天线系统的空间自由度与信道强度

Mats Gustafsson 和 Yaniv Brick

arXiv:2603.28749v1 [eess.SP] 30 Mar 2026

摘要—本文在几何框架下研究天线系统中的空间自由度数（NDoF）和信道强度。我们从发射器区域与接收器区域之间信道的相关算子表示出发，分析其相关特征谱，并将自由度数与其谱转变（拐点）联系起来。我们比较基于谱的有效自由度和有效秩指标，阐明它们在理想化和现实特征值分布下的表现。同时，我们根据互阴影（视域）测度和耦合强度，建立基于几何的渐近估计。具体而言，我们证明，在二维和三维场景中，投影长度或面积能够预测可用模式的数量，而耦合强度决定平均特征值水平。我们利用平行直线和平行区域的典型构型，推导有效自由度的闭式渐近表达式，揭示在间距较小的配置中，有效自由度会显著偏离谱拐点。结果表明，这些结论具有坚实的物理基础。所提出的理论和技术计算效率高，可作为估计近场信道中模态丰富度的工具箱，并对阵列设计、逆问题和高容量通信系统具有重要意义。

I 引言

ELECTROMAGNETIC 近场信道因高容量无线链路、可重构智能表面和紧凑型多天线系统等新兴应用而日益受到关注 [1]。在这些场景中，基于角分辨率的经典远场直觉已不足以应对：波前曲率、显著的距离依赖性以及几何特定耦合，都会显著影响可支持的独立通信信道数量 [2]–[7]。因此，一项核心挑战是以兼具物理意义和计算可行性的方式，量化自由度数（NDoF）及其相关信道强度 [8]–[21]。

一种常见方法是通过信道算子的奇异值或特征谱来表征自由度数。在 MIMO阵列模型中，占主导地位的奇异值对应于可用的子信道，而快速衰减的奇异值则代表较弱且对噪声敏感的模式 [22]。对于连续电磁系统，这一方法可自然扩展为基于格林函数的算子形式，其中相关算子的特征谱刻画了区域之间的模态耦合。在理想化条件下，自由度数通常与一个将传播模式与快速衰减的反应（倏逝）贡献分隔开的谱拐点 [8]–[14], [16], [17]相关。

基于几何的方法提供了互补的见解：这类方法根据表面积和传播方向等量预测自由度数。这与韦尔定律 [23], [24] 等谱结果以及对电磁场 [13]的采样理论解释相关。近期研究表明，区域之间的互阴影（或视域）度量可以预测谱拐点，并为近场谱 [17], [25]提供物理解释。尽管这类估计直观且计算高效，但它们与有效自由度 [26], [27]和有效秩 [28]等谱度量之间的关系仍不明确。

本文使用相关算子构建电磁信道，并将基于谱的有效自由度和有效秩指标与根据互阴影度量得出的几何估计进行比较。我们分析了它们在理想化和现实特征谱中的表现。对于典型配置，驻相分析得出了有效自由度的闭式渐近表达式，揭示了在区域间距较小时，有效自由度与谱拐点存在显著偏差。这些偏差源于传播特征谱的变化：区域间距较大时，谱几乎平坦；间距较小时，谱则极不均匀，少数主导模态占据优势，导致有效自由度随距离减小而趋于零。研究发现，有效秩对特征谱变化的适应性稍强。对于传播角扩展较大的配置，我们结合特征谱局域化和耦合强度方面的观察，解释了谱变化增大的原因。

本文的主要贡献如下：

- 建立传播模式的平均强度与区域间电磁耦合之间的关系。
- 从传播方向和几何可视性的角度阐释信道强度的变化。
- 对有效自由度数与有效秩进行比较分析，并阐明它们与谱拐点的关系。
- 证明对于电尺寸较大的结构，有效秩高于有效自由度数，且更贴近谱拐点。
- 推导典型几何形状下有效自由度数的渐近表达式，并将其与基于互阴影的估计联系起来。

本文其余部分安排如下。第II 节介绍信道和相关算子模型，

本研究部分由瑞典研究理事会 SEE- 6GIA、SSF Sabbatical 以及以色列科学基金会（ISF）第 442/22 号资助。M. Gustafsson 任职于瑞典隆德大学电气与信息技术系（电子邮箱：mats.gustafsson@eit.lth.se）。Y. Brick 任职于以色列贝尔谢巴内盖夫本-古里安大学电气与计算机工程学院，邮编 8410501（电子邮箱：ybrick@bgu.ac.il）。

定义基于谱的自由度数指标，并给出基于几何的估计。第III节分析典型构型，并推导平行线和平面区域的渐近公式。第IV 节讨论传播特征谱。结论见第V节。技术推导和格林函数的详细内容收录于附录中。

II. 自由度与信道强度

在两个阵列天线之间进行通信的分析中（例如， N_{T} 发射天线与 N_{R} 接收天线），信道矩阵的奇异值$\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_{\mathrm{R}} \times N_{\mathrm{T}}}$表征可用子信道的强度 [22]。弱信道需要较高的信噪比才能发挥作用，而可用子信道的数量决定自由度数 [13]。矩阵$\mathbf{H}$ 的奇异值平方即为$N_{\mathrm{T}} \times N_{\mathrm{T}}$ 相关矩阵$\mathbf{H}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}$的特征值。

对于位于两个区域内的任意阵列天线，我们基于适当的（并矢）格林函数$\mathbf{G}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}')$，构建一个连接 Ω_{T}中的源与 Ω_{R} 中的场的通信信道。基于该信道，我们针对连续相关算子构建一个特征值问题

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) = \int_{\Omega_{\mathrm{R}}} \mathbf{G}^*(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}') \cdot \mathbf{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_1)\, \mathrm{dV}' \tag{1}$$

在 Ω_{T}中，关于电流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$

$$\int_{\Omega_{\mathrm{T}}} \mathbf{R}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{r}_1)\, \mathrm{dV}_1 = \zeta_n \boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{r}_2), \tag{2}$$

其中，上标 $*$ 表示复共轭。这是一个紧算子，其非可忽略特征值 $\zeta_n \geq \zeta_0 > 0$ （即高于阈值 ζ_0） [8], [14]的数量随 Ω_{T} 和 Ω_{R} 在 $\mathbb{R}^3$中的曲面域面积而变化，并随它们在 $\mathbb{R}^2$ [17]中的线域长度而变化， [25]。请注意，对于 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面域和 $\mathbb{R}^2$中的曲线，特征值 ζ_n 的量纲为面积。（1）中的并矢格林函数记法具有一般性；根据具体公式，它可以表示自由空间标量格林函数（适用于单层源或双层源及标量场）、电流源与电场对应的格林二重矢量，或将电磁场与物理电流或等效电流联系起来的组合形式；参见附录A。

本文所呈现的结果在很大程度上与具体的格林函数无关。数值计算采用对区域进行离散化的方式，每个波长约取五个采样点；所得特征谱几乎不受进一步细化离散的影响，详见 [17], [25]。对于电磁场，其自由度通常可用...

...来表征两种极化 [13], [14]。对于具有对称性的情况，自由度数可以减少，除非纳入电流和磁流（或单层源和双层源） [16]。

特征谱通常表现为一系列近乎恒定的特征值，随后是一个特征值快速衰减的区域 [5], [8], [13], [14], [29]–[32], 如图所示 1。我们将转变前的模式称为传播模式，将转变后的模式称为反应模式。传播模式通常与区域内平滑的电流分布相关联

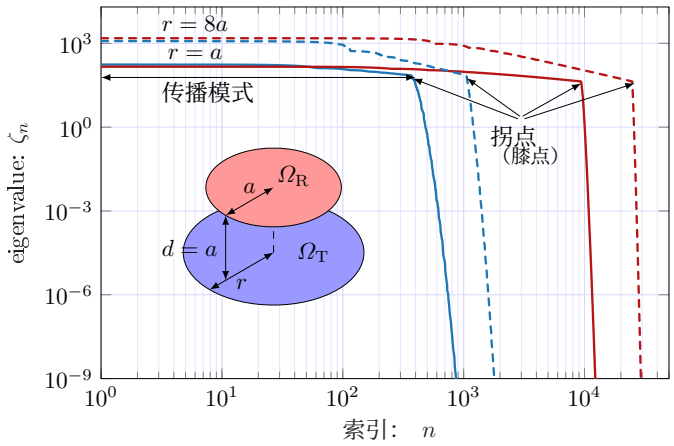


图1. 发射圆盘区域 Ω_{T}（半径为 $r \in \{1, 8\}a$ ）与接收圆盘区域 Ω_{R}（半径为 $\{10, 50\}\lambda$ ）相距一定距离时，$d = a$ 两者之间信道的特征谱。拐点之前和之后的模式分别称为“传播”模式和“反应”模式。

