arXiv:2603.28953v1 [math.GR] 30 Mar 2026

运用语言理论方法研究自由群中子集的密度

Andr´e Carvalho

埃武拉大学科学与技术学院数学系 CIMA 数学与应用研究中心，Rua Rom˜ao Ramalho, 59, 7000–671 埃武拉，葡萄牙 andre.carvalho@uevora.pt

2026年4月1日

摘要

本文利用语言的相对密度研究非阿贝尔自由群中子集的密度。我们首先证明一个语言相对于另一个包含 L_1 的语言的密度的一些基本性质。随后，我们聚焦于 L_2 为字母表上自由约化词的语言这一情形，并证明该语言的无限猴子定理的一个类似结果。该结果是关于不可约有限型子移位的一个更广泛定理的推论，据此可以用语言理论刻画具有正密度的有理子集。由此，我们得到一个语言理论证明：非阿贝尔自由群中一个元素的自同构轨道的自然密度为零；这推广了布里略和文图拉关于自由群本原元素密度的结果。接着，我们描述具有正密度的自由群有理子集，并深入探讨有限生成子群的情形。我们证明，若有理子集是子群，则它具有正密度当且仅当其具有有限指数，并刻画了其中密度收敛的子群。在因奇偶约束而不收敛的情形下，我们证明该子集的密度始终弱收敛，且其上确界密度与下确界密度的平均值收敛到预期值。

1 引言

通俗地说，经典无限猴子定理指出，一只猴子在打字机上随机打字，持续无限长的时间，那么它以概率 1 打出任意给定字符串。形式化地，对于字母表 Σ，若将语言 $L \subseteq \Sigma^*$ 的密度定义为 $D(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\Sigma^n \cap L|}{|\Sigma^n|}$，则该定理指出，对所有 $s \in \Sigma^*$，都有 $D(\Sigma^* s \Sigma^*) = 1$。文献 [18]指出，过去曾使用过其他密度定义。例如，贝尔斯特尔 [2] 和萨洛玛-索伊托拉 [16] 采用 $D^*(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} |L\cap\Sigma^i|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i|}$，但这两种定义是等价的，也就是说，$D^*(L)$ 存在，当且仅当 $D(L)$ 存在；若二者存在，根据 Stolz-Ces´aro 定理及其部分逆命题 [13, 定理 1.22 和 1.23]，它们相等。

Sin'ya 证明了正则语言的无限猴子定理逆命题，指出正则语言 L 的密度为 0，当且仅当存在某个禁子词，也就是说，这个子词不会出现在 L [17, 18]中的任何字里。我们指出，无限猴子定理的逆命题并非普遍成立，例如回文语言的密度为 0，却没有禁子词。虽然这一点对于自由幺半群已广为人知，但自由群 F_k 的结构引入了由消去带来的局部约束。

在 [6], 中，作者将有限生成群 G 的子集 $S \subseteq G$ 关于有限生成集 X 的自然密度 定义为

$$\delta_X(S) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|S \cap B_X(n)|}{|B_X(n)|},$$

其中， $B_X(n)$ 表示相对于 X、半径为 n （以单位元为中心）的球；他们证明了自由群的本原元素集合的自然密度为 0。在对群 G 的增长作出某些假设后，他们还证明有限指数子群 H 的密度为 $[G : H]^{-1}$，并且在这种情况下，极限总是存在。然而，自由群不满足该定理的假设，作者还给出了一个指数 2 子群的例子，使得 $\delta_X(H) = \frac{3}{4}$，而密度的下极限版本得到 $\frac{1}{4}$（因此极限可能不存在）。

本文探讨语言 $L_1 \subseteq L_2$ 的相对密度概念，它衡量 L_2 中的一个词属于 L_1 的可能性；这里， L_2 是字母表上的约化词语言。这将为我们提供一个语言理论框架，用以研究自由群子集的自然密度。过去，人们已在不同背景下探讨过语言的相对密度概念 [2, 10]。

我们首先说明相对密度的一些基本性质，并证明一个关于有限型子移位的语言密度的结果。由此可推得一个适用于约化词的无限猴子定理。通俗地说，猴子如果持续不断地敲出约化词，最终以概率 1 敲出任何给定的约化词。形式上，给定两个语言 $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \Sigma^*$，我们将$L_1$ 相对于 L_2 的密度定义为

$$D(L_1 \mid L_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\Sigma^n \cap L_1|}{|\Sigma^n \cap L_2|},$$

若该密度存在，则记 $\mathrm{Red}(X)$ 为字母表 $\Sigma = X \cup X^{-1}$ 上的自由约化词语言。我们还可以定义 $D_{\inf}$、 $D_{\sup}$，其含义相同，只是分别用下极限和上极限替代极限。此外，与前一种情况一样，当密度是累积密度，也就是在球而非球面上计算时，我们记作 D^* 。

推论 5.1. 设 $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ 和 $L \subseteq$ 为 $\mathrm{Red}(X)$。若对于某个$s \in \mathrm{Red}(X)$，有 $\Sigma^* s \Sigma^* \cap L = \emptyset$，则 $D(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$。

利用非阿贝尔自由群中的每个元素都存在轨道阻断词这一事实——也就是说，这些词无法作为其自同构轨道中循环约化元的子词出现 [8], ——我们得到了一个（简单的）语言理论证明，表明元素的自同构轨道密度为 0，从而推广了 Burillo-Ventura 关于本原元素的结果。

推论 5.4. 设 g 是非阿贝尔自由群 F_k 中的一个元素， S' 是 g 在 F_k的某个自同构下的像集。那么 $\delta(S') = 0$。

接着，我们证明一个针对约化词有理语言的 Sin'ya 定理类比，也就是说，无限猴子定理的逆命题对自由群的有理子集成立：

定理 5.8. 设 $L \subseteq \mathrm{Red}(X)$是一个有理语言，且令 $N = \{w \in \mathrm{Red}(X) \mid \Sigma^* w \Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$。那么，以下条件等价：

1. $D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$;
2. $D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$;
3. $D(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$;
4. $D(N \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$;

5. $\exists w \in \mathrm{Red}(X)$: $\Sigma^* w \Sigma^* \cap L = \emptyset$.

借助这一点，我们能够采用语言理论方法描述具有正自然密度的自由群有理子集；特别地，当有理子集是有限生成子群时，它必为有限指数子群。

定理 5.9. 设 $S \subseteq F_X$ 是非阿贝尔自由群的一个有理子集。那么 $\delta(S) > 0$当且仅当 F_X 存在某个 $k \in \mathbb{N}$ 以及有限多个元素 $a_i, b_i \in F_X$，使得 $i \in [k]F_X = \bigcup_{i,j\in[k]} a_i S b_j$。

推论 5.11. 设 $H \leq_{f.g.} F_X$ 是非阿贝尔自由群的一个有限生成子群。那么 $\delta(H) > 0$ 当且仅当 H 具有有限指数。

众所周知，在非周期性假设 [19, 定理 1.11], 下，群上的随机游走能够一致地测量指数。但如上所述，将密度的定义从下极限替换为极限后，前面的结果便不再成立，因为某些自由群的有限指数子群并不收敛。我们能够刻画这些子群，并证明尽管不存在收敛，下极限密度与上极限密度的平均值为 $[F_n : H]^{-1}$。为此，我们考察 H 的 Stallings 图上的非回溯随机游走，并证明：如果该子群含有一个奇数长度的词，那么这些游走是非周期的，极限存在且为 $[F_n : H]^{-1}$；否则，由于 Stallings 图是二部的，这些游走的周期为 2。在这种情况下，极限不存在，但平均而言仍然收敛（平均意义下）。

定理 5.15. 设 L 是表示非阿贝尔自由群 F_n的子群H 中元素的约化词语言。那么

$$\frac{D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) + D_{\inf}(L \mid \mathrm{Red}(X))}{2} = \frac{1}{[F_n : H]}.$$

More在.....上， $D(L \mid \mathrm{Red}(X))$存在，当且仅当 H 具有无限指数，或至少含有一个奇数长度的字 。

最后，我们将群的子集 K 的弱密度定义为 G ，如下

$$\Delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|B(i) \cap K|}{|B(i)|},$$

所示 [4]。随后，我们能够证明，对于自由群的子群，这种较弱意义下的收敛具有良好的性质。

定理 5.16. 设 H 是非阿贝尔自由群 F_k的一个子群。那么

$$\Delta(H) = \begin{cases} 0 & \text{if } H \text{ has infinite index} \\ \frac{1}{[F_k:H]} & \text{if } H \text{ has finite index} \end{cases}.$$

2 预备知识

设 $G = \langle A \rangle$ 是一个有限生成群， A 是一个有限生成集， $\Sigma = A \cup A^{-1}$ 和$\pi : \Sigma^* \to G$ 是典范（满射）同态。

如果存在某个有理语言 $L \subseteq \Sigma^*$ 使得 $L\pi = K$ ，则称子集 $K \subseteq G$ 为有理的；如果 $K\pi^{-1}$ 是有理的，则称其为可识别的。

我们分别用 $\mathrm{Rat}(G)$ 和 $\mathrm{Rec}(G)$ 表示G的有理子集和可识别子集所构成的类。有理子集推广了有限生成子群的概念。

