arXiv:2603.29031v1 [math.DS] 30 Mar 2026

非幺模群上的平移作用与强遍历性

FEHM ̇I EK ̇IN G ̇IR ̇ITL ̇IO ̆GLU

Abstract. 我们研究非幺模局部紧第二可数群的可数稠密子群的平移作用。利用左右作用，我们证明，由局部紧第二可数群 G 的可数稠密子群 Γ 给出的左平移作用 $\Gamma \curvearrowright G$只有在 G 几乎幺模时才可能具有强遍历性。我们证明，对于几乎幺模局部紧第二可数群 G ，作用 $\Gamma \curvearrowright G$ 的强遍历性等价于 $\Gamma \cap \ker(\Delta_G) \curvearrowright \ker(\Delta_G)$的强遍历性，其中 Δ_G 是模函数。通过证明非同构的几乎幺模局部紧第二可数群可以具有轨道等价的平移作用，我们展示了刚性缺失。

引言

最初针对可数群在测度空间上的作用定义如下：设 [Sch80]，是标准概率空间 (X, μ) 上的非奇异可数可测等价关系 $\mathcal{R}$，若该关系不包含任何非平凡的几乎不变序列，则称其为强遍历。几乎不变序列是指一列可测子集 A_n，满足对所有 $g \in [\mathcal{R}]$（即该等价关系的全群），$\mu(A_n \Delta g A_n) \to 0$。若序列$A_n$ 满足 $\mu(A_n)(1-\mu(A_n)) \to 0$，则称其为平凡序列。尽管两者并不完全对应，强遍历性与冯·诺依曼代数的满性密切相关。Houdayer-Marrakchi-Verraedt 证明，Connes关于满冯·诺依曼代数上几乎周期权的结构定理 [Con74, 引理 4.8]，对于强遍历等价关系上的几乎周期测度也有类似结论 [HMV19, 定理D]。在第1节中，我们利用他们的定理证明：若局部紧第二可数群G 的可数稠密子群 Γ 的左平移作用是强遍历的，则 G几乎幺模。仿照 [GGN25], ，我们将模函数为 Δ_G 的局部紧群 G 称为几乎幺模，如果 $\ker \Delta_G$ 是开集。在第二可数情形下，这等价于 $\Delta_G(G) \neq \mathbb{R}_+$。我们在定理 1.2 中证明以下命题的一个略作推广的版本：

定理A。设 G 是一个局部紧第二可数群，满足 $\Delta_G(G) = \mathbb{R}_+$。那么，在赋有左 *Haar* 测度的 G 上，可数稠密子群的任何左平移作用都不是强遍历的。

对于非幺模的几乎单模群 G，给定一个可数稠密子群 Γ，事实证明，$\Gamma \curvearrowright G$ 的强遍历性等价于 $\Gamma \cap \ker \Delta_G \curvearrowright \ker(\Delta_G)$ 的强遍历性。这将左作用的强遍历性问题归结为幺模情形。

对于强遍历的左平移作用 $\Gamma \curvearrowright G$，人们观察到了刚性现象（参见 [Fur11, Ioa17]）。作用 $\Gamma \curvearrowright G$ 可能会“记住”包含关系 $\Gamma < G$，具体而言，轨道等价作用$\Gamma \curvearrowright G$ 和 $\Lambda \curvearrowright H$ 意味着存在一个拓扑同构 $\delta : G \to H$，满足 $\delta(\Gamma) = \Lambda$。关于非紧群，目前最一般的刚性结论由 Ioana [Ioa17, 定理A], 给出；该定理断言，当 G 是单连通时，强遍历作用 $\Gamma \curvearrowright G$ 会以这种方式记住包含关系 $\Gamma < G$。注意，G 单连通且存在强遍历的左平移作用，必然意味着 G 是单模的。对于一个非幺模的几乎单模局部紧第二可数群 G，我们在第2节证明，对于可数稠密子群 $\Gamma \curvearrowright G$的任意强遍历作用，都存在一个轨道等价作用 $\Lambda \curvearrowright H$，使得 $\Delta_G(G) \neq \Delta_H(H)$。然而，当 G 的幺模部分 G_1 是单连通时，作用 $\Gamma \curvearrowright G$ 会记住包含关系 $\Gamma \cap \ker \Delta_G < \ker \Delta_G$；也就是说，如果$\Gamma \curvearrowright G$ 和 $\Lambda \curvearrowright H$ 稳定轨道等价，那么就存在一个拓扑同构 δ，从 $\ker \Delta_G$ 到 $\ker \Delta_H$，满足 $\delta\big(\Gamma \cap \ker \Delta_G\big) = \Lambda \cap \ker \Delta_H$。