。相比之下，反应模式则与振荡性更强的电流相关联，例如球形区域上的高阶模式 [33], [34],，或集中在区域边缘、呈现衍射特征的电流 [25]。

自由度数与这一转变拐点（或“膝点”）相关，在此处谱行为发生变化。在理想化情形下，特征谱呈现均匀的平台，随后是可忽略的特征值，因此该拐点定义明确且易于识别。然而，在更实际的情形中，转变可能是渐进的，也可能涉及多个膝点，因此难以给出唯一的定义 [35]。随着电尺寸增大，转变会变得更加显著，这促使我们对自由度数进行渐近刻画。因此，本文聚焦于具有简单几何形状且电尺寸较大的构型，其中存在一个占主导地位的拐点 [16], [17], [25]。这也类似于韦尔定律 [24]和采样 [13]中渐近方法的运用。

例如，考虑半径不同的两个圆盘之间的标量格林函数信道， r 以及 a 间距$d = a$。此情形的特征谱如图1所示。对于半径相等的情形 $r = a$ ，特征值在拐点之前近似保持不变，之后迅速下降。对于尺寸 $a \in \{10, 50\}\lambda$，拐角位置约为 $n \in \{380, 9400\}$ 。这与自由度数的经典 λ^{-2}波长 $\lambda = 2\pi/k$ 标度关系一致 [14], [24], [29]。情形 $r = 8a$ 类似，拐角位置约为 $n \in \{1050, 24800\}$。不过，此处传播特征值的离散程度更大，也就是说，第一个特征值与拐点之前的特征值之间大约相差 10 倍。

尽管这些情况在数值上易于处理，但特征谱的解析估算仍能提供有益见解。人们已开发出多种方法来量化这些情况及相关情形下的自由度数。这些方法包括基于谱的估计量，例如有效自由度 [26], [27] 和有效秩 [28], ， 以及基于几何的方法，例如依赖傍轴近似 [29], [36]或阴影（投影、视角）面积计算 [16], [17], [25]的方法。

A. 基于谱的估计

奇异值阈值处理通常用于正则化病态线性逆问题和数值近似 [37]。它将自由度数定义为满足 $\sigma_n \geq \epsilon\sigma_1$的奇异值个数，即相对于最大奇异值而言。对于（2）中的特征值，按绝对值递减排列后，这对应于 $\zeta_n \geq \epsilon^2\zeta_1$。或者，以最小二乘范数归一化，可得到由 $\zeta_n \geq \epsilon^2 \sum \zeta_m$定义的自由度数。所得自由度数取决于所选阈值 ϵ。

许多研究致力于采用无参数技术来定义自由度数。有效自由度 [26], [27] 在无线通信中被广泛使用。其定义为以下商：

$$N_{\mathrm{e}} = \frac{(\sum \zeta_n)^2}{\sum \zeta_n^2} = \frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{H}^{\mathrm{H}}\mathbf{H})^2}{\mathrm{Tr}(\mathbf{H}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{H}}\mathbf{H})} = \frac{\|\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}}^4}{\|\mathbf{H}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}}^2}, \quad (3)$$

这里也使用信道矩阵$\mathbf{H}$表示，可采用迹或弗罗贝尼乌斯范数。

有效秩 [28]度量定义为：

$$N_{\mathrm{r}} = \exp\big(-\sum_n (\zeta_n \ln \zeta_n)\big) = \prod_n \zeta_n^{-\zeta_n} \quad (4)$$

假设采用归一化$\sum_n \zeta_n = 1$，该度量旨在估计矩阵的秩。与有效自由度相比，这一度量较少用于估计通信信道的自由度数。对于由 N_{a} 个相同特征值以及其后可忽略的特征值组成的理想信道，有效自由度（3）和有效秩（4）等于拐点位置；而对于更一般的分布，两者通常并不相等。詹森不等式表明 $N_{\mathrm{r}} \geq N_{\mathrm{e}}$。

特征值和出现在（4）的归一化项中以及（3）的分子中，有时也称为耦合强度 [29], [32]。对于采用标量格林函数建模的信道， $G = \exp(-\mathrm{j}kr)/(4\pi r)$ 当 $r = |\boldsymbol{r}|$时，其表达式为：

$$\sum_n \zeta_n = \|\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}}^2 = \int_{\Omega_{\mathrm{T}}} \int_{\Omega_{\mathrm{R}}} |G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')|^2 \, \mathrm{dS}\, \mathrm{dS}'. \quad (5)$$

该项与频率无关，对于任意形状的区域都可以轻松进行数值计算。对于通过格林二重矢量建模的信道，它呈现出较弱的频率依赖性，但在高频下趋于稳定。对于二维格林函数，在高频极限下，表达式中的弗罗贝尼乌斯范数与波长成正比，见附录 A。

拐角位置 N_{c} 也可以通过目测或图像处理技术确定。对于本文中仅有一个主导拐点的简单情况，可以例如通过对谱在对数刻度下（$\ln\, n$，$\ln\, \zeta_n$）进行最小二乘拟合至两条直线来估计该位置。

B. 基于几何的估计

基于几何的方法利用区域的简单属性（例如其表面积或阴影（投影）面积）来估算自由度数。这与 Weyl 关于拉普拉斯特征值分布的基本结果 [23], [24] 以及 Whittaker、Nyquist 和 Shannon 的采样定理 [13]类似。这些结果是渐近的，例如，在 $\mathbb{R}^1$ 指出长度为 ℓ 的直线上的模式数 [23], [24] 为 $2\ell/\lambda$，这对应于 $\lambda/2$ 采样 [13]。

发射器与接收器之间以波长为单位测得的总互阴影（投影或视域）面积 A_{TR} （或长度 L_{TR}）决定了渐近自由度数 [16], [17]

$$N_{\mathrm{a}} = \begin{cases} L_{\mathrm{TR}}/\lambda & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ A_{\mathrm{TR}}/\lambda^2 & \text{in } \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (6)$$

每种极化的自由度。互阴影面积可针对典型几何形状进行解析计算，也可针对任意形状结构进行数值计算 [17]。对于一种简单形状，其中 Ω_{R} 上的每个点都能被 Ω_{T}看见，总互阴影（视域）面积为 [17], [25]

$$A_{\mathrm{TR}} = \int_{\Omega_{\mathrm{T}}} \int_{\Omega_{\mathrm{R}}} \frac{|\hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \boldsymbol{R}| \; |\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{R}|}{|\boldsymbol{R}|^4} \, \mathrm{dS}'\, \mathrm{dS}, \quad (7)$$

其中 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ 表示连接 Ω_{T}和 Ω_{R} 中各点的向量，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 表示表面的单位法向量。在二维情况下，它简化为总互阴影长度

$$L_{\mathrm{TR}} = \int_{\Omega_{\mathrm{T}}} \int_{\Omega_{\mathrm{R}}} \frac{|\hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \boldsymbol{R}| \; |\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{R}|}{|\boldsymbol{R}|^3} \, \mathrm{d}l'\, \mathrm{d}l, \quad (8)$$

更一般的配置见 [17] 。对于由接收区域 [16],包围的凸发射区域，其总互阴影（投影）面积和长度可简化为 πA 和 $2L$，其中表面积为 A ，周长为 L；这与韦尔定律和采样理论 [16]一致。

类似于（7）和（8）的表达式已广泛应用于热辐射传热 [38], [39], ，其中这些表达式与辐射角系数相关。文中给出了简单配置的许多解析求值结果： [38],[39]。例如，图1 中的两个圆盘具有总互阴影（视）面积

$$A_{\mathrm{TR}} = \frac{\pi^2}{2}\left(\Delta - \sqrt{\Delta^2 - 4a^2r^2}\right) \quad (9)$$

