X_0 \xrightarrow{i_1} X_1 \xrightarrow{i_1} \cdots$ 的余极限。那么，假设 g_0 的像包含于 f 的像中，则 $X_\infty \xrightarrow{g_\infty} B$ 是全忠实的，并且将 X_∞ 展示为 f 的满像。

证明。对于 $0 \le m \le n \le \infty$，将函子 $X_m \to X_n$ 记为 ι^n_m。对于 $n : \mathbb{N}$，将函子 $A \to X_n$ 记为 j_n。由于函子 $j_n\colon A \to X_{n+1}$ 和 $\iota^{n+1}_n\colon X_n \to X_{n+1}$ 联合满射，g_{n+1} 的像是 f 和 g_n 的像的并。因此，对于每个 n，g_n 的像都包含于 f 的像中。由于函子 $\iota^\infty_n\colon X_n \to X_\infty$ 联合满射，g_∞ 的像与 f 的像重合。因此，只需证明 g_∞ 是全忠实的。

我们要证明，对于每一对对象 x'，$y\colon X_\infty$，映射 $X_\infty(x',\ y) \to B(g_\infty x',\ g_\infty y)$ 是空间等价。由于函子 $\iota^\infty_n\colon X_n \to X_\infty$ 是联合满射的，我们可以假设 x' 具有 $\iota^\infty_n x$ 的形式，其中 $x\colon X_n$。不失一般性，我们可以假设 $n = 0$。我们还可以假设给定了 $a\colon A$ 以及 $e\colon fa \simeq g_0 x$ 在 B 中的一个同构。

由于 X_1 定义为 $A \vec{*}_B X_0$，我们有一个松弛交换方块

$$\begin{array}{ccc} f \downarrow g_0 & \xrightarrow{\mathsf{cod}} & X_0 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{dom}} & \swarrow{\scriptstyle \alpha} & \downarrow{\scriptstyle \iota^1_0} \\ A & \xrightarrow[j_0]{} & X_1. \end{array}$$

这诱导出一个函子 $f \downarrow g_0 \to j_0 \downarrow \iota^1_0$。沿着 $a\colon 1 \to A$ 限制后，我们得到一个函子 $H\colon fa \downarrow g_0 \to j_0 a \downarrow \iota^1_0$，它是 X_0 上的左纤维化。根据 X_1 的构造，我们有 H 将 $e\colon fa \xrightarrow{\sim} g_0 x$ 发送为一个同构 $j_0 a \simeq \iota^1_0 x$。我们还有一个函子 $G\colon j_0 a \downarrow \iota^1_0 \to g_1 j_0 a \downarrow g_1 \iota^1_0$，它本质上由 g_1 在态射上的作用给出。复合 GH：$fa \downarrow g_0 \to g_1 j_0 a \downarrow g_1 \iota^1_0$ 是由 $f \simeq g_1 j_0$ 和 $g_0 \simeq g_1 \iota^1_0$ 诱导的等价。现在我们可以构造 $\mathbf{LFib}(X_0)$ 中的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} fa \downarrow g_0 & \xrightarrow{H} & j_0 a \downarrow \iota^1_0 & \xrightarrow{G} & g_1 j_0 a \downarrow g_1 \iota^1_0 \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ g_0 x \downarrow g_0 & \xrightarrow[H']{} & \iota^1_0 x \downarrow \iota^1_0 & \xrightarrow{G'} & g_1 \iota^1_0 x \downarrow g_1 \iota^1_0. \end{array} \tag{3}$$

这些垂直等价由 e：$fa \simeq g_0 x$ 和 He：$j_0 a \simeq \iota_0^1 x$ 诱导。函子 G' 由 g_1 在态射上的作用给出，而复合 $G'H'$ 则由同构 $g_0 \simeq g_1 \iota_0^1$ 给出。现在我们可以不再考虑 a 和图表的顶行。

由于 G' 是函子 $\iota_0^1 x \downarrow X_1 \to g_1 \iota_0^1 x \downarrow g_1$ 沿着 ι_0^1的基变换，我们也有如下方形图：

$$\begin{array}{ccc} x \downarrow X_0 & \longrightarrow & \iota_0^1 x \downarrow X_1 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ g_0 x \downarrow g_0 & \longrightarrow & g_1 \iota_0^1 x \downarrow g_1. \end{array}$$