定理 2.1 ([3], 定理 III.2.7)。 设 H 是群 G的一个子群。那么， $H \in \mathrm{Rat}(G)$ 当且仅当 H 是有限生成的。

同样，可识别子集推广了有限指数子群的概念。

命题 2.2. 设 H 是群 G 的子群。那么 $H \in \mathrm{Rec}(G)$ 当且仅当 H 在 G 中具有有限指数。

事实上，若 G 是一个群，且 K 是 G 的子集，那么 K 可识别当且仅当 K 是有限指数子群的陪集的（有限）并。

若群 G 是以 A 为基的自由群，且有满同态 $\pi : \Sigma^* \to G$，给定 $L \subseteq \Sigma^*$，我们将表示 $L\pi$ 中元素的约化词所构成的集合定义为

$$\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is reduced and there exists } u \in L \text{ such that } u\pi = w\pi\}.$$

Benois 定理根据表示子集内元素的约化词，为有理子集提供了一种实用的刻画。

定理 2.3. [1, Benois]设 F 是以 A 为基的有限生成自由群，且令 $L \subseteq \Sigma^*$。那么，L 是 Σ^* 的有理语言，当且仅当 $L\pi$ 是 F 的有理子集。

设 Σ 为一个字母表。我们将语言 $L \subseteq \Sigma^*$ 的密度定义为

$$D(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{|L \cap \Sigma^n|}{|\Sigma^n|},$$

当其存在时。类似地，我们定义 $D_{\sup}(L)$ = 上极限 $_{n\to\infty} \frac{|L\cap\Sigma^n|}{|\Sigma^n|}$ 和 ~~$D_{\inf}(L)$~~ = 下极限 $_{n\to\infty} \frac{|L\cap\Sigma^n|}{|\Sigma^n|}$ ~~。~~ 由定义很容易得出：

1. 若 $L_1 \subseteq L_2$ 且 $D(L_1) = 1$，则 $D(L_2) = 1$；
2. 若 $D(L)$ 存在，则 $D(\Sigma^* \setminus L) = 1 - D(L)$。

如引言中所述，利用 [13, 定理 1.22 和 1.23], ，可以看出这与以下定义一致：

$$D^*(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} |L \cap \Sigma^i|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i|}.$$

无限猴子定理指出，对于任意 $s \in \Sigma^*$，都有 $D(\Sigma^* s \Sigma^*) = 1$。利用上述性质，可以很容易地由无限猴子定理得出以下定理。

定理 2.4. 设 $L \subseteq \Sigma^*$。若对于某个 $s \in \Sigma^*$，有 $\Sigma^* s \Sigma^* \cap L = \emptyset$，则 $D(L) = 0$。

该定理的逆命题一般不成立，但若 L 是有理的，则逆命题成立（见 [18, 17]），如下述定理所示：

定理 2.5. 设 $L \subseteq \Sigma^*$ 是有理语言。以下条件等价：

对于某个 $s \in \Sigma^*$，有 • $\Sigma^* s \Sigma^* \cap L = \emptyset$；

- $D(L) = 0$。

文献 [9] 给出了定理 2.5 的一个简洁、自足的证明。

3 相对密度

本节旨在证明一些关于相对密度的基本性质。给定两个语言 $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \Sigma^*$，我们将 L_1 相对于 L_2 的密度定义为

$$D(L_1 \mid L_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\Sigma^n \cap L_1|}{|\Sigma^n \cap L_2|},$$

若其存在。与密度的情形类似，我们定义 $D_{\sup}(L_1 \mid L_2)$ =上极限，以及 $D_{\inf}(L_1 \mid L_2)$ =下极限$_{n\to\infty}\frac{|\Sigma^n\cap L_1|}{|\Sigma^n\cap L_2|}$。

与简单情形类似，我们可以定义相对于语言L_2 的累积密度为

$$D^*(L_1 \mid L_2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap L_1|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap L_2|}.$$

在满足对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $L_2 \cap \Sigma^n \neq \emptyset$ 的情形下，以及

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap L_2|}{\sum_{i=0}^{n+1} |\Sigma^i \cap L_2|} = b$$

对于实数 $b \neq 1$，我们仍可应用 [13, 定理 1.22 和 1.23]，得到：$D(L_1 \mid L_2)$ 存在，当且仅当 $D^*(L_1 \mid L_2)$ 存在；并且在二者都存在时，这两个概念相同。由于我们主要讨论 L_2 为自由群中约化词语言的情形，因此就我们的目的而言，这两个概念可以互换使用。然而，对于 $D_{\sup}(L_1 \mid L_2)$（分别为 $D_{\inf}(L_1 \mid L_2)$）和 $D^*_{\sup}(L_1 \mid L_2)$（分别为 $D^*_{\inf}(L_1 \mid L_2)$），情况并非如此，这一点稍后将会清楚。

引理 3.1. 设 $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ 是语言，满足 $L_1 \cup L_2 \subseteq L_3$。则以下结论成立：

- $D_{\sup}(L_1 \mid L_3) = 0 \iff D(L_1 \mid L_3) = 0$;
- $D_{\sup}(L_1 \cup L_2 \mid L_3) \leq D_{\sup}(L_1 \mid L_3) + D_{\sup}(L_2 \mid L_3)$.

证明。显然，$D(L_1 \mid L_3)$ 蕴含 $D_{\sup}(L_1 \mid L_3) = 0$。逆命题由以下事实可得：序列 $(a_n)_n$，其中 $a_n = \frac{|\Sigma^n\cap L_1|}{|\Sigma^n\cap L_3|}$ 非负，因此若上确界$_{n\to\infty} a_n = 0$，则 $0 \leq$ 下极限$_{n\to\infty} a_n \leq$ 上确界$_{n\to\infty} a_n = 0$，故极限$_{n\to\infty} a_n = 0$。

第二个断言很容易由以下事实推出：$|\Sigma^n \cap (L_1 \cup L_2)| \leq |\Sigma^n \cap L_1| + |\Sigma^n \cap L_2|$.

□

引理 3.2. 设 $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ 是语言，满足 $L_1 \subseteq L_2$。则，$D(L_1 \mid L_2) = 0 \iff D(L_2 \setminus L_1 \mid L_2) = 1$。

证明。假设 $D(L_1 \mid L_2) = 0$，也就是说，

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n > N_\varepsilon,\ \frac{|\Sigma^n \cap L_1|}{|\Sigma^n \cap L_2|} < \varepsilon.$$

令 $\varepsilon > 0$，并取 $n > N_\varepsilon$。我们有

$$\frac{|\Sigma^n \cap (L_2 \setminus L_1)|}{|\Sigma^n \cap L_2|} = \frac{|\Sigma^n \cap L_2| - |\Sigma^n \cap L_1|}{|\Sigma^n \cap L_2|} = 1 - \frac{|\Sigma^n \cap L_1|}{|\Sigma^n \cap L_2|} > 1 - \varepsilon.$$

因此，

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n > N_\varepsilon,\ \frac{|\Sigma^n \cap (L_2 \setminus L_1)|}{|\Sigma^n \cap L_2|} > 1 - \varepsilon.$$

由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\left(\frac{|\Sigma^n\cap L_2\setminus L_1|}{|\Sigma^n\cap L_2|} < 1\right)$，因此可得 $D(L_2 \setminus L_1 \mid L_2) = 1$。

现在，假设 $D(L_2 \setminus L_1 \mid L_2) = 1$。那么，

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n > N_\varepsilon,\ \frac{|\Sigma^n \cap (L_2 \setminus L_1)|}{|\Sigma^n \cap L_2|} > 1 - \varepsilon.$$

令 $\varepsilon > 0$，并取 $n > N_\varepsilon$。我们有

$$\frac{|\Sigma^n \cap L_1|}{|\Sigma^n \cap L_2|} = 1 - \left(\frac{|\Sigma^n \cap L_2|}{|\Sigma^n \cap L_2|} - \frac{|\Sigma^n \cap L_1|}{|\Sigma^n \cap L_2|}\right) = 1 - \frac{|\Sigma^n \cap (L_2 \setminus L_1)|}{|\Sigma^n \cap L_2|} > 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon,$$

因此 $D(L_1 \mid L_2) = 0$. □

我们现在证明，如果一种语言 L_1 的密度为 1，而另一种语言 L_2 是可见的，也就是说它具有正密度，那么交集 $L_1 \cap L_2$ 在 L_2中的密度为 1；而如果 L_2 的密度为 0，则情况并非如此。

命题 3.3. 设 $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ 是语言。若 $D(L_1) = 1$ 且 $D(L_2) = a > 0$，则$D(L_1 \cap L_2 \mid L_2) = 1$。

证明。 假设 $D(L_1) = 1$ 且 $D(L_2) = a > 0$，也就是说，

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \; \forall n > N_\varepsilon, \; \frac{|\Sigma^n \cap L_1|}{|\Sigma^n|} > 1 - \varepsilon. \tag{1}$$

and

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N} : \; \forall n > N'_\varepsilon, \; a - \varepsilon < \frac{|\Sigma^n \cap L_2|}{|\Sigma^n|} < a + \varepsilon. \tag{2}$$

