arXiv:2603.28970v1 [math.QA] 30 Mar 2026

一般 Temperley–Lieb 范畴的 Drinfeld 中心

MOAAZ ALQADY

摘要。我们证明，当 q 不是单位根时，Temperley–Lieb 范畴 $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{C})$ 可嵌入融合范畴的超积中。由此，我们证明其 Drinfeld 中心是半单的，并描述其简单对象。典范函子

$$\mathbf{TL}\left(q;\ \mathbb{C}\right) \boxtimes \mathbf{TL}\left(q;\ \mathbb{C}\right)^{\mathrm{rev}} \boxtimes \mathbf{Rep}\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \to \mathcal{Z}\left(\mathbf{TL}\left(q;\ \mathbb{C}\right)\right),$$

由 Temperley–Lieb 范畴上的编织结构和 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–分次诱导，因此是一个幺半等价；将编织结构用某个双特征扭结后，该等价成为编织等价。在此过程中，我们在 Crumley、Harman 和 Flake–Harman–Laugwitz 先前工作的基础上，形式化了一些关于张量范畴超积和张量函子的一般结果。我们还讨论了 q 的一些特殊值下的中心。

目录

1. 引言 1
2. 张量范畴预备知识 3
3. Temperley–Lieb 范畴 9
4. $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{C})$ 在融合范畴的超积中 15
5. 泛 Temperley–Lieb 范畴的中心 16
6. 一些特殊情形与结语 22
附录 A. 工作中使用的超积 $\otimes$-范畴论学家 26
参考文献 32

1. 引言

对于任意张量范畴 $\mathcal{C}$，Joyal 和 Street [JoyStr], 基于 Drinfeld [Dri], 的工作，给出了一种构造带编织结构的张量范畴 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 的一般方法，称为其 Drinfeld 中心。这一构造促成了许多有趣的带编织结构的张量范畴的发现；这些范畴在现代数学中发挥着核心作用，应用领域涵盖统计力学、纽结和流形不变量、拓扑量子场论以及拓扑量子计算（例如，参见 [Tur], [BakKir], [Wan]）。尽管定义很简单（见定义 2.2），给定张量范畴的 Drinfeld 中心通常很难明确描述。对于$\mathcal{C}$ 是模张量范畴这一特殊情形， [DGNO] 证明了其中心有一种特别简洁的描述。有趣的是，直到现在，李代数 $\mathfrak{g}$的量子群表示范畴 $U_q(\mathfrak{g})$ 的 Drinfeld 中心仍未得到明确描述。本文的主要目标是在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 且 q 为泛型的情形下，完整描述这一中心，并提出一种探索其他李型对应中心的方法。众所周知，域 $\mathbb{K}$ 上的 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的 I 型表示范畴等价于 Temperley–Lieb 范畴 TL $(q;\ \mathbb{K})$，因此我们采用后者的图示版本。

在 [And]和 [AndPar], Andersen 和 Paradowski 描述了与给定单位根处任意量子群相关的某些融合范畴 q。具体而言，他们考虑了该量子群在 q处的倾斜模范畴的一个半单商。这些范畴也由 Reshetikhin 和 Turaev 在 [ResTur]

在 3-流形不变量的背景下。Verlinde 关于共形场论的研究中已经出现了 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 情形下的融合规则 [Ver]。对于量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$，这些范畴也可等价地描述为$\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K})$ 在单位根 $q \in \mathbb{K}$处的一个半单商。事实证明，当 q 是阶为 $2\varkappa$ 的本原单位根（ $\varkappa \geq 3$为整数）时，以这种方式构造的范畴是模张量范畴。我们将这些范畴记作 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$。

为了理解 Temperley–Lieb 范畴的中心，我们采用的方法是将 TL $(q;\ \mathbb{C})$“近似”为模张量范畴 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}$ 的一个“极限”。更确切地说，对于一般的 $q \in \mathbb{C}$，我们将 TL $(q;\ \mathbb{C})$ 表示为一族范畴 $\mathcal{A}_{\varkappa_i-1}(\mathbb{K}_i)$ 的超积的子范畴，其中 $\varkappa_i \to \infty$ ，且 $\operatorname{char} \mathbb{K}_i \to 0$。将超积用作取张量范畴极限的方法，最早由 Deligne 在其开创性论文[Del07]中提出；在该文中，他将超越数 $t \in \mathbb{C}$ 对应的范畴 Rep (S_t) 描述为整数 $n \to \infty$ 对应的 Rep (S_n) 的超积的子范畴。后来，Harman [Har] 将这一结果推广到代数 t 的情形，同时改变 n 和底域的特征。 [FHL] 利用这一超积描述，刻画了 Deligne 插值范畴 Rep (S_t) 的中心中的不可分解对象。这是表示论领域中一个罕见的例子：关于有限特征情形（通常更为困难）的认识，帮助我们加深了对特征零情形的理解。我们的结果表明，这种方法的用途并非 Deligne 插值范畴所独有，而是一种适用范围更广的现象。

首先，我们注意到，Temperley–Lieb 范畴上的编织和 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–分次诱导出一个典范函子

$$Z : \mathbf{TL}\left(q;\mathbb{C}\right) \boxtimes \mathbf{TL}\left(q;\mathbb{C}\right)^{\mathrm{rev}} \boxtimes \mathbf{Rep}\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \to \mathcal{Z}\left(\mathbf{TL}\left(q;\mathbb{C}\right)\right).$$

接着，我们证明，对于任意不是单位根的 $q \in \mathbb{C}^\times$ ，都可以将 q 识别为某些域 $\mathbb{K}_i$的超积中一个由偶数阶单位根组成的序列 q_i 。对于超越的 q，只需取$\mathbb{K}_i = \mathbb{C}$以及任意一个次数无界的单位根序列 q_i 。当 q 为代数整数时，我们使用 Postnikova 和 Schinzel [PosSch], 提出的、针对代数整数的 Zsigmondy 定理的推广，找出素数序列 $p_i \to \infty$ 和偶数阶单位根序列 q_i ，使其 $2\varkappa_i \to \infty$ 属于 $\mathbb{K}_i = \mathbb{F}_{p_i}$ ，且其超积极限可以识别为 q。因此，我们能够将 TL（q； $\mathbb{C}$）表示为 $\mathcal{A}_{\varkappa_i-1}$（$\mathbb{K}_i$）的超积中的一个子范畴。

通过将 TL（q； $\mathbb{C}$）的中心与超积因子的中心联系起来，我们能够借助对 $\mathcal{Z}$（$\mathcal{A}_{\varkappa_i-1}$（$\mathbb{K}_i$））的了解，提取关于 $\mathcal{Z}$（TL（q； $\mathbb{C}$））的信息；后者很容易描述，因为 $\mathcal{A}_{\varkappa_i-1}$（$\mathbb{K}_i$）是模张量范畴。采用这种超积方法，我们证明，对于一般的 $q \in \mathbb{C}$，中心$\mathcal{Z}$（TL（q； $\mathbb{C}$））是半单的，并完整描述了其简单对象和融合规则。因此，我们的主要定理（定理 5.17）是典范函子 Z 是幺半范畴之间的等价；将编织结构乘以某个（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）$^{\oplus 3}$ 双特征进行扭结后，该函子便成为编织等价。
我们指出，所用的许多技巧应当可以较为直接地推广到其他李型；可以将范畴 $\mathbf{Rep}$（U_q（$\mathfrak{g}$））近似为在某些单位根处， U_q（$\mathfrak{g}$）上的倾斜模范畴经过半单化所得范畴的“超极限”。不过，我们将这项研究留待后续工作。也可以运用这种超积技术，通过将 Verlinde 范畴 $\mathbf{Ver}_p$ 作为一个近似序列，来表达 $q = 1$ 的经典情形。但由于 $\mathbf{Ver}_p$ 的中心较难处理，这种方法在经典极限下并非最有效。在这种情况下，几何方法更为有用；代数群 G的表示范畴的 Drinfeld 中心可以描述为由支撑在有限多个点上的 G-等变凝聚层构成的范畴。令 $G = SL_2$，便得到 $q = 1$处 Temperley–Lieb 中心的层论描述。

对于 $q = -1$的情形，我们证明 Temperley–Lieb 范畴与 $q = 1$ 情形通过余循环扭曲相关联。我们在 命题 2.27中证明，经过余循环扭曲的范畴的 Drinfeld 中心，等价于原范畴的 Drinfeld 中心的余循环扭曲。因此，在此情形下，我们也得到了中心的显式描述，即由 SL_2 上的有限支撑等变凝聚层给出。

最后，我们还将在晶体 Temperley–Lieb 范畴中讨论中心，详见第 6 节。在此前与 Stroiński 的一项合作研究中， [AlqStr], 我们研究了**Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$ 在 $q \to 0$下的晶体极限。我们证明，所得的图示范畴$\mathbf{CrysTL}$ 等价于 $\mathfrak{sl}_2$–晶体的线性化范畴。在一次私人交流中，Etingof 询问$\mathbf{CrysTL}$ 的 Drinfeld 中心是否包含任何有趣的对象（除由

诱导的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–分次所产生的对象之外）。我们猜想答案是否定的，并给出了一些证明这一猜想的部分结果。

本文结构如下：第 2 节汇集张量范畴一般理论中所需的构造和背景知识。第 3 节介绍 Temperley–Lieb 范畴及其在 q 为单位根时的半单化所需的全部背景知识。第 4 节旨在证明，Temperley–Lieb 范畴可识别为一族模张量范畴$\mathcal{A}_{\varkappa_i-1}(\mathbb{K}_i)$的超积中的一个子范畴。第 5 节利用这一识别，描述一般 q下 Temperley–Lieb 范畴的 Drinfeld 中心。第 6 节中，我们对其他李代数 $\mathfrak{g}$的 Rep $(U_q(\mathfrak{g}))$ 的中心以及 q的特殊值提出一些看法和猜想。最后，附录 A 简要而自成一体地介绍超积及其在张量范畴理论和张量函子理论中的应用。尽管超积显然颇有用处，但在文献中，张量范畴的超积仅在 Tannakian 范畴的情形下得到正式记载，见 [Cru]。基于同上引文中发展的理论，我们希望附录 A 能有助于弥补文献中的这一空白。

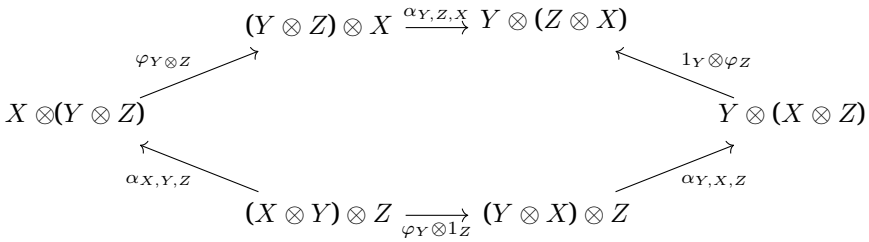
致谢。 本研究是博士论文的一部分，在 Victor Ostrik 的指导下完成，作者对他给予的许多宝贵讨论深表感谢。作者从开罗美国大学数学界的许多人那里学到了本文附录中的模型论背景；尤其是与 Ibrahim Abdelaziz 的交谈，以及 Daoud Siniora 的讲义，都给予了很大帮助。此外，作者也感谢 Johannes Flake、Nate Harman、Robert Laugwitz、Mateusz Stroiński 和 Philip Thomas 与作者进行的精彩讨论。

2. 张量范畴预备知识

本节旨在回顾幺半范畴的一些标准构造。对于此处未明确定义的所有概念，我们遵循[EGNO] 中的术语。本文中，我们假设所有域都是代数闭的。

Drinfeld 中心。 在本节中，我们设 $\mathcal{C}$ 为一个幺半范畴，其张量积为 $\otimes$，结合子为$\alpha:(-\otimes-)\otimes-\xrightarrow{\sim}-\otimes(-\otimes-)$，幺半群单位对象为 $\mathbb{1}$，单位同构为 $l:\mathbb{1}\otimes-\xrightarrow{\sim}-$ 和 $r:-\otimes\mathbb{1}\xrightarrow{\sim}-$。

定义 2.1。 对象 X 在 $\mathcal{C}$中的半编织 是一个自然同构 $\varphi:X\otimes-\implies-\otimes X$，满足对于 $\mathcal{C}$中的任意两个对象 Y 和 Z，下图可交换。



定义 2.2. $\mathcal{C}$ 的*Drinfeld* 中心是范畴 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$，其对象为对 (X,φ)，其中 φ 是 X 的半编织；其态射 $f:(X,\varphi)\to(X',\varphi')$ 是 $\mathcal{C}$中的映射 $f:X\to X'$，且对 $\mathcal{C}$中的每个对象 Y，下图均交换。

$$\begin{array}{ccc} X\otimes Y & \xrightarrow{\varphi_Y} & Y\otimes X \\ {\scriptstyle f\otimes 1_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_Y\otimes X} \\ X'\otimes Y & \xrightarrow[\varphi'_Y]{} & Y\otimes X' \end{array}$$

其幺半群结构由以下方式给出

$$(X,\varphi)\otimes(X',\varphi'):=\left(X\otimes X',\alpha_{-,X,X'}\circ(\varphi\otimes 1_{X'})\circ\alpha^{-1}_{X,-,X'}\circ(1_X\otimes\varphi')\circ\alpha_{X,X',-}\right),$$

结合子继承自 $\mathcal{C}$，幺半群单位对象为 $(\mathbb{1}, r^{-1}\circ l)$， [EGNO，第 7.13] 节。它带有编织结构，其编织为 $(X,\varphi)\otimes(X',\varphi') \to (X',\varphi')\otimes(X,\varphi)$，由 $\varphi_{X'}$ 给出， [EGNO，命题 8.5.1]。

有一个显然的遗忘函子 $U\colon \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$，它只保留底层对象。$\mathcal{C}$ 上的编织与到 U的一个截面是同一份数据。事实上，对于一个带编织结构的范畴 $\mathcal{C}$，其编织为 $\sigma_{X,Y}\colon X\otimes Y \to Y\otimes X$，我们有 U的两个典范幺半群截面，分别由 $X \mapsto (X, \sigma_{X,-})$ 和 $X \mapsto (X, \sigma^{-1}_{-,X})$ 给出。两者共同诱导一个编织张量函子 $D\colon \mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathrm{rev}} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$，只要 $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 存在（见下文关于 Deligne 张量积的小节）；具体而言， D 由 $A\boxtimes B \mapsto (A\otimes B, (\sigma_{A,-}\otimes \text{恒等映射}_B)\circ(\text{恒等映射}_A\otimes\sigma^{-1}_{-,B}))$ 确定。为简洁起见，半编织中的隐含结合子已省略 [EGNO，命题 8.6.1]。

定义 2.3. 若典范函子 D 是一个等价，则称带编织结构的张量范畴 $\mathcal{C}$ 为可分解。

在范畴上寻找幺半群单位元的半编织，一种简单的方法是寻找该范畴的分次。

定义 2.4. 群 G 对张量范畴 $\mathcal{C}$ 的 G–分次，是指将 $\mathcal{C}$ 分解为满 $\mathbb{K}$-线性子范畴 $\mathcal{C}_g$ 的直和 $\mathcal{C}=\bigoplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$，使得 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}\in\mathcal{C}_e$，并且只要 $X\in\mathcal{C}_g$ 且 $Y\in\mathcal{C}_h$，就有$X\otimes Y\in\mathcal{C}_{gh}$。若对每个 $g\in G$都有 $\mathcal{C}_g\neq 0$，则称 $\mathcal{C}$ 上的 G–分次为忠实分次。

命题 2.5. [GelNik，命题 3。9] 设 $\mathcal{C}$ 是一个带忠实 G 分次的张量范畴。那么，存在一个从 $G^\vee := \mathrm{Hom}(G,\mathbb{K}^\times)$ 到半编织群（在 $\otimes$下）的单群同态，该半编织群定义在 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 中 $\mathcal{C}$。当 G 是阿贝尔群时，这诱导出一个函子 $\mathbf{Rep}(G)\to\mathcal{Z}(\mathcal{C})$。

证明。 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 上的半编织数据等价于恒等函子在 $\mathcal{C}$ 上的一个自然张量自同构 $\Phi\in\mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$；事实上，半编织是一个自然同构 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\cong\mathbb{1}_{\mathcal{C}}\otimes-\to-\otimes\mathbb{1}_{\mathcal{C}}\cong\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$，而六边形公理恰好编码了与 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 的（平凡）幺半群结构的相容性。因此， $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 上关于 $\otimes$ 的半编织群同构于 $\mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$。

给定一个特征 $\chi\in G^\vee$，我们通过 $\Phi_\chi(X)=\chi(g)\,\mathrm{Id}_X$ 为每个 $X\in\mathcal{C}_g$ 定义 $\Phi_\chi\in\mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$。因此，我们得到一个单群同态 $G^\vee\to\mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$。当 G 是阿贝尔群时，$\mathbf{Rep}(G)$ 就是 G 的特征范畴，因此最后一个结论成立。□

事实上，对于融合范畴，同上引文中证明了以下更强的结果

命题 2.6. [GelNik，命题 3。9] 设 $\mathcal{C}$ 是一个融合范畴， G 是其万能分次群。设G_{ab} 是 G的最大阿贝尔商群。存在一个同构 $G^\vee_{ab}\cong\mathrm{Aut}_\otimes(\text{恒等映射}_{\mathcal{C}})$。因此， $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ （在 $\otimes$下）的半编织群同构于 $G^\vee_{ab}$。

注记 2.7. 更一般地， n万能分次群的 - 维表示对 $\mathbb{1}^{\oplus n}$上的半编织进行分类。更多详情见 [GelNik，定理 3。5]以及后续注记。

Müger 中心。 带编织结构的幺半范畴中心的另一种概念 $\mathcal{C}$ 是*Müger* 中心 或对称中心，最早由 [Müg2]考虑。

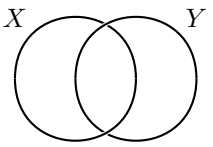
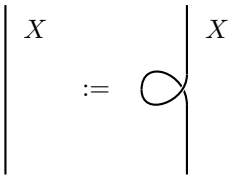
定义 2.8. 给定带编织结构的幺半范畴 C 中的对象 X 和 Y，其编织为 σ，若 X 和 Y 彼此中心化，则称它们彼此中心化，当且仅当 $\sigma_{Y,X}\circ\sigma_{X,Y}=$ 恒等映射$_{X\otimes Y}$。对于给定的全子范畴 $\mathcal{D}\subset\mathcal{C}$，它在 $\mathcal{C}$ 中的中心化子是全子范畴 $\mathrm{Cent}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})\subset\mathcal{C}$，其对象与 $\mathcal{D}$ 中的对象中心化；也就是说，$\mathrm{Cent}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$ 是 $\mathcal{C}$ 中所有对象 X 构成的全子范畴，使得对每个 $Y\in\mathcal{D}$，都有 $\sigma_{Y,X}\circ\sigma_{X,Y}=$ 恒等映射$_{X\otimes Y}$。若子范畴 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 属于 $\mathcal{C}$，且 $\mathcal{D}\subset\mathrm{Cent}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}')$ 和 $\mathcal{D}'\subset\mathrm{Cent}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$，则称它们彼此中心化

定义 2.9。 *Müger* 中心 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 自身的中心化子 $\mathrm{Cent}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$，我们也将其记为 $\mathcal{Z}_{\mathrm{Müg}}(\mathcal{C})$。

容易验证， $\mathcal{Z}_{\mathrm{Müg}}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 的对称幺半子范畴。对我们而言，这一构造的重要性在于，当 $\mathcal{C}$ 是融合范畴时，它使我们能够对 Drinfeld 中心进行一定的控制。

回顾一下，对于配备球形结构的带编织结构的融合范畴，可以按如下方式计算其模不变量：对于简单对象 X和 Y，令 $s_{X,Y}=\mathrm{Tr}(\sigma_{Y,X}\circ\sigma_{X,Y})$ and $t_{X,Y}=\delta_{X,Y}\theta_X$，其中

$\delta_{X,Y}$ 是克罗内克 δ， θ_X 是扭结在 X 上的取值；图示如下，

$s_{X,Y} :=$  ， t_X 

因此，我们有 $|\mathcal{O}(\mathcal{C})| \times |\mathcal{O}(\mathcal{C})|$ 矩阵 $S = (s_{X,\ Y})_{X,\ Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}$ 以及 $T = (\delta_{X,\ Y} t_X)_{X,\ Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}$，其中 $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 中简单对象的同构类集合（每个同构类均与其中任意选取的代表元对应），而 $\delta_{X,\ Y}$ 是克罗内克 δ。这些分别称为 $\mathcal{C}$ 的 S-矩阵和 T-矩阵。

定义 2.10。 配备球形结构的带编织结构的融合范畴称为模，如果其 S-矩阵是非退化的。

命题 2.11。 [DGNO，命题 3。7] 设 $\mathcal{C}$ 为一个配备球形结构的带编织结构的融合范畴。则以下条件等价：

- $\mathcal{C}$ 是模的；
- $\mathcal{Z}_{M\ddot{u}g}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Vec}$；
- $\mathcal{C}$ 是可分解的。

对于非球面融合范畴，甚至对于非半单编织有限幺半范畴，这一定理还有更强的变体 [Shi]；不过，就我们的目的而言，这个较弱的版本已足够。由此可立即推出以下结果：

推论 2.12。对于 范畴的带编织结构的张量 模张量范畴 $\mathcal{C}$，典范函子 $D\colon \mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathrm{rev}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 是带编织结构的张量范畴之间的一个等价范畴。

柯西完备化。 对于任意预加性范畴 $\mathcal{A}$，都存在一种将其完备化为加性幂等完备范畴 A^c （即每个幂等元都可裂的加性范畴）的一般构造，称为其柯西完备化，下面对此进行描述。首先，我们构造 $\mathcal{A}$的加性闭包，其对象是 $\mathcal{A}$ 中对象的形式直和，态射是形式矩阵，其列和行分别以定义域和陪域的直和项为指标，矩阵元素则由 $\mathcal{A}$ 中相应直和项之间的态射给出；将 $\mathcal{A}$ 的这个加性包络记作 $\mathcal{A}^{\oplus}$。注意，如果 $\mathcal{A}$ 是幺半群的，那么根据直和对 $\otimes$ 的分配律的显然公式， $\mathcal{A}^{\oplus}$ 也是幺半群的。接下来，若 $\mathcal{B}$ 是任意加性范畴，我们可以考虑其幂等完备包络 $\mathcal{B}^{\mathrm{kar}}$，它形式地添加了幂等元；其定义如下