所有各边都有不涉及 a 或 e的简单描述：垂直函子由 g_0 和 g_1 对态射的作用给出，顶端映射由 ι_0^1 对态射的作用诱导，底端映射由同构 $g_0 \simeq g_1 \iota_0^1$诱导。所示的对角函子由 H'诱导。右下三角形可交换，因为它由我们上文讨论过的 $G'H'$诱导；左上三角形则可由 Yoneda 引理得出其可交换性。

重复这一构　　造，对每个 n: $\mathbb{N}$都如此，我们得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} x \downarrow X_0 & \longrightarrow & \iota_0^1 x \downarrow X_1 & \longrightarrow & \iota_0^2 x \downarrow X_2 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ g_0 x \downarrow g_0 & \longrightarrow & g_1 \iota_0^1 x \downarrow g_1 & \longrightarrow & g_2 \iota_0^2 x \downarrow g_2 & \longrightarrow & \cdots. \end{array}$$

顶行的余极限是 $\iota_0^\infty x \downarrow X_\infty$。底行的余极限是 $g_\infty \iota_0^\infty x \downarrow g_\infty$。对角映射表明，诱导函子 F: $\iota_0^\infty x \downarrow X_\infty \to g_\infty \iota_0^\infty x \downarrow g_\infty$ 是可逆的。还需证明 F 与由 g_∞ 对态射的作用给出的函子同构；由于F 是可逆的，由此可得 g_∞ 是全忠实的。

根据 Yoneda 引理，只需证明 F 定义了一个关于 X_∞的范畴态射，并且它将 $\iota_0^\infty x$ 上的恒等态射映到 $g_\infty \iota_0^\infty x$上的恒等态射。前者意味着，(3) 中交换性的见证也见证了在左纤维化(X_0)中的交换性，而不只是在 Cat 中的交换性。后者由函子 $x \downarrow X_0 \to g_0 x \downarrow g_0$ 将 x 上的恒等态射映到 $g_0 x$上的恒等态射这一事实得出。□

有向并构造给出了以下归纳原理，使我们能够通过对范畴如何由更简单的部分构造而成进行“归纳”，来证明关于一般范畴的结果。

引理 7.3. 设 P 是一个范畴类，满足：

(1) 每个群胚都属于 P。*(2)* 若 $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$ 是一个范畴跨度，且 A、B、C 都属于 P，则 $f \uparrow g$ 也属于 P。*(3)* 若 $C_0 \to C_1 \to \cdots$是一个由均属于 P的范畴构成的序列，则它们的余极限也属于P。*(4)* 若 C 属于 P，且 D 是在某个态射集处对 C 进行的局部化，则 D 属于 P。

T那么每个范畴都属于 P。

证明。令 C 为一个范畴；我们要证明 C 属于 P。考虑引理 7.2，其中取 $A = X_0 =C^{\simeq}$ 和 $B = C$。由于核心包含 $C^{\simeq} \to C$ 的满像是 C的全部，这表明 C 是范畴序列 $X_0 \to X_1 \to \cdots$ 的序列余极限。因此，只需证明对于每个 n，X_n 都属于 P。

令 Q 为满足以下条件的范畴类：对于每个左纤维化 $Z \to Y$，范畴 Z 都属于 P。我们将对 n 使用归纳法证明 X_n 属于 Q；由此可知 X_n 属于 P，因为恒等式 $X_n \to X_n$ 是一个左纤维化。

注意，若 Y 是一个群胚，则 Y 属于 Q，因为对于左纤维化 $Z \to Y$， Z 也是一个群胚。

我们断言，如果 Y属于 Q，且 Y'是 Y的局部化，那么 Y'也属于 Q。事实上，若 $Z \to Y'$是左纤维化，则由于 Y属于 Q， $Z \times_{Y'} Y$属于 P；又因为 Z是 $Z \times_{Y'} Y$的局部化，所以它也属于 P。