其中 $\Delta = a^2 + r^2 + d^2$，由此得到 $N_{\mathrm{a}} \in \{377, 9425\}$ 对于 $r = a$ 情况，以及 $N_{\mathrm{a}} \in \{972, 24289\}$ 对于 $r = 8a$ 情况，使用（6）。这些结果与图1中的数值数据所示膝点位置吻合良好。

对于相距较远的小区域，互阴影面积（7）可简化为

$$A_{\mathrm{P}} = \frac{1}{d^2} \int_{\Omega_{\mathrm{T}}} |\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}| \, \mathrm{dS} \int_{\Omega_{\mathrm{R}}} |\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}| \, \mathrm{dS}, \quad (10)$$

距离 d 和方向 $\hat{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}/R$。对于垂直表面，该表达式可简化为著名的近轴近似 [29] $A_{\mathrm{P}} = A_{\mathrm{T}}A_{\mathrm{R}}/d^2$，其中 A_{X} 表示 Ω_{X} 在 X $\in$ {T,R}的面积。

将耦合强度（5）与互阴影面积（7）结合起来可知，谱中传播部分的平均值按波长平方计约为

$$\frac{(4\pi)^2 \sum \zeta_n}{\lambda^2 N_{\mathrm{a}}} = \frac{\displaystyle\int_{\Omega_{\mathrm{T}}} \int_{\Omega_{\mathrm{R}}} \frac{1}{R^p} \, \mathrm{dS}\, \mathrm{dS}'}{\displaystyle\int_{\Omega_{\mathrm{T}}} \int_{\Omega_{\mathrm{R}}} \frac{|\hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \hat{\boldsymbol{R}}| \; |\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}|}{R^p} \, \mathrm{dS}\, \mathrm{dS}'} \geq 1, \quad (11)$$

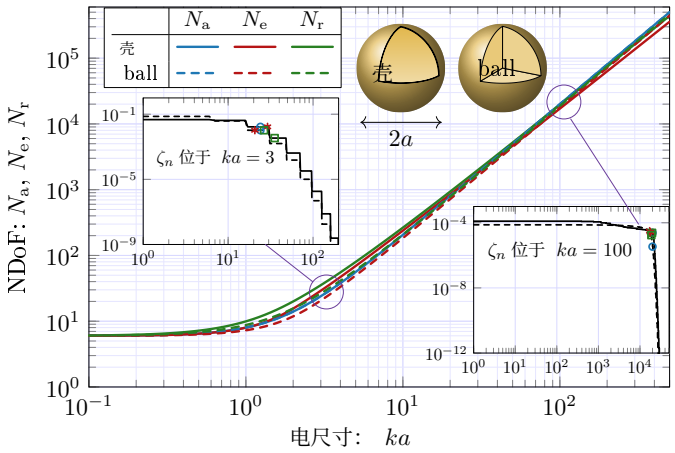


图2. 球壳和球体的自由度数估计 N_a, N_e, 以及 N_r 与电尺寸 ka ζ_n $ka \in \{3, 100\}$ 征值，标记表示估计得到的自由度数。

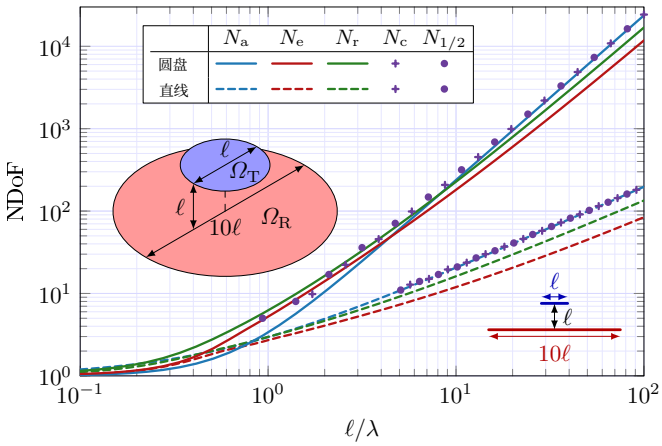


图3. 两个圆盘之间信道的自由度数估计 N_a, N_e, N_r, N_c, $N_{1/2}$ （实线曲线），以及两条直线之间信道的自由度数估计（虚线曲线），分别对应 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^2$。

假设标量格林函数（28）并且 $p = 2$。这一纯几何量在垂直表面的傍轴极限下化为 1。通过在（11）中令 $p = 1$，即可得到相应的二维平均值；其中使用了格林函数的高频近似（29）。

恒等式（11）在此称为渐近平均信道强度。请注意，对于任意形状区域，分子中的积分覆盖整个区域，而分母中的积分实际上仅限于它们的相互可观测部分 [17], ，这会增大所得的平均信道强度。因子 λ^2 在（11）中用于补偿 ζ_n 在（2）中的维数（面积）。对于其他构型，例如三维空间中的直线或体积，可以通过将耦合强度与适当的阴影度量结合，直接得到相应的权重。

渐近平均信道强度（11）还给出了一种简单的基于阈值的自由度数估计 $N_{1/2}$，其定义为归一化特征值大于 1/2的数量，即，

$$N_{1/2} = \mathrm{card}\left\{\frac{(4\pi)^2\zeta_n}{\lambda^2} \geq \frac{1}{2}\right\}. \tag{12}$$

C. 比较

自由度数指标 N_e 在（3）和 N_r 在（4）首先针对球壳和实心球发射端区域，以及位于整个远场球面上的接收器进行评估。源为电流和磁流，电尺寸为 $ka \in [1, 500]$，如图 2 所示。对于这两种几何结构，两种谱估计均吻合良好；当 $ka \to 0$时收敛至 6，并且在 k^2较大时随 ka变化。较小的差异主要出现在$ka \approx 1$附近，但在 ka较大时，斜率也可见轻微差异。比较中还包括一种基于阴影面积的修正自由度数估计（6），并采用低频渐近修正 [17], 即， $N_a \to N_a + 6$。

图2中的自由度数也与基于传播球面模数量的经典方法一致 [33],[40], [41]

$$N = 2L(L + 2) = 2L^2 + 4L \tag{13}$$

对于球谐阶数 L，采用常见的模式起始估计$L = ka \geq 1$。这里还注意到$N \approx 2N_a = 2\pi A/\lambda^2$ 当 $\lambda \to 0$ 时，与（6）和（7）一致。特征值曲线 ζ_n 在 $ka \in \{3, 100\}$ 时的情况以对数刻度显示在插图中。两种情况下，拐点都出现在 $2N_a = 2\,(ka)^{\,2} = \{18, 2000\}$ 附近，与（13）一致。随着 ka增大，拐点越来越明显。在接近拐点之前，谱的幅度相当均匀。

作为第二个示例，图中展示了两个圆盘域之间信道的各种自由度数估计值 $\mathbb{R}^3$ 以及两个线域之间信道的各种自由度数估计值 $\mathbb{R}^2$，如图 3所示（几何结构详情见插图）。对于较小的电尺寸 ℓ/λ，自由度数估计值较低，彼此相差 ± 1 约。在此范围内， N_a通过纳入低频贡献进行修正 [17],，即， $N_a \to N_a + 1$；由于仅存在少数模式时难以明确界定谱拐点，因此本研究不考虑拐角自由度 N_c 和阈值自由度 $N_{1/2}$。

对于较大的电尺寸，自由度数估计值在双对数图中呈现近似直线的趋势，表明其具有幂律行为

$$N_x \approx \alpha_x/\lambda^p \quad \text{for } N_x \gg 1 \tag{14}$$

其中， $p = 2$ 对应圆盘， $p = 1$ 对应直线。主导项 α_x 由自由度数的短波长极限决定。图3 中的自由度数估计值发散，排序为 $N_e < N_r < N_a \approx N_c \approx N_{1/2}$。不等式 $N_e < N_r$通常成立；为进一步考察其余估计值之间的关系，应分析曲线之间的偏移量 α_x。

作为所提出分析的一部分，下一节将考察 N_e 的小波长渐近行为。

III. N_e的渐近评估

有效自由度 N_e 在（3）中通常通过数值计算得出，如图2 和图3所示。虽然图2 中的结果吻合良好，但图3中的结果偏差更为显著。如这里所示，差异

在配置间距较小时会增大。这些基于数值实验的观察结果，得到了对 N_{e} 在电大尺寸区域进行的渐近分析的支持，该分析能够直接比较 N_{e} 和 N_{a}这两种度量。