在第3节中，我们给出非单射非满冯·诺依曼代数的例子。通过平移，并结合非几乎幺模群上的左作用和右作用，我们构造出非单射非满

Department of Mathematics, Michigan State University giritlio@msu.edu

因子，类型为 II_∞ 和 III_λ，对于 $\lambda \in (0,1]$）。此外，利用几乎幺模群上的强遍历作用，我们构造出平移作用，其等价关系 $\mathcal{R}$ 具有指定的 $\mathrm{Sd}(\mathcal{R})$。

致谢
我们谨向导师 BrentNelson 致以诚挚的谢意，感谢其在本文准备过程中给予的鼓励和不懈支持。

1. 强遍历性：非幺模情形

We 回顾轨道等价的若干概念。假设所有作用都是非奇异的 .

给定两个作用 $\Gamma \curvearrowright (G,\ \mu)$ 和 $\Lambda \curvearrowright (H,\ \lambda)$，如果存在测度空间之间的非奇异博雷尔同构 $\theta : G \to H$，使得对于几乎每个 $x \in G$，“θ 将轨道映到轨道”，则称这两个作用轨道等价 (OE)：

$$\theta(\Gamma x) = \Lambda\theta(x).$$

如果存在 $E \subset G, F \subset H$ 两个非零测度集合，使得对于几乎每个 $x \in G$，存在测度空间之间的博雷尔同构 $\theta : E \to F$，并且满足以下条件，则称这两个作用稳定轨道等价 (SOE)：

$$\theta(\Gamma x \cap E) = \Lambda\theta(x) \cap F$$

To 为使我们的陈述更加简洁，我们定义可数稠密包含这一概念 .

定义 1.1。对于局部紧第二可数群 G，记其左 Haar 测度为 m_G，并记 μ_G 为G 上与 m_G等价的概率测度。令 Γ 为 G的一个可数稠密子群。称包含关系 $\Gamma < G$ 为可数稠密包含。称 Γ 在测度空间 $(G,\ \mu_G)$上的左平移作用为可数稠密作用。

可数稠密作用保持可能是无限的测度 m_G。专家很可能早已知道，可数稠密作用是遍历的。为方便在线研究者，我们给出一个论证。设 $L_g f(x) = f(g^{-1}x)$，其中 $g \in G$。那么，对任意 $f \in C_c(G)$（紧支撑连续函数）以及任意 $A \subset X$，映射 $T_f :\ g \mapsto \int_G L_g f(x) 1_A(x) dm_G(x)$ 是连续的 [Fol16，命题 2.42]。若 A在可数稠密作用下不变，则对所有 $f \in C_c(G)$，T 均为常数。因此，若 A 非零，则 $1_A dm_G$ 是左 Haar 测度 [Fol99，命题 11.4]。于是，几乎处处（相对于 $A = X\ m_G$），等价地，几乎处处（相对于μ_G），这意味着遍历性。