接下来我们断言，对于任意范畴跨度 $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$，若 B 是群胚、 g 是左纤维化，且 C 属于 Q，则余逗号范畴 $f \uparrow g$ 也属于 Q。假设 $W \to f \uparrow g$ 是左纤维化。分别记 $Y \to B$ 和 $Z \to C$ 为它沿 $Y \to f \uparrow g$ 和 $Z \to f \uparrow g$的基变换。那么 W 是 $Y \leftarrow f^*Y \to Z$的余逗号。由于 Y 是群胚，因此它属于 P。由于 $Z \to C$是左纤维化，因此 Z属于 P；又由于 $f^*Y \to A$和 $g\colon A \to C$是左纤维化，因此 f^*Y属于 P。由此， W 属于 P，得证。

现在通过归纳法可直接得出，对于每个 n， X_n 都属于 Q。 □

7.1. 一种虚拟的有向连接构造。 为了构造有向单值余笛卡尔纤维化，我们现在希望重现余笛卡尔纤维化的有向连接构造 $E \to C$（将其视为函子 $C \to \mathsf{Cat}$）。与逗号范畴相对应的概念则稍显微妙。

引理 7.4. 设 $p_0\colon E_0 \to C_0$ 和 $p_1\colon E_1 \to C_1$ 是两个余笛卡尔纤维化。假设 C_0 是一个群胚，那么存在一个范畴 $\mathrm{Fun}_{\mathsf{cocart}}(p_0, p_1)$，它由以下函子余自由生成

$$u_0 : \mathrm{Fun}_{\mathsf{cocart}}(p_0, p_1) \to C_0,$$
$$u_1 : \mathrm{Fun}_{\mathsf{cocart}}(p_0, p_1) \to C_1$$

配备一个函子 $u_{01}\colon u_0^*E_0 \to u_1^*E_1$，它是 F 上余笛卡尔纤维化之间的函子。

最终，即使 C_0 不是群胚，这样的范畴也可以证明存在（例如，取 p_0 和 p_1 的直化的逗号范畴），但目前我们先采用这个受限的陈述。

证明。 我们假设 C_0 是终端范畴；一般情形可由关于C_0的可扩张性推出。通过拉回方形图定义范畴 F'

$$\begin{array}{ccc} F' & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(E_0, E_1) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ C_1 & \xrightarrow[\Delta]{} & \mathrm{Fun}(E_0, C_1) \end{array}$$

那么， F'由函子 $u_0\colon F' \to C_0$（这些数据是平凡的）和 $u_1\colon F' \to C_1$余自由生成，并带有一个函子 $u_{01}\colon u_0^*E_0 \to u_1^*E_1$，它是 F'上的范畴之间的函子。特别地， F'中的一个对象由对象 $c\colon C_1$ 以及函子 $a\colon E_0 \to \mathsf{fib}_{p_1}(c)$给出。从 $(c,\ a)$ 到 $(d,\ b)$ 的态射由态射 $f\colon c \to d$ 以及函子$E_0 \to \mathsf{fib}_{p_1}(d)$之间的自然变换 $f_!a \to b$ 给出。令 F 表示 F' 的宽子范畴，其态射由自然变换 $f_!a \to b$可逆的态射构成。我们断言，函子 $h\colon D \to F'$经由 F分解，当且仅当函子 $h^*u_{01}\colon h^*u_0^*E_0 \to h^*u_1^*E_1$ （它是 D 上的范畴之间的函子）保持余笛卡尔映射；由此可得， F 具有所需的泛性质。

由于 C_0是终对象，$h^*u_0^*E_0$就是 $E_0 \times D$，且一个态射是关于投影$E_0 \times D \to D$的余笛卡尔态射，当且仅当它具有如下形式：$(\mathrm{id}_e, g) : (e, x) \to (e, y)$，其中 $g\colon D(x, y)$。函子$h\colon D \to F'$将 x和 y分别映为函子 $a\colon E_0 \to \mathsf{fib}_{p_1}(u_1hx)$ 和 $b\colon E_0 \to \mathsf{fib}_{p_1}(u_1hy)$，并将 g映为自然变换 $\beta\colon (u_1hg)_!a \to b$。函子 h^*u_{01}将 (id_e, g) 映为 E_1 d中的一个态射，该态射由复合 $ae \xrightarrow{\mathsf{cocart}} (u_1g)_!ae \xrightarrow{\beta e} be$给出。当且仅当 βe 可逆时，它才是 p_1-余笛卡尔的。因此，当且仅当 hf属于 F'时， h^*u_{01}保留每个形如 (id_e, f) 的余笛卡尔态射。□

