arXiv:2603.29388v1 [physics.space-ph] 31 Mar 2026

轨道不确定性传播中福克-普朗克方程的闭式解

José Antonio Rebollo* 和 Rafael Vázquez†塞维利亚大学，西班牙塞维利亚

Claudio Bombardelli‡马德里理工大学，西班牙马德里

在交会评估中，非高斯尾部主导着碰撞概率估算；然而，要在不进行蒙特卡洛抽样的情况下捕捉这些尾部特征颇具挑战，尤其是在考虑过程噪声时。我们通过证明二次型指数形式的试探解在平流和扩散作用下具有结构不变性，提出了一种福克-普朗克方程的闭式、无网格解。概率密度函数通过一个紧凑的常微分方程组传播，其计算成本远低于蒙特卡洛方法，且无需进行空间离散化。作为一项应用，该方法在具有代表性的大气阻力随机强迫下进行轨道不确定性传播。结果表明，该方法能够准确捕捉非高斯特征、非对称尾部和随机展宽，所得结果与蒙特卡洛基准相符。

I. 引言

CHARACTERIZING 在现代航天运行中，了解不确定性在非线性轨道动力学下如何演变至关重要。交会评估、碰撞规避机动规划、再入预测和空间域感知（SDA）都依赖于不仅要知道航天器可能位于何处，还要知道它出现在意料之外位置的概率 [1]。在这些应用中，概率分布的尾部往往比其峰值更为重要：例如，交会筛查决策取决于碰撞概率（通常约为 10^{-5} 或更小）是否超过可采取行动的阈值 [2–4]。要准确建模这些低概率尾部，必须忠实表示完整的概率密度函数（PDF），而不能仅仅依靠前两阶矩。

当前的运行方法绝大多数依赖于在高斯假设下，通过线性化动力学进行传播，例如利用状态转移矩阵进行协方差传播 [5]。这些近似会系统性地错误表示分布的尾部：非线性动力学会将初始的高斯云拉伸、弯曲并造成偏斜，使其呈现出明显的非高斯形状 [6], ，而高斯模型仍会继续对称地分配概率质量。其实际后果是，碰撞概率会被高估或低估；这两种情况都会带来实际的运行成本：不必要的规避机动会消耗有限的燃料，或者可能错过对真正危险接近事件的警告。无迹变换等扩展方法 [7] 虽能改善矩的传播，但其本质上仍局限于低阶统计量，无法重建完整的概率密度函数形状。另一种互补策略是重新构造坐标集，使动力学呈现近似线性的特性，从而使高斯假设保持近似有效；已有研究表明，广义赤道轨道根数（GEqOE）能够在确定性传播情况下实现这一点 [8]。

目前已有更为先进的方法。蒙特卡罗方法能够捕捉完整的非线性概率密度函数，但要解析交会评估中相关的 10^{-5} 尾部概率，需要10^5–10^6 个样本，因此在实际运行时限内，计算成本高得难以承受 [1]。高斯混合模型 [9, 10] 和基于熵的方法 [11] 改进了单高斯近似，但要捕捉非高斯尾部，就需要不断增加分量或基函数，相关计算成本也随之上升。用于求解福克-普朗克方程的基于网格的数值求解器 [12, 13] 受到维数灾难的制约：即使采用每轴仅有50个网格点的粗网格，六维轨道状态每个时间步也需要进行 $50^6 \approx 10^{10}$ 次计算。概率变换法（PTM）结合微分代数（DA）和泰勒映射 [14–18], ，通过将流映射作为高阶多项式展开进行传播，优雅地解决了问题中的确定性部分（刘维尔方程）。然而，所有物理系统都会受到随机强迫、大气阻力波动和未建模的引力摄动，

*博士生，航空航天工程系，塞维利亚大学，41092，塞维利亚，西班牙。
†教授，航空航天工程系，塞维利亚大学，41092，塞维利亚，西班牙。
‡教授，航空工程应用物理系，马德里理工大学，28040，马德里，西班牙。

太阳辐射压力变化、推力执行误差等因素的影响，而如何将这一过程噪声纳入PTM框架仍是一项尚待解决的挑战。先前的研究利用基于DA的方法 [19], 处理特定应用中的随机不确定性；与此同时，Servadio和Zanetti [20] 开发了用于轨道力学非线性估计的递归多项式方法。尽管如此，要将PTM扩展至完整的随机情形，仍需计算高维卷积积分，这会重新带来DA原本旨在规避的维数灾难。