我们将证明定理A的一个稍微一般化的版本。先回顾拉东–尼科迪姆余循环。设 $\mathcal{R}$ 是标准概率空间 $(X,\ \mu)$ 上的一个可数博雷尔等价关系。在 $\mathcal{R}$ 的 $X \times X$-博雷尔子集上，定义测度 $\nu_\ell(E) := \int_X \sum_{y\sim x} 1_E(x,y)\, d\mu(x)$ 和 $\nu_r(E) := \int_X \sum_{x\sim y} 1_E(x,y) d\mu(y)$。拉东–尼科迪姆余循环 δ_μ 为 $\frac{d\nu_\ell}{d\nu_r}$。

定理 1.2。设 G 是一个非几乎幺模的局部紧第二可数群。设 Γ_0 和 Π_0 是 G 的两个可数子群。那么，$\mathcal{R}$ 上的等价关系，在 (G,μ_G) 上定义为

$$x \sim \gamma x \pi \qquad \gamma \in \Gamma_0, \pi \in \Pi_0$$

不是强遍历的。

证明。记 $\Delta_G :\ G \to \mathbb{R}_+$ 为模同态。由于 G 非几乎幺模，因此有

$$\Delta_G(G) = \mathbb{R}_+,$$

（参见 [GGN25，定义 2.2] 后的讨论）。令 Γ 和 Π 为包含 Γ_0 和 Π_0 的可数稠密子群，分别记作 G。由于 Γ 和 Π 可数，存在 $g \in G$ 使得 $\Delta_G(g) \notin \Delta_G(\Gamma \vee \Pi)$，其中 $\vee$ 表示生成子群。令 $\Lambda := \Pi \vee g$。注意，Λ 也是一个可数稠密子群，并且 $\Delta_G(\Gamma) \subsetneq \Delta_G(\Lambda)$。

考虑由下式给出的左右作用等价关系 $\mathcal{R}$ 于 (G,μ_g)

$$x \sim \gamma x \lambda \qquad \gamma \in \Gamma, \lambda \in \Lambda$$

我们得到相对于 m_G 的拉东–尼科迪姆余循环为

$$\delta_{m_G}(x,\gamma x\lambda)=\frac{1}{\Delta_G(\lambda)}$$

以及右 Haar 测度 ρ_G:

$$\delta_{\rho_G}(x,\gamma x\lambda)=\frac{1}{\Delta_G(\gamma)}$$

因此，左、右哈尔测度对$\mathcal{R}$都是几乎周期的。现在假设 $\mathcal{R}$ 是强遍历的。那么 $\mathcal{R}$ 也是强遍历的，并且根据 [HMV19，定理 5.3]，

$$\bigcap_{U\subset G\text{ Borel},\ U\neq\emptyset}\delta_{m_G}\big(\overline{\mathcal{R}}\cap(U\times U)\big)=\bigcap_{U\subset G\text{ Borel},\ U\neq\emptyset}\delta_{\rho_G}\big(\overline{\mathcal{R}}\cap(U\times U)\big)$$

注意，ker(δ_{m_G})包含可数稠密作用 $\Gamma\curvearrowright G$，因此是遍历的。类似地，ker(δ_{ρ_G})也是遍历的。因此，根据 [HMV19，引理 5.6]的证明，$\delta_{m_G}\big(\mathcal{R}\cap(U\times U)\big)$ 对所有非零 U而言，都是 $\mathbb{R}_+$ 的同一子集。对 δ_{ρ_G}也同样成立。于是我们得到

$$\Delta_G(\Lambda)=\delta_{m_G}(\overline{\mathcal{R}})=\delta_{\rho_G}(\overline{\mathcal{R}})=\Delta_G(\Gamma),$$

这显然荒谬。 □

我们已经证明，只有几乎幺模局部紧第二可数群才能存在强遍历可数稠密作用。现在我们来考察非幺模的几乎单模群。作为测度空间，这类群是其幺模部分的可数个副本。利用这一事实可以证明，这类群上的可数稠密作用是否强遍历，可以从其幺模部分推知。