我们要证明

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} : \; \forall n > M_\varepsilon, \; \frac{|\Sigma^n \cap L_1 \cap L_2|}{|\Sigma^n \cap L_2|} > 1 - \varepsilon.$$

设 $0 < \varepsilon < \frac{2}{3}$，并取 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon a$和 $0 < \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon a - \varepsilon_1}{2 - \varepsilon}$。~~令~~ $M_\varepsilon > \max\{N_{\varepsilon_1}, N'_{\varepsilon_2}\}$，并设 $n > M_\varepsilon$。那么，

$$\begin{aligned}
|\Sigma^n \cap L_1 \cap L_2| &= |\Sigma^n \cap L_2| - |\Sigma^n \cap L_1^c \cap L_2| \\
&\geq |\Sigma^n \cap L_2| - |\Sigma^n \cap L_1^c| \\
&> |\Sigma^n|(a - \varepsilon_2) - |\Sigma^n \cap L_1^c| \\
&> |\Sigma^n|(a - \varepsilon_1 - \varepsilon_2).
\end{aligned}$$

因此可得

$$\begin{aligned}
\frac{|\Sigma^n \cap L_1 \cap L_2|}{|\Sigma^n \cap L_2|} &> \frac{|\Sigma^n|(a - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{|\Sigma^n \cap L_2|} \\
&> \frac{a - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{a + \varepsilon_2} \\
&= 1 - \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{a + \varepsilon_2} \\
&= 1 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon\varepsilon_2 + (2 - \varepsilon)\varepsilon_2}{a + \varepsilon_2} \\
&> 1 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon\varepsilon_2 + \varepsilon a - \varepsilon_1}{a + \varepsilon_2} \\
&= 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

注 3.4. 我们可能有 $D(L_1) = 1$ 且 $D(L_1 \cap L_2 \mid L_2) = 0$。例如，若$\Sigma = \{a, b\}$、$L_1 = \Sigma^* b \Sigma^*$和 $L_2 = a^*$，则 $L_1 \cap L_2 = \emptyset$，因此 $D(L_1 \cap L_2 \mid L_2) = 0$，但根据定理 2.5，$D(L_1) = 1$。然而，前面的命题表明，如果 L_2 具有正密度，这种情况就不可能发生。

4 有限型子移位

设 Σ 是一个有限字母表。我们考虑 $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ 上双向无限序列的集合 Σ。子移位 是 $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ 的一个闭子集，在移位操作 σ下保持不变；该操作将序列向左移动一

步，也就是说，如果 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，则移位定义为 $(\sigma(x))_i = x_{i+1}$。语言$\mathcal{L}(X)$ 子移位的 X 是 X 中各个词的所有有限子词所构成的集合。若一个字属于 $\Sigma^* \setminus \mathcal{L}(X)$，则称其为禁词。定义子移位的一种方法是固定一组禁词，并考虑 Σ 上所有不包含这些禁词的双向无限序列。如果一个子移位由有限组禁词定义，则称其为有限型 。若对于任意一对词 $u,\ v \in \mathcal{L}(X)$，都存在 $w \in \mathcal{L}(X)$，使得 $uwv \in \mathcal{L}(X)$，则称子移位 X 是不可约的 。子移位 X 的熵 定义为

$$h(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(|\Sigma^n \cap \mathcal{L}(X)|)}{n}.$$

如果对于每个子移位 $Y \subsetneq X$，都有 $h(Y) < h(X)$，则称该子移位为熵极小。不可约有限型子移位是熵极小子移位的例子。不可约有限型子移位 X 的熵为 $\log(\lambda)$，其中 λ 是其所共轭的边移位的邻接矩阵的主特征值（或 Perron-Frobenius 特征值）。有关符号动力系统的更多细节，请参阅 [12]。

现在我们将证明，对于一个包含于另一个的两个有限型子移位，较小者的语言相对于较大者的语言的密度为 0。

定理 4.1. 设 X_1, X_2 是不可约有限型子移位，且满足 $X_1 \subsetneq X_2$。那么$D(\mathcal{L}(X_1) \mid \mathcal{L}(X_2)) = 0$。

证明。我们有，存在 $\lambda_1 < \lambda_2$ 使得 $\log(\lambda_1) = h(X_1) < h(X_2) = \log(\lambda_2)$。因此，$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(|\Sigma^n \cap \mathcal{L}(X_1)|)}{n} = \log(\lambda_1)$，这意味着，对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在一个整数 N_1，使得对于所有 $n > N_1$，$\log(\lambda_1) - \varepsilon < \frac{\log(|\Sigma^n \cap \mathcal{L}(X_1)|)}{n} < \log(\lambda_1) + \varepsilon$，也就是说 $\lambda_1^n e^{-n\varepsilon} < |\Sigma^n \cap \mathcal{L}(X_1)| < \lambda_1^n e^{n\varepsilon}$。同理，对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在某个 N_2，使得对于所有 $n > N_2$，$\lambda_2^n e^{-n\varepsilon} < |\Sigma^n \cap \mathcal{L}(X_2)| < \lambda_2^n e^{n\varepsilon}$。因此我们得到，对于所有 $\varepsilon > 0$，取$N = \max\{N_1, N_2\}$和 $n > N$，

$$0 \le \frac{|\Sigma^n \cap \mathcal{L}(X_1)|}{|\Sigma^n \cap \mathcal{L}(X_2)|} < \frac{\lambda_1^n e^{n\varepsilon}}{\lambda_2^n e^{-n\varepsilon}} = \left(\frac{\lambda_1 e^{2\varepsilon}}{\lambda_2}\right)^n.$$

特别地，对于 $\varepsilon < \frac{\log(\lambda_2)-\log(\lambda_1)}{2}$，我们得到 $\frac{\lambda_1 e^{2\varepsilon}}{\lambda_2} < 1$，因此 $\left(\frac{\lambda_1 e^{2\varepsilon}}{\lambda_2}\right)^n \to 0$。于是，$D(\mathcal{L}(X_1) \mid \mathcal{L}(X_2)) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\Sigma^n \cap \mathcal{L}(X_1)|}{|\Sigma^n \cap \mathcal{L}(X_2)|} = 0$ □

5 自由群

现在我们将重点讨论自由群的子集。我们将利用关于子移位的前一结果，为约化词证明一个版本的无限猴子定理，并证明约化词的有理语言所满足的逆命题。我们利用这一结果证明，任意元素的自同构轨道的自然密度均为 0，从而推广了 Burillo-Ventura 关于本原元素的结果 [6]，并描述非阿贝尔自由群中具有正密度的有理子集。随后，我们将重点讨论子群情形，描述其中具有正密度的子群，以及密度存在收敛的子群。

首先，我们利用定理 4.1 证明一个适用于约化词的无限猴子定理的类比。换言之，我们证明，只写约化词的猴子最终会以概率 1 写出任意一个约化词。我们指出，根据无限猴子定理，约化词语言的密度为 0，因为没有约化词包含形如 aa^{-1} 的子词，因此这一结果不能直接从命题 3.3 得出（见注 3.4）。

我们用 $\mathrm{Red}(X)$ 表示 $\Sigma = X \cup X^{-1}$ 上所有自由约化词构成的语言。容易看出，$|\Sigma^n \cap \mathrm{Red}(X)| = 2|X|(2|X|-1)^{n-1}$，因为约化词的第一个字母有 $2|X|$ 种选择，而后续字母中只有一个会使该词不再约化，因此我们始终有 $2|X|-1$ 种选择。

推论 5.1. 设 $k \geq 2$、 $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ 和 $L \subseteq \mathsf{Red}(X)$。如果对于某个 $s \in \mathsf{Red}(X)$，有 $\Sigma^* s \Sigma^* \cap L = \emptyset$，那么 $D(L \mid \mathsf{Red}(X)) = 0$。

证明。令 X_2 为 Σ 上所有双无限约化词构成的集合，显然它是一个不可约有限型子移位；令 X_1 为 Σ 上所有避开 s 的双无限约化词构成的集合。那么 X_1 也是有限型子移位。现在我们来证明它是不可约的。为证明 X_1 不可约，取 u、$v \in \mathcal{L}(X_1)$、$m = |s|$，并令 s_{first} 和 s_{last} 分别表示 s 的首字母和末字母。由于 $|\Sigma| \geq 4$，我们可以选取 z，使得 uz 是约化的且 $z \notin \{s_{\text{first}}, s_{\text{last}}\}$。类似地，我们选取 y，使得 zyv 是约化的且 $y \neq s_{\text{first}}$。字 $uz^m y^m v$ 是约化的，且避开 s。事实上，s 的一次出现不可能从 u 内部开始，因为它不可能在 u 内结束（这是因为 s 不是 u 的子词）；它也不可能在 z 中结束，因为 $z \neq s_{\textbf{last}}$；它不可能从 z 或 y 中开始，因为 $z \neq s_{\text{first}}$ 和 $y \neq s_{\text{first}}$；它也不可能从 v 内部开始，因为 s 不是 v 的子词。因此，由定理 4.1，$D(\mathcal{L}(X_1) \mid \mathcal{L}(X_2)) = 0$。