本文提出了泰勒映射扩散这一框架，以弥合这一差距。我们证明，福克-普朗克方程（包括确定性平流和随机扩散）存在一种特定结构形式的解：非线性映射的二次函数指数。据作者所知，这种指数二次型解结构在文献中尚属首次提出：尽管指数二次形式在线性系统中广为人知（在线性系统中，它们可化为由卡尔曼滤波器传播的高斯分布），但其在非线性平流与加性扩散共同作用下的保持性此前尚未得到确立。核心结果是一组耦合的常微分方程（ODE），用于描述映射和精度矩阵随时间的演化。这些 ODE 通过将该结构形式直接代入福克-普朗克方程推导而得，并得到零残差：在平流和扩散的共同作用下，该结构形式得到了严格保持。在实际应用中，映射以有限阶泰勒展开表示，因此所计算概率密度函数的精度由截断阶数控制，并且随着展开阶数的增加而收敛于理论解。该方法无需网格，能够捕捉分布的完整非高斯形状（包括其尾部），并且可以自然地纳入过程噪声。我们在平面开普勒轨道问题上展示了该算法，并通过蒙特卡洛随机模拟对其进行了验证。

II. 泰勒扩散框架

A. 拟设与主要结果

考虑一个受加性白高斯噪声影响的动力系统，

$$dX = f(X)\,dt + \sigma\,dW_t, \tag{1}$$

其中 $X \in \mathbb{R}^n$, f 是确定性漂移， $\Sigma_0 = \sigma\sigma^\top$ 是扩散张量。概率密度 $p(x,t)$ 满足福克-普朗克方程（FPE）：

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla\cdot(f\,p) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\Sigma_0\,\nabla^2 p\Big). \tag{2}$$

我们为该概率密度提出如下拟设：

$$p(x,t) = \mathcal{N}(t)\,\mu(x,t)\,\exp\Big(-F(x,t)^\top Q(t)\,F(x,t)\Big), \tag{3}$$

其中 F： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个光滑且可逆的映射，满足 $F(x_0(t),\,t) = 0$ （以分布众数为中心）； $Q(t) \succ 0$ 是一个对称正定精度矩阵； $\mu(x,t)$ 是一个用于描述动力学散度的光滑标量场；N (t) 是归一化常数。

本文的核心结果如下：

定理 1（二次型守恒）设初始概率密度具有(3) 所示形式，其中 $F(\cdot,\ t_0)$ 是一个微分同胚，在 $x_0(t_0)$处有孤立零点， $Q(t_0) \succ 0$，且 $\mu(x,\ t_0)$ 是一个光滑标量体积场。在具有对角协方差 $\Sigma_0 = \sigma\sigma^\top$ 的加性白高斯噪声作用下，只要$(F,\ \mu,\ Q)$ 满足以下耦合系统，这种结构形式便会随时间保持不变：

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -J_F\,f + \frac{1}{2}\left(F\sum_i \alpha_i + Q^{-1}\sum_i D_i + \Delta - \Gamma\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = (\nabla\cdot f) - \nabla\mu\cdot f - (\nabla\mu)^\top\Sigma_0\,J_F + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\Sigma_0\,\nabla^2\mu\Big), \tag{5}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2}\sum_i J_F^{-\top}\,J_{\Lambda_i}^\top Q\,J_{\Lambda_i}\,J_F^{-1}, \tag{6}$$

其中 $J_F = \nabla_x F$ 是 F 的雅可比矩阵；$\Lambda_i = \sqrt{\Sigma_0}_{,i} \nabla F_i$，其中 $J_{\Lambda_i} = \nabla_x \Lambda_i$；$\Gamma = 2 J_F \Sigma_0 J_F^\top Q F$；$\Delta_k = \sum_j \Sigma_{0,j} \partial^2 F_k / \partial x_j^2$；并且 $D_i \in \mathbb{R}^n$，$\alpha_i \in \mathbb{R}$ 是光滑耦合场，用于在 $F = 0$ 处对扩散修正进行正则化（见下文）。