定理 1.3。 设 G 是一个几乎单模局部紧第二可数群。设 Γ 是 G的一个可数稠密子群。以下条件等价:

(i) Γ在 G 上的左平移作用是强遍历的。*(ii)* $\Gamma_1:=\Gamma\cap$核 Δ_G 在 $G_1:=$核Δ_G 上的左平移作用是强遍历的。

证明。 (*i*) ⇒(*ii*): 假设 Γ_1 在 G_1 上的作用包含一个非平凡的几乎不变序列 A_n。对每个 λ，选取 $g_\lambda\in\Gamma\cap\Delta_G^{-1}(\{\lambda\})$。由于 Γ 稠密，满足 $\Delta_G(\Gamma)=\Delta_G(G)$ 的这类元素存在。定义

$$B_n:=\bigcup_{\lambda\in\Delta_G(G)}g_\lambda A_n.$$

我们将证明， B_n 是可数稠密作用 $\Gamma\curvearrowright G$的一个几乎不变序列。给定 $\epsilon>0$，取 $I=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}\subset\Delta_G(G)$ 使得 $\mu_G(\Delta_G^{-1}(I))>1-\epsilon/2$。给定 $s\in\Gamma_1$和 $\lambda\in\Delta_G(G)$，注意到

$$[(sg_\lambda B_n)\Delta B_n]\cap\Delta_G^{-1}(\{\lambda_i\})=g_{\lambda_i}(A_n\Delta g_{\lambda_i}^{-1}sg_\lambda g_{\lambda^{-1}\lambda_i}A_n)$$

注意到$g_{\lambda_i}^{-1}sg_\lambda g_{\lambda^{-1}\lambda_i}\in\Gamma_1$。利用 A_n 对于作用在 G_1上的 Γ_1 几乎不变、 I 是有限的，以及$(g_\lambda^{-1})_*\mu_G$关于有限测度 μ_G绝对连续这一点，可以找到足够大的 m ，使得

$$\sum_{\lambda_i\in I}\mu_G\big(g_{\lambda_i}(A_m\Delta g_{\lambda_i}^{-1}sg_\lambda g_{\lambda^{-1}\lambda_i}A_m)\big)<\epsilon/2.$$

我们有

$$\begin{aligned}\mu_G(sg_\lambda B_m\Delta B_m)&=\mu_G\big((sg_\lambda B_m\Delta B_m)\cap\Delta_G^{-1}(I)\big)+\mu_G\big(G\setminus\Delta_G^{-1}(I)\big)\\&<\sum_{\lambda_i\in I}\mu_G\big(g_{\lambda_i}(A_m\Delta g_{\lambda_i}^{-1}sg_\lambda g_{\lambda^{-1}\lambda_i}A_m)\big)+\epsilon/2\\&<\epsilon\end{aligned}$$

因此， B_n 是作用在 G上的 Γ的一个几乎不变序列。注意， B_n 是非平凡的，因为 A_n 是非平凡的。

(*ii*) ⇒ (*i*): 假设 Γ 在 G 上的作用包含一个非平凡的几乎不变序列 A_n。那么，对于每个 $\lambda\in\Delta_G(G)$，序列 $B_n^\lambda:=A_n\cap\Delta_G^{-1}(\{\lambda\})$ 是可数稠密作用 $\Gamma_1\curvearrowright\Delta_G^{-1}(\{\lambda\})$ 的一个可能平凡的几乎不变序列。由于 A_n 非平凡， $\mu_G(B_n^\lambda)$ 不可能收敛到 $\mu_G(\Delta_G^{-1}(\{\lambda\}))$

