arXiv:2603.28756v1 [cs.MS] 30 Mar 2026

通过利用数学结构、分层优化、智能初始化和分布式 GPU 计算实现快速大规模基于模型的迭代断层成像

Dinesh Kumar 和 Jeffrey J. Donatelli，能源研究应用高级数学中心，应用数学与计算研究部，劳伦斯伯克利国家实验室，美国加利福尼亚州伯克利

摘要

基于模型的迭代重建（MBIR）非常重要，因为直接方法（如滤波反投影（FBP））会在稀疏角度断层成像中引入显著的噪声和伪影，尤其是在处理时变样品时。尽管 MBIR 通过先验信息引导的优化能够生成高质量的重建结果，但其计算成本一直限制着更广泛的应用。在先前的工作中，我们通过使用非均匀快速傅里叶变换（NUFFTs）表示拉东变换及其伴随算子，解决了这一限制；与传统的基于投影的方法相比，这降低了计算复杂度。我们进一步采用多 GPU 系统进行并行处理，从而加快了计算速度。

在本研究中，我们进一步加速了 Fourier 域框架，提出了四项主要策略：(1) 重新构造 MBIR 的前向算子和伴随算子，利用其多层托普利兹结构实现高效的 Fourier 域计算；(2) 改进初始化策略，使用经过标准斜坡滤波器滤波的反投影数据作为初始估计；(3) 采用分层多分辨率重建方法，先在粗网格上求解问题，再通过 Lanczos 插值逐步过渡到更细的网格；(4) 使用 MPI 的分布式内存实现，使其能够在大型高性能计算（HPC）系统上实现近线性扩展。

这些创新共同显著减少了迭代次数，提高了并行效率，使高质量 MBIR 重建能够实际应用于大规模断层成像。这些进展为近实时 MBIR 应用于原位、工作状态下及随时间演变的实验等场景铺平了道路。

1 引言

同步辐射微米与纳米计算机断层成像（微米 CT 和纳米 CT） [14, 18, 6] 已成为材料科学、地球科学和能源研究等众多科学领域不可或缺的工具。这些技术能够以高空间分辨率对材料内部结构进行无损三维成像。近年来，同步辐射仪器和探测器技术不断进步，大幅提升了采集速度，从而实现了时间分辨断层成像等新的实验模式。

时间分辨断层成像使研究人员能够观察材料内部微观结构过程的演变。例如，机械应力作用下的裂纹扩展 [13], 电池运行期间聚合物电解质的降解 [11],以及多孔介质中的流体输运 [1]。捕捉这些动态过程需要快速采集投影数据，且通常受到严格的剂量或

时间限制。因此，采集到的数据集往往角度采样有限、测量噪声增加，使得准确的图像重建极具挑战性。层析成像是另一种可受益于 MBIR 的应用；由于样品几何结构的限制，其本质上属于有限角度成像，并存在缺失楔 [15]。

基于模型的迭代重建（MBIR）已成为应对这些挑战的强大框架。通过在重建过程中融入先验知识和精确的物理模型，与传统解析方法相比，MBIR 能够从含噪或不完整数据中生成质量更高的重建结果 [20, 16, 12]。然而，这些优势的代价是巨大的计算开销。传统 MBIR 实现依赖射线追踪方法来计算正向与伴随投影算子，因此在大规模或时间分辨断层成像实验中，重建速度慢到难以接受。

为解决这一局限，TomoCAM 框架 [12] 被开发为用于断层重建的 GPU 加速平台。TomoCAM 使用非均匀快速傅里叶变换（非均匀快速傅里叶变换）[9, 4],实现拉东变换及其伴随算子，与传统射线追踪方法相比，显著加快了计算速度。此外，该框架利用多GPU架构并行执行重建过程，从而能够更高效地处理大型数据集。

在这项工作中，我们提出了几种策略，进一步提升 TomoCAM 框架的性能和可扩展性。本文的主要贡献如下:

