arXiv:2603.28820v1 [physics.class-ph] 29 Mar 2026

盒子中粒子热力学的薛定谔类方程

A. Faigon

器件物理与微电子实验室，布宜诺斯艾利斯大学工程学院 - CONICET

2026年4月1日

摘要

本文重新考察了在一维膨胀／收缩盒子中的粒子，并采用具有直接热力学解释的类作用量－角变量。我们提出一种角度相关势，既能准确描述力学行为，也能在正则哈密顿框架下刻画热力学演化——熵产生。我们分析了定容条件下的热传递，所得热导与量子极限下的普适热导量子 G_Q 一致。基于一种可用热力学术语解释的哈密顿方案，我们构建了类薛定谔波动方程，其波函数解包含熵演化的信息。结果表明，对于非突变变化，所得结果与“经典”结果完全一致。最后，与对膨胀盒中波函数进行纯量子力学处理的结果进行比较，证实了两者在准静态状态下的一致性，并揭示了远离平衡条件下的绝热性破坏。

1 引言

自热力学作为研究热量的科学诞生以来，理论界一直投入大量精力，试图将这门引人入胜的理论与力学为物理学大厦奠定的坚实基础联系起来。亥姆霍兹、赫兹和玻尔兹曼等早期先驱率先应对这一挑战，设计出力学模型，建立了力学量与热力学量之间的对应关系 [1–3]。然而，随着玻尔兹曼引入统计方法并取得成功，这条研究路线在很大程度上被搁置；吉布斯后来将这些方法形式化，推动了统计热力学的发展。这一理论的基石之一，是熵与“状态数”之间的关系，这一关系著名地由玻尔兹曼方程 $S = k\,lnW$ 表达，或通过吉布斯的系综表述 [4]给出。

后来，德布罗意[5], 重新探讨了力学模型；近来，加拉沃蒂、坎皮西和 Garc´ıa-Morales [6–8], 等研究者也进行了研究，他们强调了作用量与熵之间以 $S = k\,ln \oint pdq$形式呈现的关系。统计方法与纯力学方法之间的联系，可以通过作用量积分中机械细节信息的丢失来理解；至少在一维情况下，该积分由所围成的相空间体积或所包含的微观态数表示 [6, 7]。

在本文中，我们回到最简单的系统：一维盒子中的粒子。我们旨在利用作用-角变量建立一种具有直接热力学解释的哈密顿表述。此外，我们将这一表述加以扩展，以推导出适用于远离平衡态的系统的薛定谔式方程。

膨胀盒中粒子的运动是初等力学中一个非常有趣的问题 [9]。关于这一问题的热力学方法可见于[10], ，而量子力学解最早由 Doescher 于 1969年提出 [11]。此后，许多研究都探讨了这一问题，既因为其理论意义 [12, 15] ，也因为其对原子冷却实验的影响 [16, 17]。

这个简单系统可用于检验以下各节中提出的思路。

2 原理

经典力学中的运动方程将系统/粒子运动状态的变化与其位置变化联系起来。能量-功定理

$$\dot{q}dp = Fdq \tag{1}$$

其中 q 和 p 是广义坐标和动量，而 F 是广义力，表述了这种关系的基本形式。将式（1）除以 dt，得到牛顿定律$F = \dot{p}$；将其代入式（1），可使微分表达式为零

$$dH = \dot{q}dp - \dot{p}dq \tag{2}$$

当 F 为保守力时，该式成为恰当微分，即两个恰当微分之和

$$dH = dK + dV \tag{3}$$

动能取决于运动状态，而势能取决于位置。H 称为系统的哈密顿函数，在这种情况下，其值即为机械能，且是运动常量。类似地，或者通过勒让德变换，我们可以构造另一种微分形式

$$dL = pd\dot{q} + \dot{p}dq \tag{4}$$

它由动能项和位置项组成；在经典情形下，动能项与动能 dT 一致，而当力由势能 V 导出时，位置项如上所述与 -dV 一致。在这种情况下，式（4）是函数 $L(q, \dot{q})$ 的恰当微分，该函数是系统的拉格朗日函数。L 和 H 的关系为

$$L + H = p\dot{q} \tag{5}$$

并由它们各自得到运动方程。

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}\ and\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{6}$$