对所有 λ 都成立。同样，对于所有 λ， $\mu_G(B_n^\lambda)$ 不可能收敛到 0。假设存在 λ_1 和 λ_2，使得 $\mu_G(B_n^{\lambda_1})$ 收敛到 $\mu_G(\Delta_G^{-1}(\{\lambda_1\}))$，且 $\mu_G(B_n^{\lambda_2})$ 收敛到 0。令 $h \in \Gamma \cap \Delta_G^{-1}(\{\lambda_2^{-1}\lambda_1\})$。我们有:

$$\mu_G(hA_n\Delta A_n) \geq \mu_G(hB_n^{\lambda_1}\Delta B_n^{\lambda_2}) \geq \mu_G(hB_n^{\lambda_1}) - \mu_G(B_n^{\lambda_2}) = \mu_G(B_n^{\lambda_1}) - \mu_G(B_n^{\lambda_2}) \to \mu_G(\Delta_G^{-1}(\{\lambda_1\})) >$$

这与 A_n几乎不变相矛盾。因此，存在一个 λ，使得 B_n^λ 是可数稠密作用$\Gamma_1 \curvearrowright \Delta_G^{-1}(\{\lambda\})$的非平凡几乎不变序列; 该作用通过映射 $x \mapsto g_{\lambda^{-1}}x$与 Γ_1 在 G_1 上的作用轨道等价。强遍历性的轨道等价不变性完成了证明。□

2. 刚性缺失

在非幺模　在幺模情形下，我们通过以下命题证明刚性缺失　　.

命题2.1。 非幺模群 G 的可数无限子群 Γ 的每个强遍历左平移作用，都与 $\big(\Gamma \cap \ker(\Delta_G)\big) \times \mathbb{Z} \curvearrowright \ker(\Delta_G) \times \mathbb{Z}$ 轨道等价。

证明。 只需证明该作用与 $\big((\Gamma \cap \ker(\Delta_G)) \times \Delta_G(G)\big) \curvearrowright \ker(\Delta_G) \times \Delta_G(G)$ 轨道等价，其中 $\Delta_G(G)$ 赋予离散拓扑。于是，由于任意可数无限离散群 Γ 都与 $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{Z}$ 轨道等价，结论即得。

根据定理 1.2， G 几乎幺模，且 $\Delta_G(G)$ 是 $\mathbb{R}_+$ 的可数真子群。对所有 $t \in \Delta_G(G)$，从 $\Gamma \cap \Delta_G^{-1}(t)$ 中选取 γ_t。我们声称，由 $\theta(x) = (\gamma_t^{-1}x,\ t)$（对 $\Delta_G(x)$）定义的博雷尔同构 θ 实现了轨道等价。事实上，对于满足 $\Delta_G(x) = u$ 的 $x \in G$，以及满足 $\Delta_G(\gamma)$ 的 $\gamma \in \Gamma = v$

$$\theta(\gamma x) = (\gamma_{uv}^{-1}\gamma x, uv) = (\gamma_{uv}^{-1}\gamma\gamma_u, v)(\gamma_u^{-1}x, u) = (\gamma_{uv}^{-1}\gamma\gamma_u, v)\theta(x)$$

另一方面，对于 $\gamma \in \Gamma \cap \Delta_G(G)$，我们有

$$(\gamma, t)\theta(x) = (\gamma\gamma_u^{-1}x, tu) = (\gamma_{tu}^{-1}\gamma_{tu}\gamma\gamma_u^{-1}x, tu) = \theta(\gamma_{tu}\gamma\gamma_u^{-1}x)$$

这证明可数稠密作用 $\Gamma \curvearrowright G$ 与 $\big((\Gamma \cap \ker(\Delta_G)) \times \Delta_G(G)\big) \curvearrowright \ker(\Delta_G) \times \Delta_G(G)$轨道等价。 □

推论 2.2. 给定非幺模群上的强遍历可数稠密作用 $\Gamma \curvearrowright G$，至少存在可数多个彼此不同构（不拓扑同构）的群 G_i，它们都允许轨道等价的可数稠密作用。