- 通过利用多层托普利兹结构重新表述梯度算子，从而能够使用基于 FFT 的快速卷积。
- 一种分层多分辨率优化策略，通过逐步细化重建网格加速收敛。
- 一种基于滤波反投影的初始化方法，可显著减少达到收敛所需的迭代次数。
- 一种混合分布式MPI与多图形处理器实现，可在现代高性能计算系统上进行大规模断层重建。

代码依据开源许可证发布，地址为 https://github.com/lbl-camera/tomocam。

2 理论与数学背景

断层重建本质上基于对拉东变换的求逆。我们在此简要回顾相关数学背景，并请读者参阅标准教材以了解更多细节 [3,10]。设 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$。 f 的拉东变换定义为线积分

$$R_\theta f(t) = \int_{\ell(t,\theta)} f(x,y) d\ell \tag{1}$$

其中， $\ell(t,\ \theta)$表示由偏移量 t 和投影角度 θ参数化的直线。拉东变换与中心切片定理密切相关。该定理指出，在角度 θ 采集的投影的一维傅里叶变换，对应于物体 $f(x,\ y)$的二维傅里叶变换中以相同角度 θ截取的一个切片，即

$$\mathbb{F}R f(\omega) = \hat{f}(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta) \tag{2}$$

其中， f 是 f的二维傅里叶变换，且$(\omega\cos\theta,\ \omega\sin\theta)\ = (k_x,\ k_y)$为傅里叶域坐标。

传统的迭代断层重建方法通常依赖于反复应用正向投影和反投影算子，这些算子可解释为大型隐式线性系统。在先前的工作 [12], 中，我们使用非均匀快速傅里叶变换（NUFFTs）实现了这些算子，将计算复杂度从 $O(N^2)$降低到 $O(N\log N + M\log_{10}\epsilon^{-1})$，其中 N表示目标重建中的体素数， M 表示投影数据中的像素总数， ϵ表示所需的数值精度。

正向投影，即 Radon 变换的输出，可计算为

$$Rf = \mathbb{F}^{-1}\mathcal{F}f, \tag{3}$$

其中， $\mathcal{F}$ 表示 NUFFT 类型-2 操作，它将物体域中的笛卡尔网格映射到傅里叶域中的极坐标网格； $\mathbb{F}^{-1}$ 表示沿径向对给定投影角度应用的一维逆快速傅里叶变换。类似地，伴随操作通常称为反投影，可表示为

$$R^*g = \mathcal{F}^*\mathbb{F}g, \tag{4}$$

其中， $\mathcal{F}^*$ 表示 NUFFT 类型-1 操作，它将傅里叶域中的极坐标网格映射回物体域中的笛卡尔网格； $\mathbb{F}$ 表示沿径向的一维快速傅里叶变换。

当投影数据不满足角向 Shannon-Nyquist 准则时，需要进行正则化 Φ 。此时，断层重建问题可表述为以下优化问题:

$$\hat{f} = \arg\min_f \frac{1}{2}\|Rf - g\|_2^2 + \lambda\Phi(|\nabla f|). \tag{5}$$

这里， g 表示测量投影数据， Φ是用于施加先验知识的正则化函数， λ 是用于平衡数据保真度与正则化的正则化参数。TomoCAM 对 Φ采用保边 qGGMRF 先验；详情请参阅 [20, 16]。对式（5）求导即可得到迭代步骤的公式，即

$$f^{k+1} = f^k - \frac{1}{L}\left(R^*(Rf - g) - \lambda\nabla\Phi(|\nabla f|)\right), \tag{6}$$

其中， L 是梯度的利普希茨常数。

值得注意的是，对于三维重建，基于 Radon 变换的数据保真项按切片计算，而 qGGMRF 先验则在整个三维体积中施加空间耦合。该优化问题可通过多种迭代算法求解。本文采用带重启的快速迭代方法 [7], ，这是 Nesterov 方法的一种加速变体 [17], ，因其在大规模问题中具有良好的收敛特性。