哈密顿运动方程和拉格朗日运动方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{7}$$

我们的目的是将这一形式体系扩展到热力学，

方法是为上述动能项和位置项寻找合适的热力学对应关系。

考虑一颗处于长度为l的一维盒中的粒子，这是最基本的热力学系统。我们无法直接观察粒子，只能通过它对壁面的影响来观察它。该系统的力学演化意味着绝热演化——只涉及可逆机械功——或 $p.l = constant$。让我们通过取消机械限制，允许乘积 $p.l$ 变化，来探讨一般的热力学演化；将其称为 $f(p,\ l) \equiv p.l$。它的微分

$$df = pdl + ldp \tag{8}$$

乘以 $\dot{q}/l$，即粒子与壁面的碰撞频率 $\dot{g}$，得到

$$\dot{g}df = p\dot{q}.dlnl + \dot{q}dp \quad . \tag{9}$$

最后一个方程很容易用纯热力学量解释为

$$dQrev = PdV + dE \tag{10}$$

其中，Qrev 是可逆热；对于这个无相互作用粒子，能量 E 就是动能；可逆功 P.dV 项对应于一维盒中的力 .dl，而作用在（准静态）壁面上的力等于动量随时间的变化率 $2p/(2l/\dot{q})$。或者，根据理想气体的状态方程，$PdV = kTdlnVol$ 对于一维盒，这可简化为$kTdlnl$ ，由此将动能的两倍等同于温度。

关于左侧，我们可以改写为

$$\dot{g}df = \dot{g}fdlnf \tag{11}$$

并验证

$$\dot{g}f = p\dot{q} == kT \tag{12}$$

而

$$dlnf = dln\,l + dln\,p \tag{13}$$

是以 k 为单位的理想气体熵 S 每个自由度的贡献 $k(1/3dlnVol + 1/2dlnT)$。因此

$$k.dlnf = dS \tag{14}$$

以及式中的左侧 (9) 为

$$\dot{g}df = TdS = dQrev \tag{15}$$

由此完成了方程 (9) 与 (10) 之间的等价性。方程 (10) 与 (15) 一起构成热力学基本方程 [18] $TdS = dE + PdV$，将熵与能量和机械功之间的（不）平衡联系起来。由最后一个方程和 (14) 可得，温度为

$$T = (\partial S/\partial E)^{-1} = \dot{q}.p \tag{16}$$

这与我们上文在 (12) 中的定义一致。

3 演化哈密顿量

式（15）是识别所谓演化变量的良好起点。左侧是演化速度 $\dot{g}$ 与演化动量 f 的微分之积，因此对应于力学哈密顿量中的动能项。要构成与力学哈密顿方案等价的形式，还需要一个演化位置项。观察式（2）可知，该项是 $f.dg$ 演化功的微分，等于演化力$F_{ev} = f$ 与微小前进量或相位坐标g的微分之积。

$$dg \equiv \dot{g}dt \tag{17}$$

因此，我们可以构造以下微分

$$dHev = \dot{g}df - \dot{f}dg \tag{18}$$

演化能量与演化功之差；如果已知“色散关系” $\dot{g} = \dot{g}(f)$ 以及演化力 $f = f(g)$ 对前进量/相位 g 的依赖关系，那么二者各自都成为恰当微分。在这种情况下，式（18）可写为

$$dHev = dKev + dVev \tag{19}$$

根据式（15），

$$dKev = dQrev(f) \quad and \quad dVev = -dQrev(g), \tag{20}$$

完成演化哈密顿量的构造，并

其对应的演化方程

$$\dot{g} = \frac{\partial Hev}{\partial f} \quad and \quad \dot{f} = -\frac{\partial Hev}{\partial g}. \tag{21}$$

演化哈密顿量及其在热力学量中的解释总结见表 1。

此处值得注意的是：若 g 不出现在哈密顿量中，则 f 为常数，可以认定为经典作用量；g 是循环坐标，系统不会发生热力学演化：dS=0。若 g 通过 ev势出现，则我们已将一个非保守力学哈密顿量转化为保守的演化哈密顿量 dHev=0，由此可得到 S 。