以下构造应被视为构造 7.1 的一种虚拟类比。

构造 7.5. 给定余笛卡尔纤维化 $p_0\colon E_0 \to C_0$ 和 $p_1\colon E_1 \to C_1$，其中 C_0 是一个群胚，我们将 $C_0 \vec{*}_{p_0,p_1} C_1$ 记为 $C_0 \xleftarrow{u_0} \mathsf{Fun}_{\mathsf{cocart}}(p_0, p_1)$ 的余逗号的局部化，该局部化取自与 $\mathsf{Fun}_{\mathsf{cocart}}(p_0, p_1)$ 中对象 x 相对应的态射集，这些对象的底层函子 $\mathsf{fib}_{p_0}(u_0 x) \to \mathsf{fib}_{p_1}(u_1 x)$ 可逆。

将 C_0, C_1 到 $C_0 \vec{*}_{p_0,p_1} C_1$ 的包含映射记为 i_0, i_1。将自然变换 $i_0 u_0 \to i_1 u_1$ 记为 α。

由定理 5.7 和引理 6.1，我们得到一个在 $C_0 \vec{*}_{p_0,p_1} C_1$ 上的余笛卡尔纤维化 $p_0 \vec{*} p_1$，并有见证表明它沿 i_0, i_1 的基变换分别为 p_0, p_1；此外，还有见证表明余笛卡尔函子 $u_{01}\colon u_0^* p_0 \to u_1^* p_1$ 由 $\alpha\colon i_0 u_0 \to i_1 u_1$ 诱导。

回忆一下，函子 $p\colon E \to B$ 若存在对象 $b\colon B$ 以及范畴等价 $C \simeq \mathsf{fib}_p(b)$，则称其分类范畴 C。余笛卡尔纤维化 $p\colon E \to B$ 若对每个 x，$y\colon B$，由 $f \mapsto f_!$ 给出的映射 $B(x, y) \to \mathsf{Map}(\mathsf{fib}_p(x), \mathsf{fib}_p(y))$ 都是空间等价，则称其为有向单值。

下面的引理可视为引理 7.2 的虚拟类比，或视为 Uemura 构造单值完备化 [10,命题 4.7] 的有向类比。

引理 7.6. 考虑余笛卡尔纤维化 $p\colon B \to A$ 和 $q_0\colon Y_0 \to X_0$，其中 A 是群胚。对 $n : \mathbb{N}$ 归纳定义余笛卡尔纤维化 $q_n\colon Y_n \to X_n$，令 q_{n+1} 为构造 *7.5* 中的余笛卡尔纤维化 $p \vec{*} q_n$。令 X_∞ 表示序列 $X_0 \xrightarrow{i_1} X_1 \xrightarrow{i_1} X_2 \to \cdots$ 的余极限。由引理 *6.2*，我们得到余笛卡尔纤维化 $q_\infty\colon Y_\infty \to X_\infty$，其沿 $X_n \to X_\infty$ 的基变换为 q_n。

假设每个由 q_0 分类的范畴也由 p分类。那么，q_∞ 是有向单值的，并且一个范畴由 q_∞ 分类，当且仅当它由 p分类。

证明。我们对引理 7.2 的证明作相应修改。将函子 $A \to X_{n+1}$ 记为j_n，将用于 $0 \le m \le n \le \infty$ 的函子 $X_m \to X_n$ 记为 ι^n_m。我们有 j_n 和 ι^{n+1}_n联合满射，因此每个由 q_n 分类的范畴也由 p分类。由于函子 ι^∞_n联合满射，一个范畴由 q_∞ 分类，当且仅当它由 p分类。剩下要证明q_∞ 是有向单值的，也就是说，对于所有 $x', y : X_\infty$，映射 $X_\infty(x', y) \to \mathsf{Map}(\mathsf{fib}_{q_\infty}(x'), \mathsf{fib}_{q_\infty}(y))$ 都是可逆的。由于函子 ι^∞_n 联合满射，只需考虑形如 $\iota^\infty_n x$ 的 x'，其中 $x\colon X_n$。不失一般性，可以假设 $n = 0$。我们还可以假设给定了 $a : A$ 以及一个等价 $e\colon \mathsf{fib}_p(a) \simeq \mathsf{fib}_{q_0}(x)$。