证明。 设 $t \in \Delta_G(G) \setminus \ker(\Delta_G)$。取满足 $\Delta(g) = t$ 的 $g \in \Gamma$。对于 $i \in \mathbb{N}$，令 Γ_i 为由 g^i 生成的子群。令 T_i 为由 t^i 生成的 $\mathbb{R}_+$ 的子群。令 $G_i = G \cap \Delta_G^{-1}(T_i)$。根据前一个命题，对于所有 $i > 1$，可数稠密作用 $\Gamma_i \curvearrowright G_i$ 都与 $\Gamma \curvearrowright G$ 轨道等价，但 G_i 与 G并非拓扑同构，因为它们在模同态下的像不同。□

在单连通性的假设下，该作用的“幺模部分”仍然具有刚性。

定理 2.3。 设 G是一个非单模的几乎单模局部紧第二可数群，其幺模部分是单连通的。假设 $\Gamma \curvearrowright G$ 是一个强遍历可数稠密作用。设 H 是一个几乎单模局部紧第二可数群，其幺模部分是单连通的。设 $\Lambda \curvearrowright H$ 是一个可数但不一定稠密的作用。

那么， $\Gamma \curvearrowright G$ 与 $\Lambda \curvearrowright H$ 稳定轨道等价，当且仅当存在一个拓扑同构δ：核 $\Delta_G \to$核 Δ_H，满足 $\delta\big(\Gamma \cap$核 $\Delta_G\big) = \Lambda \cap$核 Δ_H。

证明。 设 $\Gamma_1 = \Gamma \cap$核Δ_G。类似地，用 Λ_1、G_1、H_1 表示它们与相应模同态 Δ_G 或 Δ_H的核的交。由命题 2.1，可数稠密作用 $\Gamma \curvearrowright G$和 $\Lambda \curvearrowright H$ 分别与 $\Gamma_1 \times \mathbb{Z} \curvearrowright G_1 \times \mathbb{Z}$ 和 $\Lambda_1 \times \mathbb{Z} \curvearrowright H_1 \times \mathbb{Z}$ 轨道等价。

假设 $\Gamma \curvearrowright G$ 和 $\Lambda \curvearrowright H$ 是稳定轨道等价的。那么， $\Gamma_1 \times \mathbb{Z} \curvearrowright G_1 \times \mathbb{Z}$ 和 $\Lambda_1 \times \mathbb{Z} \curvearrowright H_1 \times \mathbb{Z}$ 通过映射 $\theta\colon E \to F$实现稳定轨道等价。因此，存在 t， $s \in \mathbb{R}_+$，使得 $E_t := E \cap (G_1 \times \{t\})$ 非零，且对于某个满足 $F_s = F_s \cap (H_1 \times \{s\})$ 的集合， $\theta(E_t) = F_s$。注意， θ 实现了 $\Gamma_1 \curvearrowright G_1$ 与 $\Lambda_1 \curvearrowright H_1$之间的稳定轨道等价。由于 G_1 和 H_1 是连通的，应用 [Ioa17, 定理A] 即可完成证明。□

3. 冯·诺伊曼代数

利用几乎非幺模群上的平移作用，可以构造类型为 II_∞ 和 III_λ 的非满非单射冯·诺依曼代数，适用于 $\lambda \in (0, 1]$。关于从等价关系 $\mathcal{R}$构造冯·诺依曼代数 $L(\mathcal{R})$，参见 [FM77] 。

引理 *3.1. </style}*任何连通局部紧第二可数群 G的非 *amenable* 可数稠密子群 Γ 都会诱导出一个非 *amenable* 的左平移作用。

证明。 连通局部紧第二可数群唯一的开子群就是群本身。因此 Γ不满足 [BG07], 的定义 8.3，而同一篇文章中的定理 8.4 表明，可数稠密作用 $\Gamma \curvearrowright G$ 不是可均性作用。□