证明通过将拟设 (3) 直接代入福克-普朗克方程 (2) 得出。分别计算等式两边：通过对 $\mu e^{-\Phi}$ 使用 $\Phi = F^\top Q F$应用链式法则求时间导数，并通过平流算子和扩散算子计算右侧，可以验证当 (F, μ, Q) 满足上述系统时，所有项都恒等抵消。耦合场 D_i和 α_i 源于一个关键的代数恒等式：对二次型 $F^\top Q F$ 施加小的对称修正后，只要选取 D_i 和 α_i 以消除 $F = 0$处表面上的奇异性，该修正便可吸收到基础映射和度量的平滑变形中。具体而言：

$$D_i = J_F^{-\top} J_{\Lambda_i}^\top Q \, \Lambda_i(x_0), \qquad \alpha_i = \frac{\Lambda_i^\top Q \Lambda_i - F^\top J_F^{-\top} J_{\Lambda_i}^\top Q J_{\Lambda_i} J_F^{-1} F - D_i^\top F - C_i}{F^\top Q F}, \tag{7}$$

其中 $C_i = \Lambda_i(x_0)^\top Q \Lambda_i(x_0)$ 是一个标量常数，用以确保 $\lim_{x \to x_0} \alpha_i = 0$。

注（理论与数值）。定理 1 证明，结构形式 (3) 在福克–普朗克方程动力学下是封闭的：演化方程 (4)–(6) 中没有引入任何近似。在数值实现中，F表示为有限阶泰勒展开（例如展开至二次项）。这一截断是唯一的近似来源：随着展开阶数增加，其影响会减小；对于线性动力学，一阶表示是精确的，从而得到下文注释中所述的结果。

备注（经典协方差传播）。线性情形最清楚地展示了该框架的结构及其推广。对于线性动力学 $f(x) = Ax$，福克-普朗克方程具有精确的高斯解，其中，概率密度函数在任意时刻均可由其均值 $x_0(t)$ 和协方差 $P(t)$ 完全刻画，并满足有限维常微分方程组

$$\dot{x}_0 = A \, x_0, \qquad \dot{P} = AP + PA^\top + \Sigma_0. \tag{8}$$

在这种情况下无需进行近似；相反，只需一组有限个标量——均值的 n 个分量以及协方差中 $n(n+1)/2$ 个相互独立的元素——即可在任意时刻完整描述概率密度函数。在当前框架中，这对应于取 $F(x,t) = \Phi(t) \, (x - x_0(t))$，其中 $\Phi(t)$ 是状态转移矩阵（STM），满足 $\dot{\Phi} = A\Phi, \Phi(t_0) = I$。在这一选择下，$J_F = \Phi$ 及所有高阶项均消失，因此方程组（4）–（6）精确地化简为（8）。泰勒映射扩散将这一结构直接推广到非线性动力学：名义轨迹 x_0 和状态转移矩阵 Φ 被推广为完整的非线性泰勒映射 F，通过其高阶系数刻画非高斯变形；而精度矩阵 Q 则发挥协方差逆矩阵的作用，控制分布的扩散范围。最终得到的是一种同类型的常微分方程组，它具有有限维结构，可由任意标准求解器进行积分，并以均值和协方差刻画高斯分布的方式刻画非高斯概率密度。

B. 物理解释

方程 (4) 描述分布形状 的演变。第一项（$-J_F f$）是纯平流：概率密度函数的等高线沿确定性流输运，恰如经典刘维尔方程所描述的那样。其余项表示扩散修正：过程噪声平滑地改变映射 F，使分布沿流的局部几何和噪声结构所决定的方向拉伸。

方程 (6) 描述分布浓度 的演变。精度矩阵 Q 随时间减小（分布变得更宽），其变化速率由映射的海森矩阵决定，也就是说，由非线性流的局部曲率决定。这与简单的协方差增长机制有本质区别：不确定性扩散的速率取决于动力学的非线性结构，即通过 J_F^{-1}和 M_i体现。

对于保守动力学（$\nabla \cdot f = 0$），其中包括开普勒运动，μ 始终保持恒定（可直接由 (5) 验证，当 $\nabla \cdot f = 0$时，$\mu = 1$ 与 $\nabla \mu = 0$ 和 $\nabla^2 \mu = 0$ 满足该方程）。因此，μ 的演化方程完全消去，系统简化为二方程保守形式：

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -J_F \, f + \frac{1}{2} \left(F \sum_i \alpha_i + Q^{-1} \sum_i D_i + \Delta - \Gamma \right), \tag{9}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \sum_i J_F^{-\top} \, J_{\Lambda_i}^\top Q \, J_{\Lambda_i} \, J_F^{-1}. \tag{10}$$