在以下各节中，我们将介绍几种新实现的策略，以进一步提高该框架的收敛速度和计算效率。

2.1 托普利兹结构的利用

求解式 (5) 时的主要计算瓶颈来自梯度计算过程中反复计算式 (6) 中的 $R^*(Rf-g)$。每次计算都需要进行两次非均匀快速傅里叶变换。虽然非均匀快速傅里叶变换的复杂度为对数线性，但利用算子复合 R^*R 的 Toeplitz 结构，还可以进一步加速梯度计算。具体而言，这种复合可以表示为 f 与点扩散函数核 K 之间的卷积，该核取决于傅里叶空间中采样的坐标。

尽管托普利兹加速已应用于 MRI 重建 [5, 19] 和冷冻电子显微镜 [21], ，但其在基于 NUFFT 的断层成像公式中的应用仍鲜有研究。这一发现使得可以通过基于 FFT 的卷积来计算数据保真度梯度。

数据保真度梯度为

$$\nabla_f e = R^*(Rf - g) = R^*Rf - R^*g. \tag{7}$$

在 (7) 中，我们可以改写为

$$R^*Rf = K \circledast f, \tag{8}$$

其中 $\circledast$ 表示卷积。

PSF 核 K 可以通过将 $\mathcal{F}^*$ 应用于函数**1**来预先计算，其中$\mathbf{1}(x,y) = 1$ ，适用于在傅里叶空间中采样的所有 (x,y)。为准确恢复 R^*Rf，必须在更大的网格上对 PSF 核 K进行采样，每个维度至少包含 $2N-1$ 个网格点。因此，计算梯度时，将 f在每个维度上零填充至大小 $2N-1$ ，并将所得卷积限制在一个 $N \times N$区域内。随后即可使用快速傅里叶变换高效地计算该卷积:

$$R^*Rf = Res_{N\times N}(\mathbb{F}^{-1}\left(\mathbb{F}K \odot \mathbb{F}Pad_{2N-1\times 2N-1}f\right), \tag{9}$$

其中， $\mathbb{F}$表示二维快速傅里叶变换， Res 表示限制， Pad 表示扩展，$\odot$表示逐元素乘法。重新表述的

损失和梯度方程如下：

$$e = \frac{1}{2} f^{\intercal} K \circledast f - f^{\intercal} R^{*} g + \frac{1}{2} g^{\intercal} g \tag{10}$$

$$\nabla_f e = K \circledast f - R^{*} g \tag{11}$$

$\mathbb{F}K$ 和 $R^{*}g$ 均在迭代重建之前计算一次。这种改写显著降低了数据保真项梯度和损失的计算成本，因为只需进行两次快速傅里叶变换和一次逐元素乘法，而无需进行一次正向投影和一次反投影。

2.2 初始化策略

初始化的选择会显著影响迭代重建算法的收敛。从较差的初始估计开始优化，算法可能需要经过许多次迭代才能接近有意义的解。为缓解这一问题，我们采用基于滤波反投影（FBP）的信息化初始化策略，该策略能够根据测量投影数据 [3, 10]快速获得近似重建结果。

设 g 表示测量投影数据， R 表示前向投影算子。将伴随算子 R^{*} 应用于投影数据，即可快速获得初始估计。然而，由于拉东变换的频率响应，未经滤波的反投影会产生模糊的物体。为补偿这一影响，反投影 [8]之前，先使用斜坡滤波器对投影数据进行滤波。