例 3.2。考虑某个 $n \geq 2$下的 $G = GL_n(\mathbb{R})^+ \ltimes \mathbb{R}^n$ ，即作用在 $\mathbb{R}^n$上的保向仿射变换群。 G 是连通的。令 Γ为 G 的一个包含 $SL_n(\mathbb{Z})$的可数稠密子群。由于$SL_2(\mathbb{Z})$（因而 Γ）包含二生成自由群， Γ不是可均的。由前引理和定理 1.2，可数稠密作用 $\Gamma \curvearrowright G$ 既不是可均的，也不是强遍历的。此外，m_G 诱导出无限迹。因此，冯·诺依曼代数 $L(\Gamma \curvearrowright G)$是一个非内射非满的 II_∞型因子。给定 $t \in \mathbb{R}_+$，存在 $g \in G$ 使得 $\Delta_G(g) = t$。定义 U： $L^2(\mathcal{R}) \to L^2(\mathcal{R})$如下： $U(f)(x, y) = U(f)(g^{-1}x, g^{-1}y)$。作用 α_g： $x \mapsto UxU^*$是一个缩放因子为 t的无限迹缩放作用。因此，我们得到 $L(\Gamma \curvearrowright G)$的基本群为 $\mathbb{R}^+$。

例 3.3。 沿用上一个例子的设置，令 Λ 为 G 的任意可数子群。考虑由 $x \sim \gamma x \lambda$ 给出的左右等价关系 $\mathcal{R}$ ，其中 $\gamma \in \Gamma$ 且 $\lambda \in \Lambda$。由于 $\Gamma \curvearrowright \Lambda$ 是可数稠密作用，$\ker(\delta_{m_G})$ 是遍历的。因此，根据 [HMV19，引理 5.6], 的证明， $\mathcal{R}$， m_G 的渐近比值集是拉东–尼科迪姆余循环 δ_{m_G} 的本质值域;—在此情形下，它是 $\Delta_G(\Lambda)$。根据 [Tak03，定理 XIII.2.13], $\Delta_G(\Lambda)$ 等于 $L(\mathcal{R})$ 的模谱 S 。这意味着，通过适当选择 Λ，可以得到一个属于所有 III_λ 子类的冯·诺依曼代数 M，对于 $\lambda \in (0, 1]$。 M 包含带有期望的 $L(\Gamma \curvearrowright G)$，因此是非内射的。此外，根据定理 1.2，该冯·诺依曼代数不是满的。

等价关系的 Sd 不变量由 Houdayer-Marrakchi-Verraedt 在 [HMV19] 中定义。利用几乎幺模群上的强遍历作用，可以构造具有指定 $\mathrm{Sd}(\mathcal{R})$ 的等价关系。

例3.4。 设 T 是 $\mathbb{R}_+$的任意可数子群。对于 $n \geq 3$，令 H_T^n 为由 $SO(n)$ 和 $T1$ 生成的 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换群。令 $G_T^n = H_T^n \ltimes \mathbb{R}^n$。那么， G_T^n 是一个几乎幺模群，且 $\Delta_{G_T^n}(G_T^n) = T$。令 $\Gamma \curvearrowright SO(n) \ltimes R^n$ 为任意强遍历可数稠密作用，它由 [BI20] 保证存在。令 $\Lambda = T1 \vee \Gamma$。考虑由 $x \sim \lambda_1 x \lambda_2$， $\lambda_i \in \Lambda$ 定义在 G_T^n 上的等价关系 $\mathcal{R}$。根据定理 1.3， $\mathcal{R}$ 是强遍历的。此外，$\ker(\delta_{m_G})$ 是强遍历的，因此 $\mathrm{Sd}(\mathcal{R}) = \delta_{m_G}(\mathcal{R}) = T$。

我们最后给出命题2.1的一个推论，适用于由 $\Gamma \curvearrowright G$ 和$(\Gamma \cap \ker(\Delta_G)) \curvearrowright \ker(\Delta_G)$生成的冯·诺伊曼代数。