这是在第 III 节开普勒轨道应用中积分的系统。

C. 结构保持与尾部建模

在完整的福克–普朗克方程动力学下，结构形式 (3) 得以保持，这带来了直接的实际意义：分布的尾部由与主体部分相同的一组有限参数 $(F,\ Q)$ 决定。增广常微分方程组积分完成后，无论在状态空间中的哪个点，都可以计算概率密度 $p(x,\ t)$，包括距离众数 5σ 或 10σ 个偏差的位置，且额外计算成本可忽略不计。尾部的非高斯形状由非线性映射 F 编码，而其衰减速率则由演化后的精度矩阵 Q控制：两者均由耦合动力学自洽地传播。

这与基于矩的方法（截断至二阶或四阶，无法重建尾部行为）、高斯混合模型（需要不断增加分量才能捕捉非高斯尾部）以及蒙特卡罗方法（需要指数级增加样本数量才能解析更低的尾部概率）形成鲜明对比。对于交会评估而言，决策相关量是量级为 10^{-5}的碰撞概率，而拥有一个从众数到尾部均保持结构一致的$p(x,\ t)$闭式表达式，具有显著的运行优势。

III. 应用：开普勒轨道

A. 问题设定

我们将泰勒扩散算法应用于处于偏心二体轨道上的航天器。假设轨道为平面，因此完整状态为 $X = [x,\ y,\ v_x,\ v_y]^\top \in \mathbb{R}^4$。运动方程采用无量纲单位表示（引力参数为 $\mu_g = 1$，并相应选取参考长度和时间），得到如下动力学：

$$f(X) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ -x/r^3 \\ -y/r^3 \end{pmatrix}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{11}$$

初始条件为 $X_0 = [1,\ 0,\ 0,\ 0。8]^\top$（远拱点处速度低于圆轨道速度，因此形成偏心轨道，其半长轴为 $a \approx 0。74$，周期为 $T \approx 3。96$）。初始概率密度函数为各向同性高斯分布，所有分量均为 $\sigma_{\text{init}} = 10^{-4}$。加性过程噪声仅作用于速度：$\Sigma_0 = \text{diag}(0,\ 0,\ \sigma_w^2,\ \sigma_w^2)$，其中 $\sigma_w = 10^{-4}$。传播时间为$t_f = 12\pi \approx 37。7$，相当于约 9.5 个完整轨道；这是一个颇具挑战性的测试案例，航天器反复穿越强非线性的近拱点区域，每次经过都会加剧非高斯畸变。

B. 实现

映射 F 通过二阶泰勒系数表示：名义轨迹 $x_0(t)$、雅可比矩阵 $J(t) \in \mathbb{R}^{4\times4}$，以及海森张量 $H(t) \in \mathbb{R}^{4\times4\times4}$。这种二次截断能够捕捉概率密度函数的主要非线性畸变；更高阶表示可扩大精度适用的空间范围，但代价是增广状态更大。再加上 $Q(t) \in \mathbb{R}^{4\times4}$，这些共同构成增广状态 $\{x_0,\ J,\ H,\ Q\}$，其总维数为 $n + n^2 + n^3 + n(n+1)/2 = 94$ 个标量变量，适用于 $n = 4$。

该实现利用了一项关键的结构性质：推进增广状态所需的所有量，都可以从仅在此处 $\delta x = 0$计算的映射导数函数 $\dot{F}(\delta x)$ 中提取。具体而言，设 $V_0 = \dot{F}(0)$、$J = \partial_{\delta x}\dot{F}\big|_0$ 和 $\dot{H} = \partial^2_{\delta x}\dot{F}\big|_0$；这三个对象完全决定了泰勒系数的演化。名义轨迹 x_0通过条件 $F(x_0,\ t) = 0$推进，这需要 $\dot{x}_0 = -J^{-1}V_0$。由于 $\dot{F}$仅通过动力学 $f(x_0 + \delta x)$ 和多项式映射本身依赖于 δx，所有导数均通过前向模式自动微分*自动计算，从而无需手动推导（复杂得难以承受的）四维解析表达式。

由于开普勒动力学是保守的（$\nabla\cdot f = 0$），体积参数 $\mu = 1$ 为常数，无需积分。完整流程总结于算法1。

C. 验证与结果

我们使用由 400000 条随机轨迹组成的蒙特卡罗集合验证泰勒扩散概率密度函数；每条轨迹均采用四阶龙格－库塔法进行传播，并在 2000 个时间步注入欧拉－丸山法噪声。解析概率密度函数由