由于 X_1 定义为 $A \vec{*}_{p,\ q_0} X_0$，我们得到一个松弛交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Fun}_{\mathsf{cocart}}(p, q_0) & \xrightarrow{u_1} & X_0 \\ {\scriptstyle u_0}\downarrow & \overset{\alpha}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \iota^1_0} \\ A & \xrightarrow[j_0]{} & X_1. \end{array}$$

沿着 $a\colon 1 \to A$ 进行限制，可得到一个函子 $H\colon \mathsf{Fun}_{\mathsf{cocart}}(a^* p, q_0) \to j_0 a \downarrow \iota^1_0$，其对象为 X_0 上的左纤维化。根据 X_1 的构造，我们有 H 将 e 映为同构 $j_0 a \simeq \iota^1_0 x$。我们还有一个函子 $G\colon j_0 a \downarrow \iota^1_0 \to \mathsf{Fun}_{\mathsf{cocart}}((j_0 a)^* q_1, \iota^{1*}_0 q_1)$，其对象为 X_0 上的左纤维化；它将态射 $f\colon j_0 a \to \iota^1_0 y$ 映为传输函子 $f_!\colon \mathsf{fib}_{q_1}(j_0 a) \to \mathsf{fib}_{q_1}(\iota^1_0 y)$。复合函子$GH\colon \mathsf{Fun}_{\mathsf{cocart}}(a^* p, q_0) \to \mathsf{Fun}_{\mathsf{cocart}}((j_0 a)^* q_1, \iota^{1*}_0 q_1)$ 是由 $p \simeq j_0^* q_1$ 诱导的等价，并且

$q_0 \simeq \iota_0^{1*} q_1$。现在我们可以在 LFib($X_0$) 中构造以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Fun}_{\mathsf{cocart}}(a^*p, q_0) & \xrightarrow{H} & j_0 a \downarrow \iota_0^1 & \xrightarrow{G} & \mathrm{Fun}_{\mathsf{cocart}}((j_0 a)^* q_1, \iota_0^{1*} q_1) \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ \mathrm{Fun}_{\mathsf{cocart}}(x^* q_0, q_0) & \xrightarrow[H']{} & \iota_0^1 x \downarrow \iota_0^1 & \xrightarrow[G']{} & \mathrm{Fun}_{\mathsf{cocart}}((\iota_0^1 x)^* q_1, \iota_0^{1*} q_1). \end{array}$$

这些垂直等价由 $e\colon a^*p \simeq x^*q_0$ 和 $He\colon j_0 a \simeq \iota_0^1 x$诱导。函子 G' 将态射 f 映到传输函子 $f_!$。复合 $G'H'$ 由等价$q_0 \simeq \iota_0^1 q_1$诱导。现在我们可以不再考虑 a 以及上方图表的顶行。

由于 G'是 $\iota_0^1 x \downarrow X_1 \to \mathsf{Fun}_{\mathsf{cocart}}((\iota_0^1 x)^* q_1,\ q_1)$ 沿 $\iota_0^1\colon X_0 \to X_1$的基变换，因此我们也有以下方形图：

$$\begin{array}{ccc} x \downarrow X_0 & \longrightarrow & \iota_0^1 x \downarrow X_1 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Fun}_{\mathsf{cocart}}(x^* q_0, q_0) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}_{\mathsf{cocart}}((\iota_0^1 x)^* q_1, q_1). \end{array} \tag{4}$$

所有各边都有一种不涉及 a或 e的简单描述。所示的对角函子由 H'诱导。右下三角形可交换，因为它由 $G'H'$诱导，我们已在上文讨论过这一点。左上三角形可由 Yoneda 引理证明可交换。

对每个 $n\colon \mathbb{N}$ 重复这一构造，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} x \downarrow X_0 & \longrightarrow & \iota_0^1 x \downarrow X_1 & \longrightarrow & \iota_0^2 x \downarrow X_2 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ \text{函子}_{\mathsf{cocart}}(x^* q_0,\ q_0) & \longrightarrow & \mathsf{Fun}_{\mathsf{cocart}}((\iota_0^1 x)^* q_1,\ q_1) & \longrightarrow & \mathsf{Fun}_{\mathsf{cocart}}((\iota_0^2 x)^* q_2, q_2) & \longrightarrow & \cdots. \end{array}$$