同样，我们构造演化拉格朗日量 $Lev = Kev - Vev$ ，其微分为

$$dLev = fd\dot{g} + \dot{f}dg \quad , \tag{22}$$

由此得到演化拉格朗日方程

$$d/dt(\partial Lev/\partial \dot{g}) - \partial Lev/\partial g = 0 \quad . \tag{23}$$

最后，为求完整起见，我们有

$$Lev + Hev = f\dot{g} = kT \quad . \tag{24}$$

4 体积变化

让我们为一个以速率*l*膨胀或收缩的一维盒中的运动粒子构造演化哈密顿量。根据式（12），动能项为

$$dKev = dQrev(f) = \dot{g}df. \tag{25}$$

因此，势能项以 g 表示时，即为式 (10) 的右端

$$dVev = -dQrev(g) = -(dE + PdV)/dg.dg. \tag{26}$$

对于所考虑的系统，我们有

$$dE = -dL = -F.dl = -\frac{\Delta p}{\Delta t}.\frac{\dot{l}}{2}dt = -(2p - m\dot{l})\frac{\dot{l}}{2}dg \tag{27}$$

利用 $dt = dg/\dot{g}$，其中 Δp 是每次反弹时的动量变化， $\dot{g}$ 是反弹发生频率。而准静态功 PdV 为

$$F_{st}.dl = 2p\frac{\dot{l}}{2}dg \tag{28}$$

其中， F_{st} 是作用在静止壁上的力。因此

$$dVev = -\frac{1}{2}m\dot{l}^2dg, \tag{29}$$

	力学	**演化的**	**热力学**
变量	p, q	$f \equiv p.l \quad , \quad dg \equiv dq/l$	E, V
动能	$dK \equiv \dot{q}dp$	$dK_{ev} \equiv \dot{g}df$	TdS
功（若为精确微分，则为势能）	$dW \equiv \dot{p}dq$ **(**$\equiv -d\phi$**)**	$dW_{ev} \equiv \dot{f}dg$ **(**$\equiv -d\phi_{ev}$**)**	
能量-功定理	$\dot{q}dp = \dot{p}dq$	$\dot{g}df = \dot{f}dg$ $\dot{g}df = \dot{q}dp + \frac{p\dot{q}}{l}dl$ $(p\dot{q} \equiv kT, lnf \equiv S/k, \frac{p\dot{q}}{l} \equiv P)$	$TdS \equiv dE + PdV$
哈密顿量	$dH(q, \ p) = dK + d\phi$	$dH_{ev}(g, \ f) = dK_{ev}(f) + d\phi_{ev}(g)$	$dQ_r(S) - dQ_r(E, V)$
运动／过程	惯性的 $\dot{p} = 0$	绝热可逆的 $\dot{f} = 0$ 演化的 $\dot{f} \neq 0$	$dS = 0$ $\dot{S} \neq 0$

表 1：力学、演化与热力学描述

and

$$dHev(f,g) = \frac{f}{ml^2}df - \frac{1}{2}ml^2dg. \tag{30}$$

由此可得

$$\dot{f} = -\frac{\partial Hev}{\partial g} = \frac{1}{2}ml^2, \tag{31}$$

它始终为正，因此熵产生率也始终为正

$$\dot{S} = k\dot{f}/f >= 0 \tag{32}$$

无论是在压缩过程还是膨胀过程中，均如此。通过哈密顿框架得到的式 (31) 中 $\dot{}$关于 f 的表达式，与直接根据 f 的定义推导出的结果一致：利用反弹后动量的 $p_g = ml(\alpha - g)$，以及 $\alpha \equiv p_o/m\dot{l}$ 和 $l[g] = lo\dfrac{\alpha}{\alpha - g}$ 见附录 A——，我们得到 $\dot{g}$

$$\dot{f} = \frac{\Delta f}{\Delta g}\dot{g} = \frac{f_{g+1/2} - f_{g-1/2}}{1}\frac{p_g/m}{\frac{1}{2}(l_{g+1/2} + l_{g-1/2})} = \frac{1}{2}ml^2 \tag{33}$$