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{kar}}) = \{X_e := (X,e)\,|\,X\in\mathrm{Ob}(X),\ e\in\mathrm{End}_{\mathcal{B}}(X) \text{ with } e^2 = e\},\ \text{and}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{\mathrm{kar}}}(X_e, Y_f) = f\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y)\,e \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y).$$

同样，如果 $\mathcal{B}$是幺半群的，那么通过 $X_e\otimes Y_f = (X\otimes Y)_{e\otimes f}$， $\mathcal{B}^{\mathrm{kar}}$ 也具有幺半群结构。于是，预加性范畴 $\mathcal{A}$ 的柯西完备化 定义为 $A^c := (\mathcal{A}^{\oplus})^{\mathrm{kar}}$；如果 $\mathcal{A}$ 是幺半群的，那么它也具有幺半群结构。也容易验证，若 $\mathcal{A}$ 具有带编织结构的或球形结构，则可用显然的方式将这些结构延拓到 $\mathcal{A}^c$ 上。

命题 2.13. [Kra, 推论4.4] 一个 *Karoubian* $\mathbb{K}$-线性范畴，若其态射空间有限维，则是 Krull-Schmidt范畴；也就是说，每个对象都可分解为有限个不可分解对象的直和，且这种分解在阶和同构意义下唯一，其中每个对象的自同态环都是局部环。

定义 2.14. 我们将 $\mathcal{C}$ 称为一个张量范畴，如果它是一个刚性、幂等完备的幺半群 $\mathbb{K}$-线性范畴，且态射空间有限维，并且 End(1) 作为 $\mathbb{K}$ 上的向量空间是一维的。

备注 2.15. 我们所采用的张量范畴概念比 [EGNO] 中更标准的定义弱，因为我们将阿贝尔条件放宽为仅要求是 Karoubian，这更符合我们的目的。

柯西完备化与 Drinfeld 中心的运算按以下方式相互交织 ：

命题 2.16。 [FlaLau，命题 A。1] 将 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 作为全子范畴嵌入 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^c)$ 的映射为$(X,\varphi)\mapsto(X,\varphi')$，其中 φ'：$X\otimes-\implies-\otimes X$ 经由 φ 延拓

$$\varphi'_{Y_e}=(e\otimes \mathrm{Id}_X)\circ\varphi_Y\circ(\mathrm{Id}_X\otimes e)=(e\otimes \mathrm{Id}_X)\circ\varphi_Y=\varphi_Y\circ(\mathrm{Id}_X\otimes e)$$

诱导出一个带编织的幺半完全忠实函子 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})^c\to\mathcal{Z}(\mathcal{C}^c)$。

半单性与半单化。 回忆一下，张量范畴 是半单的， 当且仅当它是阿贝尔范畴，且每个对象都可分解为简单对象的直和。对于足够良好的非半单张量范畴，存在一种众所周知的半单化过程（最初见于 [ResTur] [BarWes]，后来又在抽象层面进行了研究）。回忆一下，若 $\mathcal{C}$ 是一个球张量范畴，具有球形结构 $\alpha_X:\ X\to X^{**}$，则 $f:X\to X$ 的量子迹定义为

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}}(f):\mathbb{1}\xrightarrow{\mathrm{coev}_X}X\otimes X^*\xrightarrow{f\otimes\mathrm{Id}_X}X\otimes X^*\xrightarrow{\alpha_X\otimes X}X^{**}\otimes X^*\xrightarrow{\mathrm{ev}_X}\mathbb{1}.$$

对象 X 的量子维数 为 $\dim_q(X):=\mathrm{Tr}(\text{恒等映射}_X)$。

定义 2.17。 球形范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:X\to Y$ 称为可忽略的，如果对于每个态射$g:\ Y\to X$，都有 $\mathrm{Tr}(g\circ f)=0$。若对象 X 满足 Id_X 是可忽略态射，则称该对象为可忽略的。

定义 2.18. 若球张量范畴 $\mathcal{C}$ 满足：对其中任意幂零端同态，$\mathrm{Tr}(f)=0$，则称其为可处理的 。

以下结果众所周知，完整证明见 [EtiOst21，命题 2。4]。

命题 2.19. 阿贝尔球张量范畴是可处理的。

注意，含有可忽略态射的球张量范畴不可能是半单的，因为不可分解对象之间的可忽略态射必定位于雅各布森根中。事实上，若 $f:X\to Y$ 是这样的态射，那么对任意 $g:\ Y\to X$，我们有 $g\circ f$ 不可逆；否则 X 将是Y 的直和项。因此， $g\circ f$ 必定位于 $\mathrm{End}(X)$ 的雅各布森根中，因为它不属于其唯一 极大理想（X 不可分解意味着 $\mathrm{End}(X)$ 是局部环）。

回顾一下，张量范畴 $\mathcal{C}$中的张量理想 $\mathcal{I}$是一族子空间 $\mathcal{I}(X,\ Y)\subset\mathrm{Hom}(X,\ Y)$，对所有对象 X和 Y（属于 $\mathcal{C}$）均成立，并且满足：若 f属于这些子空间之一，则对 $\mathcal{C}$中的任意态射 g， $f\circ g$、 $g\circ g$、 $f\otimes g$和 $g\otimes f$也属于相应子空间。

引理 2.20。 设 $\mathcal{C}$ 是一个球形范畴，并存在函子 $F:\ \mathcal{C}\to\mathcal{A}$ 到可处理范畴 $\mathcal{A}$；进一步假设 F 与 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{A}$的球形结构相交织。那么， $\mathcal{C}$ 也是可处理的。

证明。 给定 $\mathcal{C}$中的幂零端同态 f，由于 Ff是幂零的，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}}(f)=\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}(Ff)=0$。 □

例 2.21。 球张量范畴中所有可忽略态射构成一个张量理想， $\mathcal{N}$，称为可忽略理想。

我们可以将张量范畴 $\mathcal{C}$ 对张量理想 $\mathcal{I}$ 取商，得到商范畴 $\mathcal{C}/\mathcal{I}$，其对象与 $\mathcal{C}$ 相同，并且

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}(X,Y):=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/\mathcal{I}(X,Y)$$

事实证明，对于可处理张量范畴，可忽略态射的存在是半单性的唯一障碍。

定理 2.22。 [EtiOst21，定理 2.6] 设 $\mathcal{C}$ 是代数闭域上的可处理张量范畴，并设 $\mathcal{N}$ 是它的可忽略理想。范畴 $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ 是半单的，其简单对象是 $\mathcal{C}$ 中具有非零维数的不可分解对象。

定义 2.23. 可处理张量范畴 $\mathcal{C}$ 的半单化定义为 $\mathcal{C}:=\mathcal{C}/\mathcal{N}$，即其关于可忽略理想的商范畴。

令 $m_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$ 表示某个对象 Y 中不可分解对象 X 的直和项重数，且 Y 属于 $\mathcal{C}$。

引理 2.24。若 X、Y和 Z 是非零维数的不可分解对象，且 $\mathbb{K}$是以 $\mathbb{K}$ 为代数闭域的可处理线性张量范畴，则 $m_{\mathcal{C}}(X^*, Y\otimes Z) = m_{\mathcal{C}}(Z^*, X\otimes Y)$。

证明。首先，由舒尔引理可知，当 $\mathcal{C}$ 是半单时，断言成立。事实上，经过半单化后，我们看到

$$m_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{X}^*, \overline{Y}\otimes\overline{Z}) = \dim \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{X}^*, \overline{Y}\otimes\overline{Z}) = \dim \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{Z}^*, \overline{X}\otimes\overline{Y}) = m_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{Z}^*, \overline{X}\otimes\overline{Y}),$$

接下来需要说明，经过半单化后重数没有变化。事实上，X^* 在 $Y\otimes Z$ 中的一个直和项对应于态射 $a\colon X^*\to Y\otimes Z$ 和 $b\colon Y\otimes Z\to X^*$，它们属于 $\mathcal{C}$ 并满足 $ba = $ 恒等映射 $_{X^*}$。经过半单化后，仍有 $ba = $ 恒等映射 $_{X^*}$，因为这些态射都不可忽略（否则 $\dim(X) = 0$）。反过来，若 $a\colon X^*\to Y\otimes Z$ 和 $b\colon Y\otimes Z\to X^*$ 属于 $\mathcal{C}$ 且满足 $ba = $ 恒等映射$_{X^*}$，则可将它们提升为$\tilde{}$中的某些 $\tilde{a}$ 和 b，使其属于 $\mathcal{C}$ 并满足 $b\tilde{a} = $ 恒等映射$_{X^*} + g$，其中 g 可忽略。但若 $b\tilde{a}$ 不可逆，则它属于局部环 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X^*)$ 的雅各布森根，因而可忽略。这将意味着 Id_{X^*} 可忽略，从而$\tilde{}\dim X = 0$。因此，$b\tilde{a}$ 可逆，且 X^* 是 $Y\otimes Z$的一个直和项。□

Deligne 张量范畴的张量积。设 $\mathbb{K}$和 $\mathcal{A}$ 是域 $\mathcal{B}$上的两个有限阿贝尔 $\mathbb{K}$-线性范畴。Deligne [Del90，第 5] 节证明了存在一个阿贝尔 $\mathbb{K}$-线性范畴 $\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}$及一个双函子 $\boxtimes\colon \mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}$，它对 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 均为右正合，并且具有此性质的泛性质；也就是说，对于任意双函子 $F\colon \mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{C}$，若其对 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$均为右正合，则存在唯一的右正合$\tilde{}$函子 $\tilde{F}\colon \mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 满足 $F = \tilde{F}\circ\boxtimes$。后来，López Franco [LF] 将 Deligne 的构造推广到所有有限余完备（例如半单）阿贝尔 $\mathbb{K}$-线性范畴，并证明 Deligne 的构造与 Kelly 张量积 [Kel]一致。

当范畴 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$均为半单时，它们的 Deligne 张量积 $\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}$仍为半单。$\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}$ 的简单对象恰好是形如 $X\boxtimes Y$ 的对象，其中 X 和 Y 分别是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$中的简单对象。当范畴 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$具有结合子 $\alpha^{\mathcal{A}}$和 $\alpha^{\mathcal{B}}$的幺半群结构时，它们的积 $\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}$具有如下自然的幺半群结构：

$$(X\boxtimes Y)\otimes_{\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}}(X'\boxtimes Y') = (X\otimes_{\mathcal{A}} X')\boxtimes(X'\otimes_{\mathcal{B}} Y')$$

态射上的定义也类似，并使用结合子

$$\alpha^{\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}}_{X\boxtimes Y, X'\boxtimes Y', X''\boxtimes Y''} = \alpha^{\mathcal{A}}_{X,X',X''}\boxtimes\alpha^{\mathcal{B}}_{Y,Y',Y''}.$$

$\tilde{}$此外，当 F 具有幺半群结构时，典范函子 F 具有显然的幺半群结构。同样，若 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 和 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 分别是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 上的编织结构，则 $\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}$ 通过 $\sigma^{\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{A}}\boxtimes\sigma^{\mathcal{B}}$ 成为带编织结构的范畴。只要 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 具有对偶和球形结构，$\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}$ 也具有这些结构，并且这些结构仍按分量定义。

注 2.25. 在非半单情形下，构造较为微妙，但本文只会用到半单情形。更一般的情形，参见 [Del90，第 5] 节，以及 [LF] 。

分次扭曲。设 $\mathcal{C} = \bigoplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$ 是一个带有编织结构 σ的 G-分次幺半范畴，其中G 是某个群（由于 $\mathcal{C}$ 带有编织结构，该群必为阿贝尔群）。令 $\gamma\colon G\times G\to\mathbb{K}^\times$ 是 G上的一个双特征，即满足以下条件的函数

$$\gamma(g_1g_2, g_3) = \gamma(g_1,g_3)\gamma(g_2,g_3)\quad\text{and}\quad\gamma(g_1,g_2g_3) = \gamma(g_1,g_2)\gamma(g_1,g_3),$$

对每个 g_1，g_2，$g_3\in G$，可以引入新的带编织结构的幺半范畴 $\mathcal{C}^\gamma$。它作为幺半范畴与 $\mathcal{C}$ 相同，但其编织 σ 按如下方式由 γ 扭结：$\sigma^\gamma_{X_1,\,X_2} = \gamma(g_1,\,g_2)\sigma_{X_1,\,X_2}$ 只要$X_i\in\mathcal{C}_{g_i}$对 $i = 1,\,2$ 成立即可。容易验证，这仍满足编织的六边形公理。

例 2.26. 范畴$\mathbf{Vec}^\gamma_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$，其对象为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次向量空间，且编织由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的非平凡双特征扭结而成，给定为 $\gamma(g,h) = (-1)^{gh}$，与超向量空间范畴带编织结构等价。

G-分次幺半范畴 $\mathcal{C}$ 的结合子 α 可以通过 3-上循环 $\omega \in Z^3(G, \mathbb{K}^\times)$ 扭结，即一个函数$\omega: G \times G \times G \to \mathbb{K}^\times$，满足

$$\omega(g_1, g_2, g_3)\omega(g_1, g_2g_3, g_4)\omega(g_2, g_3, g_4) = \omega(g_1g_2, g_3, g_4)\omega(g_1, g_2, g_3g_4),$$

对所有 $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$。这给出了一个新的幺半范畴，记作 $\mathcal{C}_\omega$，其结合子定义为 $\alpha^\omega_{X_1,X_2,X_3} = \omega(g_1, g_2, g_3)\alpha_{X_1,X_2,X_3}$，其中 $X_i \in \mathcal{C}_{g_i}$ 对于 $i = 1,2,3$。
更一般地，可以通过一个阿贝尔 3-余循环 $(\omega, \gamma) \in Z^3_{ab}(G, \mathbb{K}^\times)$ 同时扭结 $\mathcal{C}$ 的结合子和编织，即函数

$$\omega : G \times G \times G \to \mathbb{K}^\times \quad \text{and} \quad \gamma : G \times G \to \mathbb{K}^\times$$

满足

$$\omega(g_1, g_2, g_3)\omega(g_1, g_2g_3, g_4)\omega(g_2, g_3, g_4) = \omega(g_1g_2, g_3, g_4)\omega(g_1, g_2, g_3g_4),$$
$$\omega(g_2, g_3, g_1)\gamma(g_1, g_2g_3)\omega(g_1, g_2, g_3) = \gamma(g_1, g_3)\omega(g_2, g_1, g_3)\gamma(g_1, g_2), \text{and}$$
$$\omega(g_3, g_1, g_2)^{-1}\gamma(g_1g_2, g_3)\omega(g_1, g_2, g_3)^{-1} = \gamma(g_1, g_3)\omega(g_1, g_3, g_2)^{-1}\gamma(g_2, g_3)$$

对所有 $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$。给定这样的余循环 (ω, γ) 和一个带编织结构的幺半范畴 $\mathcal{C}$，其结合子为 α，编织为 σ，可通过以下方式定义扭结后的结合子和编织：

$$\alpha^\omega_{X_1,X_2,X_3} := \omega(g_1, g_2, g_3)\alpha_{X_1,X_2,X_3} \quad \text{and} \quad \sigma^\gamma_{X_1,X_2} := \gamma(g_1, g_2)\sigma_{X_1,X_2}$$

当 $X_i \in \mathcal{C}_{g_i}$ 对于 $i = 1,2,3$ 时。我们将所得范畴记作 $\mathcal{C}^{(\omega,\gamma)}$。注意，$\mathcal{C}^{(1,\gamma)} = \mathcal{C}^\gamma$。
该构造由 Joyal 和 Street 提出，[JoyStr] 适用于点范畴。对这一扭结过程的推广称为所谓的 zesting 构造，[DGPRZ]。
注意，若 $\mathcal{C}$ 是 G-分次的，则其 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 通过遗忘函子到 $\mathcal{C}$ 继承了一个 G 分次；也就是说，$\mathcal{C}$ 中的底层对象决定了 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中对象所属的分次分量。分次扭曲与取 Drinfeld 中心相容，具体如下。

命题 *2.27.* 设 $\mathcal{C}$ 是带有 G-分次的幺半范畴，且 $(\omega, \gamma) \in Z^3_{\mathrm{ab}}(G, \mathbb{K}^\times)$ 是 G 上的一个 3-上循环。存在一个编织张量等价 $F: \mathcal{Z}(\mathcal{C}_\omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(\mathcal{C})^{(\omega,\gamma)}$，其在对象上的定义为 $(X, \varphi) \mapsto (X, \varphi^\gamma)$，其中 $\varphi^\gamma_Y = \gamma(g, h) \cdot \varphi_X$，对 $X \in \mathcal{C}_g$ 和 $Y \in \mathcal{C}_h$ 均成立。

证明。按上述方式在对象上定义 F，并在态射上定义为恒等映射。由于不同分次分量中的对象之间不存在非零态射，因此，$\mathcal{C}$ 中的非零态射 $f: X \to Y$，若与 X 和 Y 的半编织相容，那么在扭转半编织后仍然相容（X 上和 Y 上的半编织按相同的标量重新缩放）。因此，F 在态射上的定义是良定的。显然，F 是一个等价，因为扭转操作是可逆的。
注意，对于 $X \in \mathcal{C}_g$ 和 $Y \in \mathcal{C}_h$，有

$$\begin{aligned} F((X, \varphi) \otimes (Y, \psi)) &= F\left(X \otimes Y, \alpha_{-,X,Y} \circ (\varphi \otimes 1_Y) \circ \alpha^{-1}_{X,-,Y} \circ (1_X \otimes \psi) \circ \alpha_{X,Y,-}\right) \\ &= \left(X \otimes Y, \gamma(gh, -) \cdot \left(\alpha_{-,X,Y} \circ (\varphi \otimes 1_Y) \circ \alpha^{-1}_{X,-,Y} \circ (1_X \otimes \psi) \circ \alpha_{X,Y,-}\right)\right). \end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} F(X, \varphi) \otimes F(Y, \psi) &= (X, \gamma(g, -) \cdot \varphi) \otimes (Y, \gamma(h, -) \cdot \psi) \\ &= \left(X \otimes Y, \alpha^\omega_{-,X,Y} \circ (\varphi^\gamma \otimes 1_Y) \circ (\alpha^\omega)^{-1}_{X,-,Y} \circ (1_X \otimes \psi^\gamma) \circ \alpha^\omega_{X,Y,-}\right) \\ &= \left(X \otimes Y, \lambda_{g,h,-} \cdot \alpha_{-,X,Y} \circ (\varphi \otimes 1_Y) \circ \alpha^{-1}_{X,-,Y} \circ (1_X \otimes \psi) \circ \alpha_{X,Y,-}\right), \end{aligned}$$

其中 $\lambda_{g,h,-} = \omega(-, g, h)\gamma(g, -)\omega^{-1}(g, -, y)\gamma(h, -)\omega(g, h, -)$，这是由 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})^{(\omega,\gamma)}$ 中 $\otimes$ 的定义得到的。但是，根据阿贝尔 3-余循环的定义，我们有 $\lambda_{g,h,-} = \gamma(gh, -)$，因此上文的两个半编织相同。因此，$\mathrm{Id}_{X\otimes Y}$: $F(X, \varphi) \otimes F(Y, \psi) \to F((X, \varphi) \otimes (Y, \psi))$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})^{(\omega,\gamma)}$ 中定义良好的态射。容易

看出，它赋予 F 幺半函子的结构，因为其定义域和陪域上的结合子均由 α^{ω} 给出。F 是带编织结构的这一事实也显而易见：$\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的编织 $(X,\varphi)\otimes(Y,\psi)\to(Y,\psi)\otimes(X,\varphi)$ 由 φ_Y 给出，因此在 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})^{(\omega,\gamma)}$ 中变为 φ_Y^{γ}；这与 $\mathcal{Z}\left(\mathcal{C}^{(\omega,\gamma)}\right)$ 中的编织 $(X,\varphi^{\gamma})\otimes(Y,\psi^{\gamma})\to(Y,\psi^{\gamma})\otimes(X,\varphi^{\gamma})$ 相同。□

注 2.28. 如果 G 的阶为奇数，且 (ω,γ) 是 G上的阿贝尔 3-余循环，那么 $[\omega]=0\in H^3(G,\mathbb{K}^\times)$，因此我们有一个幺半等价 $\mathcal{C}_\omega\simeq\mathcal{C}$。这可由同构 $H^3_{\mathrm{ab}}(G,\mathbb{K}^\times)\cong\mathrm{Quad}(G)$ 得出；该同构建立了 G上的阿贝尔上同调与 G 上的二次型之间的对应关系，由 Eilenberg 和 MacLane 证明，[EilMac，定理 26。1] 或参见 [EGNO，第 8 节，4] 以了解现代论述。因此，命题 2.27 只有在 G 是一个 2-群时才真正有用。

3. Temperley–Lieb 范畴

本节中的结果并非新结果；其中一部分已见于文献（尽管有些情况下很难找到），一部分只在特殊情形下有记载（例如 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$）或采用了不同的术语（例如子因子、重耦合等），还有一些属于常识，但并未形成书面文献（至少据作者所知）。为方便读者，我们在此对所需的所有结果作完整、统一的论述，并给出完整证明；但专家读者可以略读或跳过本节。我们尽可能列出主要（或至少较早的）参考文献，如有任何遗漏或疏忽，谨致歉意。用张量范畴语言撰写的一篇早期论述见 [Tur，第 XII 章]，，其中 Temperley–Lieb 范畴称为纽结图范畴。

定义与泛性质。回忆一下，对于 $n\in\mathbb{Z}$，q-整数定义为

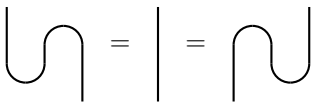
$$[n]_q=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}=q^{n-1}+q^{n-3}+\cdots+q^{1-n}.$$