令 $p_\theta(s)$ 表示角度为 θ 、正弦图坐标为 s 的投影。滤波后的投影计算如下：

$$\tilde{p}_\theta(s) = (h \circledast p_\theta)(s), \tag{12}$$

其中， $\circledast$ 表示卷积， $h(s)$ 是斜坡滤波器核。在傅里叶域中，斜坡滤波器定义为：

$$\hat{h}(\omega) = |\omega|, \tag{13}$$

该方法会放大高频分量，以补偿投影过程引入的平滑效应。

然后使用滤波反投影获得初始猜测值

$$f_0 = R^{*} \tilde{g}, \tag{14}$$

其中， $\tilde{g}$ 表示滤波后投影的集合。这种初始化以较低的计算成本近似真实解。

尽管滤波反投影重建可能会因有限角度采样或测量噪声而产生伪影，但通常能够捕捉底层图像的主要低频结构。因此，它可以作为迭代优化的有效起点。通过使用 f_0 初始化重建，算法从更接近目标解的位置开始，从而减少达到收敛所需的迭代次数，并降低总体计算成本。

2.3 分层多分辨率重建

为加快收敛，我们采用分层多分辨率重建策略。我们不直接在目标分辨率下求解逆问题，而是逐步在一系列空间分辨率不断提高的网格上进行重建。这种方法利用了一个观察结果：在重建初期，解的低频分量占主导地位，并且可以在较粗的网格上以显著较低的计算成本可靠地估计。

我们定义一个网格层次结构 $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_L$，其中 Ω_0 对应最粗的离散化，Ω_L 对应所需的重建分辨率。在每一层 l，式（5）中的优化问题变为

$$f^{(l)} = \arg\min_{f} \ \frac{1}{2} \| R_{(l)} f - g_{(l)} \|_2^2 + \lambda \Phi(|\nabla f|), \tag{15}$$

其中， $R_{(l)}$ 表示定义在网格 Ω_l上的前向算子，$g_{(l)}$ 表示经过降采样以匹配该分辨率的投影数据。降采样时，我们通过对全分辨率投影数据进行子采样来选取粗网格点。

首先在最粗网格 Ω_0，上进行优化，得到估计值 $f^{(0)}$。在该层级收敛后，使用 Lanczos 插值将解插值到下一个更精细的网格。Lanczos 插值基于加窗 sinc 核，能够在抑制振铃伪影的同时实现高质量的带限插值。

令 P_l 表示将网格 Ω_l 映射到 Ω_{l+1} 的插值算子。下一层级的初始化为 $f_0^{(l+1)} = P_l f^{(l)}$。窗口参数为 a 的 Lanczos 核定义为

$$L(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)\,\sin(\pi a x)}{a\pi^2 x^2}, & |x| < a, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{16}$$

在实际应用中，插值算子 P_l 通过与可分离 Lanczos 核进行卷积来实现。对于离散信号 $f[i]$，位置 x 处的插值结果为

$$\tilde{f}(x) = \sum_i f[i]\, L(x - i). \tag{17}$$

对于多维重建，插值沿各个空间维度分别进行。Lanczos 窗将 sinc 核截断为有限支撑 $|x| < a$，从而限制计算成本，同时保留理想 sinc 插值的大部分频谱特性。在我们的实现中，采用固定窗口大小 $a = 3$，在插值精度与计算效率之间取得了良好的平衡。

随后，以 $f_0^{(l+1)}$ 为初始估计，在 Ω_{l+1} 上求解优化问题，以进一步细化重建结果。重复这一由粗到细过程，直至达到最精细的网格 Ω_L。

这种分层策略通过在粗网格上恢复大尺度结构来加速收敛，因为此时未知数较少，优化景观也更平滑。因此，插值后的解可为后续层级提供高质量的初始化，使更精细网格上的优化主要聚焦于恢复高频细节。由此，在最精细分辨率下，只需显著减少迭代次数即可获得高质量重建。

2.4 分布式多图形处理器实现

为处理大规模断层成像数据集并加快计算，重建框架采用混合并行架构实现，将分布式内存并行与GPU加速相结合。节点间通信通过消息传递接口（MPI）处理，而每个节点内的图形处理器则通过共享内存并行进行协调。该设计将计算负载和内存占用分配到多个图形处理器上，同时确保高效计算迭代重建算法所需的梯度和正则化项。