从而验证了 ev-哈密顿表述。

5 定容热传递

下面给出拉格朗日量

$$Lev(g,\dot{g}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{g}^2 - \frac{k}{2}(Te - To)e^{-c(g-go)} \quad , \tag{34}$$

c 为常数时，描述了系统在定容条件下的演化；该系统初始温度为 To ，浸没于温度为 Te的热浴中，且处于 $g = go$。欧拉-拉格朗日方程中关于 g 的方程变为

$$ml^2\ddot{g} - \frac{k}{2}c(Te - To)e^{-c(g-go)} = 0 \quad . \tag{35}$$

解出 $\dot{g}^2$ ，并利用恒等式 $f\dot{g} = kT$ 以及容易验证的速度—动量关系$f(\dot{g}) = \dot{g}/(ml^2)$，即可得到热力学解释

$$T - To = (Te - To)[1 - e^{-c(g-go)}] \quad . \tag{36}$$

该过程涉及的热导率为 $\sigma \equiv 1/(Te–T).dQ/dt$，其中 dQ 是通过一面墙交换的热量

在时间 dt 内通过墙的热量对应于 dg，其中 $dt = dg/\dot{g}$。使用 dQ=Cv.dT，并将式 (36) 中的 T 代入，热导率为

$$\sigma = cCv\dot{g} = c\frac{CvkT}{f} \le c\frac{k^2T}{h} \tag{37}$$

右侧的表达式是热导率的最大值，对应于 $Cv = k/2$ 的一个自由度；对于 f, $f = h/2$，则为最小值。它与 Rego 预测、Roukes 等人测得的普适量子热导率 [12,13] 形式相同。令因子 c 取值为 $\pi^2/3$，也可得到相同的表达式。

6 非平衡态与 ev-薛定谔方程

上述描述假设变化缓慢，即沿一个 g 或周期的相对变化较小： $\delta f/f << 1$。正是这一条件使得轨迹表示$g(t)$能够成立，这也是迄今为止所作的假设。如果这一条件不成立，则建议采用波函数概率方法，这与从经典力学向量子力学的转变相一致。也就是说，我们要求一个类薛定谔波动方程

$$\hat{H}ev\Psi = Eev\Psi \tag{38}$$

对于前述体积变化的情形，根据方程（30），从 ($g = 0$, $f = fo$) 积分到 (g, f),

$$Hev = \frac{f^2 - fo^2}{2ml^2} + (\alpha - g)\frac{1}{2}ml^2 \tag{39}$$

其中，我们将 ev势的初始值设为 $Vev[g = 0] = \alpha\frac{1}{2}ml^2$，即可转化为 ev动能 TdS 的能量；这种转化以每个 $g\frac{1}{2}ml^2$的速率发生，而膨胀过程中的演化会在经历 α 次反弹后耗尽（$v < l/2$）（$g = \alpha$）。

使用动量算符

$$\hat{f} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial g}, \tag{40}$$

可得到如下波动方程

$$\frac{\partial^2\Psi(g)}{\partial g^2} + \frac{fo^2}{\hbar^2}(\frac{\alpha - g + 1/2}{\alpha - g} - 1)\Psi(g) = 0 \tag{41}$$