*我们使用 JAX [21]进行所有自动微分和硬件加速。

算法1泰勒扩散：增广常微分方程积分

要求： 初始状态 X_0、初始协方差 P_0、过程噪声 Σ_0、终止时间 t_f、步数 N
确保： 增广状态 $(x_{0,f},\, J_f,\, H_f,\, Q_f)$，其在 t_f 时刻表示概率密度函数

初始化： $x_0 \leftarrow X_0,\ J \leftarrow I_n,\ H \leftarrow 0,\ Q \leftarrow \frac{1}{2}P_0^{-1}$
对于 $k = 0, \ldots, N-1$ **执行** ▷ 四阶龙格–库塔时间积分，$\Delta t = t_f/N$
  计算 $\dot{Q}$**：** $\dot{Q} \leftarrow \frac{1}{2}\sum_i \Sigma_{0,i}\, J^{-\top} H_{\alpha i\beta}^{\top} Q\, H_{\alpha i\beta}\, J^{-1}$
  根据式（9）定义 $\dot{F}(\delta x)$，使用 $F(\delta x) = J\delta x + \frac{1}{2}H(\delta x,\ \delta x)$
  在 $\delta x = 0$ **处求值（通过自动微分）：**

$$V_0 \leftarrow \dot{F}(0), \quad \dot{J} \leftarrow \partial_{\delta x}\dot{F}\big|_0 + H \cdot \dot{x}_0, \quad \dot{H} \leftarrow \partial^2_{\delta x}\dot{F}\big|_0$$

  零跟踪（强制 $F(x_0) = 0$）：$\dot{x}_0 \leftarrow -J^{-1}V_0$
  传播：（$x_0,\ J,\ H,\ Q$）← 四阶龙格－库塔法－步（$\dot{x}_0,\ \dot{J},\ \dot{H},\ \dot{Q},\ \Delta t$）
8: </style}结束循环
9: </style}返回 $(x_{0,f},\, J_f,\, H_f,\, Q_f)$

在时间 t_f 处的（J_f, H_f, Q_f），通过从映射的定义域内的 $\mathrm{N}\,(0, (2Q_f)^{-1})$ 中抽样并应用二次前向映射来生成。

一个关键的比较指标是计算成本。泰勒扩散求解器对维度为 $n + n^2 + n^3 + n(n+1)/2$ 的增广常微分方程组进行积分（名义轨迹、雅可比矩阵、海森矩阵和精度矩阵）；对于 $n = 4$，这相当于 94 个标量常微分方程[†]。这一次积分耗时不到一秒[‡]，即可在终止时间给出概率密度函数的完整解析描述。相比之下，蒙特卡洛验证需要进行 400000 次相互独立的随机轨迹积分，耗时超过一分钟，而且仍然受到抽样噪声的影响。

结果表明，经过 9.5 圈轨道传播后，泰勒扩散与蒙特卡洛分布在位置（x, y）和速度（v_x,v_y）子空间中均高度吻合。图 1 比较了二维边缘密度：该方法准确捕捉到了由 $1/r^2$ 引力非线性引起的非高斯特征，尤其是明显弯曲的香蕉形分布和非对称尾部，同时还再现了随演化的精度矩阵 Q_f 所体现的累积随机强迫导致的分布展宽。图 2 展示了沿各状态分量的一维边缘分布，表明峰值位置、宽度和不对称性均高度吻合。δx 和 δv_y 中可见的偏斜尾部是近拱点处非线性拉伸的典型特征，二阶泰勒映射忠实地再现了这一特征。

IV. 结论与展望

我们提出了泰勒映射扩散，这是一种针对带有加性高斯噪声的非线性动力系统，为福克-普朗克方程提供闭式、无网格解的框架。其理论基础严谨：在推导出的耦合常微分方程下，二次型指数形式的试探解满足福克-普朗克方程，残差为零，在连续层面没有引入任何近似。在实际应用中，映射 F 由有限阶泰勒展开表示，因此截断阶数成为控制所计算概率密度精度的唯一且明确的参数。即使在二阶情况下，该方法也能捕捉概率密度函数的主要非线性畸变，包括其非高斯尾部，同时通过演化后的精度矩阵 Q一致地考虑过程噪声带来的展宽效应。