沿断层成像几何的旋转轴对重建体积进行分区。首先将计算域划分给各个 MPI 进程（计算节点），然后每个节点再将分配给自己的子体积分配给该节点上的图形处理器。这种分层划分方式能够在节点和图形处理器两个层面实现高效扩展。

数据保真度梯度仅取决于本地体积分区，因此相邻进程之间无需进行点对点通信。相比之下，本研究采用的 qGGMRF 先验依赖于每个体素与三维空间中其 26 个最近邻之间的相互作用。因此，每次迭代期间都必须在相邻子体积之间交换边界信息。为此，每个分区都维护一个晕圈区域，用于存储来自相邻进程的边界体素。每次迭代后，通过 MPI 通信更新晕圈区域，以确保在分区边界处一致地计算正则化梯度。

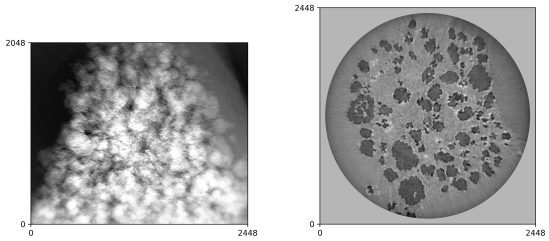
在每个计算节点内，我们使用轻量级调度系统来协调 GPU执行，该系统旨在使数据传输与 GPU计算重叠进行。调度器由三个协同工作的线程组成，并通过线程安全工作队列相连。第一个线程将输入数据从主机内存传输到图形处理器内存，并将相应的工作项放入有界工作队列。第二个线程从该队列中取出任务并

执行相应的 GPU内核。已完成的任务会放入出队列，第三个线程再从图形处理器内存异步地将结果传回主机内存。

由此得到的混合 MPI–GPU 框架可在现代多 GPU高性能计算系统上高效扩展，使得重建大型体数据集成为可能，否则这些数据集将超出单个设备的内存容量。通过结合分布式计算、共享内存并行和图形处理器加速，所提出的实现使高质量的基于模型的迭代重建（MBIR）能够应用于大规模断层成像。

3 数值基准测试

我们使用一个稀疏采样的纳米 CT 实验数据集评估所提出方法的性能。该数据集发布于 TomoBank 数据仓库 [2], ，包含 212 个投影，探测器尺寸为 2048×2448 像素；见图 1。基准测试旨在评估该方法的四个关键方面：(i) 前向算子和伴随算子的计算效率，(ii) 初始化策略的影响，(iii) 多分辨率重建方案的有效性，以及 (iv) 分布式 HPC 实现的可扩展性。



(a) (b)

图 1：基准测试使用了来自 Tomobank 的纳米 CT 投影数据。(a) 断层图中的一幅投影图像。(b) 使用 MBIR 重建的体数据切片。

3.1 前向算子和伴随算子的托普利兹加速

前向算子和伴随算子的性能对基于模型的迭代重建至关重要，因为这些算子占据了每次迭代的主要计算成本。我们比较了该算子的两种实现方式：一种是直接方法，使用 $\|Rf-g\|_2$ 和 R^*（$Rf-g$）分别计算损失和梯度；另一种是利用多层托普利兹结构（10）和（11）重新推导出的算子。比较覆盖了逐渐增大的图像宽度。

图 2 展示了计算梯度和损失的运行时间。优化后的实现持续缩短计算时间，同时保持较高的数值精度。在所有测试的图像尺寸下，两种实现之间的相对差异都很小，这表明加速后的算子保留了原方法的精度。随着图像尺寸增大，误差似乎有所增加，这是因为需要累加更多数值而产生的浮点累积效应；不过，最大偏差仍在 10^{-6} 的单精度（32 位）机器精度范围内，因此在实际应用中可以忽略。总体而言，这些结果表明，优化后的算子显著提升了性能，同时没有损害重建保真度。