但是 $\mathcal{L}(X_2) = \mathsf{Red}(X)$，因为显然每个约化词都可以扩展为一个双无限约化词。现在我们将证明 $L \subseteq \mathcal{L}(X_1)$，由此可得

$$D(L \mid \mathrm{Red}(X)) = D(L \mid \mathcal{L}(X_2)) \leq D(\mathcal{L}(X_1) \mid \mathcal{L}(X_2)) = 0.$$

为此，只需证明任何一个不含 s 的约化词都可以扩展为 X_1中的一个字，也就是说，扩展为一个不含 s的双无限约化词。设 u是这样的一个字，u_1 是 u 的最长前缀，且也是 s的后缀；u_3 是 u的最长后缀，且也是 s 的前缀；并设 u_2满足 $u = u_1 u_2 u_3$。由于 $X \geq 2$，总能找到字母 a、$b \in \Sigma$，使得 au_1 和$u_3 b$ 是约化的，au_1 不是 s 的后缀，且 $u_3 b$ 不是 s的前缀。此外，还存在字母x、$y \in \Sigma$，它们分别不同于 s 的最后一个和第一个字母，并且使得 $xau_1u_2u_3by$ 是约化的。我们声称，双无限字 $\cdots xxxau_1u_2u_3byyy\cdots$是约化的，且不含 s，也就是说，它属于 X_1。根据 x、a、b 和 y 的选取，该字是约化的。因子 $u = u_1u_2u_3$ 不含 s，因为 $u \in L$。由于 y 不是 s的第一个字母，因此若 s 出现，它必定从 b之前开始。由于 u_3b 不是 s 的前缀，且 u_3是 s 的最长前缀，同时也是 u的后缀，因此若 s出现，它必定从u之前开始。然而，按照类似的推理，由于 x 不是 s的最后一个字母，这种出现必定在 u内部结束；但这是不可能的，因为 u_1 是 u 的最长前缀，同时也是 s 的后缀，而 au_1 不是 s的后缀。

□

我们可以用显而易见的方式定义 $D^*_{\sup}(L \mid \mathsf{Red}(X))$ 和 $D^*_{\inf}(L \mid \mathsf{Red}(X))$。我们指出，尽管 $D(L \mid \mathsf{Red}(X)) = D^*(L \mid \mathsf{Red}(X))$，但 $D^*_{\sup}(L \mid \mathsf{Red}(X))$（分别是 $D^*_{\inf}(L \mid \mathsf{Red}(X))$）可能与 $D_{\sup}(L \mid \mathsf{Red}(X))$（分别是 $D_{\inf}(L \mid \mathsf{Red}(X))$）不一致。不过，正如下一个命题所示，正性不会改变。

命题 5.2. 设 $L \subseteq \mathsf{Red}(X)$ 是一个约化词语言。那么，$D^*_{\sup}(L \mid \mathsf{Red}(X)) = 0$ 当且仅当 $D_{\sup}(L \mid \mathsf{Red}(X)) = 0$。

证明。假设 $D_{\sup}(L \mid \mathsf{Red}(X)) = 0$，也就是说，$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\Sigma^n \cap L|}{|\Sigma^n \cap \mathrm{Red}(X)|} = 0.$ 因此，我们有

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ : \forall n > N,\ \frac{|\Sigma^n \cap L|}{|\Sigma^n \cap \mathrm{Red}(X)|} < \varepsilon.$$

现在，设 $\varepsilon > 0$和 M满足：对所有 $n \geq M$，$\frac{|\Sigma^n \cap L|}{|\Sigma^n \cap \mathrm{Red}(X)|} < \frac{\varepsilon}{2}$，。另外，设 M'满足 $\frac{\sum_{i=0}^{M} |\Sigma^i \cap L|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} < \frac{\varepsilon}{2}$，并令 $N =$为最大值 $\{M, M'\}$，且令 $n > N$。我们将证明

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap L|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} < \varepsilon,$$

从而表明

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ : \forall n > N,\ \frac{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap L|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} < \varepsilon,$$

也就是说， $D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = \text{上极限}_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap L|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} = 0$。我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap L|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} &= \frac{\sum_{i=0}^{M} |\Sigma^i \cap L| + \sum_{i=M+1}^{n} |\Sigma^i \cap L|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} \\
&\le \frac{\sum_{i=0}^{M} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)| + \sum_{i=M+1}^{n} |\Sigma^i \cap L|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} \\
&\le \frac{\sum_{i=0}^{M} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)| + \sum_{i=M+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} \\
&\le \frac{\sum_{i=0}^{M} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sum_{i=M+1}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

为证明逆命题，假设

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; : \forall n > N, \; \frac{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap L|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} < \varepsilon.$$

设 $\varepsilon > 0$和 $N \in \mathbb{N}$满足：对所有 $n > N$，都有 $\frac{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap L|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} < \frac{2}{3}\varepsilon$。若存在 $n > N$使得 $\frac{|\Sigma^n \cap L|}{|\Sigma^n \cap \mathrm{Red}(X)|} \ge \varepsilon$，那么

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap L|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} &\ge \frac{|\Sigma^n \cap L|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} \\
&\ge \frac{\varepsilon |\Sigma^n \cap \mathrm{Red}(X)|}{\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i \cap \mathrm{Red}(X)|} \\
&= \varepsilon \frac{2|X|(2|X|-1)^{n-1}}{\frac{|X|(2|X|-1)^n - 1}{|X|-1}} \\
&> \varepsilon \frac{2|X|(2|X|-1)^{n-1}}{\frac{|X|(2|X|-1)^n}{|X|-1}} \\
&= \varepsilon \frac{2|X|-2}{2|X|-1} \\
&\ge \frac{2}{3}\varepsilon,
\end{aligned}$$

这与 N的选取相矛盾。 □

在 [6], 中，作者将有限生成群 G 的子集 $S \subseteq G$ 相对于有限生成集 X 的自然密度 定义为

$$\delta_X(S) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|S \cap B_X(n)|}{|B_X(n)|},$$

其中， $B_X(n)$表示相对于 X、以单位元为中心、半径为 n 的球。他们接着证明，自由群的本原字集合的密度为 0。

现在我们证明一个有用的引理，以实现本节的目标，即证明非阿贝尔自由群中一个元素的自同构轨道的密度为 0。

引理 5.3. 设 $X=\{x_1,\dots,x_k\}$ 是非阿贝尔自由群 F_k 的一组基，$S\subseteq F_k$ 是 F_k 的一个子集，使得 $\delta(S)=0$，并令

$$S'=\{u^{-1}su \mid u\in F_k,\, s\in S,\ \text{and } u^{-1}su \text{ is reduced}\}$$

是所有循环约化核心属于 S 的词的集合。那么 $\delta(S')=0$。

证明。设 $\overline{S}$ 和 $\overline{S'}$ 分别为表示 S 和 S' 中元素的约化词语言。注意，由于约化词的长度与其循环约化核心的长度具有相同的奇偶性，并且将词置于循环约化核心左侧会迫使其右侧出现的字母作出相应选择，因此对于 $n\in\mathbb{N}$,

$$|\Sigma^{2n+1}\cap\overline{S'}|=\sum_{i=0}^{n}|\Sigma^{2i+1}\cap\overline{S}|(2k-1)^{n-i}\quad\text{and}\quad|\Sigma^{2n}\cap\overline{S'}|=\sum_{i=1}^{n}|\Sigma^{2i}\cap\overline{S}|(2k-1)^{n-i}.$$

为证明 $\delta(S')=D^*_{\sup}(S'\mid\overline{\mathrm{Red}(X)})=0$，我们将证明 $D_{\sup}(S'\mid\overline{\mathrm{Red}(X)})=0$；根据命题 5.2，这就足够了。我们将看到 $\frac{|\Sigma^n\cap S'|}{|\Sigma^n\cap X\mathrm{Red}()|}$ 的偶子序列和奇子序列都收敛于 0。我们先看奇数情形，即证明

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{|\Sigma^{2n+1}\cap\overline{S'}|}{|\Sigma^{2n+1}\cap\mathrm{Red}(X)|}=0.$$

令 $\varepsilon>0$。由于 $\delta(S)=0$，因此 $D^*_{\sup}(\overline{S}\mid\overline{\mathrm{Red}(X)})=0$，于是根据命题 5.2，$D_{\sup}(S\mid\overline{\mathrm{Red}(X)})=0$。因此，存在某个 $M\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $n>M$，$\frac{|\Sigma^{2n+1}\cap S|}{|\Sigma^{2n+1}\cap X\mathrm{Red}()|}<\frac{\varepsilon}{2}\frac{2k-2}{2k-1}()$。现在，对于所有 $n>M$，以及足够大的 n，使得 $\sum_{i=0}^{M}\frac{|\Sigma^{2i+1}\cap S|}{2k\,2k-1}()^{n+i}<\frac{\varepsilon}{2}$，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{|\Sigma^{2n+1}\cap\overline{S'}|}{|\Sigma^{2n+1}\cap\mathrm{Red}(X)|}&=\frac{\sum_{i=0}^{n}|\Sigma^{2i+1}\cap\overline{S}|(2k-1)^{n-i}}{2k(2k-1)^{2n}}\\
&=\frac{\sum_{i=0}^{M}|\Sigma^{2i+1}\cap\overline{S}|(2k-1)^{n-i}+\sum_{i=M+1}^{n}|\Sigma^{2i+1}\cap\overline{S}|(2k-1)^{n-i}}{2k(2k-1)^{2n}}\\
&=\sum_{i=0}^{M}\frac{|\Sigma^{2i+1}\cap\overline{S}|}{2k(2k-1)^{n+i}}+\sum_{i=M+1}^{n}\frac{|\Sigma^{2i+1}\cap\overline{S}|}{2k(2k-1)^{2i}}\frac{1}{(2k-1)^{n-i}}\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon\frac{2k-2}{2(2k-1)}\sum_{i=M+1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^{n-i}}\\
&=\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon\frac{2k-2}{2(2k-1)}\sum_{i=0}^{n-M-1}\frac{1}{(2k-1)^{i}}\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon\frac{2k-2}{2(2k-1)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{i}}\\
&=\varepsilon
\end{aligned}$$