在此渐近分析中， N_{e} 通过将式（3）中的各项改写为多重积分，并随后推导其主导阶行为，来进行计算。式（3）中的分母，即， $\sum \zeta_n^2$为

$$\|\mathbf{H}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}}^2 = \iiiint G_{1,1'}^{*} G_{2,1'} G_{2,2'}^{*} G_{1,2'} \, \mathrm{dS}_2 \, \mathrm{dS}_2' \, \mathrm{dS}_1 \, \mathrm{dS}_1' \tag{15}$$

采用简写符号$G_{m,\ n'} = G(\boldsymbol{r}_m,\ \boldsymbol{r}_n')$。该多维振荡积分（定义在 $\mathbb{R}^4$ 直线情形下，$\mathbb{R}^8$ 曲面情形下，以及 $\mathbb{R}^{12}$ 体积情形下）不适合直接进行数值计算。然而，可通过驻相法对其进行渐近分析 [42], ，从而在短波长极限下得到解析表达式。

格林函数的乘积（15）可写为$\exp(-\mathrm{j}k\phi)h$，其中相位 ϕ为

$$\phi = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1'| - |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1'| + |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_2'| - |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2'| \tag{16}$$

并且 h包含乘积形式的 $1/|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1'|$型项。假设在 $\boldsymbol{r}_0$ 处存在一个驻点，则有 [42]

$$\int f(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\phi(\boldsymbol{r})} \, \mathrm{dV} = \lambda^{n/2} \frac{f(\boldsymbol{r}_0) \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\phi(\boldsymbol{r}_0) + \mathrm{j}\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(\mathbf{H}_\phi)}}{|\det(\mathbf{H}_\phi)|^{1/2}} + o(\lambda^{n/2}) \tag{17}$$

当 $\lambda \to 0$时，其中$\mathbf{H}\phi$ 表示 $\boldsymbol{r}_0$处的海森矩阵。关于对 $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_2'$ 的变化而言，驻点由 $\nabla_2\phi$ 和 $\nabla_2'\phi$的零点给出。

我们将该方法应用于两条平行线和两块平行板这两种典型情形。

A. 两条平行线

首先确定三维空间中长度为 ℓ_1 和 ℓ_2、间距为 d的两条平行线在短波长条件下的渐近有效自由度，如图 4的插图所示。附录 B 中推导的有效自由度驻相近似（3）为

$$N_{\mathrm{e}}^0 = \frac{\ell}{2\lambda} \frac{\left(\ln(1+\beta^2) - 2\beta \operatorname{atan}(\beta)\right)^2}{\beta^2 \operatorname{asinh}(\beta) - \beta\sqrt{\beta^2+1} + \beta} \tag{18}$$

当 $\lambda \to 0$ 且 $\beta = \ell/d$时。有效自由度的这一渐近表达式如图 4 （标记为“3D”的红色虚线）所示。对于较大的间距 $\beta \to 0$，极限 $N_{\mathrm{e}}^0 \to \ell^2/(d\lambda)$ 与傍轴极限一致。对于较小的间距，该极限为

$$N_{\mathrm{e}}^0 \approx \frac{\ell}{2\lambda} \frac{2\pi}{\ln(2\beta)} \to 0 \text{ as } \beta \to \infty, \tag{19}$$

即，它随 $d \to 0$按对数规律趋于零，这一点可从图4中相应曲线的缓慢衰减看出。

基于总互阴影长度（图中蓝线）的自由度数4）为 (8)

$$N_{\mathrm{a}} = \frac{L_{\mathrm{TR}}}{\lambda} = \frac{2\ell}{\lambda} \frac{\sqrt{1+\beta^2} - 1}{\beta} \geq N_{\mathrm{e}}^0. \tag{20}$$

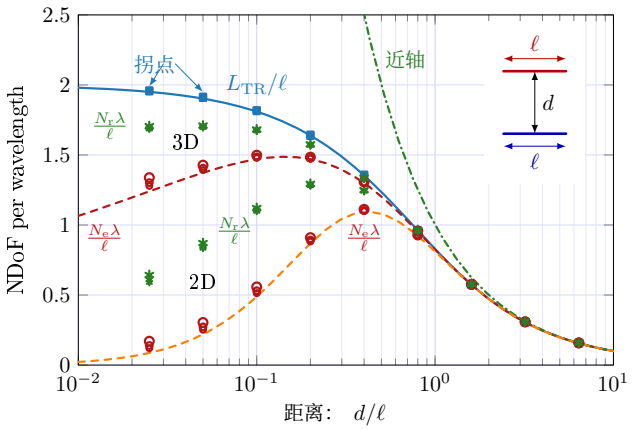


图4. 长度为ℓ 、间距为 d的两条直线之间信道的每波长自由度数。阴影长度估计（20）以实线曲线表示，式（18）和式（21）给出的三维和二维渐近有效自由度分别以虚线曲线表示，近轴近似则以点划线表示。将解析结果与波长为$\lambda \in \{1, 2, 4\}0.01\ell$时有效自由度（3）、有效秩（4）和拐点位置的数值估计进行比较，结果以由小到大的标记表示。

对于足够短的波长，它大于或等于有效自由度（18）；当间距足够大且 $2\ell/\lambda$与$d \to 0$ 时，它也趋近于近轴近似，这与韦尔定律一致 [17]。

对于 $\lambda \in \{1, 2, 4\}0.01\ell$，将闭式阴影面积估计和渐近有效自由度与各种自由度估计的数值计算结果进行比较。信道模型通过以每波长五个点对两条直线进行采样获得，如图4所示（对应颜色的标记大小随 λ减小）。数值计算得到的 N_{e} 与解析结果的一致性随 λ 减小而逐渐提高。同样，数值估计的特征值拐角点与互阴影长度（20）吻合良好。当 $d/\ell \to 0$时，两者的极限分歧；此时可以看到，$N_{\mathrm{e}}\lambda/\ell$ 在 d/ℓ较小时会减小，并低于互阴影长度 L_{TR}。间距很小时有效自由度的这种下降有些违反直觉。下文将通过考察特征值谱随 d的变化来解释这一现象。

三维空间中两条直线之间信道的特征谱（ $\lambda = 10^{-3}\ell$ ）如图5所示，归一化索引轴为 n/N_{a}。对于所有 d/ℓ 值，在 $n = N_{\mathrm{a}}$附近均可观察到明显的拐点（膝点）；超过该点（$n > N_{\mathrm{a}}$）后，对于所有间距，特征值均可忽略。标记表示有效自由度（3）和秩（4）估计值。在$n < N_{\mathrm{a}}$范围内，只有在间距相对较大时，特征值才保持相对恒定。对于这些情况，拐点预测准确。对于较短的间距，此时自由度数被低估（图4中也可见），前导特征值（$n \approx 1$）与其后的特征值之间存在显著变化。这里值得注意的是，归一化（5）意味着图5中的每条曲线下方面积均为单位面积。不过，由于特征值经过平方，特征值分布的变化会体现在（3）的分母中。在拐点值相同的情况下，变化越大，（3）预测的值越低。

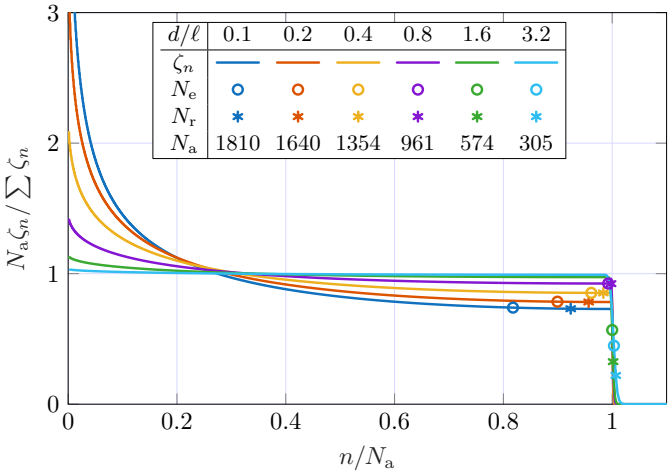


图5. 长度为 ℓ 、间距为 d 、波长为 $\lambda/\ell = 10^{-3}$ 时两条直线的归一化特征谱，参见图 4中的插图。自由度数 N_e 和 N_r 由标记指示，而 N_a 根据（20）计算。