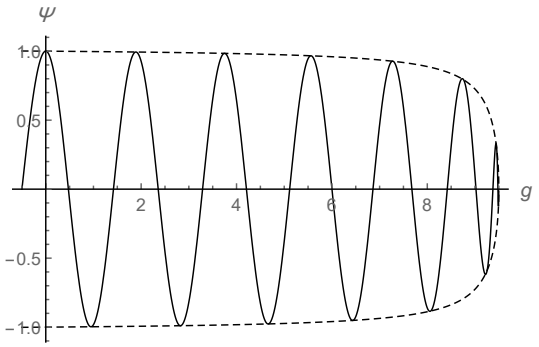


图1： Ψ（g），对应 $\alpha = 10$。虚线所示的包络线已归一化为 $\pm f^{-1/2}$

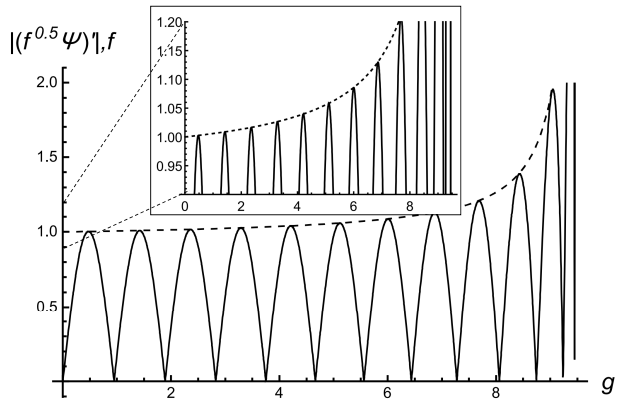


图2： $f^{0.5}\Psi$ 的导数和 f(g)（虚线）

解析解是一个包含惠特克函数的多项式表达式。图 1 展示了数值解的图形表示。最后一次反弹后，粒子的经典速度低于墙的速度，因此波函数在 $g = \alpha$ 处坍缩为零。它不再与外界发生任何相互作用，也不再可观测。我们通过比较波数 k(g)（乘以$\hbar$）与经典动量 f(g)，验证了波表示；当体积变化速率足够慢时，两者应当一致。在图 1 中，我们绘出了波函数的振幅。根据 WKB表示，其振幅按 $k^{-0.5}$ 缩放，并且与经典表达式 $f^{-0.5}$ 吻合良好。我们通过提取波数，进行了更为详细的比较来自 WKB表示的指数项。为此，我们使用精确解的导数乘以 $f^{0.5}$、d/dg（$f^{0.5}\Psi$），如图2所示，并与经典动量值 f 并列比较。插图展示了这一比较的放大视图，突出显示了这两个量之间对应关系的准确性。

对于定体积演化，根据式（34）和式（24），哈密顿量为：

$$Hev = \frac{f^2}{2ml^2} + \frac{k}{2}(Te - To)e^{-c(g-go)} \tag{42}$$

相应的波动方程为：

$$-\frac{\hbar^2}{2ml^2}\frac{\partial^2\Psi(g)}{\partial g^2} + \frac{k}{2}(Te - To)e^{-c(g-go)}\Psi(g) = Eev\Psi(g) \tag{43}$$

图3展示了从$50Te$到 Te的定容演化。

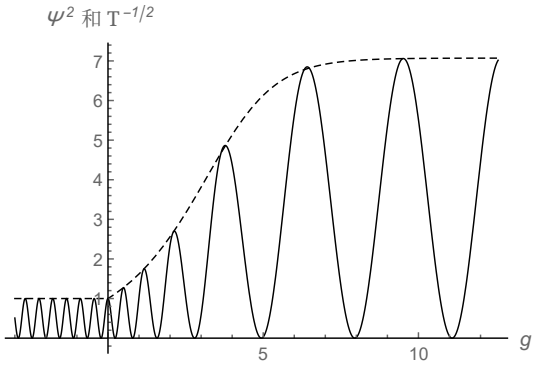


图3：从 $50Te$ 到 Te 演化过程中的概率密度和 $T^{-0.5}$（虚线），采用归一化单位。

同样，图中也显示了与“经典”处理方法的对应关系；这次体现为 ψ^2的振幅与 f^{-1}或 $T^{-1/2}$成正比。

7 回归力学

如果上述形式体系是正确的，我们应该能够据此反向重建 $\Psi(x,\ t)$波函数的演化，其结果应与最初由 [11]采用常规量子力学方法得到的结果一致。比较我们的 $\Psi(g)$与 $\Psi(x,\ t)$的方法，是考察沿着可能的粒子经典路径的 x(t)关系；在两次反弹之间，该路径为 $x(t) = 1/2.l_{g-1/2} + v_g.t$。因此我们可以比较

$\Psi(x(g)\ t(g))$与Doescher找到的解 [11]$\Psi_D(x,\ t)$] 。图4展示了极缓慢膨胀时这一比较的结果， α=50，从 l_0=1 到 l_f= 1。4.