类似地，对于偶数情形，我们旨在证明

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{|\Sigma^{2n}\cap\overline{S'}|}{|\Sigma^{2n}\cap\mathrm{Red}(X)|}=0.$$

给定 $\varepsilon>0$，我们利用如下事实：$D_{\sup}(\overline{S}\mid\mathrm{Red}(X))=0$ 来求出 $M'\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n>M'$，都有 $\frac{|\Sigma^{2n}\cap S|}{|\Sigma^{2n}\cap\mathrm{Red}(X)|}<\frac{\varepsilon}{2}\frac{2k-2}{2k-1}()$。对于 n 充分大，使得 $\sum_{i=1}^{M'}\frac{|\Sigma^{2i}\cap S|}{2k\,2k-1}()^{n+i-1}<$

$\frac{\varepsilon}{2}$，我们有：

$$\begin{aligned}\frac{|\Sigma^{2n}\cap\overline{S'}|}{|\Sigma^{2n}\cap\mathrm{Red}(X)|} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}|\Sigma^{2i}\cap\overline{S}|(2k-1)^{n-i}}{2k(2k-1)^{2n-1}}\\ &= \sum_{i=1}^{M'}\frac{|\Sigma^{2i}\cap\overline{S}|}{2k(2k-1)^{n+i-1}} + \sum_{i=M'+1}^{n}\frac{|\Sigma^{2i}\cap\overline{S}|}{2k(2k-1)^{2i-1}}\frac{1}{(2k-1)^{n-i}}\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon\frac{2k-2}{2(2k-1)}\sum_{j=0}^{n-M'-1}\frac{1}{(2k-1)^{j}}\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon\frac{2k-2}{2(2k-1)}\frac{2k-1}{2k-2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

由于奇子序列和偶子序列都收敛于 0，因此 $D_{\sup}(S' \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$。由命题 5.2 可得 $\delta(S') = 0$。

□

如果一个字不是任何循环约化本原字的子词，就称它为 阻碍本原性的 字。怀特黑德的工作 [20]表明，非阿贝尔自由群中存在阻碍本原性的字（另见 [8]）。事实上，在 [8], 中，作者证明了：对于任意元素 $w \in F_k$，都存在某个元素 $g \in F_k$，使得 w在 F_k 的任一自同构下的循环约化像都不包含 g 作为子词。

因此，推论 5.1、命题 5.2 和前述引理共同给出了一个语言理论证明，说明非阿贝尔自由群中元素的自同构轨道具有零密度；这一结论推广了 Burillo-Ventura 关于本原词的结果。

推论 5.4. 令 g 为非阿贝尔自由群 F_k 的一个元素， S' 为 g 在 F_k的某个自同构下的像集。那么 $\delta(S') = 0$。

证明. 令 S 为 g的循环约化自同构像集， L 为表示 S 中元素的约化词所构成的语言， s 为 g的一个轨道阻碍字。我们有 $\Sigma^* s\Sigma^* \cap L = \emptyset$，因此，根据推论 5.1， $D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$，这意味着，根据命题 5.2，$D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$，并且 $\delta(S') = D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$。注意到，由引理 5.3 可得结果

$$S' = \{u^{-1}su \mid u \in F_k,\, s \in S,\ \text{and } u^{-1}su \text{ is reduced}\}$$

。事实上，任何形如 uwu^{-1} 且满足 $w \in S$ 的约化词都属于 S'，因为根据 S的定义，存在一个自同构 ϕ使得 $g\phi = w$，因此 $uwu^{-1} = g\phi\lambda_u \in S'$，其中 λ_u表示由 u给出的内自同构。反之，若 $z \in S'$，则存在某个自同构 ϕ 使得 $z = g\phi$。此外，对于某个循环约化字 u和 $u = z\lambda_{w^{-1}} = g\phi\lambda_{w^{-1}} \in S$，有 $z = w^{-1}uw$ 。

□

推论 5.5. 令 S 为非阿贝尔自由群 F_n的本原元素集合。那么$\delta(S) = 0$。

5.1 有理子集

设 F_n是一个基为 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$的自由群， $\Sigma = X \cup X^{-1}$是一组幺半群生成元，且 π：$\Sigma^* \to F_n$ 是典范满同态。

遵循 Koga 的方法，我们现在可以在相对于自由群中约化词的相对密度这一背景下，证明定理 2.5 的一个类似结果。

给定 $a \in \Sigma$ 和 $L \subseteq \Sigma^*$，我们令 $a^{-1}L = \{y \in \Sigma^* \mid ay \in L\}$ 和 $La^{-1} = \{y \in \Sigma^* \mid ya \in L\}$。我们首先介绍来自 [9] 的一个引理，并证明一个关于约化词的类似 [9, 引理 2.2] 。

引理 5.6. [9, 定理 2.3] 设 $L \subseteq \Sigma^*$ 为有理语言。则存在 $p \geq 1$，使得以下两个条件成立：

$$\forall x, y \in \Sigma^* \ [xy \in L \implies \exists x' \in \Sigma^{<p} \ [x'y \in L]]$$
$$\forall x, y \in \Sigma^* \ [yx \in L \implies \exists x' \in \Sigma^{<p} \ [yx' \in L]].$$

引理 5.7. 对于任意的 $x \in \mathsf{Red}(X)$ 和 $L \subseteq \mathsf{Red}(X)$，以下结论成立：

- $D_{\text{上确界}}(x^{-1}L \mid \mathsf{Red}(X)) \leq D_{\text{上确界}}(L \mid \mathsf{Red}(X))(2|X|-1)^{|x|}$;
- $D_{\text{下确界}}(x^{-1}L \mid \mathsf{Red}(X)) \leq D_{\text{下确界}}(L \mid \mathsf{Red}(X))(2|X|-1)^{|x|}$;
- $D_{\text{上确界}}(Lx^{-1} \mid \mathsf{Red}(X)) \leq D_{\text{上确界}}(L \mid \mathsf{Red}(X))(2|X|-1)^{|x|}$;
- $D_{\text{下确界}}(Lx^{-1} \mid \mathsf{Red}(X)) \leq D_{\text{下确界}}(L \mid \mathsf{Red}(X))(2|X|-1)^{|x|}$.

证明。 我们首先证明

$$D_{\sup}(x(x^{-1}L) \mid \mathrm{Red}(X)) = D_{\sup}(x^{-1}L \mid \mathrm{Red}(X)) \cdot (2|X|-1)^{-|x|}. \tag{3}$$

注意，$x(x^{-1}L) \subseteq L \subseteq \mathsf{Red}(X)$，并且 $x^{-1}L \subseteq \mathsf{Red}(X)$，因为 $\mathsf{Red}(X)$ 是因子闭的。令 $n > |x|$。则 $x(x^{-1}L) \cap \Sigma^n = x\left((x^{-1}L) \cap \Sigma^{n-|x|}\right)$，因此

$$\begin{aligned}
\frac{|(x(x^{-1}L) \cap \Sigma^n|}{|\Sigma^n \cap \mathrm{Red}(X)|} &= \frac{|x\left((x^{-1}L) \cap \Sigma^{n-|x|}\right)|}{2|X|(2|X|-1)^{n-1}} \\
&= \frac{|x^{-1}L \cap \Sigma^{n-|x|}|}{2|X|(2|X|-1)^{n-|x|-1}} \cdot \frac{1}{(2|X|-1)^{|x|}} \\
&= \frac{|x^{-1}L \cap \Sigma^{n-|x|}|}{|\Sigma^{n-|x|} \cap \mathrm{Red}(X)|} \cdot \frac{1}{(2|X|-1)^{|x|}}.
\end{aligned}$$

对两边取上极限$n\to\infty$，得到 (3)。

现在，由于 $D_{\sup}\ x^{-1}L \mid \quad X \ \cdot\ 2|X|-1\ ^{-|x|} \qquad x \qquad = (x^{-1}L) \subseteq L,$

我们有 $D_{\sup}(L \mid \mathsf{Red}(X)) \geq D_{\sup}(\,(x^{-1}L) \mid \mathsf{Red}(X))\,(\,\mathsf{Red}(\,))\,(\,)$，因此，

$$D_{\sup}(x^{-1}L \mid \mathrm{Red}(X)) \leq (2|X|-1)^{|x|} D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)).$$

Lx^{-1} 和 $D_{\inf}$ 的情形类似。 □

现在我们可以证明约化词情形下的定理 2.5。

定理 5.8。 设 $L \subseteq \mathsf{Red}(X)$ 是有理语言，且 $N = \{w \in \mathsf{Red}(X) \mid \Sigma^* w \Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$。那么，以下命题等价：

1. $D^*_{\sup}(L \mid \mathsf{Red}(X)) = 0$; 2. $D_{\sup}(L \mid \mathsf{Red}(X)) = 0$; 3. $D(L \mid \mathsf{Red}(X)) = 0$; 4. $D(N \mid \mathsf{Red}(X)) = 0$; 5. $\exists w \in \mathsf{Red}(X) : \Sigma^* w \Sigma^* \cap L = \emptyset$.