定义 3.1。设 $\mathbf{TL}(q;\mathbb{K})$ 为如下定义的（小）严格 $\mathbb{K}[q,q^{-1}]$-线性幺半范畴：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{TL}(q;\mathbb{K}))=\mathbb{N}=\{\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots\}$，其中 $\mathbb{1}=\mathbf{0}$，且 $\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}=\mathbf{m}+\mathbf{n}$；
- $\mathbf{TL}(q;\mathbb{K})$ 的态射由杯 $\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{TL}(q;\mathbb{K})}(\mathbf{0},\mathbf{2})$ 和帽 $\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{TL}(q;\mathbb{K})}(\mathbf{2},\mathbf{0})$ 生成，如弦图所示

$$\mathrm{cup}=\quad\text{and}\quad\mathrm{cap}=\ ;$$

- 生成元杯和帽满足以下关系：



and



$$=-[2]_q\,\mathrm{Id}_{\mathbf{0}}.$$

范畴 $\mathrm{TL}(q;\mathbb{K})$ 是刚性的，其中 $\mathbf{1}$ 是自对偶的，态射 cup 和 cap 分别是余求值态射和求值态射。对偶函子 $X\mapsto X^*$ 和 $X\mapsto {}^*X$ 分别通过逆时针和顺时针旋转 180° 作用于态射，因此它们典范同构。因此，$\mathrm{TL}(q;\mathbb{K})$ 是球形的；事实上，它恰有两个枢轴结构（两者均为球形），一个由典范同构 $X\xrightarrow{\sim}X^{**}$ 给出，另一个则由第一个与同构 $X\xrightarrow{\sim}X$ 复合得到，其中 $X\xrightarrow{\sim}X$ 由 $(-1)^n$恒等映射$_X$ 定义，适用于 $X=\mathbf{n}$。不存在其他枢轴结构这一事实，是枢轴结构的集合构成 $\mathrm{Aut}_\otimes$(恒等映射$_{\mathbf{TL}(q;\mathbb{K})}$) 上的主齐性空间的结果 $\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, [EGNO，习题 4.7.16]。

对我们而言，重要的是将 q 视为上述定义的形式参数，或视为$\mathbb{K}$中的一个特定元素；更准确地说，求值同态 $\mathrm{ev}_a : \mathbb{K}[q,q^{-1}] \to \mathbb{K}$ 由 $q \mapsto a$ 给出，其中某个 $a \in \mathbb{K}^\times$ 定义了一个诱导函子 $\mathbb{K}[q,q^{-1}]$**-模** $\to$ **向量空间范畴**，进而定义一个幺半 2-函子 Ev_a : **范畴**$_{\mathbb{K}[q,q^{-1}]} \to$ **范畴**$_{\mathbb{K}}$。于是，对于任意 $a \in \mathbb{K}^\times$，我们都可以讨论 **Temperley–Lieb范畴**$(a;\ \mathbb{K}) := \mathrm{Ev}_a$**(Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$**)**。

定义 3.2。 *Temperley–Lieb* 范畴 $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K})$ 定义为 Cauchy completion $\mathbf{TL}\,(a;\ \mathbb{K})^c$。

设 $\mathbf{Fund}(U_q(\mathfrak{sl}_2))$ 为由基本 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$–$\mathbf{Mod}$生成的满幺半群子范畴，其中基本表示为 2 维。以下结果广为人知，至少在非量子情形下可追溯至 [RTW]。其一个更一般得多的版本，特别是对量子情形的处理，已在 [Eli 的定理 2 中详细证明。58],例如。

定理 3.3。 对于 $q \in \mathbb{K}^\times$，存在一个幺半等价 $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K}) \simeq \mathbf{Fund}(U_q(\mathfrak{sl}_2))$。

推论 3.4。 对于 $q \in \mathbb{K}^\times$ 不是单位根的情形， $U_q(\mathfrak{sl}_2)$的每个 I 型表示都是基本表示某个张量幂的直和项。因此，我们有一个幺半等价$\mathbf{Rep}_{\mathbf{I}}(U_q(\mathfrak{sl}_2)) \simeq \mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K})$，其中 $\mathbf{Rep}_{\mathbf{I}}(U_q(\mathfrak{sl}_2))$ 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$的 I 型表示范畴。

由于 Temperley–Lieb 范畴由生成元与关系定义，因此它由以下泛性质刻画，例如，参见 [EtiOst03，定理 2。1]。

命题 3.5。 *Let* $\mathcal{C}$ 设为一个带有结合子 α的张量范畴，且 X 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，并配备了两个态射 $f:\ \mathbb{1} \to X \otimes X$ 以及 $g:\ X \otimes X \to \mathbb{1}$，满足

$$(\mathrm{Id}_X \otimes g) \circ \alpha_{X,X,X} \circ (f \otimes \mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_X = (g \otimes \mathrm{Id}_X) \circ \alpha_{X,X,X} \circ (\mathrm{Id}_X \otimes f), \ \textit{and}$$
$$g \circ f = -[2]_q \mathrm{Id}_{\mathbb{1}}.$$

那么， 这里存在唯一的张量函子 $F:\ \mathbf{TL}\,(q;\ \mathbb{K}) \to \mathcal{C}$，满足 $F(\underline{\mathbf{1}}) = X$、 F(杯) $= f$、 F(帽) $= g$。 □

注 3.6。 注意，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{TL}(q;\mathbb{K})}(\mathbf{n},\ \mathbf{m}) = \mathrm{Hom}^{\widetilde{\mathbf{TL}}(q;\mathbb{K})}(\mathbf{n},\ \mathbf{m})$, 因此，每当我们用$\mathbf{n},\ \mathbf{m}\ldots$表示对象时，都可以明确地省略 Hom 或 End 的下标，以指代任一范畴中的态射空间。

编织结构。 现在我们考察$\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K})$上所有可能的编织结构。
假设 σ 是$\mathbf{TL}\,(q;\ \mathbb{L})$上的一种编织结构，并将$\sigma_{\mathbf{1},\mathbf{1}}:\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \to \underline{\mathbf{1}} \otimes \underline{\mathbf{1}}$ 记为正交叉，其逆记为负交叉：

$$\sigma_{\underline{\mathbf{1}},\underline{\mathbf{1}}} = \quad , \quad \sigma^{-1}_{\underline{\mathbf{1}},\underline{\mathbf{1}}} =$$

现在，根据两个六边形公理，很容易看出$\sigma_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ 决定了 σ的全部；事实上，

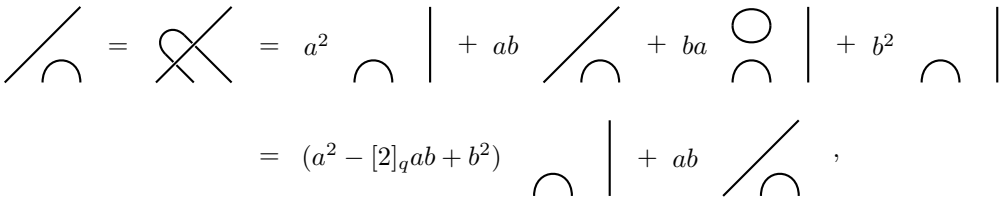
$$\sigma_{\underline{\mathbf{m}},\underline{\mathbf{n}}} =$$

其中每个交叉都是一个 $\sigma_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$。由于 {恒等映射$_{\mathbf{2}}$,杯 $\circ$帽} 是 $\mathrm{End}(\mathbf{2})$ 的一组基，我们可以写成

$$= a \quad + b \quad ,$$

$(\star)$

对于某个 $a,\ b \in \mathbb{K}$。但是，如果 σ 要是自然的，我们还必须满足



由此得到 $ab = 1$ 和 $[2]_q = a^2 + a^{-2}$，对于 $q \neq \pm 1$ 恰有四个解，即 $a = \pm q^{\pm 1/2}$，其中符号可独立选取。简单检验自然性可知，这些解确实都给出了编织结构。将 a 替换为 a^{-1}，即可得到逆编织；它也是这四个解之一。当 $a = a^{-1} \iff a = \pm 1 \iff q = 1$ 时，这两个解重合，从而得到两个对称编织，即满足 $\sigma^2 = 1$。当 $q = -1$ 时，则得到与 $a = \pm\sqrt{-1}$ 对应的两个非对称编织，并且这些编织满足$\sigma^4 = 1$。

不可分解对象。 我们希望确定**Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$ 的不可分解对象，并证明当 q 取一般值时它具有半单性。

命题3.7。 Temperley–Lieb范畴$(q;\ \mathbb{K})$ 是一个可处理张量范畴。

证明。令 $\mathsf{Vec}_{\mathbb{Z}}$ 为 $\mathbb{Z}$ 分次的 $\mathbb{K}$-向量空间范畴。$\mathsf{Vec}_{\mathbb{Z}}$ 上的枢轴结构由恒等函子的张量自同构给出，即 $\mathrm{Aut}^{\otimes}$(恒等映射$_{\mathsf{Vec}_{\mathbb{Z}}}$) $\cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{Group}}(\mathbb{Z}, \mathbb{K}^{\times}) \cong \mathbb{K}^{\times}$（参见 [EGNO], 练习 4.7.16）；特别地，$-q \in \mathbb{K}^{\times}$ 在 $\mathsf{Vec}_{\mathbb{Z}}$ 上赋予一个球形结构，使得次数为 1（分别为次数 -1）的一维向量空间的量子维数为 $-q$（分别为 $-q^{-1}$）。

现在，令 X 为 $\mathsf{Vec}_{\mathbb{Z}}$ 中的二维向量空间，其基为 $\{u, v\}$，其中 $\deg(u) = 1$ 且 $\deg(v) = -1$。于是，$\dim_q(X) = -[2]_q$。令 $f\colon \mathbb{1} \to X \otimes X$ 由 $f(1) = -qu \otimes v + v \otimes u$ 给出，并令 $g\colon X \otimes X \to \mathbb{1}$ 由 $g(u \otimes u) = g(v \otimes v) = 0$、$g(u \otimes v) = 1$ 和 $g(v \otimes u) = -q^{-1}$ 给出。容易验证 X、f 和 g 满足命题 3.5 泛性质中的条件，因此存在一个张量函子 $F : \mathrm{TL}(q;\ \mathbb{K}) \to \mathsf{Vec}_{\mathbb{Z}}$，它将 1 映为 X，并分别将杯和帽映为 f 和 g。此外，F 与枢轴结构相容，因此由引理 2.20 得证。□

设 $A = \mathrm{End}(\mathbf{n})$。$A$ 中的幂等元与 A 作为（投射）左 A-模的直和项一一对应。此外，这种对应与同构的概念相容（如果两个幂等元作为 $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K})$ 中的对象同构，就称它们同构）。因此，我们发现，A中的本原幂等元，即 $\mathbf{n}$ 在 $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K})$ 中的不可分解直和项，恰好对应于 A 上的不可分解投射模。由于 A 是有限维的，这些模恰好对应于简单 A 模。对于 A 上的简单模 L，我们将其在 A 中对应的幂等元记作 e_L。现在，对于任意幂等元 $e \in A$，$\mathrm{Hom}_A(Ae, L) \neq 0$ 当且仅当 e_L 是 e的直和项。

现在，我们可以归纳地应用这一分析，计算每个 n 对应的 $\mathbf{n}$ 的分解。首先，$\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{1}$ 都是不可分解对象，因为它们的自同态代数是一维的，因而是单的。

引理 3.8。 对于任意 $n \geq 1$，$\mathbf{n}$ 是$\mathbf{n} + \mathbf{2}$的一个直和项。此外，$\mathbf{0}$ 是$\mathbf{2}$ 的直和项，当且仅当 $q^2 \neq -1$。

证明。 我们对 n 使用归纳法。注意，$p = (\mathrm{Id}_{\mathbf{1}} \otimes$杯) 和 $\iota = ($帽$\otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{1}})$ 分别起到$\mathbf{1}$ 与$\mathbf{3}$之间的包含映射和投影的作用；事实上，$\iota \circ p$ 是一个幂等元，且 $p \circ \iota = \mathrm{Id}_{\mathbf{1}}$。因此，$\mathbf{1}$ 是$\mathbf{3}$的一个直和项。因此，$\mathbf{n} + \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{n}$ 是 $\mathbf{3} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{n} + \mathbf{3}$ 的一个直和项。

对于第二个结论，注意 $\mathrm{End}(\mathbf{2}) = \langle 1,\ x \perp x^2 = -[2]_q x \rangle$，其为半单当且仅当 $[2]_q \neq 0$（或等价地，当且仅当 $q^2 \neq -1$）；在半单情形下，$-[2]_q^{-1}$帽 $\circ$杯是对应于$\mathbf{0}$ 作为$\mathbf{2}$的直和项的幂等元。□

引理 3.9. 设

$e =$  $\in \mathrm{End}(\underline{\mathbf{n}})$.

那么，t 双侧主理想 $I = \langle e \rangle$ 在 $\mathrm{End}(\underline{\mathbf{n}})$ 中的余维为 1，因此 $\mathrm{End}(\underline{\mathbf{n}})/\langle e \rangle \cong \mathbb{K}$ ·恒等映射$_{\mathbf{n}}$ _.

证明。我们可以证明，除了 $\mathrm{Id}_{\mathbf{n}}$ 之外，所有图都属于 I。注意，任意一个 Temperley–Lieb 图 $\mathrm{End}(\mathbf{n})$，只要不是恒等态射，就至少包含一个杯和一个帽。通过与适当的态射复合，可以向 e 中添加更多的杯和帽。然后，通过与适当的编织进行前复合和后复合，可以移动这些杯和帽，从而得到任何其他至少包含一个杯和一个帽的图。□

推论 3.10。对于所有 $n \geq 2$，$\mathbf{n}$ 中恰好有一个不可分解直和项 T_n 不是$\mathbf{n-2}$的直和项。

证明。n 的一个直和项对应于 $A =$End(n) 中的一个幂等元，而这又对应于作为射影 A-模的 A 的一个直和项。这种对应保持子对象和同构的概念，因此 n 的不可分解直和项与正则A-模的射影不可分解直和项一一对应。由于 A 是有限维的，射影不可分解A-模与简单 A-模之间存在一个典范双射。在此双射下，n 中一个同时不是 (ne) $\cong$ n $-\mathbf{2}$ 的直和项的不可分解直和项，对应于一个满足 $eL = 0$ 的简单 End(n)-模 L，或者等价地，一个简单 End(n)/$\langle e \rangle$-模。但根据引理 3.9，这样的简单模只有一个。□

引理 3.11。T_{n+1} 是 $T_n \otimes \mathbf{1}$ 的一个直和项。

证明。根据 推论 3.10，$\mathbf{n} = T_n \oplus X$，其中 X 由出现在 $\mathbf{k}$ 中的、满足 $k \leq n-2$的直和项组成。因此，与 $\mathbf{1}$进行张量积后，$X \otimes \mathbf{1}$中的所有直和项**都必须是** $\mathbf{n}$ 1的直和项，而 T_{n+1} 根据定义并非如此。□

推论 3.12。假设维数$_q T_i \neq 0$对 $i = 0$、1、.....、n成立。那么，$T_n \otimes \mathbf{1} \cong T_{n+1} \oplus T_{n-1}$。

证明。将引理 2.24 应用于引理 3.11，我们看到 T_{n-1} 是 $T_n \otimes \mathbf{1}$ 中的一个直和项（重数为 1）。如果 $T_{n-2} \subset$ n $-\mathbf{2}$ 是 ~~T_n~~ $\otimes \mathbf{1} \subset$ n $+\mathbf{1}$ 的一个直和项，那么就存在一个非零态射 n $-\mathbf{2} \to$ n $+\mathbf{1}$，这由于奇偶性不匹配是不可能的。此外，如果 T_m 是 $T_n \otimes \mathbf{1}$ 中满足 $m \leq n-3$ 的一个直和项，那么同样会产生矛盾，因为这再次由引理 2.24 蕴含 T_n 是 $T_m \otimes \mathbf{1}$ 的一个直和项，因而也是 m $+\mathbf{1}$ 的一个直和项，这与 T_n 的定义相矛盾。□

我们记 $T_0 := \mathbf{0} = \mathbb{1}_{\mathbf{TL}(q;\mathbb{K})}$ 和 $T_1 = \mathbf{1}$。琼斯的以下著名定理 [Jon] (或参见[KauLin], [Tur], 或 [Wan] 中的论述):

定理 3.13。对于任意代数闭域 $\mathbb{K}$ 和满足条件 $q^4 \neq 1 \neq q^6$的 $q \in \mathbb{K}^\times$，有

(1) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是**Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$中不可分解对象的完整列表；*(2)* 维数$_q$ $(T_n) = [n+1]_{\pm q}$，其中符号取决于球形结构的选择。此外，当 q 在 $\mathbb{K}$中不是单位根时，有*(3)* $T_m \otimes T_n \cong T_{|m-n|} \oplus T_{|m-n|+2} \oplus \cdots \oplus T_{m+n}$；*(4)* 范畴**Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$ 是半单的。

证明。（1）由 推论 3.10 可归纳得出。

(2) 推论 3.12 推出 维数$_q(T_{n+1}) =$ [2]$_{\pm q}$维数$_q(T_n)$ $-$ 维数$_q(T_{n-1})$，由此通过简单归纳法即可证明该结论。

(3) 当 q不是单位根时，我们有 维数$_q(T_n) = [n+1]_{\pm q} \neq 0$对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。当 $n = 1$时，该结论是对推论 3.12的重述；对于其他 m，通过对两边取张量积 $T_1 = \mathbf{1}$进行归纳。

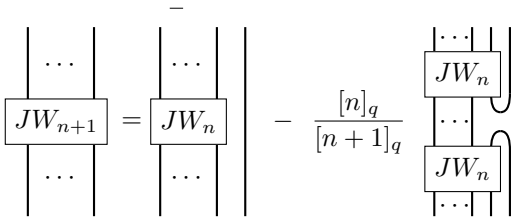
(4) 现在，我们可以利用这样一个事实：$\mathbf{Rep}(SL_2)$ 满足相同的 Clebsch-Gordan融合规则 (3)，也就是说，两个范畴的 Grothendieck环同构。设 $\mathbf{n} = \bigoplus_i T_i^{\oplus m_i}$。那么，

$$\dim(\mathrm{End}(\underline{\mathbf{n}})) = \sum_{i,j} m_i m_j \dim(\mathrm{Hom}(T_i, T_j)) \geq \sum_i m_i^2 \dim(\mathrm{End}(T_i)) \geq \sum_i m_i^2,$$

当且仅当 $\mathrm{End}(T_i) \cong \mathbb{K}$ 和 $\mathrm{Hom}(T_i, T_j) = 0$ 时，等式成立。然而，当用 $V^{\otimes n}$ 替换$\mathbf{n}$ 时，等式确实成立，其中 $V \in \mathbf{Rep}(SL_2)$ 是基本二维表示；我们知道，它与$\mathbf{n}$ 在$\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K})$中的直和分解相同。因此，不等式两边都必须等于 n^{th} Catalan数。由此可知，T_n 是单对象，并且$\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K})$是半单的。

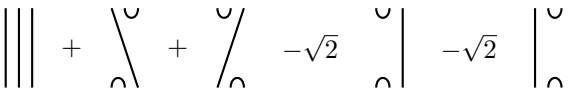
□

定理3.14 （[Wen]）。当 q 不是单位根时，对象 T_n 是 *Jones-Wenzl*幂等元的像$JW_n \in \mathrm{End}(\mathbf{n})$，递归定义为 $JW_1 =$ 恒等映射$_{\mathbf{1}}$ 和



下面的例子说明，一般而言，$\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K})$并不是半单的。

例 3.15。 该幂等元



在**Temperley–Lieb范畴** $(e^{\pi i/4}$中是可忽略的；$\mathbb{C})$，因此 $\dim_q(\mathbf{3}, J) = 0$。

融合商。现在我们来回顾当 q 是单位根时$\mathbf{Temperley–Lieb范畴}(q;\ \mathbb{K})$的半单化。在本节余下部分，固定一个整数 $\varkappa \geq 3$ 以及代数闭域 $\mathbb{K}$ 中一个阶为 $2\varkappa$ 的本原单位根 q，其中 $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$。

定义3.16。令 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$为**Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$的半单化**Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$。

命题 3.17。 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 是一个融合范畴（即具有有限多个单对象的半单张量范畴），其简单对象为 $L_n := T_n$，其中有 $n = 0$、1、2、.....、$\varkappa - 2$，且维数 $L_n = [n+1]_{\pm q}$。它们满足如下给出的截断*Clebsch-Gordon*融合规则

$$L_m \otimes L_n \cong \begin{cases} L_{|m-n|} \oplus L_{|m-n|+2} \oplus \cdots \oplus L_{m+n} & m+n \leq \varkappa - 2 \\ L_{|m-n|} \oplus L_{|m-n|+2} \oplus \cdots \oplus L_{(2\varkappa-4)-(m+n)} & m+n > \varkappa - 2 \end{cases}.$$

证明。第一条陈述直接由定理 2.22、命题3.7和定理 3.13推出，在 $m+n \leq \varkappa-2$ 的情形下，融合规则也同样如此。要看 $m+n > \varkappa-2$ 时的融合规则，首先注意到

$$L_1 \otimes L_{\varkappa-2} \cong \overline{T_{\varkappa-3}} \oplus \overline{T_{\varkappa-1}} \cong L_{\varkappa-3},$$

si因此 $T_{\varkappa-1}$ 可忽略，所以 $T_{\overline{\varkappa-1}} = 0$。然后用一个简单的归纳论证即可完成证明。 f. □

注意，融合规则可以通过 $A_{\varkappa-1}$ Dynkin 图来概括，其中顶点对应单对象，与 L_1 相邻的顶点则对应与 L_1 张量积后出现的直和项，因此得名。$\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 已知与 $\mathrm{Tilt}_{\mathbb{K}}(U_q(\mathfrak{sl}_2))$ 等价（作为幺半范畴），后者是 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的倾斜模范畴的半单化（例如参见 [BakKir，第 3 节。3] 或 [Schopi]）。Andersen 和 Paradowski 在 [And] 和 [AndPar]中研究了范畴 $\mathrm{Tilt}_{\mathbb{K}}(U_q(\mathfrak{g}))$。

的模数据 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 由以下公式给出（例如参见 [KauLin，第 5 节。2], [Tur，第 XII 节。5], 或 [BakKir，定理 3.3。20]）。