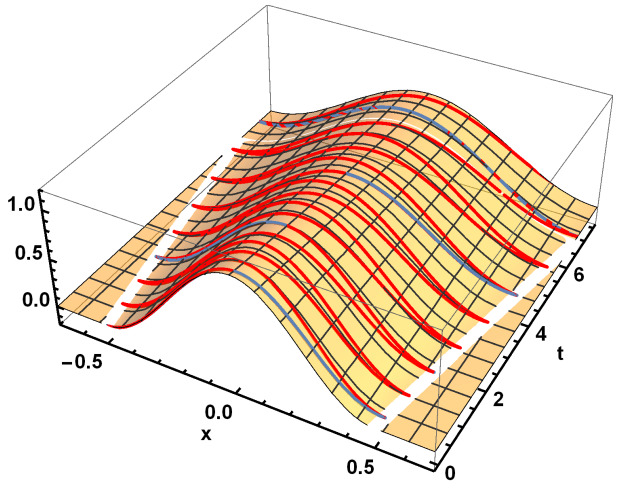


图4：曲面表示解 $\Psi_D(x,\ t)$；红色曲线表示沿粒子经典路径 $\Psi_D(x(g)\ t(g))$ 得到的相同解，蓝色曲线表示我们的解 $\Psi(x(g)\ t(g))$。

解在平面 t=0 上的投影完全吻合——见图5。

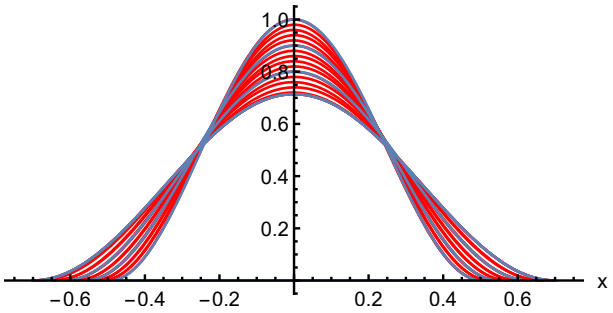


图5：图4中曲线在平面 t=0上的投影。为清晰起见，仅绘制了部分蓝色曲线。

随着膨胀率增大，红色曲线和蓝色曲线开始出现偏离，因为 Doescher 的处理假设发生绝热过程， E 与 $1/l^2$ 成正比（式4），其中 [11],或 f 保持恒定。图6展示了一个例子。