顶行的余极限是 $\iota_0^\infty x \downarrow X_\infty$。底行的余极限是函子$_{\mathsf{cocart}}((\iota_0^\infty x)^* q_\infty,\ q_\infty)$。对角线映射告诉我们，所诱导的映射 $F\colon \iota_0^\infty x \downarrow X_\infty \to$ 函子$_{\mathsf{cocart}}((\iota_0^\infty x)^* q_\infty,\ q_\infty)$ 是可逆的。还需证明 F 与函子 $f \mapsto f_!$ 同构；由于 F 是可逆的，由此可知 q_∞ 是有向单值的。

根据 Yoneda 引理，只需证明 F 定义了一个在 X_∞上的范畴态射，并且它将 $\iota_0^\infty x$ 上的恒等映射发送为 $(\iota_0^\infty x)^* q_\infty$上的恒等函子。前者归结为以下事实：式 (4) 中交换性的见证也见证了 LFib(X_0) 中的交换性，而不仅仅是在 Cat 中成立。后者源于以下事实：函子 $(x \downarrow X_0) \to$ 函子$_{\mathsf{cocart}}(x^* q_0,\ q_0)$ 将 x 上的恒等映射发送为 $x^* q_0$上的恒等函子。□

现在我们可以轻松证明存在足够多的有向单值余笛卡尔纤维化。

定理 7.7. 给定一个函子 $q\colon Y \to X$，存在一个有向单值余笛卡尔纤维化$p\colon E \to B$，使得 p 对 q 的每个纤维进行分类。

证明. 设 $q\colon Y \to X$ 是任意函子，并设 P 为由q分类的范畴的集合。等价地， P 是由 $q'\colon Y \times_X X^{\simeq} \to X^{\simeq}$ 分类的范畴的集合。由引理 7.6，我们得到一个对相同范畴进行分类的有向单值余笛卡尔纤维化。□

8. Straightening of cocartesian fibrations

最后，我们证明一个适用于任意有向单值纤维化的直化定理。

定理 8.1. 假设 $p\colon E \to B$ 是一个有向单值余笛卡尔纤维化， C 是一个范畴。给定一个余笛卡尔纤维化 $q\colon D \to C$ ，使得 p 将 q的每个纤维分类，则存在一个函子$f\colon C \to B$ 以及一个在 C之上的范畴等价 $D \simeq C \times_B E$ 。此外，给定两个函子

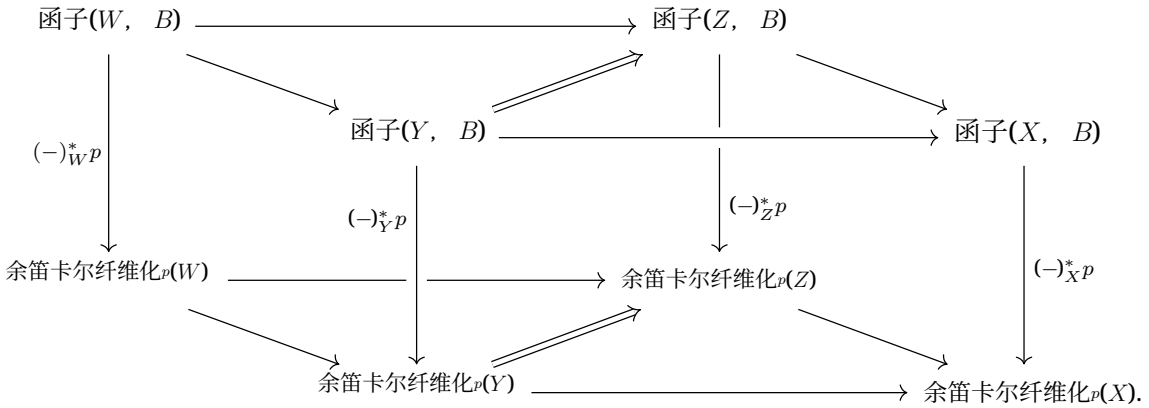
$f, g\colon C \to B$，从 $\mathrm{Map}(f, g)$ 到余笛卡尔函子空间 $f^*p \to g^*p$ 的典范映射是可逆的。