3.2 初始化的影响

接下来，我们评估所提出的滤波反投影（FBP）初始化与常数初始化相比的效果。图 3 显示了两种方法的数据保真项 $\|Rf-g\|_2$ 随迭代次数的变化。

FBP 初始化一开始的残差就显著更低，并且在整个优化过程中始终保持优势。这是因为 FBP 估计捕捉到了物体的主要低频结构，使迭代求解器更接近最优解。因此，与常数初始化相比，重建算法只需更少的迭代次数即可达到相同的残差水平。基于 FBP 的初始化显著降低了初始残差。

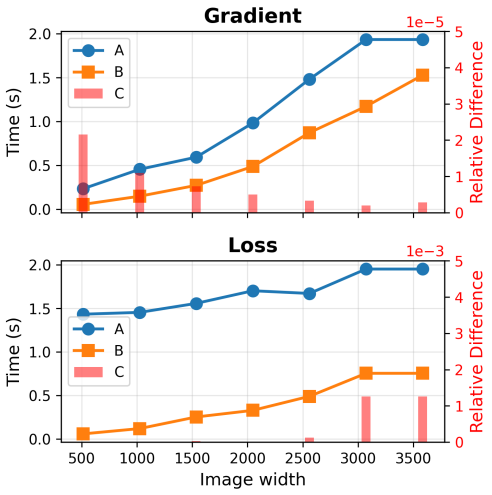


图 2：直接方法（A）与基于托普利兹的方法（B）在梯度和损失计算上的运行时间比较，以及两种方法之间的相对差异（C）随图像宽度的变化。经过优化的托普利兹实现始终能减少计算时间，同时保持较高的数值精度。左侧 y 轴表示运行时间，右侧 y 轴表示直接方法与基于托普利兹的方法之间的相对差异。

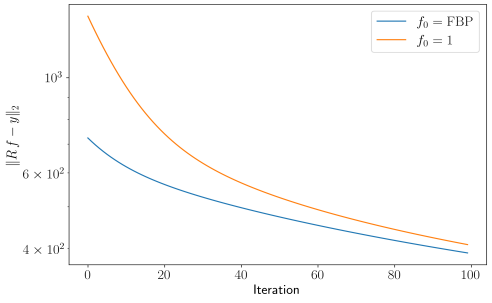


图 3：与常数初始化相比，初始残差约**低一半**，从而有效减少**20–25 次迭代**的优化工作量。

3.3 分层多分辨率重建

现在，我们评估分层多分辨率重建策略的影响。虽然上一小节所述的滤波反投影（FBP）初始化自然适合作为粗网格的有效起点，但在本实验中，我们有意禁用该初始化，以独立研究分层重建策略的效果。

图 4 比较了所提出的由粗到细方法与单分辨率优化的收敛情况。重建从（611 × 611）的粗网格开始，在较低的计算成本下高效恢复大尺度结构。随后，将解插值到逐渐变细的网格上，每个阶段的分辨率均提高 2 倍，从而为后续优化提供更好的初始化。如图 4 所示，该策略大幅减少了在最高分辨率下所需的迭代次数。尽管不同数据集上的实际性能提升可能有所不同，但在本例中，总运行时间约缩短至原来的五分之一。因此，由粗到细的方案在减少总体计算工作量的同时改善了收敛。

3.4 分布式高性能计算性能

最后，我们评估了该分布式实现于国家能源研究科学计算中心（NERSC）的 Perlmutter 超级计算机上的可扩展性。本实验中的重建体积大小为 $2048 \times 2447 \times 2447$ 个体素。

图 5 展示了重建时间随计算节点数量变化的情况。结果表明，随着节点数量从 16 个增加到 128 个，系统实现了良好的扩展性。总重建时间从使用 16 个节点时的约 30 分钟降至使用 128 个节点时的不足 9 分钟。这些结果证实，分布式消息传递接口实现能够有效利用多个图形处理器，同时将通信开销控制在可接受范围内。因此，所提出的框架能够在现代高性能计算系统上高效重建大型体数据集。