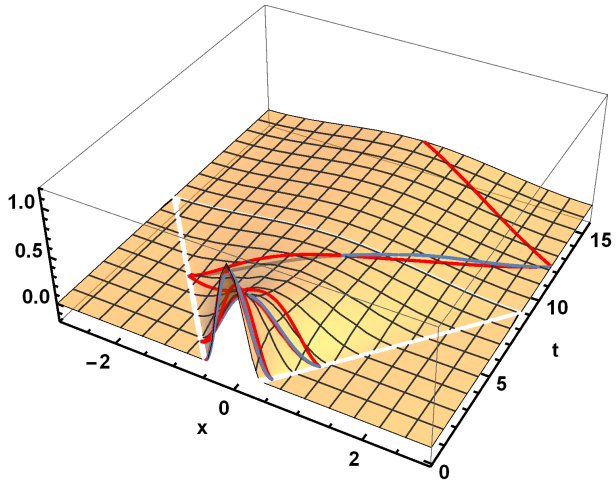


图6： α=5 和 l_f=6的情况，与图4相同。

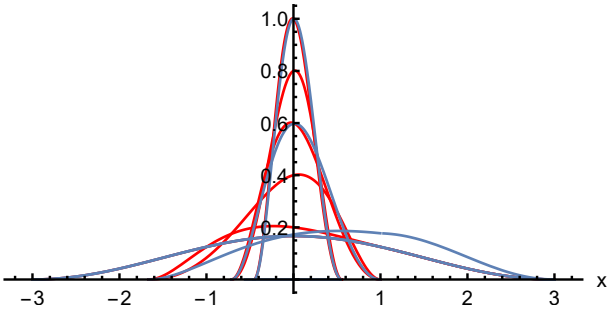


图7： α=5 和 l_f=6在 t=0 上的投影。

最后，随着膨胀速度进一步加快，绝热性的破坏变得显而易见，如图 8 所示，系统转变到了另一种量子态。

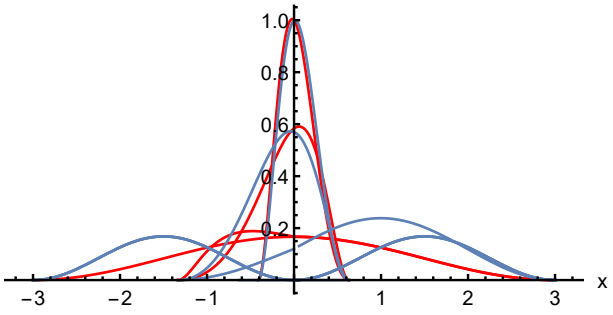


图8：投影到 t=0 ，对应 α=2.4 和 l_f=6。红色的演化曲线显示，粒子仍处于模型所迫使的同一最低态；表示最终长度l_f=6 的蓝色曲线则显示，粒子处于下一个量子态

8 亥姆霍兹

Helmholtz 提出了热力学的第一个正则方案。他假设存在一个量 ϵ，其时间导数就是温度。因此，如果 ε 是与 ϵ 相关的广义力，那么

$$dE = \varepsilon d\epsilon - pdV = \varepsilon\dot{\epsilon}dt - pdV, \tag{44}$$

or

$$\varepsilon\dot{\epsilon}dt = TdS,$$

or

$$\dot{S} = \varepsilon$$

从而可以采用拉格朗日量表述，其中 S 是与 ϵ 共轭的广义动量。 [19]

由上述推导可知，亥姆霍兹所说的那个难以捉摸的量是

$$d\epsilon = f.dg/k = p.dq/k \tag{45}$$

约化作用量，或称莫佩尔蒂作用量，其共轭动量是

$$ds = dS = kdlnf. \tag{46}$$

根据定义，新的作用量-熵坐标保持了基本相空间体积

$$ds.d\epsilon = df.dg \tag{47}$$

从而确保变换的正则性。“功-能量”定理转化为

$$TdS - \dot{s}d\epsilon = 0 \tag{48}$$

如果最后一个方程的第二项可以写成 $\partial V(\epsilon)/\partial\epsilon.d\epsilon$，那么它或许可以作为一种新哈密顿方案的基础

9 总结

本文重新考察了一个由一维盒中的粒子组成、经历膨胀或收缩的基础系统，并引入了具有直接热力学解释的哈密顿框架。在这些非绝热过程中，绝热不变量 f=p.l 确实会变化。它在哈密顿量中扮演动量的角色，其变化与熵产生直接相关；而哈密顿量的动能部分则被认定为可逆热。这使我们将整个方案称为演化哈密顿量。

定容热交换也在同一形式体系中得到了处理。所提出的拉格朗日量计算出的热导率与普适热导量子相符，展现了该框架在量子热学问题中的适用性。

在哈密顿方案中建立的机械坐标与演化坐标之间的对应关系，使我们得以推导出一个薛定谔型波动方程，能够描述系统在准静态条件之外的行为。解表明，该方程在 WKB近似下与经典结果相对应，并揭示了远离平衡态情形中的绝热性破坏。与以往的量子力学解（如 Doescher 的解）进行比较后，结果证实了该方程在准静态状态下的一致性，同时也凸显了在较高膨胀率下的偏离。