如果假设余笛卡尔纤维化是可指数化的 [2]，则可以直接证明上述结果。我们则从下降理论推导出该结果。

证明。对于一个范畴 C，将 CocartFib(C) 中由所有纤维均由 p 分类的余笛卡尔纤维化所张成的全子范畴记为 CocartFib$_p$(C)。若范畴 C 满足以下条件，则称其为良范畴：野性函子 $(-)^*_C p$: Fun(C, B) $\to$ CocartFib$_p$(C) 可逆。我们需要证明每个范畴都是良范畴。由引理 7.3，只需证明每个群胚都是良范畴，且良范畴在余逼号、局部化和序列余极限下封闭。

由于 p 是有向单值的，特别是计算 p 纤维的映射 $B^{\simeq} \to \mathrm{Cat}^{\simeq}$ 是单态射。结合引理 6.3，这意味着每个群胚都是良范畴。

设给定范畴张量 $Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$，其中 X、Y 和 Z 都是良好的，并令 W 表示余逼号范畴 $f \uparrow g$。于是我们得到如下图表，其上下两个面是弱的：



上方的方形图是一个逼号方块，因为 W 是一个余逼号。下方的方形图根据引理 6.1 是一个逼号方块。根据假设，三个垂直映射 $(-)^*_X p$、$(-)^*_Y p$ 和 $(-)^*_Z p$ 均可逆。因此，根据逼号范畴的唯一性，第四个垂直映射 $(-)^*_W p$ 也可逆。由此可知，良范畴在余逼号下封闭。

良范畴在局部化和序列余极限下封闭这一事实，同样可由定理 5.7 和引理 6.2 得出。□

注 8.2。定义一个全相干（而非野性的）反直化函子这一问题，在某种意义上与证明反直化函子可逆这一问题相互独立。事实上，根据范畴论基本定理，函子可逆这一陈述只涉及它在对象和态射上的作用。到目前为止，我们仅 将 CocartFib(C)视为一个野性 范畴，因此只能将 $(-)^*_C p$: Fun(C, B) $\to$ CocartFib(C) 视为一个野函子。然而，给定一个万有余笛卡尔纤维化 Cat$_\bullet \to$ Cat，就可以将 CocartFib(C)实现为一个全相干范畴；我们预计届时也可以将直化函子实现为一个全相干函子（参见 [2, 第 7 节。7]）。

References

[1] David Ayala 和 John Francis。《 ∞范畴的纤维化》。载于：*Higher Structures* 4.1（2020年2月），第 168–265 页。 DOI: 10.21136/HS.2020.05.[2] Denis-Charles Cisinski、BastiaanCnossen、Kim Nguyen 和TashiWalde。《合成范畴论》。2026年。

[3] Denis-Charles Cisinski 和 Hoang Kim Nguyen。万有余笛卡尔纤维化。2022年10月。DOI： 10.48550/arXiv.2210.08945。arXiv： 2210.08945 [math].[4] Daniel Gratzer、Jonathan Weinberger 和 Ulrik Buchholtz。单纯型类型论中的 ∞范畴的 ∞范畴。2026年2月。DOI： 10.48550/arXiv.2602.02218。arXiv：2602.02218[cs].[5] Fabian Hebestreit、Gijs Heuts 和 Jaco Ruit。《直化定理的一个简短证明》。载于：《美国数学会会刊》，B辑 12.19（2025年5月），第 697– 747 页。ISSN：2330-0000。DOI： 10.1090/btran/225.[6] G.M. Kelly。《自由代数、自由幺半群、余极限、伴随层等超限构造的统一处理》。载于：《澳大利亚数学会通报》22.1（1980年8月），第 1–83 页。ISSN：0004-9727，1755-1633。DOI： 10.1017/S0004972700006353.[7] Jacob Lurie。《高阶托普斯理论》。数学研究年刊。普林斯顿大学出版社，2009年。[8] Louis Martini。内部于一个 ∞-托普斯中的余笛卡尔纤维化与直化。2022年5月。DOI： 10.48550/arXiv.2204.00295。arXiv： 2204.00295 [math].[9] Egbert Rijke。连接构造。2017年1月。 DOI： 10.48550/arXiv.1701.07538。arXiv：1701.07538 [math].[10] Taichi Uemura。 ∞范畴中的 ∞-托普斯与 ´étale态射的余极限。2025年6月。 DOI：10.48550/arXiv.2506.10431。arXiv： 2506.10431 [math]。