将该方法应用于带有连续随机速度扰动、传播了 9.5 个完整周期的偏心开普勒轨道，所得概率密度函数与包含 400000 个样本的蒙特卡洛验证结果高度吻合，而计算仅需积分 94 个耦合常微分方程，计算量相当于求解单条轨迹。随着所需蒙特卡洛样本数量增加，计算成本的差距也会扩大：要以统计显著性解析一个 10^{-5} 尾部概率，通常需要 10^6-10^7 个样本；而泰勒扩散解可以在状态空间中的任意位置解析地给出概率密度，包括深入尾部的任意位置。

[†]尽管对四维状态进行积分需要求解 94 个标量常微分方程，但将这一框架扩展到完整的六维轨道状态后，会得到包含 279 个常微分方程的增广系统。对于现代数值积分器而言，这一计算负担仍然微不足道，因而该方法相较于蒙特卡洛抽样仍具有显著的运行优势。
[‡]计算时间是在配备 第 *11* 代 *Intel(R) Core(TM) i7-1165G7* CPU 的计算机上测得的。

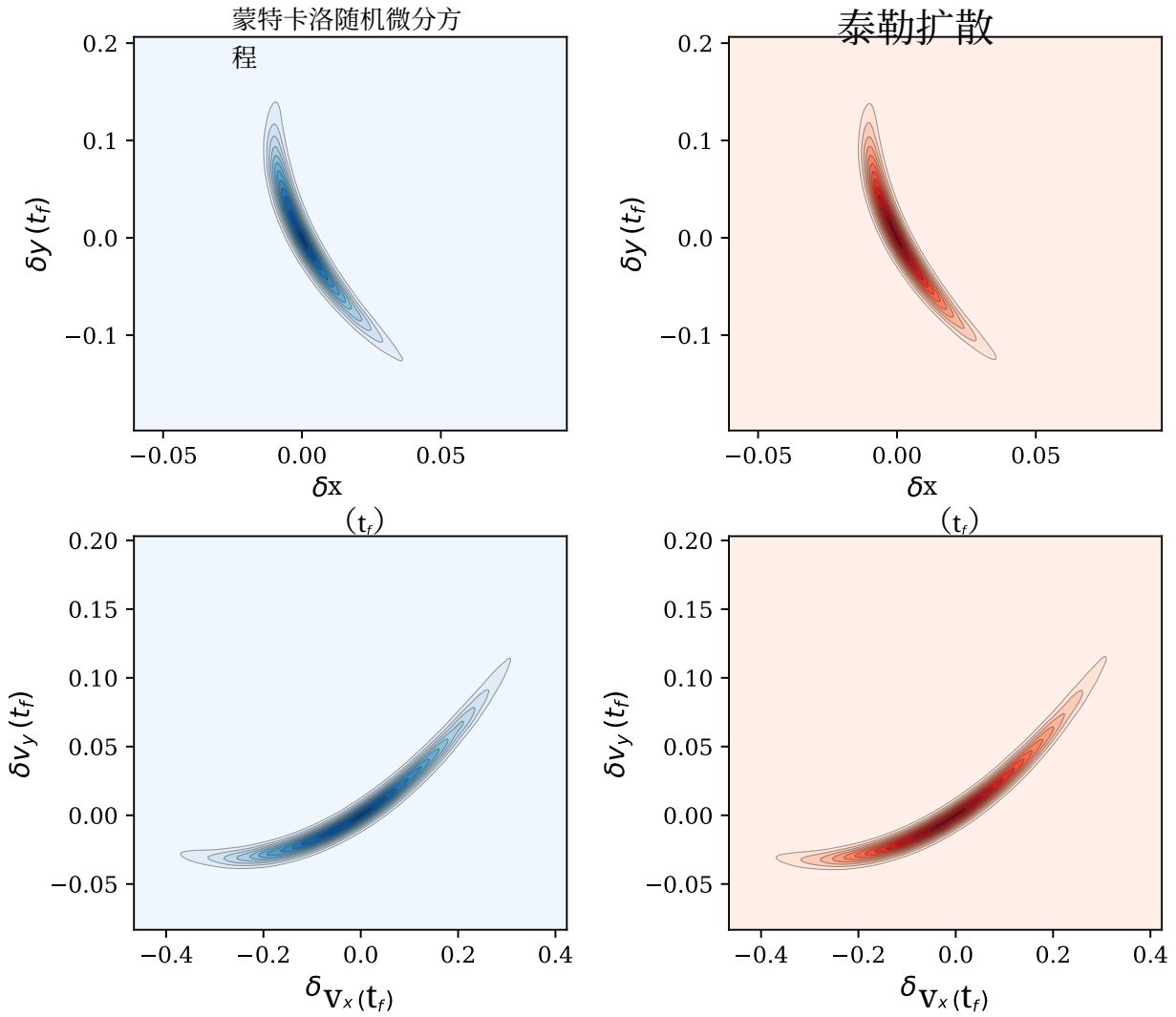


图 1 偏心开普勒轨道在 $t_f = 12\pi$ （≈ 9.5 个轨道周期）处的二维边缘概率密度函数。左列：蒙特卡洛随机微分方程参考结果（400000 个样本）。右列：泰勒扩散（带演化Q的二阶映射）。顶行：位置子空间 （δx， δy）。底行：速度子空间 （δv_x， δv_y）。

该框架为未来研究开辟了多个方向。一项自然的扩展是将方法应用于受非保守力（大气阻力、太阳辐射压）作用的轨道；这需要演化体积参数 μ，并可展示该方法在保守情形之外的完整通用性。更高阶的泰勒映射展开可将精度扩展到更长的传播时段和更强的非线性情形。交会评估是该方法的直接应用目标：闭式概率密度可直接用于评估分布尾部的碰撞概率，无需采用抽样方法。

本文研究平面轨道；原则上，将其扩展到完整的三维情形（六维状态）十分直接，只需将增广常微分方程组从 94 个标量方程增加到 279 个，对于现代积分器而言，计算速度依然极快。更重要的推广涉及状态表示的选择。本文采用的笛卡尔坐标对于福克-普朗克方程而言很自然，但在长弧段上会引入强非线性。改用轨道根数来表述，尤其是采用广义赤道轨道根数（GEqOE） [8], 等非奇异根数集，可降低流映射的有效非线性，从而提高低阶泰勒展开在多次绕转过程中的精度，同时简化对近圆轨道和近赤道轨道的处理。将 GEqOE 框架扩展到包含连续过程噪声，目前仍是一个开放问题，也是泰勒