命题 3.18。 对于 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$中的每一对简单对象 L_m 和 L_n，我们有

$$s_{m,n} = s_{L_m,L_n} = (-1)^{m+n}[(m+1)(n+1)]_q \quad and \quad \theta_n = t_{L_n,L_n} = (-a)^{n(n+2)} = \pm q^{\pm n(n+2)/2},$$

其中 $a = \pm q^{\pm 1/2}$ 是来自 方程 $\star$。

通过考察融合规则，很容易看出下述命题。

命题 3.19。 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 恰好包含四个幺半子范畴：平凡范畴（$\simeq \mathbf{Vec}$），其中仅含一个简单对象 $L_0 = \mathbb{1}$；范畴 $\langle L_{\varkappa-2}\rangle$，其中恰好包含两个单对象 L_0 和 $L_{\varkappa-2}$；伴随范畴 $\mathrm{Ad}(\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})) := \langle L_2\rangle$，其中包含单对象 L_{2n}；以及其本身 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$。

命题 3.20。 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 的 *Müger* 中心是平凡的，因此 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 是模的。

证明。 Müger 中心是 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 的融合子范畴，因此根据 命题 3.19，只需排除三种非平凡的可能性。如果 Müger 中心是 $\mathrm{Ad}(\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K}))$ 或 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$，则 L_2 会与 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 的所有对象交换，特别是与 $\sigma_{L_2,\,L_1}\circ\sigma_{L_1\circ L_2} =$ 恒等映射$_{L_1\otimes L_2}$ 交换。回忆扭结满足关系

$$\theta_{X\otimes Y} = \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y}(\theta_X\otimes\theta_Y),$$

例如，参见 [EGNO，第 8 节。10] 或 [BakKir，第 2 节。2]。因此，我们将有 $\theta_{L_1\otimes L_2} = \theta_{L_1}\otimes\theta_{L_2}$。由于左侧和右侧分别在 L_3 上按标量 θ_3 和 $\theta_1\theta_2$作用，我们必须有

$$1 = \frac{\theta_3}{\theta_1\theta_2} = \frac{\pm q^{\pm 15/2}}{q^{\pm 3/2}q^{\pm 4}} = \pm q^{\pm 2} \implies q^4 = 1,$$

这与 q 的阶为 $2\varkappa \geq 6$ 相矛盾。

为了排除 Müger 中心为 $\langle L_{\varkappa-2}\rangle$ 的情形，我们再次使用 T-矩阵：如果 $L_{\varkappa-2}$ 使 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 的所有对象都彼此中心化，那么对于每个 $n = 0,1,\ldots,\varkappa-2$，都有 $\sigma_{L_n,L_{\varkappa-2}}\circ\sigma_{L_{\varkappa-2}\circ L_n} =$ 恒等映射$_{L_{\varkappa-2}\otimes L_n}$，这意味着对于某个固定的符号选择 e_1, $e_2\in\{\pm 1\}$（该选择取决于编织），

$$1 = \frac{\theta_{\varkappa-2-n}}{\theta_{\varkappa-2}\theta_n} = e_1\frac{q^{e_2(\varkappa-n)(\varkappa-n-2)/2}}{q^{e_2\varkappa(\varkappa-2)/2}q^{e_2 n(n+2)/2}} = e_1 q^{e_2\varkappa n} = e_1(-1)^n,$$

（因为 q 是本原 $2\varkappa^{\text{th}}$ 单位根时 $q^{\varkappa} = -1$），但当 $\varkappa\geq 3$ 且 $\mathrm{char}\,\mathbb{K}\neq 2$ 时，不可能对所有 n 都满足这一条件。

因此，$\mathcal{Z}_{\mathrm{Müg}}(\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})) \simeq \mathbf{Vec}$。由 命题 2.11 可立即推出其为模的。 □

推论 3.21。 典范函子 $D_\varkappa\colon \mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})\boxtimes\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})^{\mathrm{rev}} \to \mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K}))$ 是编织张量范畴之间的等价。

证明。 这是 推论 2.12 和 命题 3.20的直接推论。 □

定义 3.22。 将 $\mathbf{Ver}_p$ 定义为 **Temperley–Lieb范畴** $(1$ 的半单化；$\mathbb{F}_p) \simeq \mathbf{Tilt}_{\mathbb{F}_p}(SL_2)$。

范畴 $\mathbf{Ver}_p$ 也等价于范畴 $\mathbf{Rep}^{\mathbb{F}_p}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$的半单化，因此，其简单对象可通过约当标准形理论来描述，[Ost]。这些范畴尤为重要，因为它们是正特征下纤维函子的最简单目标，[Ost], [CEO]。我们在以下命题中记录这些范畴的一些基本事实。

命题 3.23。 [Ost，第 3 节。2] 范畴 $\mathbf{Ver}_p$ 与 $\mathcal{A}_{p-1}(\mathbb{F}_p)$具有相同的 *Grothendieck*环；特别是，它有 $\frac{p}{-}-1$ 简单对象 L_0，L_1、……、L_{p-2} 它们遵循命题 *3.17*中的截断*Clebsch-Gordon*融合规则。

4. Temperley–Lieb范畴$(q;\ \mathbb{C})$ 在融合范畴的超积中

命题 4.1. 给定在 $\mathbb{Q}$ 上超越的 $q \in \mathbb{C}$，存在一个由本原$(2\varkappa_k)^{th}$单位根组成的序列 q_k，满足 $\varkappa_k \to \infty$，以及一个将 超乘积$_{k\to\infty} q_k \mapsto q$ 映射到 $\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$ 的域同构。

证明。 根据 命题 A.23，我们知道存在一个域同构 $\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$。设 q_k 为任意这样的序列（例如 $q_k = e^{\frac{\pi i}{\varkappa_k}}$）。由于 $\varkappa_k \to \infty$，次数小于 $n \in \mathbb{N}$ 的任意多项式至多被有限多个 q_k满足，因此根据 Łoś 定理，超乘积$_{k\to\infty} q_k$ 不满足该多项式。由此可知，超乘积$_{k\to\infty} q_k$ 是超越的，因此我们可以通过扩张显然的同构来构造所需的域同构，例如

$$\overline{\mathbb{Q}}\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty} q_j\right) \cong \overline{\mathbb{Q}}(q) \text{ to all of } \mathbb{C}.$$ □

我们还希望将代数数 q 表示为阶不断增大的偶数阶单位根 q_k 的超极限。为此，我们还需要改变特征 p 以及阶。首先，让我们说明当 q 是整数时这一过程如何进行，因为一般情形可以直接推广得出。

命题 4.2。 设 $q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$。存在无穷多个素数 p_k，使得 q 模 p_k 的乘法阶为 2^k。

证明。 考虑 $A_k := q^{2^k} + 1$（其中 $k \in \mathbb{N}$）的素因子。对于任意这样的素数 p，我们有 $q^{2^k} \equiv -1$ 模 p，因此 q 在 $\mathbb{F}_p$ 中的阶为 2^{k+1}，因为其阶整除 2^{k+1}，但不整除 2^k。
注意，对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有一个 A_k 的素因子，它对所有 $j < k$都不整除 A_j。事实上，简单归纳法可得

$$A_k - 2 = A_{k-1}A_{k-2}\dots A_1A_0(n-1),$$

因此，同时整除 A_j（对于某个 $j < k$）和 A_k 的素数也必定整除 2；但每个 A_k 都有一个不同于 2 的素因子（如果 q 是偶数，这显然成立，因为 A_k 是奇数；如果 q 是奇数，那么 $q^2 \equiv 1$ 模 8，所以 $A_k \equiv 2$模 8，因此只要 $q^2 \neq 1$，它就不是 2 的幂）。由此可知，当 $k \to \infty$ 时，A_k 的素因子集合是无限的。
char 42 □

为了将这一结果推广到代数整数，我们需要使用 Postnikova 和 Schinzel 提出的、针对代数数域的 Zsigmondy 定理的以下推广，现陈述如下。

定理 4.3。 [PosSch，定理 1] 设 α 和 β 属于代数数域 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 的整数环 $\mathbb{K}$。存在一个整数 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $n > N$，存在一个 $\mathfrak{p}_n$ 的素理想 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 满足 $\mathfrak{p}_n \mid (\alpha^n - \beta^n)$ 并且$\mathfrak{p}_n \nmid (\alpha^\ell - \beta^\ell)$ 对于所有 $\ell < n$。

命题 4.4. 设 q 是任意一个非零且不是单位根的代数复数，并设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$是它的最小多项式。存在一个无限集 $\mathcal{P}_q$，由素数 $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 构成，使得 $f(x)$ 模 p_k 有一个乘法阶为 2^k的根$q_k \in \mathbb{F}_{p_k}$。

证明。设 $q = \alpha/\beta$是代数整数 α, β，它们的首一最小多项式分别为 $g(x)$ $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$。我们在 $\mathbb{Q}$ 上的 gh 的分裂域 $\mathbb{K}$ 中进行讨论。由定理 4.3 可知，对于充分大的 k，存在一个 $\mathfrak{p}_k$ 的素理想，包含 $\alpha^{2^{k+1}} - \beta^{2^{k+1}} = (\alpha^{2^k} - \beta^{2^k})($ $\alpha^{2^k} + \beta^{2^k})$，但对所有 $\ell < k$ 都不包含 $\alpha^{2^{\ell+1}} - \beta^{2^{\ell+1}}$，因此它包含 $\alpha^{2^k} + \beta^{2^k}$，但对所有 $\ell < k$ 都不包含 $\alpha^{2^\ell} + \beta^{2^\ell}$。现在，$\mathfrak{p}_k \cap \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的一个素理想，由某个有理素数 $p_k \in \mathbb{Z}$ 主生成。由于 $\mathfrak{p}_k$ 包含 $\alpha^{2^k} + \beta^{2^k}$，它也包含其范数

$$N_k := \prod_{\sigma\in \mathrm{Gal}\,(\mathbb{K}/\mathbb{Q})} \left(\sigma(\alpha)^{2^k} + \sigma(\beta)^{2^k}\right).$$

N_k 是一个整数，因此 $N_k \in \mathfrak{p}_k \cap \mathbb{Z} = (p_k)$。

字符42 作为推论，这为素数无穷性提供了一种证明。这种证明是对 Goldbach 和 Hurwitz 提出的类似证明的一种变体，后经 Pólya 和 Szegő 推广。参见 [Haa]了解详细历史。

由此可得 $N_k \equiv 0$ 模 p_k，进而得到 $N_k = \prod_{i=1}^{d} \left({\alpha_i}^{2^k} + \beta_i^{2^k} \right) = 0 \in \mathbb{F}_{p_k}$，其中 α_i 和 β_i 分别是 $\mathbb{F}_{p_k}$中模 p_k 的$g(x)$和 $h(x)$的根。因此，对于某个 $j \in \{1, \dots, d\}$，我们有 $\alpha_j^{2^k} = -\beta_j^{2^k}$，在 $\mathbb{F}_{p_k}$中。令$q_k := \alpha_j / \beta_j$，则有$q^{2^k} = -1$，于是 q_k 在$\mathbb{F}_{p_k}$中的阶为 2^{k+1} 。注意，如果 $\mathfrak{p}_k$ 和 $\mathfrak{p}_{k'}$ 位于同一个素理想(p_k)之上，$\in \mathbb{Z}$ 对于 $k \neq k'$，那么某个 q_k 在同一个域 $\mathbb{F}_{p_k}$中的阶将同时为 2^{k+1} 和 $2^{k'+1}$，这是不可能的。因此，我们以这种方式得到一个由有理素数 $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 组成的无限集 $\mathcal{P}_q$ 。□

注记 4.5。我们只会用到较弱形式的命题 4.4，即 q_k 可以选择为具有偶数乘法阶的 $2\varkappa_k$，其中 $\varkappa_k \to \infty$，而不要求其阶为 2 的幂。

推论 4.6。设 q 是任意一个非零、非单位根的代数复数，且 $\mathcal{P}_q = \{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是命题 4.4所保证的素数集，并设 $q_k \in \mathbb{F}_{p_k}$ 是相应的偶数阶单位根。存在一个域同构 $\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{F}_{p_k} \cong \mathbb{C}$，将 超乘积$\lim_{k \to \infty}^{\mathscr{U}} q_k$ 映至 q。

证明。根据命题 A.23，我们知道存在一个同构 $\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{F}_{p_k} \cong \mathbb{C}$ 。由于根据构造，每个q_k 都满足 q的最小多项式，根据 Łoś 定理，$\prod_{\mathscr{U}} q_k$也满足该多项式。因此，任何此类同构都会将 $\prod_{\mathscr{U}} q_k$ 映至 q的某个伽罗瓦共轭；再与适当的伽罗瓦自同构复合，即可得到所需的映射。□

固定 $\mathbb{N}$ 上的一个非主超滤子 $\mathscr{U}$。给定超越数（分别为非单位根的代数数）$q \in \mathbb{C}$，固定一个同构 $\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$（分别为 $\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{F}_{p_k} \cong \mathbb{C}$），使 $\operatorname{ulim}_{k \to \infty} q_k$ 与某个序列 $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 中的 $\mathbb{C}$ 里的阶为 $2\varkappa_k \to \infty$ 的单位根 q 相对应（分别为 $\mathbb{F}_{p_k}$）。根据定理 A.22，通过该同构 $\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$（分别为 $\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{F}_{p_k} \cong \mathbb{C}$），$\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{C})$（分别为 $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{F}_{p_k})$）是一个 $\mathbb{C}$-线性张量范畴。令 $\mathcal{A}_\infty(q)$ 为由对象 $X_1 := \operatorname{ulim}_{k \to \infty} L_1$ 在张量积、直和及直和项运算下生成的全子范畴。尽管 $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 取决于超滤子、域同构的选择以及序列 $\varkappa_k$，子范畴 $\mathcal{A}_\infty(q)$ 只取决于 $q := \operatorname{ulim}_{k \to \infty} q_k$，这也解释了该记号的合理性。下一个命题将说明原因。

推论 4.7。存在一个幺半等价 $E\colon$ **Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_\infty(q)$。

证明。令 $f = \operatorname{ulim}_{k \to \infty}$杯，且令 $g = \operatorname{ulim}_{k \to \infty}$帽。根据 Łoś 定理，$g \circ f = -[2]_q$恒等映射$_{\mathbb{1}}$。因此，根据命题 3.5 中的泛性质，我们得到一个张量函子 $E\colon \mathrm{TL}(q;\ \mathbb{C}) \to \mathcal{A}_\infty$，满足 $E(1) = X_1$、$E($杯$) = f$且 $E($帽$) = g$。由于按定义 $\mathcal{A}_\infty(q)$ 由 X生成，它显然是本质满的。

对于 $\mathrm{TL}(q;\ \mathbb{C})$ 的任意简单对象 T_n，以及任意充分大的 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\varkappa_k - 2 \geq n$，我们在 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 中有简单对象 L_n，其产生对象 $X_n := \operatorname{ulim}_{k \to \infty} L_n \subset X_1^{\otimes n}$位于 $\mathcal{A}_\infty(q)$ 中。定义 $E(T_n) = X_n$。现在，根据 Łoś 定理，任意两个这样的对象 X_m 和 X_n 满足与 T_m 和 T_n 相同的融合规则，因为当 $\varkappa - 2 \geq m + n$时，L_m 和 L_n 在 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}$ 中的规则相同。同样，根据 Łoś 定理，$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}_\infty(q)}(X_n, X_m) \cong \mathbb{C}\delta_{mn}$。由此可知，$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A}_\infty(q)$ 的所有简单对象的完整列表，并且 E 在 $\mathcal{A}_\infty(q)$ 的态射空间与 $\mathrm{TL}(q;\ \mathbb{C})$ 的态射空间之间诱导出一个双射；因此，E 是一个等价。□

记号 4.8. 下文中，我们常常会滥用记号，写作 $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}_{\varkappa-1}$；当底域可由上下文明确，或论证与域无关时，省略底域。例如，写作 $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}_{\varkappa-1}$ 时，若我们要研究当 q 为超越数时的 $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{C})$，则指 $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{C})$；若我们要研究当 q 是非单位根代数数时的 $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{C})$，则指 $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{F}_{p_k})$。在超积的语境下，我们也会在记号中省略 $\varkappa_k$ 对 k 的依赖，简写为 $\varkappa$。

5. 泛 Temperley–Lieb 范畴的中心

半编织。首先，我们来描述一些对象的例子，它们属于 **Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$ 的 Drinfeld 中心。如第 2 节所述，由于 **Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{C})$ 带有编织结构，其中每个对象 Xin **Temperley–Lieb范畴** $(q;\ \mathbb{K})$ 都给出 Drinfeld 中心中的两个显然对象：$(X, \sigma_{X,-})$ 和 $(X, \sigma_{-}^{-1,X})$，其中 σ 是 **Temperley–Lieb范畴** $(q;\ \mathbb{K})$ 上的一个编织结构。这些给出了完全

忠实函子

$$\begin{aligned} D : \mathbf{TL}(q;\mathbb{K}) \boxtimes \mathbf{TL}(q;\mathbb{K})^{\mathrm{rev}} &\to \mathcal{Z}(\mathbf{TL}(q;\mathbb{K})) \\ A \boxtimes B &\mapsto (A\otimes B, (\sigma_{A,-}\otimes \mathrm{Id}_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes \sigma_{-,B}^{-1})). \end{aligned}$$

然而，这个函子并非本质满射；事实上，利用$\mathbf{TL}(q;\mathbb{K})$上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–分次，可以很容易地构造出一个中心中的对象，而它不属于 D的像。

引理5.1. Temperley–Lieb范畴 $(q;\mathbb{K})$ 具有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–分次，由此诱导出函子 $G:\mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to\mathcal{Z}(\mathbf{TL}(q;\mathbb{K}))$。

证明。 该分次的定义如下：取全子范畴$\mathbf{TL}(q;\mathbb{K})_0$，令其单对象 T_{2n} （等价地，令由$\mathbf{2n}$生成的 Karoubian子范畴）属于次数0；再取全子范畴$\mathbf{TL}(q;\mathbb{K})_1$，令其单对象 T_{2n+1} 属于次数1。其余结论由命题 2.5得出。 □

更明确地，定义 $\xi_{T_n}:\mathbf{0}\otimes T_n\to T_n\otimes\mathbf{0}$，使得$(-1)^n\cdot r^{-1}\circ l$，并将其线性延拓，从而为所有对象$X$定义 ξ_X。
容易验证，$(\mathbf{0},\xi)$在中心中生成了一个$\mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$的副本。
因此，我们可以借助 Deligne张量积的泛性质，将函子 D 和 G 结合起来。

命题 5.2. 存在一个张量函子

$$Z : \mathbf{TL}(q;\mathbb{K}) \boxtimes \mathbf{TL}(q;\mathbb{K})^{\mathrm{rev}} \boxtimes \mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{TL}(q;\mathbb{K}))$$

延拓函子 $D:$**Temperley–Lieb范畴** $(q;\mathbb{K})\boxtimes$**Temperley–Lieb范畴** $(q;\mathbb{K})^{\mathrm{rev}}\to\mathcal{Z}$**(Temperley–Lieb范畴**$(q;\mathbb{K})$**)** 和 $G:\mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to\mathcal{Z}$**(Temperley–Lieb范畴**$(q;\mathbb{K})$**)**。 □

本节的目标是证明，当$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 且 q 不是单位根时， Z 是幺半群范畴之间的等价（但不是带编织结构的等价！）。

定义 5.3. 在 $\mathcal{Z}(\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{C}))$中，我们定义

$$M_{i,j} := Z(T_i\boxtimes T_j\boxtimes \mathbb{1}) = (T_i\otimes T_j, (\sigma_{T_i,-}\otimes\mathrm{Id}_{T_j})\circ(\mathrm{Id}_{T_i}\otimes\sigma_{-,T_j}^{-1})),$$

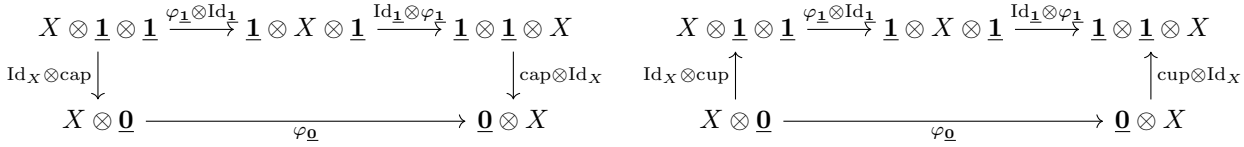
$$W_{i,j} := Z(T_i\boxtimes T_j\boxtimes S)\cong M_{i,j}\otimes(\underline{\mathbf{0}},\xi),$$

其中， S 是 $\mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的非平凡简单对象。

备注 5.4。 考虑 **Temperley–Lieb范畴**$(q;\mathbb{K})$ 的其他编织结构，并不会在对象上产生新的半编织。事实上，我们证明了对于 $q\neq\pm1$，**Temperley–Lieb范畴**$(q;\mathbb{K})$ 有四种编织结构，其中一种及其逆给出了中心中的对象 $(X,\ \sigma_{X,\ -})$ 和 $(X,\ \sigma_{-}^{-1},\ X)$；将 σ 替换为其逆，只会使中心中的这两个对象互换，而将 σ 和 σ^{-1} 替换为另外两种编织结构，则对应于中心上的对合自等价 $-\otimes(\mathbf{0},\ \xi)$。

我们先给出一个简单但非常有用的判据，用于刻画 **Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$ 中的半编织：

引理 5.5。 在 **Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$ 中的一个同构 $\varphi_{\mathbf{1}}:\ X\otimes\mathbf{1}\to\mathbf{1}\otimes X$ 唯一确定 X 的一个半编织，当且仅当以下两个图是交换图。