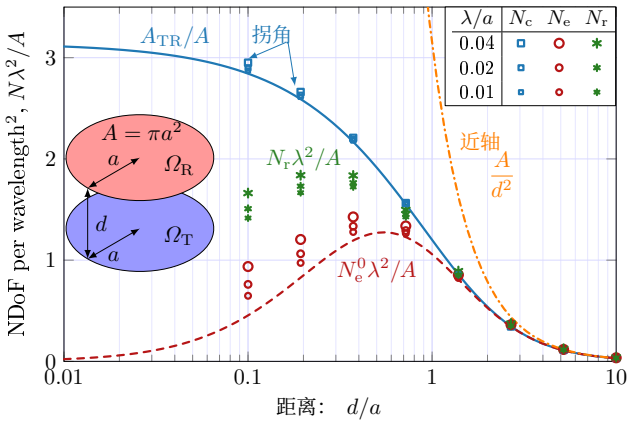


图6. 两个半径为 a 、相距 d 的圆盘的归一化自由度数。波长为 $\lambda/a \in \{0.04, 0.02, 0.01\}$ 时的数值结果以标记表示，其中方块表示角点位置 N_c，圆圈 N_e （3），星号 N_r （4）。数值结果与阴影面积的解析表达式（9）（实线）、式（ N_e （24）中的驻相渐近式（虚线）以及近轴近似（点划线）进行了比较。

类似地，可以推导出 $\mathbb{R}^2$中平行线的有效自由度的高频渐近表达式。在附录B中针对 $\lambda \to 0$推导该表达式，可得

$$N_e^0 = \frac{\ell}{\lambda}\frac{4\beta(\operatorname{asinh}\beta - \sqrt{1+\beta^{-2}} + \beta^{-1})^2}{\frac{2}{3} + \beta\operatorname{asinh}(\beta) - \sqrt{1+\beta^2} + \frac{1}{3}(1+\beta^2)^{3/2}}. \quad (21)$$

每波长对应的有效自由度 $N_e^0\lambda/\ell$ 如图 4所示（黄色虚线，标注为“二维”）。这些结果与三维（18）、互阴影长度（20）以及较大间距下的近轴近似相符，即，$d > 2\ell$。间距较小时，这些结果是所有估计值中最低的，并严重低估了拐角位置。随着波长减小，使用（ N_e 3）数值计算得到的 N_e^0趋近于

B. 两个平行平面区域

第 III-A 节中针对平行直线情形的渐近分析C附录所示，可直接推广到平行平面区域。其渐近展开的主导项 $\sum\zeta_n^2$ 为

$$\|\mathbf{H}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}}^2 \approx \frac{\lambda^2}{(4\pi)^4}\iint\frac{R^6}{d^2R^6}\,\mathrm{dS}\,\mathrm{dS}' = \frac{\lambda^2 A_{\mathrm{T}}A_{\mathrm{R}}}{(4\pi)^4 d^2}. \quad (22)$$

耦合强度归一化项为

$$\|\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}}^2 = \frac{1}{(4\pi)^2}\iint\frac{\mathrm{dS}\,\mathrm{dS}'}{(x-x')^2+(y-y')^2+d^2}. \quad (23)$$

对于矩形区域，利用（35），可将其化简为二维积分。将这些表达式代入（3），得到有效自由度的主导项

$$N_e^0 = \frac{\|\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}}^4 d^2(4\pi)^4}{\lambda^2 A_{\mathrm{T}}A_{\mathrm{R}}} \le \frac{A_{\mathrm{TR}}}{\lambda^2}, \quad (24)$$

该不等式是将柯西–施瓦茨不等式应用于耦合强度（23）后得到的，使得

$$\|\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}}^4 \le \frac{A_{\mathrm{T}}A_{\mathrm{R}}}{(4\pi)^4}\iint\frac{1}{R^4}\,\mathrm{dS}\,\mathrm{dS}' = \frac{A_{\mathrm{T}}A_{\mathrm{R}}}{(4\pi)^4}\frac{A_{\mathrm{TR}}}{d^2}. \quad (25)$$

因此，有效自由度 N_e 始终受归一化阴影面积的限制 N_a，前提是波长足够短。当 R^{-4} 项的变化可以忽略时，即，当区域之间的距离远大于其特征尺寸时（如近轴近似的情况），10）。

对于图中所示的平行同心圆盘情形，可以计算渐近表达式 6。在柱坐标中，耦合强度 (23) 化简为

$$\|\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}}^2 = \int_0^r\int_0^a \frac{\rho\rho'\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\rho'}{\sqrt{(\rho+\rho')^2+d^2}\,\sqrt{(\rho-\rho')^2+d^2}}, \quad (26)$$

可轻易通过数值计算求得。利用 (N_e^0，通过 (24) 和 (26) 计算得到的有效自由度主导项由图 6 中的虚线曲线表示。为便于比较，各数值均按 λ^2 和圆盘面积 $A = \pi a^2$ 归一化。量 N_e^0 在间距较短或较大时均较小，在中间距离处达到最大值。对于较大间距 $d > a$，它与总互阴影面积 (9) 符合良好。对于 $d > 3a$，它也与近轴近似 [29], [36] 相符。对于 $d < a$ ，观察到的显著偏差与柯西–施瓦茨不等式 (25) 一致，因为 R^{-2} 项在此区间变化显著。对于 N_e，在 $\lambda \in \{0.04, 0.02, 0.01\}a$ 条件下计算得到的数值会随着波长减小而趋近于 N_e^0，与图 4 中平行线的情形相似。此外还给出了 N_r 的数值计算结果；拐角位置在间距较大时也与之吻合。在整个范围内，拐角位置与基于阴影面积的估算结果均高度一致。

波长对应的特征谱 λ =0.01a 和间距 $d = \{0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, 3.2\}a$ 如图所示。7。计算得到的有效自由度 N_e 和有效秩 N_r 以标记表示。这里也可以观察到， $N_e \approx N_r \approx N_a$ 对于较大的间距，传播特征谱相对

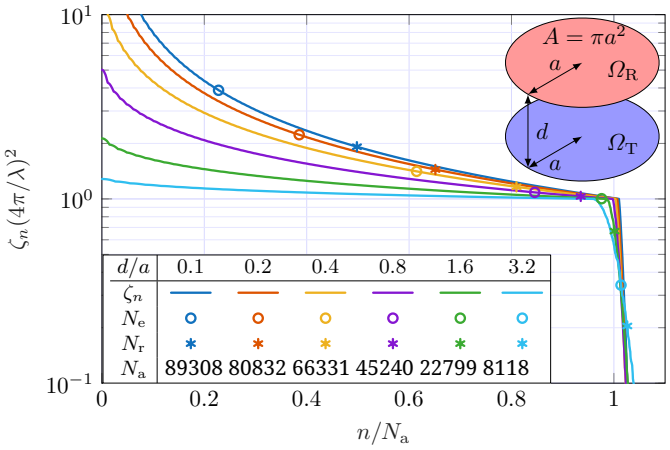


图 7. 两个半径为 a 、相距 d 且波长为 $\lambda = 10^{-2}a$ 的圆盘的特征谱，按（11）归一化。自由度数 N_e 和 N_r 由标记表示，而 N_a 根据（6）和（9）计算，参见图 6。

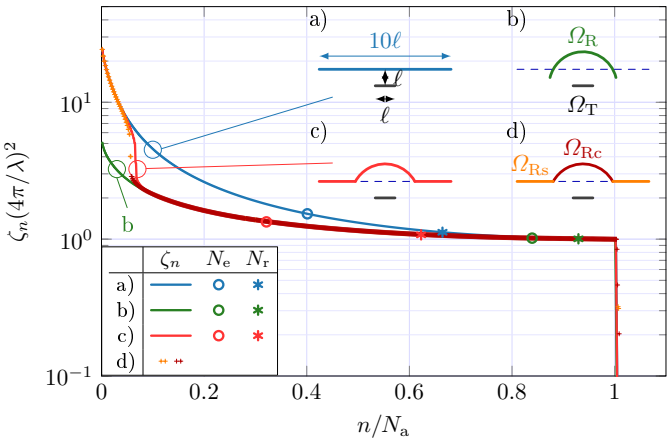


图 8. 四种配置 (a) 至 (d) 的归一化特征谱，它们具有相同的 N_a，针对 $\lambda = 0.002\ell$ 进行评估。有效自由度数 N_e 和秩自由度数 N_r 以标记表示。情形 (d) 通过将 Ω_R 分成两个独立区域 Ω_{Rc} 和 Ω_{Rs} 并在后处理中合并特征值来评估。