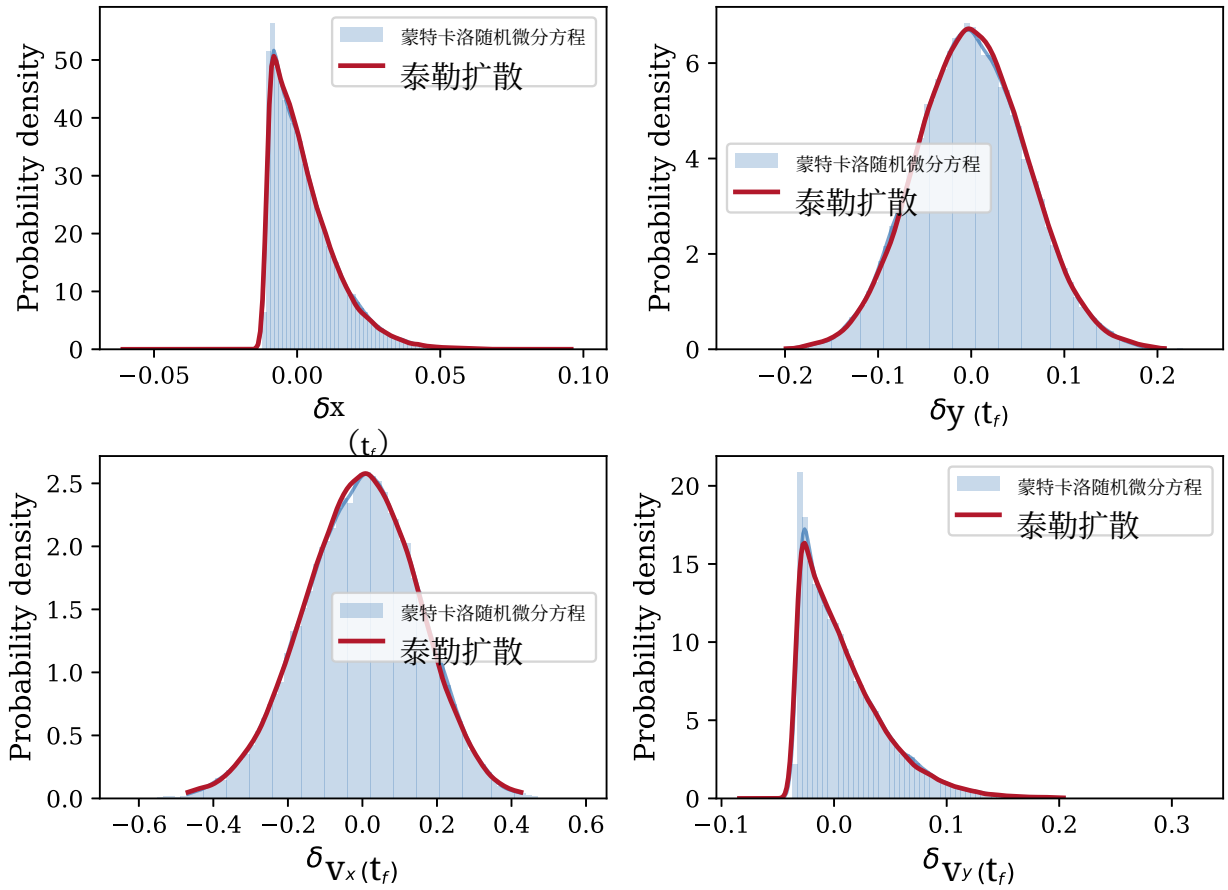


图 2 各状态分量的一维边缘概率密度函数。蓝色直方图：蒙特卡洛随机微分方程。红色曲线：泰勒扩散。四个分量均高度吻合，包括 δx和 δv_y中的非对称尾部，这证实该方法能够捕捉非线性动力学和随机强迫所引起的非高斯结构。

本文所发展的扩散机制。

另一个具有重要实际意义的方向是非线性轨道确定。许多传统滤波方法受限于高斯近似（例如扩展卡尔曼滤波器和无迹卡尔曼滤波器）。当测量弧段稀疏且传播时间较长时，这类方法的性能会显著下降，而这恰恰是非高斯效应最为显著的情形。泰勒映射扩散提供了一种闭式非高斯先验，可在每次获得测量后进行解析更新，为序贯轨道确定提供了一条有理论依据的途径，即使观测之间存在较大的时间间隔，也仍然易于处理。数学严谨性、通过提高展开阶数实现系统性改进的能力，以及计算效率，使泰勒映射扩散成为面向下一代空间域感知的一种很有前景的工具。

致谢

本研究得到　　空军科学研究办公室（AFOSR）FA8655-25-1-7012号资助项目的支持　　.

参考文献

[1] Luo, Y. 和 Yang, Z.，《轨道力学中的不确定性传播综述》，《航空航天科学进展》，第89卷，2017年，第23–39页。

[2] Akella, M. R.，和 Alfriend, K. T.，“空间物体之间的碰撞概率”，《制导、控制与　　*d*

动力学，第23卷，第5期，2000年，第769–772页。