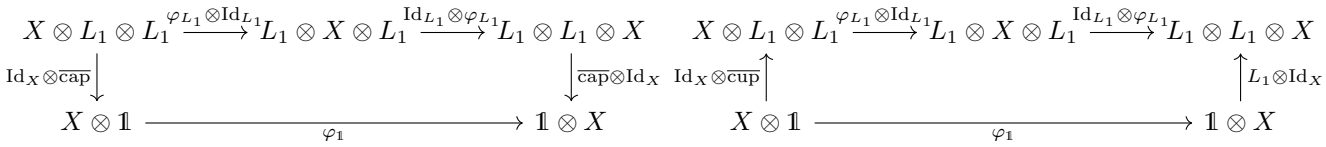
证明。一方面显然：如果 φ 是半编织，那么根据六边形公理，$\varphi_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}}=(\mathrm{Id}_{\mathbf{1}}\otimes\varphi_{\mathbf{1}})\circ(\varphi_{\mathbf{1}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathbf{1}})$，因此这些图根据 φ 的自然性可交换。反过来，我们首先需要从单个态射 $\varphi_{\mathbf{1}}$ 构造出$\widetilde{\ }$上的编织 φ。根据命题 2.16，只需在 TL $(q;\ \mathbb{K})$ 上构造一个半编织，并按其中规定的标准方式将其延拓到$\widetilde{\ }$的柯西完备化。这是可行的，因为 1 在张量积和取直和运算下生成 TL $(q;\ \mathbb{K})$。更确切地说，我们以唯一能保证六边形公理成立的方式归纳定义 $\varphi_{\mathbf{n}}$，即

$$\sigma_{\underline{\mathbf{n}}} := (\mathrm{Id}_{\underline{\mathbf{n-1}}}\otimes\varphi_{\underline{\mathbf{1}}})\circ(\varphi_{\underline{\mathbf{n-1}}}\otimes\mathrm{Id}_{\underline{\mathbf{1}}}) = (\mathrm{Id}_{\underline{\mathbf{1}}}\otimes\varphi_{\underline{\mathbf{n-1}}})\circ(\varphi_{\underline{\mathbf{1}}}\otimes\mathrm{Id}_{\underline{\mathbf{n-1}}}).$$

然后，以显而易见的方式在直和上定义 φ： $\varphi_{\mathbf{n}\oplus\mathbf{m}} := \varphi_{\mathbf{n}} \oplus \varphi_{\mathbf{m}}$。
现在，只需验证 φ 是一个自然同构。但注意，上述图恰好是生成态射杯和帽对应的自然性图表，而**Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$中的所有其他态射的自然性，都可通过对这两个图进行张量积和复合得到。为证明 φ 是一个同构，我们以相同方式构造一个从 $\varphi_{\mathbf{1}}^{-1}$出发的自然变换；容易验证，它是 φ的逆。□

同一判据（证明也相同）同样适用于融合商 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$。

引理 5.6。 同构 φ_{L_1}： $X \otimes L_1 \to L_1 \otimes X$ 在 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}$（$\mathbb{K}$）中唯一确定 X的一个半编织，当且仅当下列两个图交换。



滤过与超积。范畴 TL $(q;\ \mathbb{K})$ 带有一个自然滤过，这是因为它由单个对象 $\mathbf{1}$ 生成。具体而言，对每个 $r, s \in \mathbb{N}$，滤过分量 TL $(q;\ \mathbb{K})^{\leq r,s}$是由形如 $Z_1 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_s$的对象构成的全子范畴，其中每个 Z_i都是某个对象 $\mathbf{n}$ 的直和项，且$n \leq r$。当 q^2 在 $\mathbb{K}$中的阶为 $\varkappa$ 时，经过半单化后，我们在范畴$\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$上得到一个诱导滤过。换言之，滤过分量 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})^{\leq r}$ 是由形如 $Z_1 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_s$的对象构成的全子范畴，其中每个 Z_i都属于 $L_0, L_1, \ldots, L_r$。这些双滤过导出较粗滤过 $\mathcal{C}^{\leq r} := \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{\leq r,s}$，其中 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K})$ 或 TL $(q;\ \mathbb{C})$。

注意，每个滤过部分 $\mathcal{A}^{\leq r,s}_{\varkappa-1}$ 或 $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{C})^{\leq r,s}$ 对取直和或张量积并不封闭；它们只有部分定义的加性和幺半结构。对于较粗滤过，滤过分量 $\mathcal{A}^{\leq r}_{\varkappa-1}$ 或 $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{C})^{\leq r}$ 对直和封闭，但对张量积仍不封闭。若函子 $F: \mathcal{C}^{\leq r} \to \mathcal{D}^{\leq r}$ *intertwines the partially defined monoidal structures of* $\mathcal{C}^{\leq r}$ 和 $\mathcal{D}^{\leq r}$满足：每当 $X \otimes Y$在 $\mathcal{C}^{\leq r}$ 中存在时， $F(X) \otimes F(Y)$就在 $\mathcal{D}^{\leq r}$中存在，且在 $\mathcal{D}^{\leq r}$中存在某个未指定的同构 $F(X \otimes Y) \cong F(X) \otimes F(Y)$，我们就称该函子交织了两者的部分定义的幺半结构。

给定一个具有滤过分量 $\mathcal{C}^{\leq r}$ 的滤过张量范畴 $\mathcal{C}$，我们可在其 Drinfeld 中心上得到一个诱导滤过： $\mathcal{Z}(\mathcal{C})^{\leq r}$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 的全子范畴，由底层对象 X 属于相应滤过分量 $\mathcal{C}^{\leq r}$ 的对象 (X, φ) 组成。因此，我们在 $\mathcal{Z}(\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K}))$ 上以及在 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K}))$ 上分别得到一个滤过，其滤过分量分别为 $\mathcal{Z}(\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K}))^{\leq r,s}$ 和 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\varkappa-1}(\mathbb{K}))^{\leq r,s}$。

在每个滤过分量都只有有限个对象的情况下进行滤过，对于处理超积非常有用。事实上，范畴 $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}_{\varkappa-1}$ 实在太大了，我们只关心其中的一小部分，即 $\mathcal{A}_\infty(q) \simeq$ **Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{C})$。不过，只对给定的滤过分量取超积，就能得到一个更易处理的范畴，无须再进一步将其限制到更小的范畴，下一条命题将说明这一点。

命题 5.7. 函子 E 的 推论 4.7 限制在 **Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{C})^{\leq r,s}$ 是一个等价

$$E^{\leq r,s} : \mathbf{TL}\,(q;\ \mathbb{C})^{\leq r,s} \simeq \mathcal{A}_\infty^{\leq r,s} = \prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\leq r,s}$$

在 $\mathbb{C}$-线性范畴之间，并 *intertwining* 它们部分定义的幺半结构。

证明。 设 $Y = X_{j_1} \oplus \cdots \oplus X_{j_t}$ 满足 $t \leq s$ 和 $0 \leq j_i \leq r$，其中 $X_m = E(T_m)$ 属于 $\mathcal{A}^{\leq r,s}_\infty$。那么，$Y = \operatorname{ulim}_{k\to\infty}(T_{j_1} \oplus \cdots \oplus T_{j_t})$。因此， $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}^{\leq r,s}_{\varkappa-1} \supseteq \mathcal{A}^{\leq r,s}_\infty$。
反之，设 $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A}^{\leq r,s}_{\varkappa-1}$ 中的对象 Y_k 序列。我们希望证明 $\operatorname{ulim}_{k\to\infty} Y_k$ 属于 $\mathcal{A}^{\leq r,s}_\infty$。注意，每个 Y_k 只有有限种可能：直和项数有 s 种可能，而每个直和项都从 $r+1$ 种可能性 $L_0, \ldots, L_r$ 中选取。设 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ 是每个 Y_k 的所有可能性的穷尽列表（当 k 足够大时，它们的可能性相同）。令 $S_i = \{k \in \mathbb{N} \mid Y_k = Q_i\}$ 对于 $i = 1, \ldots, n$。由

引理 A.17， $S_i \in \mathscr{U}$ 恰好对应一个 i，记为 i^*。因此，$\operatorname{ulim}_{k\to\infty} Y_k = \operatorname{ulim}_{k\to\infty} Q_{i^*} =: Q$ 属于 $\mathcal{A}^{\leq r,\ \infty\ s}$；事实上，如果 $Q_{i^*} = L_{j_1} \oplus \cdots \oplus L_{j_t}$，那么 $Q = X_{j_1} \oplus \cdots \oplus X j_t$，且每个 X_m 都是 $X_1^{\otimes m}$ 的一个直和项。因此，$\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}^{\leq r,\ \varkappa-1}{}^{s} \subseteq \mathcal{A}^{\leq r,\ \infty}{}^{s}$。□

作为极限的中心。遗憾的是，取 Drinfeld 中心与取超积并不交换，但滤过再次发挥了作用。

命题 5.8。对于 r、$s \geq 2$，我们有一个等价

$$F^{\leq r,s} : \prod_{\mathscr{U}} \mathcal{Z}\left(\mathcal{A}_{\varkappa-1}\right)^{\leq r,s} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}\left(\mathbf{TL}\left(q;\mathbb{C}\right)\right)^{\leq r,s}$$

$$\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(Y_k,\varphi_k) \mapsto \left(E^{-1}\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty} Y_k\right), E^{-1}\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}\varphi_k\right)\right)$$

$\mathbb{C}$-线性范畴之间的等价，并且该等价交织了它们部分定义的幺半结构。

证明。设 $(Y_k,\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个序列，其中各项都是超积的因子 $\mathcal{Z}\left(\mathcal{A}_{\varkappa-1}\right)^{\leq r,s}$ 中的对象。对底层对象 Y_k 取超积 $Y := \operatorname{ulim}_{k\to\infty} Y_k$，将其视为 $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}^{\leq r,\varkappa-1}{}^{s}$ 中的对象，由命题 5.7 可得 Temperley–Lieb范畴 $(q;\ \mathbb{C})^{\leq r,s}$ 中的一个对象。类似地，$\varphi := \operatorname{ulim}_{k\to\infty}(\varphi_k)_X$ 给出一族态射 $\varphi_X\colon X\otimes Y \to Y\otimes X$，它们属于 Temperley–Lieb范畴 $(q;\ \mathbb{C})^{\leq r,s}$；由于自然性图表由 Łoś 定理保证交换，这些态射可粘合为一个自然变换。由于每个 φ_k 都满足整个中心 $\mathcal{Z}\left(\mathcal{A}_{\varkappa-1}\right)$ 中半编织的六边形公理，由 Łoś 定理可知，对于超积 $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}_{\varkappa-1} \supset \mathcal{A}_\infty(q) \simeq$ Temperley–Lieb范畴 $(q;\ \mathbb{C})$，φ 仍是整个 Temperley–Lieb范畴 $(q;\ \mathbb{C})$ 上的半编织。最后，同样由 Łoś 定理，我们得到一个定义良好的函子$[(Y_k,\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}] \mapsto (Y,\varphi)$，它交织了这两个范畴部分定义的加性结构和幺半结构。

反过来，假设 (Y,φ) 是 $\mathcal{Z}$**(Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{C})$**)**$^{\leq r,s}$ 中的某个对象。由 命题 5.7，我们得到一个序列（或者说，一个序列的等价类）$(Y_k,\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其中包含元素 Y_k 及其在 $\mathcal{A}^{\leq r,\ \varkappa-1}{}^{s}$ 中的半编织 φ_k。先验地，Łoś 定理只能保证这些 φ_k 是滤过分量上的自然半编织，但当 $\varkappa \gg r$ 时，它们未必能在 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}$ 的全部范围内全局地与 Y_k 编织。不过，引理 5.6 保证情况并非如此：只要在 $\mathcal{A}^{\leq 2,\ \varkappa-1}{}^{2}$ 上满足自然性和半编织条件，该条件就会自动对所有 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}$ 成立。因此，我们得到一个赋值 $(Y,\varphi) \mapsto [(Y_k,\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}]$；根据 Łoś 定理，它具有函子性，并且与加性和幺半群结构相容。□

将推论 3.21 的典范等价 $D_\varkappa\colon \mathcal{A}_{\varkappa-1}\boxtimes\mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}\left(\mathcal{A}_{\varkappa-1}\right)$ 的限制取超积，再与 $F^{\leq r,\ s}$复合，得到一个等价

$$G^{\leq r,s}:\qquad \prod_{\mathscr{U}}\left(\mathcal{A}_{\varkappa-1}\boxtimes\mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}}\right)^{\leq r,s} \xrightarrow{\prod_{\mathscr{U}} D_\varkappa^{\leq r,s}} \prod_{\mathscr{U}} \mathcal{Z}\left(\mathcal{A}_{\varkappa-1}\right)^{\leq r,s} \xrightarrow{F^{\leq r,s}} \mathcal{Z}\left(\mathbf{TL}\left(q;\mathbb{C}\right)\right)^{\leq r,s}$$

由于 $G^{\leq r,\ s}$ 只是将 $G^{\leq r',\ s'}$ 在 $r' < r$ 和 $s' < s$ 时作延伸，取它们的直接极限，得到一个$\mathbb{C}$-线性范畴之间的等价

$$G = \varinjlim G^{\leq r,s} : \bigcup_{r,s\in\mathbb{N}} \prod_{\mathscr{U}} (\mathcal{A}_{\varkappa-1}\boxtimes\mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}})^{\leq r,s} \xrightarrow{\sim} \bigcup_{r,s\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}\left(\mathbf{TL}\left(q;\mathbb{C}\right)\right)^{\leq r,s} = \mathcal{Z}\left(\mathbf{TL}\left(q;\mathbb{C}\right)\right),$$

并交织它们的幺半群结构（相差一些未具体说明的同构）。

注记 5.9。将 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\varkappa-1})$ 通过推论 3.21 的等价 $D_\varkappa$ 与 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}\boxtimes\mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}}$ 识别后，其上的滤过结构便不那么显而易见。根据定义，滤过分量 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\varkappa-1})^{\leq r,\ s}$ 由中心的全子范畴构成，其中底层对象属于 $\mathcal{A}^{\leq r,\ \varkappa-1}{}^{s}$。因此，滤过分量 $(\mathcal{A}_{\varkappa-1}\boxtimes\mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}})^{\leq r,\ s}$ 中的对象 $(A\boxtimes B)$ 恰好是满足 $A\otimes B$ 属于滤过分量 $\mathcal{A}^{\leq r,\ \varkappa-1}{}^{s}$ 的对象。

引理 5.10. 当 $2s \geq \varkappa \geq r+2$ 时，滤过部分 $(\mathcal{A}_{\varkappa-1}\boxtimes\mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}})^{\leq r,s}$ 中的简单对象恰好具有 $L_i\boxtimes L_j$ 或 $L_{\varkappa-2-i}\boxtimes L_{\varkappa-2-j}$ 的形式，其中 $i+j\leq r$。

证明。其中的简单对象 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}\boxtimes\mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}}$ 具有 $L_i\boxtimes L_j$的形式。根据 注 5.9， $L_i\boxtimes L_j$ 属于滤过分量（$\mathcal{A}_{\varkappa-1}\boxtimes\mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}}$）$^{\leq r,s}$，当且仅当 $L_i\otimes L_j$ 在 命题 3.17 中的分解属于滤过分量 $\mathcal{A}^{\leq r}{}_{,\mathcal{A}_{\varkappa-1}}{}^{s}$。这当且仅当 $i+j\leq\varkappa-2$ 且 $i+j\leq r$，或 $i+j>\varkappa-2$ 且 $2\varkappa-4-(i+j)\leq r$。由于 $2s\leq\varkappa$，分解中的直和项不会超过滤过分量所允许的数量。此外，当 $\varkappa\geq r+2$ 时，我们的两个条件可化简为：$i+j\leq r$，或（$\varkappa-2-i$）$+$（$\varkappa-2-j$）$\leq r\iff i'+j'\leq r$，其中 $i'=\varkappa-2-i$ 且 $j'=\varkappa-2-j$，结论得证。□

半单性。

引理 5.11。 在 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\varkappa-1})$ 中，存在一个同构

$$(L_0,\overline{\xi})\cong(L_{\varkappa-2}\otimes L_{\varkappa-2},(\overline{\sigma}_{L_{\varkappa-2},-}\otimes\mathrm{Id}_{L_{\varkappa-2}})\circ(\mathrm{Id}_{L_{\varkappa-2}}\otimes\overline{\sigma}^{-1}_{-,L_{\varkappa-2}})),$$

其中，ξ 是通过 **Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$ 的分次作用于 $\mathbf{0}$ 上的非平凡半编织。

证明。首先注意，$\mathcal{A}_{\varkappa-1}$ 的万能分次群 G 是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$；事实上，它必定是循环群，因为 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}$ 由 L_1 生成，且每个元素 $g\in G$ 的阶都必须为 2，因为 $L_n\otimes L_n$ 含有 $L_0\cong\mathbb{1}$ 作为直和项。此外，我们有一个忠实的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次：当 n 为奇数时，令 L_n 的次数为 1；当 n 为偶数时，其次数为 0。因此，根据命题 2.6，在 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\varkappa-1})$ 中，恰有两个底层对象在 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}$ 中为 1 的非同构对象，即 $(\mathbf{1},r^{-1}\circ l)$（它是 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\varkappa-1})$的幺半群单位元）和 $(\mathbf{1},\xi)$。现在，对象

$$(L_{\varkappa-2}\otimes L_{\varkappa-2},(\overline{\sigma}_{L_{\varkappa-2},-}\otimes\mathrm{Id}_{L_{\varkappa-2}})\circ(\mathrm{Id}_{L_{\varkappa-2}}\otimes\overline{\sigma}^{-1}_{-,L_{\varkappa-2}}))\cong D_{\varkappa}(L_{\varkappa-2}\boxtimes L_{\varkappa-2})$$

确实具有 $L_{\varkappa-2}\otimes L_{\varkappa-2}\cong L_0\cong\mathbb{1}$ 作为其底层对象，并且它不可能是幺半群单位元，因为 $D_{\varkappa}$ 根据 推论 3.21是一个等价。因此，它必定同构于 $(\mathbb{1},\xi)$，引理得证。□

引理 5.12。 在 $\mathcal{Z}$(**Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{C})$)中，存在同构

$$M_{i,j}\cong G\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(L_i\boxtimes L_j)\right)\quad and\quad W_{i,j}\cong G\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(L_{\varkappa-2-i}\boxtimes L_{\varkappa-2-j})\right).$$

证明。对于 $r\geq i+j$ 和 $s>\min(i,\ j)$，我们有

$$\begin{aligned}
G\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}L_i\boxtimes L_j\right)&\cong(G^{\leq r,s})\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}L_i\boxtimes L_j\right)=(F^{\leq r,s})\circ\left(\prod_{\mathscr{U}}D_{\varkappa}^{\leq r,s}\right)\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}L_i\boxtimes L_j\right)\\
&\cong(F^{\leq r,s})\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(L_i\otimes L_j,(\overline{\sigma}_{L_i,-}\otimes\mathrm{Id}_{L_j})\circ(\mathrm{Id}_{L_i}\otimes\overline{\sigma}^{-1}_{-,L_j}))\right)\\
&=\left(E^{-1}\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(L_i\otimes L_j)\right),E^{-1}\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(\overline{\sigma}_{L_i,-}\otimes\mathrm{Id}_{L_j})\circ(\mathrm{Id}_{L_i}\otimes\overline{\sigma}^{-1}_{-,L_j}))\right)\right)\\
&\cong(T_i\otimes T_j,(\sigma_{T_i,-}\otimes\mathrm{Id}_{T_j})\circ(\mathrm{Id}_{T_i}\otimes\sigma^{-1}_{-,T_j}))\\
&\cong Z(T_i\boxtimes T_j\boxtimes\mathbb{1})=M_{i,j}.
\end{aligned}$$

接下来注意，对于所有 $r,s\in\mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}
G\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}L_{\varkappa-2}\boxtimes L_{\varkappa-2}\right)&\cong(G^{\leq r,s})\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}L_{\varkappa-2}\boxtimes L_{\varkappa-2}\right)\\
&\cong(F^{\leq r,s})\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(L_{\varkappa-2}\otimes L_{\varkappa-2},(\overline{\sigma}_{L_{\varkappa-2},-}\otimes\mathrm{Id}_{L_{\varkappa-2}})\circ(\mathrm{Id}_{L_{\varkappa-2}}\otimes\overline{\sigma}^{-1}_{-,L_{\varkappa-2}}))\right)\\
&\cong\left(E^{-1}\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}L_0\right),E^{-1}\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}\overline{\xi}\right)\right)\cong(\underline{\mathbf{0}},\xi),
\end{aligned}$$

其中第三个同构　同态源自 引理 5.11。最后，由于 G 与幺半群结构相容，因此我们有

$$\begin{aligned} W_{i,j} &\cong M_{i,j} \otimes (\underline{\mathbf{0}}, \xi) \cong G\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(L_i \boxtimes L_j)\right) \otimes G\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(L_{\varkappa-2} \boxtimes L_{\varkappa-2})\right) \\ &\cong G\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(L_i \boxtimes L_j) \otimes \operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(L_{\varkappa-2} \boxtimes L_{\varkappa-2})\right) \\ &\cong G\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}((L_i \otimes L_{\varkappa-2}) \boxtimes (L_j \otimes L_{\varkappa-2}))\right) \\ &\cong G\left(\operatorname*{ulim}_{k\to\infty}(L_{\varkappa-2-i} \boxtimes L_{\varkappa-2-j})\right). \end{aligned}$$

□

定理 5.13. 若 $q \in \mathbb{C}$ 不是单位根，则 $\mathcal{Z}(\textbf{Temperley–Lieb范畴}\ (q;\ \mathbb{C}))$ 是半单的。 $\{M_{i,j}, W_{i,j} \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ 是其简单对象同构类的完备且无冗余列表。