平坦。对于较短的间距，三个预测器的差异很大，此时传播特征谱的变化更大。

总之，对于三维中的直线和平面，以及二维情形，短波长下 N_e 与 N_a 的偏差可以通过解析方法预测，并能反映传播谱特征值的变化。

IV. 传播特征谱分布

通过其平均值（11），可以深入了解传播特征谱的行为。利用分母中被积函数的最小值和最大值对其进行界定，可得

$$\frac{1}{\max_{\hat{\boldsymbol{R}}} |\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_T|\ |\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_R|} \le \frac{(4\pi)^2\sum\zeta_n}{\lambda^2 N_a} \le \frac{1}{\min_{\hat{\boldsymbol{R}}} |\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_T|\ |\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_R|}, \quad (27)$$

其中，$\boldsymbol{R}$ 表示Ω_T 和 Ω_R中两点之间的传播方向，而 $\hat{\boldsymbol{n}}_X$ 是 Ω_X 的单位法向量。这些界限表明，传播特征谱的平均水平由发射器和 ˆ 接收器处传播方向与表面法向量之间的入射角决定。因此，$|\boldsymbol{R}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_X|$ 较小的区域可能产生较大的特征值。因此，平均水平会随着相对于正侧向的角度失配而升高；即，端射配置可能产生比正侧向配置更高的特征值。

在此背景下，值得注意的是，图 2中的情形涉及球面源和远场观测球面，具有高度对称性，是所有定向波束和观测扇区方向均匀性的极端示例，因此其谱相当平坦。同样，研究颇多、具有间隔较大的平行区域的近轴情形，角度多样性较低，谱也相对平坦。

为进一步理解传播特征谱中的变化，我们假设交互作用在电尺寸较大极限下可以近似局域化，即，整体交互作用可以分解为多个子区域对所产生的贡献。这种渐近局域化例如是某些韦尔定律推导的基础。在 [25], 传播谱（直至拐点 N_a）被证明与方向性、产生波束的孔径奇异向量相关联，这些向量在观测区域呈现局域场。

鉴于此，我们通过比较互阴影面积值相同的四种配置来考察传播特征谱，如图 8所示，横轴已归一化 n/N_a。(a) 中的两条平行线由长度为 ℓ 的发射器和长度为 10ℓ 的接收器组成，两者相距 ℓ。对于 $\lambda = 0.02\ell$，其特征谱与图 5中的等长线段情形相似：开头有少数几个特征值很大，随后直到自由度数 $n \approx N_a$，特征值强度大致相等。有效自由度数$N_e \approx 0.4N_a$ 和有效秩 $N_r \approx 0.66N_a$（如图 8 中的标记所示）位于特征谱中相对平坦的部分，离 $n = N_a$ 附近的拐点较远。将数值计算得到的特征值与式 (27) 中的估计进行比较可知，区域边缘之间出现的最倾斜传播方向给出的归一化特征值上界为 31.25 ，这与数值计算得到的归一化值吻合良好；图 8 中 ζ_1 的归一化值约为 25。

如图所示，将接收线替换为圆弧，同时保持互阴影面积不变，8b 中的情形会在拐点 $n \approx N_a$之前产生显著更平坦的特征谱。圆弧几何形状使发射器与接收器不同部分之间的距离近似相等，并使发射器产生的局域波束的传播方向近似垂直于 Ω_R ，这些波束ˆ照射这些部分，即，$\boldsymbol{R}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_R \approx 1$ 在（27）中。在 Ω_T 处的角度变化与情形 (a) 相同，因此界限约为 5。6，这与约为 ζ_1 的最大特征值 5相符。这样可以减少不同波束生成模式之间的谱变化，并得到更

均衡的分布。因此，有效自由度数$N_{\mathrm{e}} \approx 0.84N_{\mathrm{a}}$和有效秩 $N_{\mathrm{r}} \approx 0.93N_{\mathrm{a}}$都更接近渐近值 N_{a}。

图 8c 中的混合几何呈现出混合谱行为，其特征是少数占主导地位的特征值之后，紧接着一段宽广且近乎平坦的区域。具体而言，对于 $n < 0.07N_{\mathrm{a}}$，谱最初类似于配置 (a)，具有少数强模式；而对于 $n > 0.07N_{\mathrm{a}}$，则过渡到类似于配置 (b) 和 (c) 的平坦分布。这种过渡与平坦段和曲线段之间的阴影长度划分相符，即，$L_{\mathrm{TR}}/\ell \approx 0.13 + 1.83$，其中平坦部分约占总阴影长度的7%。这些观察结果也支持近似局域化视角：相互作用区域的不同部分会产生各自不同的传播谱带，并以加和的方式共同构成占主导地位的传播模式。

图 8d 中配置的谱进一步支持了局域化观察。在该图中，接收区域 Ω_{R} 被划分为平坦肩部和弧形子区域，Ω_{Rs} 以及 Ω_{Rc}。分别构建从 Ω_{T} 到各子区域的信道，并在按序合并之前分别计算其特征值。组合后的谱以黄色和红色叉形标记显示，分别表示与 Ω_{Rs} 和 Ω_{Rc}相关的特征值。这些特征值与情形 (c) 的结果高度吻合，只有细微差异，主要出现在靠近 $n \approx 0.07N_{\mathrm{a}}$的过渡区域附近。图 8 中的结果还表明，最大特征值主要与接收区域的肩部 Ω_{R}相关，该处传播角最大；而非与距离较短的中心区域相关。因此，对于传播角随相互作用而显著变化的配置，由阴影面积 N_{a}预测的自由度数，与根据 N_{e} 和N_{r} 等谱度量推断的自由度数可能不同。比较结果还表明，大角度相互作用主要决定最大特征值，而互阴影决定拐点的渐近位置。

这些观察结果与 [25]中的谱分析一致。该分析将最大的奇异值与辐射出观察者所见最大倾斜角度波束的奇异向量联系起来。对于观察者显著

宽于源的情况，如图8a 所示，波束会局限于观察者的某些区域，奇异值的变化也会增大。

最后一组示例考察了六种不同配置下的传播特征谱（见图 9 中的插图），这些配置的互阴影长度相近。这里，区域之间的距离比前一个示例更远。图 9中，星形和圆形标记分别表示 N_{e} 和 N_{r}。情形 (b) 中，两条间隔较远的平行线呈现出平坦的传播特征谱，与图 5相同。根据（11），归一化振幅为 1，这是由垂直于 Ω_{T} 和 Ω_{R} 区域的传播方向所决定的（27）。情形 (a) 和 (c) 的传播特征谱也相对平坦。不过，由于传播方向倾斜，其平均振幅更高，这与（27）一致。所有这些情形的自由度数 N_{e} 和N_{r} 都接近 $n = N_{\mathrm{a}}$附近的拐点。

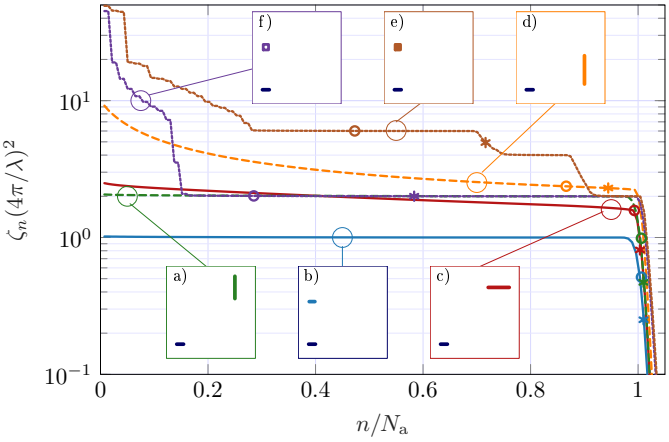


图 9. 六种不同配置的特征谱，其 $N_{\mathrm{a}} \approx 138$ 相近，针对 $\lambda = 0.001\ell$ 进行评估。对于 (bdef)，平均距离 R_0 相近；对于 (ac)，则略大。有效自由度 N_{e} 和有效秩 N_{r} 分别以圆形和星形标记表示。