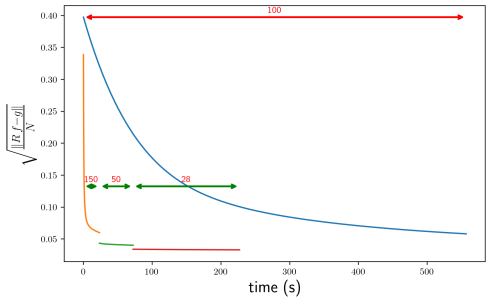


图 4：多分辨率重建策略的收敛行为。由粗到细的方法通过在每个细化阶段提供更好的初始估计，降低了最高分辨率下的计算成本。本例使用三个分层网格级别，从大小为 $(N/4 \times N/4)$ 的网格开始，每个阶段将分辨率提高一倍。箭头旁的数字表示各分辨率下的迭代次数。

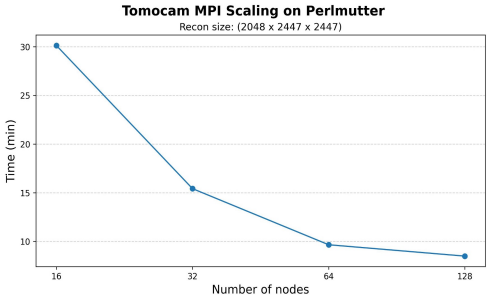


图 5：在国家能源研究科学计算中心的 Perlmutter 超级计算机上，针对大小为 $2048 \times 2447 \times 2447$ 的重建体积，分布式 MPI 实现的性能。

4 结论

我们提出了一种用于大规模基于模型的迭代重建（MBIR）的高效框架。通过利用拉东变换及其伴随算子的多层托普利兹结构，我们重新表述了数据保真项，从而显著提升了计算性能。为进一步加快收敛速度，我们引入了一种智能初始化一种基于滤波反投影和分层多分辨率策略的优化方法。该方法在优化过程早期捕捉物体的低频结构，从而实现更快、更稳定的收敛。我们还开发了分布式多图形处理器实现，沿旋转轴对体积进行分区，并通过光环交换高效管理节点间的图形处理器间通信。

数值实验结果表明，对于大型体积数据集，所提出的策略在保持重建质量的同时显著加快了重建速度。这些结果凸显了结合算子高效形式、分层优化和分布式计算来实现下一代断层重建的实际可行性。所提出的框架为在原位、工作状态下以及随时间演变的实验等应用中实现近实时 MBIR 开辟了道路。

5 致谢

本研究得到能源研究应用高级数学中心（CAMERA）的支持，该中心由美国能源部（DOE）科学办公室的先进科学计算研究（ASCR）和基础能源科学（BES）计划资助；本研究还得到美国能源部先进科学计算研究早期职业研究计划的支持，合同编号为 DE-AC02-05CH11231。

参考文献

[1] R. Boutchko、V. L. Rayz、N. T. Vandehey、J. P. O'Neil、T. F. Budinger、P. S. Nico、J. L. Druhan、D. A. Saloner、G. T. Gullberg 和 W. W. Moses。利用临床核发射断层成像系统和计算流体力学对多孔介质中的流动进行成像和建模。*J Appl Geophy*，76：74–81，2012年1月。

[2]F. D. Carlo、D. G¨ursoy、D. J. Ching、K. J. Batenburg、W. Ludwig、L. Mancini、F. Marone、R. Mokso、D. M. Pelt、J. Sijbers 和 M. Rivers。TomoBank：计算X射线科学的断层成像数据存储库