证明。 由命题 A.26 可直接推出半单性，因为函子 G 将 $\mathcal{Z}(\textbf{Temperley–Lieb 范畴}(q;\ \mathbb{C}))$ 识别为 $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{A}_{\varkappa-1} \boxtimes \mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}}$的一个（幂等完备的、Krull-Schmidt）子范畴。
设 V是中心中的某个简单对象。 $V \cong G(\operatorname{ulim}_{k\to\infty}(L_{i_k} \boxtimes L_{j_k}))$，其中 $\{L_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$和$\{L_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$是取自 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}$ 和 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}}$ 的对象序列，它们由命题 A.26 可知必为简单对象。由于 V在 TL $(q;\ \mathbb{C})$ 中的底层对象必须（在 E 下）对应于 $\operatorname{ulim}_{k\to\infty}(L_{i_k} \otimes L_{j_k}) \cong \operatorname{ulim}_{k\to\infty}(L_{|i_k-j_k|} \oplus \dots)$，我们看到$|i_k - j_k|$ 必定在 $k \to \infty$ 中对几乎所有 $\mathscr{U}$ 都是常数。令 $r \in \mathbb{N}$ 为唯一的正整数，使得 V 属于 $\mathcal{Z}(\mathrm{TL}\ (q;\ \mathbb{C}))^{\leq r}$，但不属于 $\mathcal{Z}(\mathrm{TL}\ (q;\ \mathbb{C}))^{\leq r-1}$。由于 G 与这些滤过相容，必有 $L_{i_k} \boxtimes L_{j_k}$ 对几乎所有 $\mathscr{U}$都属于 $(\mathcal{A}_{\varkappa-1} \boxtimes \mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}})^{\leq r}$，但不属于 $(\mathcal{A}_{\varkappa-1} \boxtimes \mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}})^{\leq r-1}$。根据命题 3.17，我们看到要么 $i_k + j_k = r$，要么 $(\varkappa - 2 - i_k) + (\varkappa - 2 - j_k) = r$。因此，要么 i_k和 j_k都在 $k \to \infty$ 中对几乎所有 $\mathscr{U}$为常数，要么 $(\varkappa - 2 - i_k)$ 和 $(\varkappa - 2 - j_k)$ 都在 $k \to \infty$ 中对几乎所有 $\mathscr{U}$为常数。在前一种情况下，我们得到 $V \cong M_{i,j}$；后一种情况下，我们得到 $V \cong W_{i,j}$。最后，任意两个此类简单对象之间存在同构，将（根据 Łoś 定理）意味着 $\mathcal{A}_{\varkappa-1} \boxtimes \mathcal{A}_{\varkappa-1}^{\mathrm{rev}}$中彼此不同构的单对象之间存在同构，这是不可能的，因此我们的列表没有冗余。□

定理 5.14。 当 $q \in \mathbb{C}$ 不是单位根时，张量函子

$$Z : \mathbf{TL}(q;\mathbb{C}) \boxtimes \mathbf{TL}(q;\mathbb{C})^{\mathrm{rev}} \boxtimes \mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{TL}(q;\mathbb{C}))$$

的 命题 *5.2* 是一个等价。

证明。 的定义域和陪域 Z 都是代数闭域上的半单线性范畴（因此舒尔引理成立）。所以，要证明 Z 是一个等价，只需证明 Z 在单对象之间构成双射，这一点由 定义 5.3和 定理 5.13显然可得。 □

花冠　ry 5.15。 当 $q \in \mathbb{C}$ 不是单位根时，我们有 $\mathcal{Z}(\textbf{Temperley–Lieb范畴}(q;\ \mathbb{Z})$的以下融合规则 $)$*:*

$$M_{i,j} \otimes M_{i',j'} \cong W_{i,j} \otimes W_{i',j'} \cong \bigoplus_{n=0}^{\min(i',j')} \bigoplus_{m=0}^{\min(i,j)} M_{i+j-2m,\, i'+j'-2n}$$

$$\textit{and} \quad W_{i,j} \otimes M_{i',j'} \cong \bigoplus_{n=0}^{\min(i',j')} \bigoplus_{m=0}^{\min(i,j)} W_{i+j-2m,\, i'+j'-2n}.$$

□

由于范畴 **Temperley–Lieb范畴** $(q;\ \mathbb{C})$、**Temperley–Lieb范畴** $(q;\ \mathbb{C})^{\mathrm{rev}}$ 和 **表示范畴**$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 都具有忠实的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–分次，因此我们在中心上得到一个分次。

引理 *5.16.* 范畴 $\mathcal{Z}$*(TL* $(q;\ \mathbb{C})$*)* $\simeq$ *TL* $(q;\ \mathbb{C})$ $\boxtimes$ *TL*$(q;\ \mathbb{C})$ $\boxtimes$ *Rep* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 具有一个忠实的 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}$–分次，由 $M_{i,j}$ 和 $W_{i,j}$ 分别属于次数 *(i, j, 0)* 和 *(i, j, 1)* 给出，其中 $n := n$ 模 2. □

考虑由 $\gamma((i,\ j,\ k),\ (i',\ j',\ k')) = (-1)^{k(i'+j')}$ 给出的双特征 $\gamma\colon (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3} \to \mathbb{C}^{\times}$。我们可以用 γ 扭结 $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{C}) \boxtimes \mathbf{TL}(q;\ \mathbb{C}) \boxtimes \mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的编织，从而得到一个新的编织张量范畴，事实证明它与作为带编织结构的张量范畴的中心等价。

定理 5.17。 对于 $q \in \mathbb{C}$ 不是单位根的情形，典范张量函子

$$Z : \left(\mathbf{TL}\left(q;\ \mathbb{C}\right) \boxtimes \mathbf{TL}\left(q;\ \mathbb{C}\right)^{\mathrm{rev}} \boxtimes \mathbf{Rep}\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)\right)^{\gamma} \to \mathcal{Z}\left(\mathbf{TL}\left(q;\ \mathbb{C}\right)\right)$$

是编织张量范畴之间的等价。

证明。我们需要证明，定理 5.14 中的等价 Z 在两个范畴的幺半生成元上交织了它们的编织结构，即 $T_i \boxtimes T_j \boxtimes \mathbb{1}$ 和 $\mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes S$ 与 $M_{i,\ j}$ 和 W_0,0。令 σ 为前文所述的 TL（q; $\mathbb{C}$）的编织结构，并令 $\sigma^{\mathcal{Z}}$ 和 σ^{γ} 分别为 $\mathcal{Z}$(TL（q; $\mathbb{C}$）) 和 TL（q; $\mathbb{C}$） $\boxtimes$ TL（q; $\mathbb{C}$）$^{\mathrm{rev}}$ $\boxtimes$Rep（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）的编织结构。由于典范函子 D: TL（q; $\mathbb{C}$）$\boxtimes$TL（q; $\mathbb{C}$）$^{\mathrm{rev}} \to \mathcal{Z}$(TL（$q$; $\mathbb{C}$）) 自动带有编织结构，且按定义 Z 扩张了 D，显然 Z 交织了编织结构$\sigma^{\gamma}_{T_i \boxtimes T_j \boxtimes \mathbb{1}, T_{i'} \boxtimes T_{j'} \boxtimes \mathbb{1}}$（它们不受影响

通过 γ-扭结）与 $\sigma^{\mathcal{Z}}_{M_{i,j}, M_{i',j'}}$。类似地，由于 Z 扩展了带编织结构的函子 Rep $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathcal{Z}$(TL $(q;\ \mathbb{C})$)，显然它将 $\sigma^{\gamma}_{\mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes S, \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes S}$（同样不受 γ-扭结影响）与 $\sigma^{\mathcal{Z}}_{W_0,0, W_0,0}$ 交织起来。因此，只需验证它也将编织结构 $\sigma^{\gamma}_{\mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes S, T_i, T_j, \mathbb{1}}$ 和 $\sigma^{\gamma}_{T_i, T_j, \mathbb{1}, \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes S}$ 分别与 $\sigma^{\mathcal{Z}}_{W_0,0, M_{i,j}}$ 和 $\sigma^{\mathcal{Z}}_{M_{i,j}, W_0,0}$ 交织起来。

首先，

$$\sigma^{\mathcal{Z}}_{M_{i,j}, W_{0,0}} := \varphi_{\mathbb{1}} : (T_i \otimes T_j, \varphi) \otimes (\mathbb{1}, \xi) \to (\mathbb{1}, \xi) \otimes (T_i \otimes T_j, \varphi),$$

其中 φ 是半编织 $(\sigma_{T_i,-} \otimes$ 恒等映射$_{T_j}) \circ ($恒等映射$_{T_i} \otimes \sigma^{-1}_{-,T_j})$。然而，根据编织的基本性质，$\varphi_{\mathbb{1}}$ 是平凡的（即左、右单位约束的复合）。另一方面，

$$\sigma^{\gamma}_{T_i, T_j, \mathbb{1}, \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes S} := \gamma\left((\bar{i}, \bar{j}, 0), (0, 0, 1)\right)\ \sigma_{T_i, \mathbb{1}} \boxtimes \sigma^{-1}_{\mathbb{1}, T_j} \boxtimes \sigma^{\mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}_{\mathbb{1}, S} = \sigma_{T_i, \mathbb{1}} \boxtimes \sigma^{-1}_{\mathbb{1}, T_j} \boxtimes \sigma^{\mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}_{\mathbb{1}, S},$$

这又只由左、右单位约束组成。将 Z 应用于后者，我们得到中心中的两个态射，它们具有相同的源与靶，且完全由单位约束组成，因此根据 Mac Lane 相干定理，它们相等。

接下来，我们有

$$\sigma^{\mathcal{Z}}_{W_{0,0}, M_{i,j}} := \xi_{T_i \otimes T_j} : (\mathbb{1}, \xi) \otimes (T_i \otimes T_j, \varphi) \to (T_i \otimes T_j, \varphi) \otimes (\mathbb{1}, \xi),$$

它由 $(-1)^{i+j}$ 给出（同样还乘以一个由单位约束组成的映射，根据相同的相干定理论证，我们可以忽略它）。另一方面，

$$\sigma^{\gamma}_{\mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes S, T_i, T_j, \mathbb{1}} := \gamma\left((0, 0, 1), (\bar{i}, \bar{j}, 0)\right)\ \sigma_{\mathbb{1}, T_i} \boxtimes \sigma^{-1}_{T_j, \mathbb{1}} \boxtimes \sigma^{\mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}_{S, \mathbb{1}} = (-1)^{i+j}.$$

□

6. 若干特殊情形与总结

经典极限， $q = 1$。我们迄今使用的超积技术仍能揭示 $q = 1$ 处中心的一些有趣性质，但无法帮助我们全面理解它。

命题 6.1。 范畴 $\mathbf{TL}(1;\ \mathbb{C})$ 等价于由对象 $\mathrm{ulim}_{p \to \infty} L_1$ 在 $\prod_{\mathscr{U}} \mathbf{Ver}_p$ 中生成的张量子范畴。

证明。 与 推论 4.7 的证明相同的证明适用。 □

然而，主要障碍在于，$\mathbf{Ver}_{p^k}$ 的 Drinfeld 中心十分复杂；事实上，$\mathcal{Z}(\mathbf{Ver}_p)$ 不是半单的，据作者所知，目前对其还缺乏充分的理解。

相反，在这里采用代数几何方法更为有用。在 $q = 1$ 情形下，众所周知，Temperley–Lieb 范畴等价于代数群 SL_2 的复表示范畴 $\mathbf{Rep}(SL_2)$。关于代数群 G 的 $\mathbf{Rep}(G)$ 的中心，以下结果属于众所周知的结论。

命题6.2. 对于连通代数群 G，我们有张量范畴之间的典范等价：中心 $\mathcal{Z}(\mathbf{Rep}(G))$ 与范畴 $\mathbf{Coh}_G^{\mathrm{fin.supp.}}(G)$；后者是 G 在 G 上的等变凝聚层范畴，且这些层支撑于有限多个点上。

证明概要。 范畴 $\mathbf{Rep}(G)$ 作为张量范畴等价于范畴 $\mathcal{O}(G)$–**余模**，即正则函数环上的有限维余模 $\mathcal{O}(G)$。[EGNO, 命题 7.153] 指出，Hopf代数 K–**余模** 范畴的中心 K 与以下范畴幺半张量等价： $\mathcal{YD}_K^K$ 上的有限维 Yetter–Drinfeld模 K。特别地，$(\mathbf{Rep}(G)) \simeq \mathcal{YD}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{O}(G)}$

$_{(G)}$。范畴 $\mathcal{YD}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{O}(G)}$ $_{(G)}$ is 自然地作为张量范畴等价于范畴 $\mathbf{Coh}^f$ $_{G}$ $^{.s.}$ (G) 是 G-等变凝聚层的范畴，定义在 G 上且支撑于有限多个点，其中 G 通过共轭作用。由于我们考虑的是关于 G 的共轭作用等变的凝聚层，其支撑必须是 G 的共轭类之并；假设 G 连通，则支撑有限当且仅当它完全包含于 G 的中心。□

推论 6.3. </style}我们在中心 $(\mathbf{Rep}(G)) \simeq \bigoplus_{g\in Z(G)} \mathcal{Z}_g$上有一个 $Z(G)$-分次，其分次分量作为阿贝尔范畴彼此等价。

证明。 $\mathbf{Coh}_G^{\mathrm{fin.supp.}}(G)$ 是范畴 $\mathcal{Z}_g$ 的直和，其中各范畴由支撑在 $\{g\}$内的 G-等变凝聚层组成，适用于 $g \in Z(G)$。沿 g 的平移在 $\mathcal{Z}_e$ 和 $\mathcal{Z}_g$之间诱导出一个等价。□

推论 6.4. </style}取，我们得到 $(\mathbf{TL}(1;\ \mathbb{C}))$ </style}与$\mathrm{Coh}_{SL_2}^{\mathrm{supp}\subset\{\pm 1\}}(SL_2)$之间的一个幺半等价，后者是 SL_2–等变的凝聚层（相对于共轭作用），其支撑在 SL_2 $\{\pm 1\}$ 上。

命题 6.5. 对象 $\mathcal{Z}_e$ 与有理 G-表示 V 一一对应，并配备一个 G-等变线性映射 $\mathfrak{g}^* \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ </*style*，其像由彼此交换的幂零自同态组成，其中 $\mathfrak{g}^*$ 带有伴随 G-作用。

证明。令 $\mathfrak{m}$ 为 $\mathcal{O}(G)$ 中与群单位元对应的极大理想。那么，支撑在 $\{e\}$ 上的凝聚层，与一个被某个 $\mathfrak{m}^N$（其中 $N>0$）湮灭的、关于 $\mathcal{O}(G)_{\mathfrak{m}}$ 的有限生成模 V，是同一份数据。此外， $\mathcal{O}(G)$ 的 $\mathfrak{m}$-进完备化与 $\mathcal{O}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ ≅Sym$(\mathfrak{g}^*)$ 的完备化之间存在同构。因此， V 自然地具有完备化 Sym$(\mathfrak{g}^*)$ 的作用。由于 V 被 $\mathfrak{m}^N$湮灭，此作用必定经由 Sym$(\mathfrak{g}^*)/\mathfrak{m}_0^N$ 分解，其中 $\mathfrak{m}_0$ 是由 $\mathfrak{g}^*$生成的无关理想。因此， V 上的模结构（限制到一次元素）确定了一个线性映射 $\theta\colon \mathfrak{g}^* \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$，使得对所有 $x \in \mathfrak{g}^*$， $\theta(x)$ 都是幂零的。反过来，若映射 $\theta\colon \mathfrak{g}^* \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 的像由两两可交换的幂零自同态构成，则它可提升为 Sym$(\mathfrak{g}^*)$ 的作用（因而也可提升为某个 $N>0$ 对应的 $\mathcal{O}(G)/\mathfrak{m}^N$ 的作用）。要求我们的层是 G-等变的，等价于要求 V 是一个有理 G-表示，并且 θ 相对于 $\mathfrak{g}^*$上的余伴随作用是 G-等变的。□

注记 6.6. 例如， $\mathcal{Z}_e$ 中一些显然的对象为 $\mathcal{O}(G)/\mathfrak{m}^n$，其中 $n>0$，它们都是不可分解对象。不过，这远非完整的分类。事实上，根据命题 6.5，将 G 上支撑于群单位元的相干层进行分类，等价于对 维数$_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^*)$元可交换幂零矩阵组进行分类；从 [Dro] 的形式意义上说，只要 维数$_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^*) \geq 2$，这就是一个野问题。即使加上等变性的限制， $\mathcal{Z}_e$ 中不可分解对象的分类问题似乎也很可能是一个野问题。

关于 $q=-1$的情形。 对于这种情形，我们计划利用 $q=1$ 情形的余循环扭曲来计算其中心。下文中，我们固定一个阿贝尔 3-余循环 $(\omega,\gamma) \in Z^3_{\mathrm{ab}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{K}^\times)$，它由 $\omega(g_1,g_2,g_3) = (-1)^{g_1g_2g_3}$和$\gamma(g_1,g_2) = (\sqrt{-1})^{g_1g_2}$给出。

命题 n 6.7. 存在张量范畴之间的带编织结构的等价 **Temperley–Lieb范畴** $(q;\ \mathbb{K})^{(\omega,\gamma)} \simeq$**Temperley–Lieb范畴**$(-q;\ \mathbb{K})$.

证明。TL $(q;\ \mathbb{K})^{(\omega,\gamma)}$ 中的对象 1 与映射 $f=$ 杯和 $g=$ –帽满足 TL $(-q;\ \mathbb{K})$ 的泛性质中命题 3.5 的条件。因此，我们得到一个典范张量函子 TL $(-q;\ \mathbb{K})$ →TL $(q;\ \mathbb{K})^{(\omega,\gamma)}$，其由 $\mathbf{1}\mapsto\mathbf{1}$、杯 $\mapsto$ 杯和帽 $\mapsto$ –帽给出。显然，它是一个等价（事实上是一个同构）

并且它将 $\mathbf{TL}(-q;\ \mathbb{K})$ 上的每个编织与 $\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K})$ 上的某个编织相互交织（通过选择 q 的适当平方根）。□

推论 6.8. $\mathcal{Z}(\textbf{Temperley–Lieb范畴}\ (-q;\ \mathbb{K})) \simeq \mathcal{Z}(\textbf{Temperley–Lieb范畴}\ (q;\ \mathbb{K}))^{(\omega,\gamma)}$. 因此，$\mathcal{Z}(\textbf{Temperley–Lieb范畴}(-1;\ \mathbb{K})) \simeq \mathbf{Coh}_{SL_2}^{\mathrm{supp}\subset\{\pm 1\}}(SL_2)^{(\omega,\gamma)}$.

证明。 这是以下结果的直接推论：命题 2.27、命题 6.7和推论 6.4。 □

备注 6.9。 还可以将 $\mathcal{Z}(\textbf{Temperley–Lieb范畴}(-1;\ \mathbb{K}))$ 近似为以下对象的超积：$\mathbf{Ver}_p^{(\omega,\gamma)} \simeq \mathbf{Ver}_p^{+} \boxtimes \mathbf{Sem}$ 如命题 6.1所示，其中$\mathbf{Ver}_p^{+}$是由以下对象生成的$\mathbf{Ver}_p$ 的张量子范畴：L_2 和$\mathbf{Sem} \simeq \mathbf{sVec}^{(\omega,\gamma)}$ 是半子的模张量范畴。半子。这是因为，根据 Łoś 定理，对结合子和编织结构进行扭结的运算与取超积可交换。

单位根情形。 现在假设 q 是一个本原单位根。推论 4.7 在这种情形下仍然成立，但逼近范畴 **Temperley–Lieb范畴** $(q_k;\ \mathbb{F}_{p_k})$ 的性质则要差得多。特别是，序列 q_k在 $\mathbb{F}_{p_k}$ 中几乎对所有 k也必须是单位根；因此，逼近范畴几乎从不半单。所以，在这种情形下理解中心的问题更加复杂，也衍生出一些有趣的变体。

问题 1。 求单位根处 *Temperley–Lieb* 范畴的 *Drinfeld* 中心，以及从其半单化到半单化范畴之中心的典范函子 $\mathcal{A}_{\varkappa-1}$。

Ostrik（未发表）提出了这个问题的另一个有趣变体，它或许能导向更多非平凡的半编织。

问题 2。 求单位根处 *Temperley–Lieb* 范畴的导出范畴的中心。

其他李型。固定一个半单李代数 $\mathfrak{g}$，其权格和根格分别为 P 和 Q。有限维 I 型表示范畴 $U_q(\mathfrak{g})\text{–mod}$ 具有忠实的 P/Q 分次。因此，根据命题 2.5，我们有一个典范函子 $G : \mathrm{Rep}\,(P/Q) \to \mathcal{Z}\,(U_q(\mathfrak{g})\text{–mod})$。此外，$U_q(\mathfrak{g})\text{–mod}$ 上的编织结构给出了典范函子 $D\colon U_q(\mathfrak{g})\text{–mod} \boxtimes U_q(\mathfrak{g})\text{–mod}^{\mathrm{rev}} \to \mathcal{Z}\,(U_q(\mathfrak{g})\text{–mod})$。

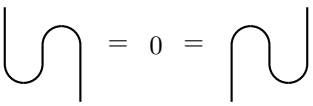
猜想 1。 存在一个$(P/Q)^{\oplus 3}$ 双特征 γ，使得典范函子

$$Z : \Big(U_q(\mathfrak{g})\textbf{–mod} \boxtimes U_q(\mathfrak{g})\textbf{–mod}^{\mathrm{rev}} \boxtimes \mathbf{Rep}\,(P/Q)\Big)^{\gamma} \to \mathcal{Z}\,(U_q(\mathfrak{g})\textbf{–mod})$$

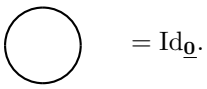
当 $q \in \mathbb{C}$ 不是单位根时，该函子是编织张量范畴之间的等价。

相同的超积技术应当适用于这种情形。将 q 设为某些适当的单位根并进行半单化，即可得到模张量范畴。所得范畴的超积包含 $U_q(\mathfrak{g})\textbf{–mod}$；考虑适当的滤过后，可以在滤过部分上得到等价。主要困难在于，随着仿射魏尔群变得更加复杂，这些融合范畴中心上的滤过也会变得更加复杂。我们将这一研究留待后续工作。

晶体极限， $q \to 0$。在此前与 Stroiński 的一项合作研究中，[AlqStr], 我们研究了对**Temperley–Lieb范畴**$(q;\ \mathbb{K})$ 进行的一种重整化，它允许设定 $q = 0$。由此得到的范畴可以完全按照定义 3.1来定义，只是将关系修改为



and



由此得到的范畴的柯西完备化（记作$\mathbf{CrysTL}$）与 $\mathfrak{sl}_2$–晶体的线性化范畴幺半张量等价。我们沿用$\mathbf{CrysTL}$ 中对象的记号，与

$\mathbf{TL}(q;\ \mathbb{K})$中的记号相同；特别地，与 n 个点对应的对象记作 $\mathbf{n}$，而简单对象记作T_0，T_1，T_2，.....。注意，引理 5.5 在 **CrysTL** 中仍然成立，证明完全相同。