情形 (d) 中，区域彼此更近，观测角度和距离的范围也呈现出更大的变化，因此特征值的变化更大，平均值也更高。由此得到的自由度数 N_{e} 和 N_{r} 现在明显低于拐角位置。

情况 (e) 和 (f) 的接收区域分别由三个内接正方形和一个方块构成。它们与情况 (b) 的可见部分相同，但向 (b) 中直线后方延伸得更远。因此，阴影面积保持不变，而由于总支撑范围更大，耦合强度有所增加，但角度多样性并未增加。不过，自由度数 N_{e} 和 N_{r} 远低于拐点，例如例如，$N_{\mathrm{e}} \approx \{0.3, 0.5\}N_{\mathrm{a}}$。

这些示例凸显了阴影面积与区域尺寸及间距之间的权衡：阴影面积决定拐点位置，而区域尺寸及间距影响模态强度。具体而言，可见区域越大，可用的传播模式数量越多。较大的区域（即使彼此并非完全可见）会提高平均模态强度。距离增加会减少传播模式的数量，并降低平均模态强度。

V. 结论

我们结合算子谱分析与基于几何的分析，提出了一个统一框架，用于量化辐射电磁系统中的空间自由度和信道强度。结果表明，互阴影（视角）面积和耦合强度这两个量能够表征传播特征值谱的主要特征。具体而言，互阴影面积决定谱角位置，而耦合强度决定传播特征值的平均水平，进而决定整体信道强度。

我们采用相关算子表述，将基于谱的NDoF度量（即有效自由度和有效秩）与根据互阴影面积得出的基于几何的估计进行了比较。分析表明，这些度量

在近轴条件下，对于简单配置，这些度量是一致的。对于更一般的几何形状，有效秩通常高于有效自由度，但二者均低于基于阴影的自由度数估计；后者与谱拐点的变化更为吻合。对二维和三维中典型的平行线及平行区域构型进行的渐近评估支持了这些发现，并阐明了近轴解释在何种情况下仍然准确。

谱度量与几何度量之间的差异，主要是由传播特征值谱内部的变异性所致。具有较大角度扩展或复杂几何结构的配置表现出更强的模态变异性，导致有效自由度和有效秩低估拐点位置。

总体而言，所提出的框架提供了物理意义明确且计算高效的工具，用于估计近场电磁信道中的模态丰富度和耦合强度。这些结果适用于天线阵列设计、电磁反问题、积分方程和高容量通信系统；在这些领域，几何结构和传播距离会显著影响性能。

附录 A 格林函数

本附录总结了第 II 节算子表述及渐近推导中使用的格林函数。 $\mathbb{R}^3$ 中的标量格林函数为

$$G_3 = \frac{\exp(-\mathrm{j}kr)}{4\pi r}, \tag{28}$$

而格林并矢为 $\mathbf{G} = (\mathbf{1} + k^{-2}\nabla\nabla)G_3$。在 $\mathbb{R}^2$中，相应的标量格林函数为

$$G_2 = \frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(2)}(kr) \approx \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{j}\pi kr}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\mathrm{j}r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{29}$$

其中 $kr \to \infty$，$\mathrm{H}_0^{(2)}$ 表示汉克尔函数。

附录B 两条平行线的推导

本附录推导了第 IV 节中使用的两条平行线的驻相近似。考虑两条长度分别为 ℓ_1 和 ℓ_2 、相距 d的平行线。驻点由以下方程的零点给出

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1'}{\sqrt{(x_2 - x_1')^2 + d^2}} - \frac{x_2 - x_2'}{\sqrt{(x_2 - x_2')^2 + d^2}} \tag{30}$$

$\frac{\partial\phi}{\partial x_2'}$ 的情况类似。对各项平方即可求解该方程组

$$(x_2 - x_1')^2((x_2 - x_2')^2 + d^2) = (x_2 - x_2')^2((x_2 - x_1')^2 + d^2) \tag{31}$$

化简后得到 $(x_2 - x_1')^2 = (x_2 - x_2')^2$ 并代入（30）

$x_2 - x_1' = x_2 - x_2'$ 和 $x_1' = x_2'$。类似地，由 $\partial\phi\partial x$还可得 $x_1 = x_2$。

^{2} 驻点处（17）的海森矩阵由下式得出 $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} = 0$ 以及混合项

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2 \partial x_2'} = \frac{R^2 - (x_1 - x_1')^2}{R^3} = \frac{d^2}{R^3}. \tag{32}$$

因此，海森矩阵为

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{d^2}{R^3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{with } |\det(\mathbf{H}_\phi)|^{1/2} = \frac{d^2}{R^3} \tag{33}$$

A. 三维中的直线

驻点处的相位为 $\phi = 0$ 因此，驻相积分（17）（$\beta = \ell/d$）

$$\lambda \iint \frac{R^3}{d^2 R^4}\,\mathrm{d}l_1\,\mathrm{d}l_1' = \frac{\lambda}{d^2}\iint \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + d^2}}\,\mathrm{d}l_1\,\mathrm{d}l_1'$$
$$= \frac{2\lambda}{\ell}(\beta^2\,\mathrm{asinh}(\beta) - \beta\sqrt{\beta^2 + 1} + \beta) \tag{34}$$

由（5）得到的耦合强度为

$$\|\mathbf{H}\|_\mathrm{F}^2 = \frac{1}{(4\pi)^2}\iint \frac{1}{(x_1 - x_1')^2 + d^2}\,\mathrm{d}l_1\,\mathrm{d}l_1'$$
$$= \frac{2\beta\,\mathrm{atan}(\beta) - \ln(1 + \beta^2)}{(4\pi)^2} \tag{35}$$

由此得到（18）中的主导渐近项。

B. 二维中的直线

二维中的格林函数（29）与三维中的渐近相位相同，$kr \to \infty$ 仅振幅衰减较慢。因此，其驻点与（28）中的三维格林函数相同，海森矩阵也相同（33）。驻相积分（$\beta = \ell/d$）

$$\lambda \iint \frac{R^3}{d^2 R^2}\,\mathrm{d}l_1\,\mathrm{d}l_1' = \frac{\lambda}{d^2}\iint \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + d^2}\,\mathrm{d}l_1\,\mathrm{d}l_1'$$
$$= \frac{2}{3} + \beta\,\mathrm{asinh}(\beta) - \sqrt{1 + \beta^2} + \frac{1}{3}(1 + \beta^2)^{3/2}. \tag{36}$$

采用耦合强度（5）进行归一化后，

$$\|\mathbf{H}\|_\mathrm{F}^2 = \iint \frac{1}{((x_1 - x_1')^2 + d^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}\ell_1\,\mathrm{d}l_1'$$
$$= \mathrm{asinh}\,\beta - \sqrt{1 + \beta^{-2}} + \beta^{-1} \tag{37}$$

得到代入有效自由度数表达式（21）中的渐近比值，因此得到与三维线情形相同的线性于ℓ/λ 的缩放，几何因子为 β 。

附录C 两个平行区域的推导

本附录概述了第VI节中用于两个平行区域的驻相海森矩阵结构。驻点与线情形（30）–（33）中的情况类似。对于海森矩阵，对角项与线情形一样为零，$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} = 0$。混合 x_2 和 x_2' 项为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2 \partial x_2'} = \frac{1}{R} - \frac{(x_1 - x_1')^2}{R^3} = \frac{d^2 + (y_1 - y_1')^2}{R^3}. \tag{38}$$

我们还需要混合 xy 阶导数

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y_2 \partial x_2'} = \frac{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1')}{R^3} - \frac{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1')}{R^3} = 0 \tag{39}$$

and

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y_2'\partial x_2'} = \frac{(x_1-x_1')(y_1-y_1')}{R^3}. \tag{40}$$

因此，式（17）中的海森矩阵为

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{1}{R^3}\begin{bmatrix} 0 & d^2+y^2 & 0 & xy \\ d^2+y^2 & 0 & xy & 0 \\ 0 & xy & 0 & d^2+x^2 \\ xy & 0 & d^2+x^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{41}$$