证明。 1 与 2 的等价性由命题 5.2 得出，2 与 3 的等价性由引理 3.1 得出；蕴含关系 $5 \implies 3$ 由推论 5.1 给出，而显然 $4 \implies 5$。现在我们证明 $3 \implies 4$，也就是说，我们证明：若 $L \subseteq \mathsf{Red}(X)$ 是满足 $D(L \mid \mathsf{Red}(X)) = 0$ 且 $N = \{w \in \mathsf{Red}(X) \mid \Sigma^* w \Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$ 的有理语言，那么 $D(N \mid \mathsf{Red}(X)) = 0$.

令 L 为这样的语言。由引理 3.1 可得 $D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$。若 $N = \emptyset$，则结论成立。否则，令 $s \in N$。于是存在 $a,\ b \in \Sigma^*$ 使得 $asb \in L$；由引理 5.6（其中 $x = a$ 且 $y = sb$），这意味着存在某个 $a' \in \Sigma^{<p}$ 使得 $a'sb \in L$。现在再次应用引理 5.6（此时 $y = a's$ 且 $x = b$），可知必定存在某个 $b' \in \Sigma^{<p}$ 使得 $a'sb' \in L$。

因此，对于每个 $s \in N$，必定存在某个 $a,\ b \in \Sigma^{<p}$ 使得 $asb \in L$。等价地，对于所有 $s \in N$，存在 $a,\ b \in \Sigma^{<p}$ 使得 $s \in a^{-1}Lb^{-1}$。因此，

$$N \subseteq \bigcup_{a,b \in \Sigma^{<p}} a^{-1}Lb^{-1} \subseteq \mathrm{Red}(X),$$

所以，根据引理 5.7，

$$\begin{aligned} D_{\sup}(N \mid \mathrm{Red}(X)) &\leq D_{\sup}\left(\bigcup_{a,b \in \Sigma^{<p}} a^{-1}Lb^{-1} \mid \mathrm{Red}(X) \right) \\ &\leq \sum_{a,b \in \Sigma^{<p}} D_{\sup}(a^{-1}Lb^{-1} \mid \mathrm{Red}(X)) \\ &\leq \sum_{a,b \in \Sigma^{<p}} (2|X| - 1)^{|a|+|b|} D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

由于 $D_{\sup}(N \mid \mathrm{Red}(X)) \geq 0$，我们推得 $D_{\sup}(N \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$；根据引理 3.1，这意味着 $D(N \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$。 □

根据 Benois 定理，群的有理子集是约化词的有理语言。因此，用我们的术语来说，如果 L 是表示非阿贝尔自由群的给定有理子集 $S \in \mathrm{Rat}(F_X)$ 中各元素的约化词语言，那么

$$\delta(S) = D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)).$$

特别地，根据定理 5.8，$\delta(S) = 0$ 当且仅当 $D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$，而这又当且仅当 $D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$。利用前面的结果，我们可以描述自由群中具有正密度的有理子集。

给定一个由生成元组成的字 w，令 $\overline{w}$ 为表示与 w相同元素的约化词，也就是说，使得 $w\pi = \overline{w}\pi$。

定理 5.9. 设 $S \subseteq F_X$ 是非阿贝尔自由群的一个有理子集。那么 $\delta(S) > 0$当且仅当 F_X 存在某个 $k \in \mathbb{N}$和有限多个元素 $a_i, b_i \in F_X$，使得 $i \in [k]$满足 $F_X = \bigcup_{i,j \in [k]} a_i S b_j$。

证明. 假设 $\delta(S) > 0$。根据 Benois 定理，约化词语言 L 所表示的元素属于 S，且该语言是有理的。注意，$\delta(S) = D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X))$。令 $\mathcal{A} = \{Q, q_0, F, \delta\}$ 为识别 L的最小自动机。对于每个状态 $q \in Q$，取 $i_q, f_q \in \mathrm{Red}(X)$，使得

$$q_0 \xrightarrow{i_q} q \xrightarrow{f_q} q_f$$

是 $\mathcal{A}$中的一条游走，其中某个 $q_f \in F$。

我们断言 $F_X = \bigcup_{(q,q') \in Q \times Q} i_q^{-1} S f_q^{-1}$。令 $w \in \mathrm{Red}(X)$。由于 $D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) > 0$，根据定理 5.8，存在一些 $x, y \in \mathrm{Red}(X)$，使得 $xwy \in L$。令 $q, q' \in Q$ 满足

$$q_0 \xrightarrow{x} q \xrightarrow{w} q' \xrightarrow{y} q_f$$

是 $\mathcal{A}$ 中的一条路径，其中某个 $q_f \in F$。根据 i_q 和 $f_{q'}$ 的定义，词 $i_q w f_{q'}$ 也属于 L。因此，$w \in i_q^{-1} S f_{q'}^{-1}$。

反过来，设 S 是 F_X 的一个有理子集，使得对于某个 $k \in \mathbb{N}$，$F_X = \bigcup_{i,j\in[k]} a_i S b_j$，并且对于 $i \in [k]$，$a_i, b_i \in F_X$。令 L 为表示 S 中元素的约化词语言，根据 Benois 定理，该语言是有理的。假设 $\delta(S) = 0$，也就是说，

$$D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0.$$

我们将证明，在这种情况下，对于所有 $i, j \in K$，都有 $\delta(a_i S b_j) = 0$；由引理 3.1 可知，这意味着 $\delta(S) \leq \sum_{i,j\in[k]} \delta(a_i S b_j) = 0$，这就产生了矛盾。

对于 $i, j \in [k]$ 和 $s \in L$，我们有 $s = a_i^{-1}\overline{(a_i s b_j)}b_j^{-1}$，因此

$$|s| \leq |a_i| + |b_j| + |\overline{a_i s b_j}|.$$

因此，

$$|\Sigma^n \cap a_i S b_j| \leq |\Sigma^{n+|a_i|+|b_j|} \cap S|$$

and

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{|\Sigma^n \cap a_i S b_j|}{|\Sigma^n \cap \mathrm{Red}(X)|} &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|\Sigma^{n+|a_i|+|b_j|} \cap S|}{|\Sigma^n \cap \mathrm{Red}(X)|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{|\Sigma^{n+|a_i|+|b_j|} \cap S|}{|\Sigma^{n+|a_i|+|b_j|} \cap \mathrm{Red}(X)|} \right) \left(\frac{|\Sigma^{n+|a_i|+|b_j|} \cap \mathrm{Red}(X)|}{|\Sigma^n \cap \mathrm{Red}(X)|} \right) \\
&= (2k-1)^{|a_i|+|b_j|} \delta(S) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

所以 $\delta(a_i S b_j) = 0$。 □

5.2 有限生成子群

文献 [6] 证明，在对群 G 的增长作出某些假设的条件下，有限指数子群 H的密度为 $[G : H]^{-1}$ 并且在这种情况下，极限总是存在。然而，在自由群中，例如取由偶数长度的词构成的子群 H，可知 H是指数为二的子群。记 L为表示 H 中元素的约化词语言，则我们得到：但是 $D^*(L \mid \mathrm{Red}(\{a,b\}))$ 不存在，因为 $D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(\{a,b\})) = \frac{3}{4}$且 $D^*_{\inf}(L \mid \mathrm{Red}(\{a,b\})) = \frac{1}{4}$。

注 5.10. 这个子群为我们提供了一个例子，其中 $D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}\{a,b\}) \neq D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}\{a,b\})$ 且 $D_{\inf}(L \mid \mathrm{Red}\{a,b\}) \neq D^*_{\inf}(L \mid \mathrm{Red}\{a,b\})$；因为很容易看出，$D_{\inf}(L \mid \mathrm{Red}\{a,b\}) = 0$ 且 $D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}\{a,b\}) = 1$。

现在，我们给出一个语言理论证明：非阿贝尔自由群中具有正密度的子群恰好是有限指数子群。

推论 5.11. 设 $H \leq_{f.g.} F_X$ 是非阿贝尔自由群的一个有限生成子群。那么，当且仅当 H 的指数有限时，$\delta(H) > 0$。

证明. 根据定理 5.9，存在一个自然数 $k \in \mathbb{N}$ 以及有限多个元素 $a_i, b_i \in F_X$，满足 $i \in [k]$，使得

$$\begin{aligned}
F_X &= \bigcup_{i,j\in[k]} a_i H b_j \\
&= \bigcup_{i,j\in[k]} a_i b_j (b_j^{-1} H b_j)
\end{aligned}$$