推论3.5。 对于可数稠密作用 $\Gamma \curvearrowright G$，我们有

$$L(\Gamma \curvearrowright G) \cong L\big((\Gamma \cap \ker \Delta_G) \curvearrowright \ker \Delta_G\big)$$

证明。 当 G 是单模时，结论显然成立。否则，由命题2.1可得

$$\begin{aligned} L(\Gamma \curvearrowright G) &\cong L\big((\Gamma \cap \ker \Delta_G) \curvearrowright \ker \Delta_G\big) \otimes L(\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{Z}) \\ &\cong L\big((\Gamma \cap \ker \Delta_G) \curvearrowright \ker \Delta_G\big) \otimes B(\ell^2(\mathbb{Z})) \\ &\cong L\big((\Gamma \cap \ker \Delta_G) \curvearrowright \ker \Delta_G\big) \end{aligned}$$

最后一个同构是因为 $L\big((\Gamma \cap \ker \Delta_G) \curvearrowright \ker \Delta_G\big)$ 是一个II_∞ 因子。事实上，$\ker \Delta_G$ 存在一个哈尔测度缩放作用，因此是非紧的。所以$\mu_{G|\ker \Delta_G}$ 诱导出一个无限迹。□

参考文献

[BG07] E. Breuillard 和 T. Gelander， *A topological Tits alternative*，《数学年刊》（2）**166**（2007），第 2 期，427–474。MR 2373146[BI 20] R´emi Boutonnet 和 Adrian Ioana， *Local spectral gap in the group of Euclidean isometries*，《国际数学研究通知》（ 2020 2, 466 486 4073192 ），第 – 期。MR Con A. Connes,

[74] *Almost periodic states and factors of type* $_1$, **16** 1974 415 445 358374 III《泛函分析

[77] *Ergodic equivalence relations cohomology and von Neumann algebras. II*

杂志》（），–。MR FM Jacob Feldman 和 Calvin C. Moore，，，《美国数学会会刊》**234**（1977），第 2 期，325–359。MR578730

[Fol99] Gerald B. Folland, *Real analysis*, 第二版, 纯粹与应用数学（纽约）, John Wiley & Sons, Inc., 纽约, 1999, 1681462 现代技术及其应用, [16] _____*A course in abstract harmonic analysis* Wiley-Interscience 出版物。MR Fol , , 第二版, 数学教科书, CRC Press, 佛罗里达州博卡拉顿, 2016。MR 3444405[Fur11] Alex Furman, *A survey of measured group theory*, 几何、刚性与群作用, 芝加哥数学讲座, 芝加哥大学出版社, 伊利诺伊州芝加哥, 2011, 第 296–374 页。MR 2807836[GGN25] Aldo Garcia Guinto 和 Brent Nelson, *Almost uniquely ergodic groups*, 2025. [HMV19] Cyril Houdayer, Amine Marrakchi 和 Peter Verraedt, *III invariants* **39** 2019 7, 1904 1935 *Strongly ergodic equivalence relations: spectral gap and type* , 《动力系统与遍历理论》（）, 第 – 期。MR 3961680 [17] *Strong ergodicity property (T) and orbit equivalence rigidity for translation actions* Ioa Adrian Ioana, , , 《纯粹与应用数学杂志》 **733** 2017 203 250 3731329 （）, –。MR Sch Klaus Schmidt, [80] *Asymptotically invariant sequences and an action of* SL(2, **Z**) *on the* 2*-sphere*, 《以色列数学杂志》**37** （ 1980 3, 193 208 599454 ）, 第 – 期。MR Tak M. Takesaki, *Theory of operator algebras. III*, 数学科学百科全书, 第 127 卷, [03] Springer-Verlag, 柏林, 2003, 《算子代数与非交换几何》, 第 8 卷。MR 1943007