其行列式为 $|\det(\mathbf{H}_\phi)|^{1/2} = d^2R^{-4}$。

参考文献

[1]M. Cui、Z. Wu、Y. Lu、X. Wei 和 L. Dai，“面向 6G 的近场 MIMO 通信：基础、挑战、潜力与未来方向”，IEEE Communications Magazine，第 61 卷，2022 年，第 40–46 页。[2] R. Ji、S. Chen、C. Huang、J. Yang、E. Wei、Z. Zhang、C. Yuen 和 M. Debbah，“利用倏逝波提升近场全息 MIMO 通信的额外自由度”，IEEE Wirel. Commun. Le.，第 12 卷，第 4 期，第 580–584 页，2023 年。[3] J. C. Ruiz-Sicilia、M. Di Renzo、M. D. Migliore、M. Debbah 和 H. V. Poor，“关于视距全息 MIMO 通信的自由度与特征函数”，arXiv 预印本 arXiv:2308 08009，2023 年。[4] E. Bj¨ornson、C.-B. Chae、R. W. Heath Jr、T. L. Marzetta、A. Mezghani、L. Sanguinetti、F. Rusek、M. R. Castellanos、D. Jun 和 ¨O. T. Demir，“迈向 6G MIMO：大规模空间复用、密集阵列以及电磁学与信号处理之间的相互作用”，arXiv 预印本 arXiv:2401.02844，2024 年。[5] M. A. Maisto、R. Pierri 和 R. Solimene，“平面源重建中的近场横向分辨率”，IEEE《天线与传播汇刊》，第 69 卷，第 8 期，第 4836–4845 页，2021 年。[6] S. Hu、F. Rusek 和 O. Edfors，“超越大规模 MIMO：利用大型智能表面进行数据传输的潜力”，IEEE《天线与传播汇刊》，第 66 卷，第 10 期，第 2746–2758 页，2018 年。[7] F. Puggelli、B. Biscontini、E. Martini 和 S. Maci，“通过电磁自由度最大化 BTS 阵列天线中的独立信道数与效率”，IEEE《天线与传播汇刊》，第 73 卷，第 6 期，第 3444–3458 页，2025 年。[8] O. M. Bucci 和 G. Franceschetti，“关于散射场的自由度”，IEEE《天线与传播汇刊》，第 37 卷，第 7 期，第 918–926 页，1989 年。[9] A. S. Poon 、 R. W. Brodersen 和 D. N. Tse，“多天线信道中的自由度：一种信号空间方法”，IEEE《信息论汇刊》，第 51 卷，第 2 期，第 523–536 页，2005 年。[10] M. D. Migliore，“论场的自由度数量在 MIMO 信道中的作用”，IEEE《天线与传播汇刊》，第 54 卷，第 2 期，第 620–628 页，2006 年 2 月。[11] ——，“论电磁学与信息论”，IEEE《天线与传播汇刊》，第 56 卷，第 10 期，第 3188–3200 页，2008 年 10 月。[12] M. Franceschetti，“关于 Landau 特征值定理与信息截集”，IEEE《信息论汇刊》，第 61 卷，第 9 期，第 5042–5051 页，2015 年。[13] ——，《信息波动理论》。剑桥大学出版社，2017 年。[14] O. M. Bucci 和 M. D. Migliore，“电磁场的自由度与采样表示：概念与应用”，IEEE Antennas Propag. Mag.，第 67 卷，第 3 期，第 10–22 页，2025 年。[15] D. Dardari，“与大型智能表面通信：基本极限与模型”，IEEE J. Sel. Areas Commun.，第 38 卷，第 11 期，第 2526–2537 页，2020 年。[16] M. Gustafsson，“辐射系统的自由度”，IEEE《天线与传播汇刊》，第 73 卷，第 2 期，第 1028–1038 页，2025 年。[17] ——，“自由空间通信中的阴影面积与自由度”，IEEE J. Sel. Areas Inf. Theory.，第 6 卷，2025 年。[18] M. A. Jensen 和 J. W. Wallace，“连续空间电磁信道的容量”，IEEE《天线与传播汇刊》，第 56 卷，第 2 期，第 524–531 页，2008 年。[19] S. Nordebo、M. Gustafsson 和 G. Kristensson，“关于自由空间天线信道的容量”，载于 IEEE 天线与传播学会国际研讨会论文集。IEEE Press，2006 年，第 3105–3108 页。[20] S. C. Creagh、V. Blakaj 和 G. Gradoni，“多径环境中全息表面之间的通信”，IEEE《天线与传播汇刊》，第 73 卷，第 1 期，第 453–468 页，2025 年。

[21]R. Ozzola、D. Cavallo、A. Freni、N. Llombart 和 A. Neto，“给定体积平台上独立视距链路数量的基准”，IEEE《天线与传播汇刊》，第 70 卷，第 12 期，第 12 071–12 080 页，2022 年。[22] A. F. Molisch，《无线通信》，第 2 版。纽约，NY：John Wiley & Sons，2011 年。[23] H. Weyl，“关于特征值的渐近分布”，《哥廷根科学学会学报》，数学与物理学部，第 2 卷，第 110–117 页，1911 年。[24] W. Arendt、R. Nittka、W. Peter 和 F. Steiner，《韦尔定律：数学与物理学中的拉普拉斯算子谱性质》。John Wiley & Sons, Ltd，2009 年，第 1 章，第 1–71 页。[25] Y. Brick、F. P. Andriulli 和 M. Gustafsson，“利用互阴影面积解读矩阵块谱”，arXiv 预印本 arXiv:2601.17965，2026 年。[26] S. S. Yuan、Z. He、X. Chen、C. Huang 和 E. Wei，“自由空间中 MIMO 系统的电磁有效自由度”，IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.，第 21 卷，第 3 期，第 446–450 页，2022 年。[27] D.-S. Shiu、G. J. Foschini、M. J. Gans 和 J. M. Kahn，“衰落相关性及其对多单元天线系统容量的影响”，IEEE《通信汇刊》，第 48 卷，第 3 期，第 502–513 页，2000 年 3 月。[28] O. Roy 和 M. Vetterli，“有效秩：有效维数的一种度量”，载于第 15 届欧洲信号处理会议。IEEE，2007 年，第 606–610 页。[29] D. A. Miller，“波、模式、通信与光学：教程”，《光学与光子学进展》，第 11 卷，第 3 期，第 679–825 页，2019 年。[30] R. Soli mene、M. A. Maisto 和 R. Pierri，“近场逆源问题：条带电流的情形”，《美国光学学会杂志 A》，第 35 卷，第 5 期，第 755–763 页，2018 年。[31] ——，“辐射算子奇异系统计算的采样方法”，《美国光学学会杂志 A》，第 36 卷，第 3 期，第 353–361 页，2019 年。[32] Z. Kuang、D. A. Miller 和 O. D. Miller，“通信信道耦合强度及其信息容量的界限”，IEEE《天线与传播汇刊》，第 73 卷，第 6 期，第 3959–3974 页，2025 年。[33] L. J. Chu，“全向天线的物理限制”，《应用物理学杂志》，第 19 卷，第 1163–1175 页，1948 年。[34] R. F. Harrington，“天线尺寸对增益、带宽和效率的影响”，《美国国家标准局研究杂志——无线电传播》，第 64D 卷，第 1–12 页，1960 年 1—2 月。[35] R. Solimene、M. A. Maisto、G. Romeo 和 R. Pierri，“多重扩展观测域下辐射算子的奇异谱”，《国际天线与传播杂志》，第 2013 卷，第 1 期，第 585238 页，2013 年。[36] R. Piestun 和 D. A. Miller，“光学系统的电磁自由度”，《美国光学学会杂志 A》，第 17 卷，第 5 期，第 892–902 页，2000 年。[37] P. C. Hansen，《离散逆问题：洞见与算法》。工业与应用数学学会，2010 年，第 7 卷。[38] J. Welty、G. L. Rorrer 和 D. G. Foster，《动量、热量与质量传递基础》。John Wiley & Sons，2020 年。[39] J. R. Howell 和 M. P. Meng¨uc，“辐射传热构形因子目录：常见几何形状关系一览”，《定量光谱学与辐射传热杂志》，第 112 卷，第 5 期，第 910–912 页，2011 年。[40] R. F. Harrington，《时谐电磁场》。纽约，NY：麦格劳-希尔，1961 年。[41] O. M. Bucci 和 T. Isernia，“电磁逆散射：可恢复信息与测量策略”，《无线电科学》，第 32 卷，第 6 期，第 2123–2137 页，1997 年。[42] N. Bleistein 和 R. A. Handelsman，《积分的渐近展开》。纽约，NY：多佛出版社，1986 年。