根据诺伊曼的引理 [14, 引理 4.1], ，我们知道，如果 G 是有限个子群陪集的并集，那么所涉及的子群中至少有一个具有有限指数。由于

所有子群 $b_j^{-1}Hb_j$ 都彼此同构（且同构于 H），我们推得 H 具有有限指数。

反过来，如果 H 是有限指数子群，那么它的 Stallings 自动机就是饱和的，因此表示 H 中元素的约化词语言没有禁子词。 □

注 5.12。我们指出，正如有理子集推广了有限生成子群，可识别子集也推广了有限指数子群。然而，F_2 中存在具有正密度但不可识别的有理子集。例如，所有以 a 开头的约化词构成的集合 S 显然具有正密度，因为其中没有禁用的约化子词。容易看出，S 不可识别，因此具有正密度的有理子集严格推广了可识别子集的概念。

注意，在上面的例子中，虽然我们并没有 $D(L \mid \mathrm{Red}(\{a,b\})) = {}^{1}_{[F_2 : H]}$，但以下结论成立：

$$\frac{D_{\inf}(L \mid \mathrm{Red}(\{a,b\})) + D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(\{a,b\}))}{2} = \frac{1}{[F_2 : H]}.$$

我们将证明，这在非阿贝尔自由群中总是成立，并且当且仅当该有限指数子群含有一个奇数长度的词时，才有收敛；也就是说，当且仅当它不包含在 H 中时，才有收敛。

命题 5.13。设 $H \leq F_n$ 是一个自由群的子群，$\mathcal{G}$ 是其 Stallings 图。以下条件等价：

1. $H \leq F_n^{even}$；
2. $\mathcal{G}$ 中的所有闭合回路长度均为偶数；
3. $\mathcal{G}$ 是二部的。

证明。由于 $\mathcal{G}$ 是对应于 H的 Stallings 图，因此，若 $H \leq F_n^{even}$，则基点处的每个闭合回路长度都必须是偶数，进而所有闭合回路的长度都必须是偶数：如果 $\mathcal{G}$中的某处存在一个标记为 w 的奇数长度的环，由于 $\mathcal{G}$ 是连通的，我们就会得到一个基点处标记为 uwu^{-1} 的闭合路径，其长度为奇数。因此，我们已证明 $1 \Rightarrow 2$。

令 V 为 $\mathcal{G}$中的顶点集合。若 $\mathcal{G}$ 中的所有闭合回路长度均为偶数，则定义$E = \{v \in V \mid d(1, v)$ 为偶数$\}$ 且 $O = V \setminus E$。假设存在一条边 $p \xrightarrow{e} q$，其中$p,\ q \in E$。分别取从 1 到 p 以及从 q到 1 的测地路径 $u,\ v$（注意，u和 v 的长度均为偶数）。那么，$1 \xrightarrow{u} p \xrightarrow{e} q \xrightarrow{v} 1$ 是一个奇数长度的圈，这就矛盾了。类似地，若存在一条边 $p \xrightarrow{e} q$，其中 $p,\ q \in O$，并分别取从 1 到 p以及从 q到 1 的测地路径 $u,\ v$，则 $1 \xrightarrow{u} p \xrightarrow{e} q \xrightarrow{v} 1$ 是一个奇数长度的圈。因此 $2 \Rightarrow 3$。

现在我们证明 $3 \Rightarrow 1$。假设 $\mathcal{G}$ 是二部的。那么，$\mathcal{G}$ 的顶点集可以划分为两个集合 U 和 V，使得每条路径都在 U 中的顶点与 V 中的顶点之间交替经过。因此，一条从 U 出发的路径，在经过偶数步后位于 U，经过奇数步后位于V。所以，从基点出发的环长度必为偶数，因此 H 中的每个元素长度都必须为偶数。 □

我们考察有限指数子群 H 在非阿贝尔自由群中的 Stallings 图 $\mathcal{G}(V,\ E)$ 上的非回溯随机游走。注意，H 的 Stallings 图是饱和的，也就是说，对于每个顶点 v 和生成元 x，都存在一条以x 标记、端点为 v 的边（该边可以是入边，也可以是出边）。因此，任何约化词都可以从任意顶点读出。H 中的元素是标记闭合回路的约化词，这些闭合回路从基点 1 出发（并最终回到基点 1）。因此，令 L 为表示 H中元素的约化词语言，那么从基点出发，经过 n 步后仍停留在基点的概率恰好为 $\frac{|L \cap \Sigma^n|}{|\Sigma^n|}$. 。这一随机游走定义了一个马尔可夫链，其

状态空间为边的集合。状态的周期定义为从给定状态 e出发（并最终回到该状态）的所有环的长度的最大公约数。如果所有状态的周期都为 1，则称该随机游走是非周期的。

定理 5.14. 设 $H \leq F_n$ 是非阿贝尔自由群的一个有限指数子群， $\mathcal{G}$ 是其 Stallings 图。当且仅当 H 含有奇数长度的词时， $\mathcal{G}$ 上的非回溯随机游走才是非周期的；也就是说，当且仅当 $\mathcal{G}$ 不是二部图时，非回溯随机游走才是非周期的。否则，每条边的周期都是 2。

证明. 设 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 是自由群的基。假设存在某个顶点 v，使得所有从 v 出发的环的长度都是某个 $k \geq 3$ 的倍数，并且 z 是一个约化词，它标记了一条从 v 到基点的路径。

设 x_i 使得乘积 zx_iz^{-1} 是约化的。由于 H 的指数有限，对于每个 $g \in F_n$，都存在某个 $k \in \mathbb{N}$，使得 $g^k \in H$。取 m 使得 $x_i^m \in H$。此外， $x_i^{2m} \in H$，因此 $zx_i^mz^{-1}$ 和 $zx_i^{2m}z^{-1}$ 标记了从 v 出发的闭合路径。由于这些乘积是约化的，因此 $|zx_i^mz^{-1}| = 2|z| + m$ 和 $|zx_i^{2m}z^{-1}| = 2|z| + 2m.$。由此可得

$$\begin{cases} 2|z| + m \equiv_k 0 \\ 2|z| + 2m \equiv_k 0. \end{cases}$$

因此， $m \equiv_k 0$。

设 x_j^{ε} 是 z 的最后一个字母，其中 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ 和 n 满足 $(x_i^{-(m-1)}x_j^{-\varepsilon})^n \in H$。因此，乘积 $(x_i^m)(x_i^{-(m-1)}x_j^{-\varepsilon})^n = (x_ix_j^{-\varepsilon})(x_i^{-(m-1)}x_j)^{n-1}$ 也属于 H。注意， $z(x_i^m)(x_i^{-(m-1)}x_j^{-\varepsilon})^n z^{-1}$ 是一个约化词，它标记了一条从 v 出发的路径。因此，

$$2|z| + 2 + m(n-1) \equiv_k 0.$$

但 $2|z| \equiv_k -m \equiv_k 0$，因此我们得到 $2 \equiv_k 0$，由此可得 $k \in \{1, 2\}$。所以，任意状态的周期要么为 1，要么为 2。此外，这两种情况不能同时发生。事实上，若有奇数长度的环从 p 出发，且从顶点 q 出发的所有环都是偶数长度，令 z 标记一条从 q 到 p 的路径，并令 x 标记一条从 p 出发的奇数长度闭合路径。那么， zxz^{-1} 标记了一条从 q 出发的奇数长度路径，这显然矛盾。

如果 $\mathcal{G}$ 不是二部的，那么根据命题 5.13，存在一个奇数长度的圈。因此，并非所有边的周期都是 2，由此可知 $\mathcal{G}$ 是非周期的。如果 $\mathcal{G}$ 是二部的，那么所有圈的长度都是偶数；结合每条边的周期为 1 或 2 这一事实，可知每条边的周期都是 2。 □

约定 $\frac{1}{\infty} = 0$，现在我们可以证明，以球面上的密度计算时，子群的上确界密度与下确界密度的平均值总是 $\frac{1}{[G : H]}$。

定理 5.15。 设 L 是表示非阿贝尔自由群 F_n的子群H 中元素的约化词语言。那么

$$\frac{D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) + D_{\inf}(L \mid \mathrm{Red}(X))}{2} = \frac{1}{[F_n : H]}.$$

此外， $D(L \mid \mathrm{Red}(X))$ 存在，当且仅当 H 的指数为无限，或至少含有一个奇数长度的词。

证明。 若 H 的指数无限，则由推论 5.11， $D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = \delta(H) = 0$，因此由命题 5.2， $D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$。所以， $D_{\inf}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$，等式成立。

若 H 的指数有限，根据定理 5.14，其 Stallings 图上的非回溯随机游走 $\mathcal{G} = (V, E)$ 定义了一个周期为 1 或 2 的马尔可夫链。此外，该图是连通的，因此该马尔可夫链是不可约的。

若它是非周期的，也就是说， H 有一个奇数长度的词，那么它就会收敛到其平稳分布 [15, 定理 1.8。3]。因此，在这种情况下，

$$D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = D_{\inf}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = \frac{1}{|V|} = \frac{1}{[F_n : H]},$$