这项工作有助于理解力学系统与热力学系统之间的相互作用，并据我们所知，为探索远离平衡态现象提供了一个新框架。

将这些原理推广到高维系统中的非相互作用自由度上十分直接。未来的研究可以进一步将其拓展到更多

复杂的相互作用。

A 附录 A

在 t=0 时，盒子的长度为 lo，并以 l 的速率对称地膨胀——以避免考虑质心的运动——；位于盒子中心的粒子以速度 $vo = \alpha l$ 向右方移动。前进参数 g表示粒子行进的盒子长度数，因此粒子会在时间 $g = 1/2$ 到达右壁

$$\delta t_{1/2} = \frac{lo/2}{(vo - \dot{l}/2)}, \tag{49}$$

盒子长度变化了

$$\frac{l_{1/2}}{lo} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha - 1/2}. \tag{50}$$

反弹后，粒子在一段时间内返回盒子中心

$$\delta t_1 = \frac{(lo + \dot{l}\delta t_{1/2})/2}{(v_1 - \dot{l}/2)}, \tag{51}$$

其中，v_g 是经过 g 次反弹后的粒子速度

$$v_g = vo - g.\dot{l}, \tag{52}$$

盒子长度增加了

$$\frac{l_1}{l_{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha - 1}. \tag{53}$$

粒子在经过 g 次反弹后恰好穿过盒子中心时，盒子的长度递归地表示为:

$$\frac{l_g}{lo} = \frac{l_g}{l_{g-1/2}}.\frac{l_{g-1/2}}{l_{g-1}}.... = \prod_{n=1}^{2g}(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha - n/2}) = \frac{\alpha}{\alpha - g} \tag{54}$$

如果将左侧中对应于位于中心的粒子和位于墙上的粒子的整数及半整数下标，分别替换为对 g 的连续依赖关系，那么右侧等式成立，由此得到连续函数

$$l[g] = lo\frac{\alpha}{\alpha - g}. \tag{55}$$

参考文献

[1]L. Boltzmann, 《单循环系统及其他相关系统的性质》, Zeitschr.f. R.u.Angew. Math (Crelles Journal) 98, 68-94(1884)。Kim A. Sharp 和 Franz Matschinsky 于 2019 年翻译，arXiv:1906.09221v1

[2] Helmholtz, H., 《单循环系统的静力学原理》, Borchardt-Crelle's Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 97, 111–140 (1884).[3] P. Hertz, 《热力学的力学基础》, Annalen der Physik, 33 (12), 225- 274, (1910)[4]J. W. Gibbs, 《统计力学基本原理》, Scribner's Sons Ed., 纽约, 1902

[5] L. DeBroglie, 《孤立粒子的热力学》, Gauthier-Villars Ed., 巴黎, 1964[6] G. Gallavotti, 《统计力学：简明论述》, 施普林格出版社 Ed., 柏林-海德堡, 1999[7] M. Campisi, Studies in History and Phylosophy of Modern Physics 36, 275-290 (2005)

[8] V. Garcia Morales, 基于最小缩短作用量原理的热力学：耦合振子网络中的熵产生, 《物理学年鉴》 323-8, pp. 1844-—858, (2008)[9] 例见 C. Gignoux 和 B. Silvestre-Brac, 《拉格朗日力学与哈密顿力学解题》, Springer, 1997

[10] H. S. Leff《单粒子气体的热力学见解》, 《美国物理学杂志》63（1995）, 895。

[11] S. W. Doescher 和 M. H. Rice, 《带移动边界的无限深方势阱》, 《美国物理学杂志》37，1246（1969年）

[12]) M V Berry 和 G Klein, 《扩张力场中的牛顿轨迹与量子波》, J. Phys. A: Math. Gen. 17（1984）1805–1815。

[13] D. N. Pinder, 《美国物理学杂志》58，54（1990年）。

[14] V.V. Dodonov，《数学物理学杂志》34，3391（1993年）[15]Kieran Cooney，《具有移动边界的无限深势阱》，arXiv 预印本 arXiv:1703.05282，2017年[16] X Chen，JG Muga，A Del Campo，A Ruschhaupt，《通过非绝热膨胀实现原子冷却》，《物理评论A》，第235页，2009年[17] A. del Campo1，M. G. Boshier，《时变势阱中的绝热捷径》，《科学报告》（《自然》），2012年[18]H. B. Callen，热力学与热统计学导论，约翰·威立父子出版公司，纽约，1985年[19] 参见参考文献 [5] 第五章第3节。