范畴 **CrysTL** 不是带编织结构的，也不具刚性，但它仍然是半单范畴，且其 Grothendieck环与一般Temperley–Lieb范畴相同。特别地，我们仍有一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$分次，因此得到一个编织张量函子$G\colon\ \mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{CrysTL})$，它在 $\mathbf{1}$ 上给出两个不同的半编织。

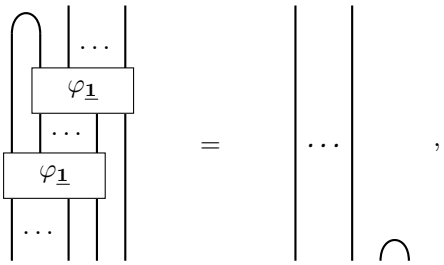
猜想 2. 典范函子 $G\colon\ \mathbf{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{CrysTL})$ 是一个幺半等价。

我们现在为这一主张提供一些证据。

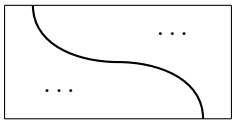
(1) 设 φ 是 $\mathbf{0} \cong \mathbb{1}$上的一个半编织。那么，$\varphi_{\mathbf{1}}\colon\ \mathbf{0}\otimes\mathbf{1} \to \mathbf{1}\otimes\mathbf{0}$具有 $\lambda\cdot r^{-1}l$ 的形式，其中某个标量为 $\lambda \in \mathbb{K}^{\times}$。由 $\mathsf{cap}\colon\ \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \to \mathbf{0}$ 可知，φ 的自然性结合六边形公理推出 $\lambda = \pm 1$，它们各自根据引理 5.5给出不同的半编织；它们生成函子 G的像。(2) 接下来注意，在 $\mathbf{0}^{\oplus n}$ 上的一个半编织的数据等价于分次群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的一个 n维表示的数据，而该表示是若干一维表示的直和。因此，$\mathbf{0}^{\oplus n}$ 所具有的唯一半编织，是 $\mathbf{0}$ 上半编织的直和。(3) 对所有正整数 m，$\mathbf{m}$ 在 CrysTL 中没有半编织。为此，设 φ是正整数 m对应的 $\mathbf{m}$ 上的一个半编织。那么，我们有一个同构

$$\varphi_{\mathbf{1}}\colon \mathbf{m}\otimes\mathbf{1} \to \mathbf{1}\otimes\mathbf{m},$$

根据关于 $\mathsf{cap}\colon\ \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \to \mathbf{0}$ 的自然性以及六边形公理，满足



其中“...”表示$\mathbf{m} - \mathbf{2}$ 条竖线。设 $\varphi_{\mathbf{1}}$ 是某个 Temperley–Lieb 图。由于之字形等于零关系，左侧的帽无法拉直。也不能通过圆圈关系将其消去，因为那需要有一个杯将底部副本$\varphi_{\mathbf{1}}$中的第一股线与另一股线相连，而这会与顶部副本 $\varphi_{\mathbf{1}}$形成之字形。因此，如方程右侧所示，将帽移到右侧的唯一方式是 $\varphi_{\mathbf{1}}$ 具有如下形式



其中子图“...”必然没有贯穿线。但这意味着整个左侧态射没有贯穿线，与方程右侧矛盾。最后，如果 $\varphi_{\mathbf{1}}$ 是多个图的线性组合，将每个图代入方程左侧后，根据上述分析，$\varphi_{\mathbf{1}}$ 的各项均不会对右侧的项产生贡献。因此，$\mathbf{m}$ 不允许存在半编织。

(4) 对任意正整数 m，$\mathbf{m}\oplus\mathbf{m}+\mathbf{1}$ 在 **CrysTL** 中都不存在半编织。事实上，现假设 φ 是某个正整数 m对应的 $\mathbf{m}\oplus\mathbf{m}+\mathbf{1}$ 上的半编织。特别地，我们得到一个同构

$(\mathbf{m}-\mathbf{1}\oplus\mathbf{m}+\mathbf{1})\oplus(\mathbf{m}\oplus\mathbf{m}+\mathbf{2}) \cong (\mathbf{m}\oplus\mathbf{m}+\mathbf{1})\otimes\mathbf{1} \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{1}}} \mathbf{1}\otimes(\mathbf{m}\oplus\mathbf{m}+\mathbf{1}) \cong (\mathbf{m}-\mathbf{1}\oplus\mathbf{m}+\mathbf{1})\oplus(\mathbf{m}\oplus\mathbf{m}+\mathbf{2})$。由于不同奇偶性的 m 和 n 之间不存在非零态射，因此对于某些同构 $\psi_{\mathbf{1}}\colon \mathbf{m}\otimes\mathbf{1} \to \mathbf{1}\otimes\mathbf{m}$ 和 $\vartheta_{\mathbf{1}}\colon \mathbf{m}+\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \to \mathbf{1}\otimes\mathbf{m}+\mathbf{1}$，我们必须有 $\varphi_{\mathbf{1}} = \psi_{\mathbf{1}}\oplus\vartheta_{\mathbf{1}}$，且二者都满足引理 5.5 的自然性条件。由此，我们在 $\mathbf{m}$ 上以及 $\mathbf{m}+\mathbf{1}$ 上得到半编织，而这已被证明是不可能的。

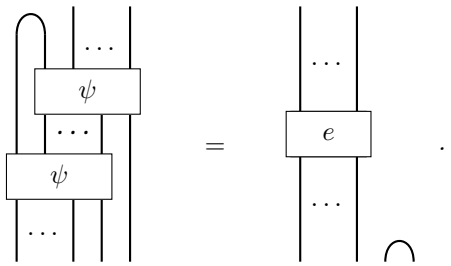
(5) **CrysTL** 中的每个对象都嵌入到 $\mathbf{m} \oplus \mathbf{m} + \mathbf{1}$ 中，只要 m 足够大。这一点很容易看出，因为当 m 和 n 奇偶性相同时，T_n 在 $\mathbf{m}$ 中的重数会随 $m \to \infty$ 严格增加。

因此，要证明猜想 2，只需证明 m 的直和项 X 存在半编织，当且仅当 $X \cong \mathbb{1}^{\oplus n}$。设 φ 是 m 的直和项 X 上的半编织。令幂等元 $e \in \mathrm{End}(\mathrm{m})$ 为到 X 上的投影。于是，态射 $\psi_Z := (\mathrm{Id}_Z \otimes e) \circ \varphi_Z \circ (e \otimes \mathrm{Id}_Z)$ 定义了一个自然变换 $\psi : \mathrm{m} \otimes - \implies - \otimes \mathrm{m}$，它满足六边形公理（但不是同构）。根据帽的自然性，我们有

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{m}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} & \xrightarrow{\psi_{\mathbf{1}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathbf{1}}} & \mathbf{1}\otimes\mathbf{m}\otimes\mathbf{1} & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbf{1}}\otimes\psi_{\mathbf{1}}} & \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{m} \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}_X\otimes\mathrm{cap}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cap}\otimes X} \\ \mathbf{m}\otimes\mathbf{0} & & \xrightarrow[\varphi_{\mathbf{0}} = e\circ r^{-1}l\circ e]{} & & \mathbf{0}\otimes\mathbf{m} \end{array}$$

要证明 X 是 $\mathbf{0}$ 的直和，只需证明 e 中出现的图不含贯穿股线，因此 e 可通过 $\mathbf{0}^{\oplus n}$ 分解。由此，我们得到 猜想 2 的以下组合版本。

猜想 2（图示版本）。令 $e \in \mathrm{End}(\mathbf{m})$ 为一个幂等元，$\varphi \in \mathrm{End}((\mathbf{m}\ e) \otimes \mathbf{1})$ 为一个同构，并且 $\psi = (\mathrm{Id}_{\mathbf{1}} \otimes e) \circ \varphi \circ (e \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{1}})$。若方程



成立，则 e 必须是由不含贯穿弦的图构成的线性组合。

这一猜想或许可以像上文（3）那样通过简单的组合论论证加以解决，但目前看来，这样的证明仍难以实现。

附录 A. 面向实用型 ⊗-范畴学家的超积

在本附录中，我们将简要而基础地回顾模型论的基本概念，进而介绍超积和 Łoś 定理，以及它们在张量范畴和张量函子中的应用。关于超滤子、超积及其应用的全面介绍，请参阅 [Gol]。关于侧重于代数中超积应用的论述，请参阅 [Schout]。

语言、理论与模型。

定义 A.1. 一阶语言 $\mathcal{L}$ 是由三类符号组成的集合：常元符号 c_i、函数符号 f_j 和关系符号 R_k。每个函数符号和关系符号都关联一个正整数，称为其元数。

定义 A.2. 设 $\mathcal{L}$ 是一个一阶语言。一个 $\mathcal{L}$结构 $\mathcal{M}$ 由以下数据构成：

- 一个非空底集 M；
- 对每个常元符号 $c \in \mathcal{L}$，一个指定元素 $c^{\mathcal{M}} \in M$，称为 c 在 $\mathcal{M}$中的解释。
- 对每个 n元函数符号 $f \in \mathcal{L}$，一个函数 $f^{\mathcal{M}} \colon M^n \to M$，称为 f在 $\mathcal{M}$中的解释。
- 对于每个 n元关系符号 $R \in \mathcal{L}$，都有一个关系 $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$，称为 R 在 $\mathcal{M}$中的解释。

例 A.3（环的语言）。设 $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ 为一种语言，其中 0 和 1 是常元符号，$+$、$-$ 和 $\cdot$ 是二元函数符号。一个 $\mathcal{L}$-结构的例子是集合 $\mathbb{Z}$，其中这些符号采用通常的解释。

用语言 $\mathcal{L}$ 书写语句的字母表 由以下符号组成：逻辑联结词$\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$；括号“(”和“)”以及逗号“,”；量词 $\forall$和 $\exists$；可数多个变元符号$x_0, x_1, x_2, \ldots$；以及 $\mathcal{L}$的符号。

定义 A.4. $\mathcal{T}$的 $\mathcal{L}$-项 集合递归定义如下：

- 设 $\mathcal{T}_0 = \{c \in \mathcal{L} \mid c$是一个常元符号$\} \cup \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$。
- 对于 $n \in \mathbb{N}$，设 $\mathcal{T}_{k+1} = \mathcal{T}_k \cup \{f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid f \in \mathcal{L}$是一个 n元函数符号，且 $t_1, t_2, \ldots t_n \in \mathcal{T}_k\}$。
- 设 $\mathcal{T} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_k$。

定义 A.5. 设 $\mathcal{L}$ 是一阶语言。我们递归定义 $\mathcal{L}$ 中一阶公式的集合 $\mathcal{F}$，如下：

- 令 $\mathcal{F}_0$为形如 $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$的表达式集合（所谓的原子公式），其中 $R \in \mathcal{L}$为关系符号，而 $t_1, t_2, \ldots, t_n$是 $\mathcal{L}$-项。
- 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令
$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \in \mathcal{F}_n\} \cup \{\varphi \wedge \psi \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\} \cup \{\varphi \vee \psi \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\} \cup \{\varphi \to \psi \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\}$
$\cup \{\varphi \leftrightarrow \psi \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\} \cup \{\forall x_i\, \varphi \mid \varphi \in \mathcal{F}_n, i \in \mathbb{N}\} \cup \{\exists x_i\, \varphi \mid \varphi \in \mathcal{F}_n, i \in \mathbb{N}\}.$
- 令$\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$。

按照惯例，我们添加括号以明确联结词和量词的辖域。一阶公式中变量的一次出现，如果不处于某个量词的辖域内，则称为自由的；在给定公式中至少有一次自由出现的变量，称为自由变元。不含自由变元的一阶公式称为句子。

非正式地说，一阶句子可以被看作一个“语法正确”且“有限”的命题。更准确地说，在这样的句子中，我们只能使用有限多个变量、有限次对语言中的函数/关系的应用、有限多个逻辑联结词，以及有限多个量词。此外，要使句子有意义，每个变量都必须出现在某个量词的作用范围内。我们也必须明确可以或不可以对什么进行量化。接下来的两个定义将说明，变量$x_0, x_1, x_2, \ldots$应被解释为 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$的底集 M中元素的占位符。这样一来，我们只能对结构中的元素进行量化，而不能对例如其子集或陈述的族进行量化。

定义 A.6. 设 $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是 $\mathcal{L}$的一个项。设 $\mathcal{M}$是一个底集为 M的 $\mathcal{L}$-结构，并设 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$。当变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$分别由元素 $a_1, a_2, \ldots, a_n$解释时，项 t在结构 $\mathcal{M}$ 中的解释是 M的一个元素，记作 $t^{\mathcal{M}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，并按如下方式归纳定义：

- 若 $t = c$其中 $c \in \mathcal{L}$是一个常元符号，则 $t^{\mathcal{M}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = c^{\mathcal{M}}$；
- 若 $t = x_i$其中 $1 \le i \le n$，则 $t^{\mathcal{M}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i$；
- 若 $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$，其中 $f \in \mathcal{L}$是一个 k元函数符号，且 $t_1, t_2, \ldots, t_k$是 $\mathcal{L}$的项，则$t^{\mathcal{M}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) \ldots, t_k^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n))$。

定义 A.7。假设 $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是某种语言 $\mathcal{L}$的一阶公式。设 $\mathcal{M}$是一个底集为 M且 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$的$\mathcal{L}$-结构。我们记

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

当公式 φ在结构 $\mathcal{M}$中满足，其中变量 x_1、x_2、.....、x_n分别解释为元素 a_1、a_2、.....、a_n时。我们写作 $\mathcal{M} \not\models \psi$，表示 $\mathcal{M}$不满足公式 ψ。更准确地说，结构中公式的满足关系按如下方式归纳定义：

- 假设公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$是一个原子公式，即 $\varphi = R(t_1, \ldots, t_k)$，其中 $R \in \mathcal{L}$ 是一个 k 元关系符号，$t_1, \ldots, t_k$是 $\mathcal{L}$项，并且每个项 t_i 中的变量都属于 $x_1, \ldots, x_n$。

那么我们定义 $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ 当且仅当

$$(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_k^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) \in R^{\mathcal{M}}.$$

- 假设 $\varphi = \neg\psi(x_1, \dots, x_n)$。那么，当且仅当 $\mathcal{M} \not\models \psi(a_1, \dots, a_n)$ 时， $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$。
- 假设 $\varphi = (\psi \wedge \theta)$。那么，当且仅当 $\mathcal{M} \models \psi(a_1, \dots, a_n)$ 且 $\mathcal{M} \models \theta(a_1, \dots, a_n)$ 时， $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$。
- 假设 $\varphi = (\psi \vee \theta)$。那么，当且仅当 $\mathcal{M} \models \psi(a_1, \dots, a_n)$ 或 $\mathcal{M} \models \theta(a_1, \dots, a_n)$ 时， $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$。
- 假设 $\varphi = (\psi \to \theta)$。那么，当且仅当 $\mathcal{M} \not\models \psi(a_1, \dots, a_n)$ 或 $\mathcal{M} \models \theta(a_1, \dots, a_n)$ 时， $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$。
- 假设 $\varphi = (\psi \leftrightarrow \theta)$。那么 $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ 当且仅当以下两种情况之一成立： $\mathcal{M} \models \psi(a_1, \dots, a_n)$ 和 $\mathcal{M} \models \theta(a_1, \dots, a_n)$ 同时成立；或者 $\mathcal{M} \not\models \psi(a_1, \dots, a_n)$ 和 $\mathcal{M} \not\models \theta(a_1, \dots, a_n)$ 同时成立。
- 假设 $\varphi = \forall y\, \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$，其中 $y \notin \{x_1, \dots, x_n\}$。那么 $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 当且仅当对于每个元素 b，属于 $\mathcal{M}$，都有 $\mathcal{M} \models \psi(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$。
- 假设 $\varphi = \exists y\, \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$，其中 $y \notin \{x_1, \dots, x_n\}$。那么 $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 当且仅当存在至少一个元素 b，属于 $\mathcal{M}$，使得 $\mathcal{M} \models \psi(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$。
- 假设 $\varphi = \forall x_i\, \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$，其中 $1 \leq i \leq n$。那么 $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ 当且仅当对于 M 中的每个元素 b，都有 $\mathcal{M} \models \psi(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$。
- 假设 $\varphi = \exists x_i\, \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$，其中 $1 \leq i \leq n$。那么 $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ 当且仅当 M 中至少存在一个元素 b，使得 $\mathcal{M} \models \psi(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$。

定义 A.8. 给定一个语言 $\mathcal{L}$ 和一组一阶 $\mathcal{L}$-句子 T， T 的一个模型 是满足 T 中每个句子的一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$；符号化地， $\forall \varphi \in T, \mathcal{M} \models \varphi$。当 $\mathcal{M}$ 是 T 的一个模型时，我们记作 $\mathcal{M} \models T$。

定义 A.9. 给定一个 $\mathcal{L}$句子集合 T，若每个 T 的模型都满足 φ，则称 $\mathcal{L}$句子 φ 是 T 的逻辑后果。一阶理论或 $\mathcal{L}$-理论是由 $\mathcal{L}$句子及其所有逻辑后果组成的集合。在逻辑后果意义下生成理论 $\mathcal{T}$ 的 $\mathcal{L}$句子集合称为 $\mathcal{T}$的公理。

例A.10. 群论可以用语言 $\mathcal{L} = \{e, *\}$表达，其中 e 是一个常元符号， $*$ 是一个二元函数符号，其公理如下：

- $\forall x \forall y \forall z\, (x * (y * z)) = ((x * y) * z)$,
- $\forall x (x * e = x) \wedge (e * x = x)$,
- $\forall x \exists y\, (x * y = e) \wedge (y * x = e)$。

注意，在每种语言中，‘=’都默认是一个二元关系符号，并具有通常的解释。群论的模型就是一个群。

超滤子与超积。

定义 A.11. 给定一个集合 I， $\mathscr{F} \subset 2^I$ 是 I 的子集构成的一个族，称为 I 上的滤子，若它满足以下条件：

- $I \in \mathscr{F}$ 以及 $\emptyset \notin \mathscr{F}$;
- 若 $A \in \mathscr{F}$ 且 $B \supseteq A$，则 $B \in \mathscr{F}$;
- 若 A， $B \in \mathscr{F}$，则 $A \cap B \in \mathscr{F}$。

应将滤子理解为一种声明，用来指定我们认为“很大”的某些集合。因此，下面的例子说明了一种我们希望避免的滤子。

例 A.12（主滤子）。 取定某个 $x \in I$，并定义 $\mathscr{F} = \{A \subseteq I \mid x \in A\}$。那么， $\mathscr{F}$ 是 I上的一个滤子，称为由 x生成的主滤子。不是这种类型的滤子称为非主滤子。

对于主滤子，后续所有内容虽然都成立，却毫无用处，因此我们通常会将讨论限制在非主滤子的情形。下面是一个非主滤子的典型例子。

例 A.13（弗雷歇滤子）。 设 I 是一个无限集，令 $\mathscr{F}$ 为 I的余有限子集所组成的集合。那么，$\mathscr{F}$ 是 I上的一个非主滤子，称为弗雷歇滤子。

定义 A.14。 I 上的一个超滤子 是一个滤子 $\mathscr{U}$，它满足：对于每个子集 $A \subseteq I$， $A \in \mathscr{U}$ 或 $A \notin \mathscr{U}$。

弗雷歇滤子是一个值得牢记的绝佳例子，因为有以下众所周知的事实：每个非主超滤子都必须包含弗雷歇滤子。这印证了这样一种直觉：超滤子中的“集合”是“大的”。事实上，从现在起，我们将把某个超滤子 $\mathscr{U}$ 中的集合称为-大，并称命题$\{\varphi_i\}_{i\in I}$ 在-几乎处处 成立，当且仅当 $\{i\in I\mid \varphi_i \text{ 为真}\}\in\mathscr{U}$。只要上下文能明确超滤子是哪一个，我们也会省略对 $\mathscr{U}$的提及，直接说“大”或“几乎处处”。

以下结果是佐恩引理的标准应用。

命题 A.15. 每个滤子都可以扩张为超滤子。特别地，每个无限集上都存在超滤子。

注 A.16. 今后，我们只考虑 I 可数的情形，或简写为 $I=\mathbb{N}$。在不可数集合上的超积仍有意义，但为简化记号和术语（例如，谈论序列而非选择函数），我们将重点讨论这个足以满足我们需求的特殊情形。

引理 A.17. 设 $S_1,S_2,\dots,S_n$ 是 $\mathbb{N}$的一个划分，且 $\mathscr{U}$是 $\mathbb{N}$上的一个超滤子。那么，对于恰好一个 $i\in\{1,2,\dots,n\}$，有 $S_i\in\mathscr{U}$。

证明. 若 $n=1$，则因 $S_1=\mathbb{N}\in\mathscr{U}$，结论显然。否则，超滤子的定义保证 $S_1\cup\cdots\cup S_{n-1}$或 S_n中恰有一个属于 $\mathscr{U}$，因此由关于 n的归纳法可得结论。□

定义 A.18. 给定集合序列 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，相对于某个超滤子 $\mathscr{U}$，它们的超积是商集 $\prod_{\mathscr{U}}A_i:=\left(\prod_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)/\sim_{\mathscr{U}}$，其中等价关系 $\sim_{\mathscr{U}}$定义如下：$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\sim(a_i')_{i\in\mathbb{N}}$当且仅当 $\{i\in\mathbb{N}\mid a_i=a_i'\}\in\mathscr{U}$；换言之，两条序列取值相同的指标集合是 $\mathscr{U}$-大集，或者等价地说，两条序列几乎处处相等，即 $\mathscr{U}$。我们将超积 $\prod_{\mathscr{U}}A_i$ 中序列$a=(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的等价类记为 $[a]$ 或 $\operatorname{ulim}_{i\to\infty}{}^{a_i}$。

如果超积中的因子具有比集合更有意思的结构，那么超积也会继承该结构，如下所示。

定义 A.19。 设 $\mathscr{U}$是 $\mathbb{N}$ 上的超滤子， $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是底集为$\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$的一列 $\mathcal{L}$-结构。我们将它们的超积 $\mathcal{M}^*=\prod_{\mathscr{U}}\mathcal{M}_i$ 定义为底集为$\prod_{\mathscr{U}}M_i$的 $\mathcal{L}$-结构，其中语言符号的解释定义如下：