且等式成立。

如果不是，那么该图就是二部图，因此经过奇数步后，我们永远不会闭合成一个环。这意味着，如果 k 是奇数，那么 $\frac{|L \cap \Sigma^k|}{|\Sigma^k|} = 0$，因此

$$D_{\inf}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = \liminf_{k \to \infty} \frac{|L \cap \Sigma^k|}{|\Sigma^k|} = 0.$$

现在，我们的马尔可夫链的周期为 2，因此将使用周期马尔可夫链收敛定理 [15, 定理 1.8。5], , 由此可得，对所有 $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|\Sigma^{2k} \cap L|}{|\Sigma^{2k}|} = \frac{2}{m},$$

其中 m是返回基点的期望返回时间。每条以基点为终点的边的期望返回时间，等于其平稳分布的倒数 [11, 命题 1。14], 因此 $\frac{1}{|E|} = \frac{1}{n|V|} = \frac{1}{n[G : H]}$。对所有以基点为终点的边求和，可得返回基点的期望返回时间为 $[G : H]$。因此，我们推得

$$\frac{|\Sigma^{2k} \cap L|}{|\Sigma^{2k}|} = \frac{2}{[G : H]},$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。因此,

$$D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = \frac{2}{[G : H]},$$

由此得到所需的等式。 □

5.2.1 弱密度

在 [4], 中，作者给出了密度的另一种（较弱的）定义，即平均极限

$$d(L) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|\Sigma^i \cap L|}{|\Sigma^i|}.$$

这种密度定义比前一种更稳健。一方面，如果通常意义下的密度存在，那么较弱意义下的密度也存在，且取值相同[13, 推论 1。5], 但例如， [5, 第 3 节3] 给出了斐波那契移位中的一个例子：标准密度不收敛，而这种较弱的定义却收敛。

根据我们先前的工作可知，对于非阿贝尔自由群的有限指数子群，这种密度概念总是存在，而且确实是$[G : H]$。

将群的子集 K 的弱密度定义为 G

$$\Delta(K) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|B(i) \cap K|}{|B(i)|}.$$

我们将语言 L_1 相对于更大的语言 L_2 的弱密度定义为

$$d(L_1 \mid L_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|\Sigma^i \cap L_1|}{|\Sigma^i \cap L_2|}.$$

如上所述，若 K 是自由群的一个子集，且 L 是表示 K中元素的约化词语言，则有 $d(L \mid \mathrm{Red}(X)) = \Delta(K)$。

定理 5.16. 设 H 是非阿贝尔自由群 F_k的一个子群。那么

$$\Delta(H) = \begin{cases} 0 & \text{if } H \text{ has infinite index} \\ \frac{1}{[F_k:H]} & \text{if } H \text{ has finite index} \end{cases}$$

证明. 若 H 的指数无限，则由推论 5.11，$D^*_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = \delta(H) = 0$，因此由命题 5.2，$D_{\sup}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$。于是，$D_{\inf}(L \mid \mathrm{Red}(X)) = 0$，并且存在强意义下的收敛（因此也存在弱意义下的收敛）。

若 H 的指数有限，则它要么含有一个奇数长度的词，此时由定理 5.15 的证明可知，存在强意义下的收敛，因此也存在弱意义下的收敛；要么包含于 F^{even}，此时不存在强收敛。

因此，假设 H 具有有限指数且包含于 F^{even}，并令 L 为表示 H中元素的约化词语言。由定理 5.15 的证明可知，若 i 为奇数，则 ~~$\frac{|\Sigma^i \cap L|}{|\Sigma^i \cap} \mathrm{Red}(X)| = 0$，且序列 $\left(\frac{|\Sigma^{2i} \cap L|}{|\Sigma^{2i} \cap} \mathrm{Red}(X)|\right)_{i\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $\frac{2}{[F_k:H]}$~~。

令 $a_i = \frac{|\Sigma^i \cap L|}{|\Sigma^i \cap} \mathrm{Red}(X)|$。我们希望计算 $\Delta(H) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i$。考虑项数为偶数时的部分平均值 $n = 2m$:

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{2m-1} a_i = \frac{1}{2m} \left(\sum_{j=0}^{m-1} a_{2j} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{2j+1} \right) = \frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{m-1} a_{2j} + 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} a_{2j} \right).$$

由于 $a_{2j} \to \frac{2}{[F_k : H]}$，根据推论 1.5]，，其平均值也收敛到相同的极限。因此，

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{2m-1} a_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{[F_k : H]} = \frac{1}{[F_k : H]}.$$

对于项数为奇数 $n = 2m + 1$ 的情况，我们有:

$$\frac{1}{2m+1} \sum_{i=0}^{2m} a_i = \frac{2m}{2m+1} \left(\frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{2m-1} a_i \right) + \frac{a_{2m}}{2m+1}.$$

由于 $m \to \infty$，因子 $\frac{2m}{2m+1}$ 趋于 1；又因为序列 (a_i) 有界，所以项 $\frac{a_{2m}}{2m+1}$ 趋于 0。因此，极限相同。我们得出 $\Delta(H) = \frac{1}{[F_k : H]}$。 □

6 后续工作

现在我们提出两个由这项工作引出的问题。

第一个问题涉及定理 5.9（甚至是引理 3.1）在 $\delta_{\inf}$ 情况下的结论。具体而言，我们提出以下问题:

问题 6.1。 非阿贝尔自由群的哪些有理子集满足 S $\delta_{\inf}(S) > 0$? 是否存在有理子集 S，使得 $\delta_{\inf}(S) = 0$，但 $\delta(S) > 0$?

此外，值得考虑将其自然推广到其他类别的群（例如双曲群或自动群）。例如，某种具有唯一性的自动结构可以表示用于计算密度的语言。此外，自动群的有限指数子群也有 Stallings 自动机，其性质与自由群有限指数子群的 Stallings 自动机相似（见 [7, 定理 6.12]）。

Ques定理 6.2. 能否将类似结果推广到其他群类，例如双曲 群或自动群?

7 致谢

作者感谢 Corentin Bodart 对本文早期稿件提出的诸多建议。作者尤其感谢他指出非回溯随机游走与符号动力系统之间的联系，这一联系促成了定理 4.1 和 5.15。作者也感谢 Herman Goulet-Ouellet 提供的许多评论和参考文献，这些意见显著改进了本文。本研究获得国家经费支持，由 Fundaˌc˜ao para a Ciˆencia e Tecnologia（FCT）通过项目 UID/04674/2025 资助。

参考文献

[1] M. Benois. 自由群的有理部分。巴黎科学院报告，*S´*辑 *A*，269：1188– 1190，1969年。[2] J. Berstel. 形式语言的渐近密度。国际自动机、语言与编程研讨会（*ICALP, 1972*），荷兰北部出版社，法国：345– 358，1973年。[3] J. Berstel. 转换与上下文无关语言。Teubner，斯图加特，1979年。[4] J. Berstel、D. Perrin 和 C. Reutenauer. 编码与自动机。剑桥大学出版社，2009年。[5] V. Berth´e、H. Goulet-Ouellet、C.-F. Nyberg-Brodda、D. Perrin 和 K. Petersen. 移位空间中群语言的密度。*arXiv:2403.17892*，预印本，2024年。[6] J. Burillo 和 E. Ventura. 自由群中本原元素的计数。*Geom. Dedicata*，93：143–162，2002年。[7] O. Kharlampovich、A. Miasnikov 和 P. Weil. 拟凸子群的 Stallings 图。*J. Algebra*，488：442–483，2017 年。[8] L. Koch-Hyde、S. O'Connor、E. Olive 和 V. Shpilrain. 自由群中的轨道阻碍字。*J. Group Theory*，即将出版。[9] T. Koga. 关于正则语言的密度。*Fundam. Inform.*，168：45–49，2019年。[10] J. Kozik. 正则语言的条件密度。*Electronic Notes in TheoreticalComputer Science*，140：67–79，2005年。第二届计算逻辑与应用研讨会（CLA 2004）论文集。[11] D. A. Levin、Y. Peres 和 E. L. Wilmer. 马尔可夫链与混合时间。美国数学会，2009年。[12] D. Lind 和 B. Marcus. 符号动力系统与编码导论。剑桥大学出版社，1995年。

[13] M. Mure.san. 经典分析的具体方法。CMS 数学丛书，施普林格，2009年。[14] B. H. Neumann. 被可置换子集覆盖的群。《伦敦数学学会杂志》，1- 29(2)：236–248，1954年。[15] J. R. Norris. 马尔可夫链。剑桥大学出版社，1997年。[16]A. Salomaa 和 M. Soittola. 形式幂级数的自动机理论方面。施普林格纽约公司，锡考克斯，新泽西州，美国，1978年。[17] R. Sin'ya. 正则语言零一律的自动机理论方法：算法与逻辑方面。载于第六届博弈、自动机、逻辑与形式验证国际研讨会论文集，*GandALF 2015*，第172–185页，意大利热那亚，2015年9月。[18] R. Sin'ya. 正则语言的零一律。博士论文，东京工业大学，2016年。[19] M. C. H. Tointon. 无限群的交换概率。《伦敦数学学会杂志》，101(3)：1280–1297，2020年。[20] J. H. C. Whitehead. 关于自由群中元素的等价集合。*Ann. Math.*，37(4)：782–800，1936年。