。《Measurement Sci- ence and Technology》，29(3):034004，2018年2月。[3] C. L. Epstein。《医学成像数学导论（第二版）》。第二版，2007年。[4] J. Fessler 和 B. Sutton。使用极小极大插值的非均匀快速傅里叶变换。《IEEE汇刊信号处理》，51:560–574，2003年3月。[5] J. A. Fessler。关于用于非笛卡尔MRI的基于NUFFT的网格化。《磁共振杂志》，188(2):191–195，2007年。[6] M. Ge、D. S. Coburn、E. Nazaretski、W. Xu、K. Gofron、H. Xu、Z. Yin 和 W.-K. Lee。使用硬X射线全场透射显微镜进行一分钟纳米断层成像。《应用物理快报》，113(8):083109，2018年。[7] P. Giselsson 和 S. P. Boyd。快速梯度法的单调性与重启。载于《第53届IEEE决策与控制会议（CDC 2014），美国加利福尼亚州洛杉矶，2014年12月15—17日》，第5058–5063页。IEEE，2014年。[8] R. G.N. 和 L. A.V. 从射线照片和电子显微照片进行三维重建：以卷积代替傅里叶变换的应用。《Proc Natl Acad Sci U S A》，1971年。[9] L. Greengard 和 J.-Y. Lee。加速非均匀快速傅里叶变换。《SIAM Review》，46(3):443–454，2004年。

[10] A. C. Kak 和 M. Slaney。《计算机断层成像原理》。工业与应用数学学会，费城，2001 年。

[11] D. Kulkarni、S. J. Normile、L. G. Connolly 和 I. V. Zenyuk。用于工况下 X 射线微米及纳米计算机断层成像、以可视化水分布的低温燃料电池样品架的开发。《物理学杂志：能源》，2(4):044005，2020 年 10 月。

[12]D. Kumar、D. Y. Parkinson 和 J. J. Donatelli。tomoCAM：通过 GPU 加速和非均匀快速傅里叶变换实现快速的基于模型的迭代重建。《同步辐射杂志》，31(1):85–94，2024年1月。[13]N. M. Larson 和 F. W. Zok。通过原位X射线计算机断层成像观察单向纤维床轴向浸渍过程。《复合材料*A*部分：应用科学与制造》，107:124–134，2018年。[14] A. A. MacDowell、D. Y. Parkinson、A. Haboub、E. Schaible、J. R. Nasiatka、C. A. Yee、J. R. Jameson、J. B. Ajo-Franklin、C. R. Brodersen 和 A. J. McElrone。先进光源的X射线显微断层成像。载于 S. R. Stock 编，《*X*射线断层成像进展*VIII*》，第8506卷，页码850618。国际光学与光子学会，SPIE，2012年。[15] M. A. Marcus。二向色X射线断层成像与层析成像的信息含量及其可重建性。*Opt. Express*，30(22):39445–39465，2022年10月。[16]K. A. Mohan、S. V. Venkatakrishnan、L. F. Drummy、J. Si mmons、D. Y. Parkinson 和 C. A. Bouman。同步辐射X射线断层成像的基于模型的迭代重建。载于*2014 IEEE*国际声学、语音与信号处理会议（*ICASSP*），第6909–6913页，2014年。[17] Y. Nesterov。《凸优化导论：基础课程》。Springer Publishing Company, Incorporated，第一版，2014年。[18]V. Nikitin、A. Tekawade、A. Duchkov、P. Shevchenko 和 F. De Carlo。通过按需数据采集和对感兴趣区域进行三维缩放，实现实时流式断层重建。《同步辐射杂志》，29(3):816–828，2022年5月。[19]T. Ou。gnufftw：针对高性能GPU加速非均匀快速

傅里叶变换的自动调优。硕士论文，加州大学伯克利分校电气工程与计算机科学系，2017年5月。

[20] S. V. Venkatakrishnan、L. F. Drummy、M. D. Graef、J. P. Simmons 和 C. A. Bouman。《明场电子断层成像的基于模型的迭代重建》。载于 C. A. Bouman、I. Pol- lak 和 P. J. Wolfe 编，计算成像 *XI*，第 8657 卷，第 75–86 页。国际光学与光子学学会，SPIE，2013年。

[21]L. Wang、Y. Shkolnisky 和 A. Singer。《基于傅里叶的方法：利用冷冻电镜图像进行迭代三维重建》。*arXiv* 预印本 *arXiv:1307.5824*，2013年。