- 对于常元符号 $c\in\mathcal{L}$，令 $c^{\mathcal{M}^*}=\operatorname{ulim}_{i\to\infty}c^{\mathcal{M}_i}$；
- 对于元数为 k的函数符号 $f\in\mathcal{L}$ 以及序列 a^1， a^2，……， $a^k\in\prod_{i\in\mathbb{N}}M_i$，令

$$f^{\mathcal{M}^*}\left([a^1],[a^2],\dots,[a^k]\right)=\operatorname*{ulim}_{i\to\infty}f^{\mathcal{M}_i}\left(a_i^1,a_i^2,\dots,a_i^k\right);$$

- 对于元数为 k的关系符号 $R\in\mathcal{L}$ 以及序列 a^1， a^2，……， $a^k\in\prod_{i\in\mathbb{N}}M_i$，令

$$\left([a^1],[a^2],\dots,[a^k]\right)\in R^{\mathcal{M}^*}\iff\left\{i\in\mathbb{N}\mid\left(a_i^1,a_i^2,\dots,a_i^k\right)\in R^{\mathcal{M}_i}\right\}\in\mathscr{U}.$$

现在，我们终于可以陈述超积基本定理：

定理 A.20 (Łoś 定理)。 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个超滤子， $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是由底集为 $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$的 $\mathcal{L}$-结构组成的序列。那么，对于 $\mathcal{L}$上的任意一阶公式 $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$以及任意序列$a^1,a^2,\dots,a^n\in\prod_{i\in\mathbb{N}}M_i$，我们有

$$\prod_{\mathscr{U}}\mathcal{M}_i\models\varphi\left([a^1],[a^2],\dots,[a^n]\right)\iff\left\{i\in\mathbb{N}\mid\mathcal{M}_i\models\varphi\left(a_i^1,a_i^2,\dots,a_i^k\right)\right\}\in\mathscr{U}.$$

特别地，由于 $\mathscr{U}$必须包含弗雷歇滤子，如果 $\{i\in\mathbb{N}\mid\mathcal{M}_i\not\models\varphi\}$ 是有限的，那么 $\prod_{\mathscr{U}}\mathcal{M}_i\models\varphi$。

推论 A.21. 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathbb{N}$上的一个超滤子， $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{L}$-结构的一个序列，且 $\mathcal{T}$是一阶理论。那么，$\{i\in\mathbb{N}\mid\mathcal{M}_i\models\mathcal{T}\}\in\mathscr{U}$当且仅当 $\prod_{\mathscr{U}}\mathcal{M}_i\models\mathcal{T}$。

张量范畴的超积。在 [Cru 第 4], 章中，构造了小型（坦纳克）张量范畴的一阶理论。该理论用一种语言来表述，其中的关系符号指定以下数据：一个元素是对象还是态射；一个态射的源与靶是否为两个对象；一个态射/对象是否是另外两个态射/对象的复合/和/张量积；一个态射是否为两个对象的结合子/交换子。该理论的公理确保这些关系的行为符合预期，并满足刚性阿贝尔对称/带编织结构的幺半群 $\mathbb{K}$-线性范畴的公理，其中 End(1) 为 $\cong \mathbb{K}$。事实上，公理中编码 $\mathbb{K}$-线性的方式是断言 End(1) 是一个域，因为可以将态射缩放 f 理解为： $X \to Y$乘以 End(1) 中的 $c \in \mathbb{K} \cong$，得到态射 $l_Y \circ (c \otimes f) \circ l_X^{-1}$，其中 $l_-: \mathbb{1} \otimes - \to -$是左单位约束。为简洁起见，我们不在此重述所有公理；但由于我们所处理的范畴具有略微不同的结构，使用这些结果时必须谨慎。

我们的定义 2.14 与同上引文中的范畴有三处主要区别：1）我们的范畴从一开始就不假定带编织结构；2）我们采用幂等完备范畴，而非阿贝尔范畴；3）我们假定范畴的态射空间有限维。第一处问题很容易解决。只需删去规定任意两个对象之间存在编织的关系，以及所有与之相关的公理。其次，保留加性范畴结构，但删去阿贝尔范畴的公理，即核和余核的存在性，以及单态射和满态射的正规性。取而代之的是，我们断言幂等元可裂；这一点可以用该语言中的一阶逻辑句子表达如下：

$$\forall e \, (((e\colon\ A) \to A) \wedge (e \circ e = e)) \implies \exists B \, \exists f \, \exists g \, ((f : A \to B) \wedge (g : B \to A) \wedge (g \circ f = e) \wedge (f \circ g = \mathrm{Id}_B)$$

这确保我们的范畴是幂等完备的。第三处问题无法解决，因为有限维这一性质通常不能用一阶逻辑表达。事实上，对有限维数无界的向量空间取超积，会得到一个无限维向量空间。解决办法是只考虑该超积中一个更小、更易处理且态射空间有限维的子范畴。

结合上述讨论和 [Cru 第 4] 章的结果，可以总结为以下定理。

定理 A.22. 设 $\mathscr{U}$ 是一个超滤子，且 $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个小范畴序列。超积$\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{C}_i$ 是一个定义良好的小范畴，其对象和态射分别是 $\sim_{\mathcal{U}}$ 中对象和态射序列的等价类。此外，如果范畴 $\mathcal{C}_i$ 在几乎处处（相对于 $\mathscr{U}$）是幺半群的、刚性的、加性的、幂等完备的、阿贝尔的、带编织结构的或对称的，那么$\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{C}_i$也具有相应性质。若对 $\mathscr{U}$-多个 $i \in \mathbb{N}$， $\mathcal{C}_i$ 是$\mathbb{K}_i$-线性的，则$\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{C}_i$ 是$(\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{K}_i)$-线性的。

由以下著名结果可知，可以将特征 p 下范畴的信息传递到特征 0下的超积中。这是 Steinitz 定理的推论，例如 [Schout第 2.4 节给出了完整证明。1]。

命题 A.23. 设 $\mathscr{U}$ 为一个非主超滤子，且 $\{\mathbb{K}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为一个代数闭域序列，其中每个域的基数至多为 $2^{\aleph_0}$。假设对于每个素数 p，只有有限多个 $\mathbb{K}_i$ 的特征为 p。那么，存在域同构 $\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{K}_i \cong \mathbb{C}$。特别地，

- $\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$。
- 设 $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为一个素数序列，且 下极限$_{i\to\infty}$ $p_i = \infty$。那么， $\prod_{\mathscr{U}} \mathbb{F}_{p_i} \cong \mathbb{C}$。 —

现在，我们想考察半单范畴的超积（子范畴）的半单性。一般而言，半单范畴的超积并非半单，但其中行为足够良好的子范畴仍然是半单的。为了运用 Łoś 定理，我们需要用一阶语言中的句子来表达半单性。接下来的两个一般性的众所周知的引理可以解决这个问题。

回顾一下，如果一个态射可以写成复合 $\iota \circ \pi$，其中 ι 是可裂单态射， π 是分裂满态射，那么它就称为可裂。

引理 A.24. 代数闭域 $\mathcal{C}$ 上的张量范畴是半单的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 的每个态射都是可裂的。

证明. 一个方向显然：若 $\mathcal{C}$ 是半单的，且 $f : X \to Y$ 是一个态射，则 f 经由其像分解，因此投影 $\pi : X \to \mathrm{Im}\,(f)$和包含映射 $\iota : \mathrm{Im}\,(f) \to Y$给出 f的一个分裂。
反过来，假设每个态射都是可裂的。由于 $\mathcal{C}$ 是 Krull-Schmidt（见命题 2.13），要证明它是半单的，只需证明对于任意不可分解对象 $X \not\cong Y$，我们有 $\mathrm{Hom}(X,Y) = 0$ 且 $\mathrm{End}(X) \cong \mathbb{K}$；事实上，这样的范畴等价于按不可分解对象的同构类分级的有限维向量空间范畴。假设 $f : X \to Y$ 是两个不可分解对象之间的任意态射，并且 $\pi : X \to Z$ 和 $\iota : Z \to Y$ 是分裂满态射和分裂单态射，使得 $\iota \circ \pi = f$。因此，Z 是 X 和 Y的直和项；但由于它们都是不可分解对象，要么 $Z = 0$，从而 $f = 0$，要么 π 且 ι 是同构，因此 f也是同构。□

引理 A.25。在 *Karoubian* 范畴中，态射 $f : A \to B$ 是可裂的，当且仅当存在一个态射$g : B \to A$ 满足 $f \circ g \circ f = f$。

证明。假设 $f = \iota \circ \pi$，其中 $\pi : A \to Z$ 是一个分裂满态射，其截面为 $s : Z \to A$（即 $\pi \circ s = \text{恒等映射}_Z$），而 $\iota : Z \to B$ 是一个分裂单态射，其收缩为 $r : B \to Z$（即 $r \circ \iota = \text{恒等映射}_Z$）。那么，经过简单计算可得，$g := s \circ r$ 满足 $f \circ g \circ f = f$。
反过来，假设 $g : B \to A$满足 $f \circ g \circ f = f$。那么，令 $e := g \circ f$为一个幂等元。由于 $\mathcal{C}$是 Karoubian 范畴，我们有一个分裂 $e = u \circ p$，其中存在某个 $p : A \to Z$和 $u : Z \to A$，满足 $p \circ u = \text{恒等映射}_Z$（因此 p是一个分裂满态射）。现在，取 $\pi := p$和 $\iota := f \circ u$。注意，ι是一个分裂单态射，其左逆为 $p \circ g$。此外，经过简单计算可得，$f = \iota \circ \pi$，如所需。□

命题 A.26. 设 $\mathscr{U}$ 是一个超滤子，$\mathbb{K} = \prod_{\mathscr{U}} \mathbb{K}_i$ 是一个代数闭域，且 $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是由小的半单 $\mathbb{K}_i$-线性范畴构成的序列。假设 $\mathcal{D}$ 是$\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{C}_i$的一个 *Karoubian*、*Krull-Schmidt* $\mathbb{K}$-线性子范畴。那么，$\mathcal{D}$ 是半单的。此外，超乘积 $_{i\to\infty} X_i$ 是$\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{C}_i$ 中的一个简单对象，当且仅当 X_i 对$\mathscr{U}$-几乎所有的 i都是简单对象。

证明。由引理 A.24，只需证明 $\mathcal{D}$ 中的每个态射都是可裂的。$\mathcal{D}$ 中的任意态射 $f : A \to B$ 都可以识别为$\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{C}_i$ 中的 $\mathrm{ulim}_{i\to\infty} f_i$，其中 $f_i : A_i \to B_i$ 是 $\mathcal{C}_i$中的一列态射。不过，由引理 A.24，由于 $\mathcal{C}_i$ 是半单的，每个f_k 都是可裂的。因此，由引理 A.25，存在一列 $g_i : B_i \to A_i$ 满足 $f_i \circ g_i \circ f_i = f_i$。由 Łoś 定理可知，$g := \mathrm{ulim}_{i\to\infty} g_i$ 满足 $f \circ g \circ f = f$，所以根据引理 A.25，f 也是可裂的。

现在注意到，$X := \mathrm{ulim}_{i\to\infty} X_i$ 不是单对象，当且仅当存在两个线性无关态射$f = \mathrm{ulim}_{i\to\infty} f_i$ 和 $g = \mathrm{ulim}_{i\to\infty} g_i$，它们属于 $\mathrm{End}(X)$。但是，根据 Łoś 定理，当且仅当存在两个序列 f_i 和 g_i，其元素是 $\mathrm{End}(X_i)$中的态射，满足 $\forall \lambda \in \mathbb{K}_i,\ f_i \neq \lambda g_i$ 对 $\mathscr{U}$-几乎所有 i都成立；也就是说，X_i 几乎处处不是单对象。□

张量函子的超乘积。与张量范畴的语言类似，我们可以定义张量函子的语言 $(F,\ J) :\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$。在这种语言中，我们有以下关系符号：

$$_ \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\quad _ \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}),\quad _ \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\quad _ \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D}),\quad _ : _ \to _,\quad _ \circ _ = _,\quad _ + _ = _,$$

$$_ \otimes _ = _,\quad \mathrm{Assoc}_,_,_ = _,\quad \mathrm{Comm}_,_ = _,\quad \mathrm{Unit}_ = _,\quad F(_) = _,\quad J_,_ = _.$$

它们的通常解释是：一个对象或态射属于 $\mathcal{C}$ 或 $\mathcal{D}$，一个态射从某个对象映到另一个对象，一个态射是另外两个态射的复合、和或张量积，一个态射是某些对象的结合子、交换子（如果这些范畴带编织结构）或单位子，一个对象或态射是另一个对象或态射经 F 所得的像，最后，$\mathcal{D}$ 中的一个态射是给定两个对象时 F 的幺半结构同构。

理论 $\mathcal{T}_{\otimes\text{-Fun}}$ 将具有与之前相同的公理，另加一些公理，以保证$\mathcal{C}$ 中的态射在 $\mathcal{C}$ 中有源与靶，并且在有意义时，复合、相加或张量后仍得到$\mathcal{C}$中的其他态射；$\mathcal{C}$ 中对象之间的结合子、交换子和单位约束是 $\mathcal{C}$中的态射，$\mathcal{D}$也同理。最后，我们应为符号 F 和 J 设定公理，以保证 F 具有函子性和加性，而 J 是自然的，并满足幺半函子结构同构的六边形公理。我们还可以要求 F 是

带编织结构的，前提是 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 具有编织结构。所有这些条件都由方程给出，因此很容易用一阶语句表达。

容易看出，一个模型 $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_{\otimes\text{-Fun}}$ 对应一对小的（带编织结构的）张量范畴，以及它们之间的一个（带编织结构的）张量函子。因此，Łoś 定理立即推出以下结论：

命题 A.27. 设 $\mathscr{U}$ 为一个超滤子，$\{F_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{D}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为一列函子。映射 F 在对象上的定义为 $F([X_i]) = [F_i(X_i)]$，在态射上的定义为 $F([f_i]) = [F_i(f_i)]$，是一个定义良好的函子

$$\prod_{\mathscr{U}} F_i : \prod_{\mathscr{U}} \mathcal{C} \to \prod_{\mathscr{U}} \mathcal{D}.$$

如果对 $\mathscr{U}$-几乎所有的 F_i，它都是幺半群的，且张量结构为 $J_i\colon F_i(-\otimes -) \xrightarrow{\sim} F_i(-)\otimes F_i(-)$，那么 $J := \text{超乘积}_{i\to\infty} J_i$是 F的一个张量结构。如果 F_i对 $\mathscr{U}$-几乎所有情形都带编织结构，那么 F也如此。

作为余极限的超积。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有所有滤过余极限和任意积的范畴。可以按如下方式，纯粹通过范畴论构造来定义 $\mathcal{C}$ 中对象的超积。设$\mathscr{U}$ 是指标集 I 上的一个超滤子，且 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是 $\mathcal{C}$中的一族对象。考虑图表范畴 $\mathcal{D}$，其对象为 I 的子集，并且当 $J \supseteq K$时，存在唯一的态射 $J \to K$。于是，我们有一个函子 $A_\bullet : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，它将 J 映到 $A_J := \prod_{i\in J} A_i$，并将态射 $J \supseteq K$ 映到典范投影 $A_J \to A_K$。众所周知（例如参见 [Gol, 第 6.10] 节），$\lim^{\mathcal{D}} A_\bullet$ 与超积同构 $\prod_{\mathscr{U}} A_i$在对象为某个一阶理论模型的一类 1-范畴中，例如集合、群、域等。据作者所知，在 2-范畴框架下（例如张量范畴的 2-范畴中），尚无类似的、以滤过 2-余极限表述的构造。这种定义或许有助于突破小范畴的限制，并使某些论证更加自然。

问题 3. 我们能否在适当的 *2*-范畴中，将“张量范畴”的超积定义为 *2*-余极限，使其泛性质足够强，从而取代 *Łoś* 定理？

参考文献

[AlqStr] M. Alqady, M. Stroiński. $\mathfrak{sl}_2$-晶体的 Temperley–Lieb 范畴。《伦敦数学学会杂志》112(3):e70283, 2025. [And] H. Andersen. 源自半单李代数的融合范畴。《数学物理通讯》169(3):563–588, 1995. [AndPar] H. Andersen, J. Paradowski. 量子化倾斜模的张量积。《数学物理通讯》149(1):149–159, 1992. [BakKir] B. Bakalov, A. Kirillov Jr.《张量范畴与模函子的讲义》，大学讲座丛书第 21 卷。美国数学学会，2001。[BarWes] J. Barrett, B. Westbury. 球面范畴。《数学进展》143(2):357–375, 1999. [CEO] K. Coulembier, P. Etinglof, V. Ostrik. 不可压缩张量范畴。《数学进展》457(2):e109935, 2024. [Cru] M. Crumley.《Tannakian 范畴的超积与幺幂代数群的泛表示论》，博士学位论文，托莱多大学，2010。[DGPRZ] C. Delaney, C. Galindo, J. Plavnik, E. Rowell, Q. Zhang. 编织加味及其应用。《数学物理通讯》386:1–55, 2021。[Del90] P. Deligne. Tannakian 范畴。《Grothendieck 文集》，第二卷。数学进展丛书，87:111–195, 1990。[Del 07] P. Deligne. 当 S_t 不是自然数时，对称群的表示范畴。《代数群与齐性空间》，第 209–273 页。塔塔基础研究所，2007。[Dri] V. Drinfeld. 量子群。《国际数学家大会论文集》，第 1 卷，第 798–820 页。A. M. Gleason（编），美国数学学会，1986。[DGNO] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik. 关于编织融合范畴 I。《Selecta Mathematica》16(1):1–119, 2010。[Dro] J. Drozd. 驯型与野型矩阵问题。载于：Dlab, V., Gabriel, P.（编），《表示论 II》。数学讲义，第 832 卷。施普林格，1980。[EilMac] S. Eilenberg, S. MacLane. 关于群 $H(\Pi, n)$，II：计算方法。《数学年刊》601:49–139, 1954。

[ ] 2015 1510 06840 Eli B. Elias. 轻梯与扣环猜想。arXiv 预印 [03] SL_q 2 本，. arXiv: . EtiOst P. Etingof, V. Ostrik. 关于 ( ) 的表示的模范畴与图。《数学研究快报》11:103–114, 2003。[EtiOst21] P. Etingof, V. Ostrik. 关于张量范畴的半单化。载于：V. Baranovsky, N. Guay, T. Schedler（编），《表示论与代数几何》。数学前沿。Birkhäuser, 2021。[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik.《张量范畴》。数学调查与专著。美国数学学会，2015。[FHL] J. Flake, N. Harman, R. Laugwitz. Deligne 范畴 Rep(S_t) 中心的不可分解对象。《伦敦数学学会会刊》126(4):1134–1181, 2023。

[FlaLau] J. Flake, R. Laugwitz. 关于 Deligne 范畴 Rep(S_t) 的幺半群中心。《伦敦数学学会杂志》103:1153–1185, 2021。[GelNik] S. Gelaki, D. Nikshych. 幂零融合范畴。《数学进展》217(3):1053-1071, 2008。[Gol] I. Goldbring.《贯穿数学的超滤子》。数学研究生教材。美国数学学会，2022。[Haa
] **36** 54 60, R. 2014
Haas.《Goldbach、Hurwitz 与素数无穷性：跨越数世纪编织证明》。《数学智者》，：–。[Har] N. Harman，Deligne 范畴作为秩与特征中的极限。arXiv 预印本，2016。arXiv:1601.03426。[Jon] V. Jones. 子因子的指标。《数学发明》72:1–25, 1983。[JoyStr] A. Joyal, R. Street.《编织张量范畴》。《数学进展》102(1):20–78, 1993。[KauLin] L. Kauffman, S. Lins.《Temperley–Lieb 重耦合理论与三维流形不变量》。数学研究年刊。普林斯顿大学出版社，1994。[Kel] G. Kelly.《富化范畴论基本概念》，《表示论与范畴应用》第 10 期，第 vi–137 页，2005。剑桥大学出版社 1982 年原版的重印本。[Kra] H. Krause. Krull–Schmidt 范畴与投射覆盖。《数学展望》33(4):535–549, 2015。[LF] I. Lopez Franco. 有限余完备范畴与阿贝尔范畴的张量积。《代数杂志》396:207–219, 2013。[Müg1] M. Müser. 从子因子到范畴与拓扑 II：张量范畴和子因子的量子双。《纯粹与应用代数杂志》180:159–219, 2003。[Müg2] M. Müger. 关于模范畴的结构。《伦敦数学学会会刊》87(2):291–308, 2003。[Ost] V. Ostrik. 正特征下的对称融合范畴。《Selecta Mathematica 新系列》26:36, 2020。[PosSch] L. P. Postnikova, A. Schinzel. 代数数域中表达式 $a^n - b^n$ 的本原因子。《苏联数学文集》4(2):153–159, 1968。[ResTur
] 3 **103** 547 597, N. 1991
Reshetikhin, V. Turaev. 通过链环多项式与量子群得到的 -流形不变量。《数学发明》，：–。[RTW] G. Rumer, E. Teller, H. Weyl. 适用于价键理论的二元向量不变量基。《哥廷根科学院院刊》。数学与物理辑，498—504, 1932。[Schopi] A. Schopieray. 融合范畴的李理论：研究入门。《物质的拓扑相与量子计算》747:1–26, 2018。[Schout] H. Schoutens.《交换代数中超积的应用》。数学讲义。施普林格出版社（柏林），2010。[Shi] K. Shimizu. 编织有限张量范畴的非退化条件。《数学进展》355, 2019。[Tur] V. Turaev.《结与三维流形的量子不变量》。De Gruyter 数学研究丛书，第 18 卷。Walter De Gruyter 出版社，1994。[Ver] E. Verlinde. 二维共形场论中的融合规则与模变换。《核物理 B》300:360–376, 1988。[Wan] Z. Wang.《拓扑量子计算》。CBMS 拓扑量子计算区域会议。美国数学学会，2010。[Wen] H. Wenzl. 关于投影序列。《加拿大皇家学会数学报告》9(1):5–9, 1987。

文学硕士，俄勒冈大学数学系，芬顿楼，尤金，俄勒冈州 97403，美国电子邮箱地址：malqady@uoregon.edu