[3] Patera, R. P., “计算卫星碰撞概率的一般方法”，《制导、控制与动力学杂志》，第 24 卷，第 4 期，2001 年，第 716–722 页。[4] Chan, F. K.，《航天器碰撞概率》，Aerospace Press，2008 年。[5] Maybeck, P. S.，《随机模型、估计与控制》，第 1 卷，Academic Press，1979 年。[6] Junkins, J. L., Akella, M. R., and Alfriend, K. T., “轨道力学中的非高斯误差传播”，《宇航科学杂志》，第 44 卷，第 4 期，1996 年，第 541–563 页。[7] Julier, S. J., and Uhlmann, J. K., “无迹滤波与非线性估计”，《*IEEE*会刊》，第 92 卷，第 3 期，2004 年，第 401–422 页。[8] Hernando-Ayuso, J., Bombardelli, C., Baù, G., and Martínez-Cacho, A., “使用广义赤道轨道根数进行近线性轨道不确定性传播”，《制导、控制与动力学杂志》，第 46 卷，第 4 期，2023 年，第 654–665 页。https://doi.org/10.2514/1.G006864。[9] Horwood, J. T., Aragon, N. D., and Poore, A. B., “用于空间监视的高斯和滤波器：理论与仿真”，《制导、控制与动力学杂志》，第 34 卷，第 6 期，2011 年，第 1839–1851 页。[10] Vittaldev, V., Russell, R. P., and Linares, R., “使用高斯混合模型和多项式混沌展开进行航天器不确定性传播”，《制导、控制与动力学杂志》，第 39 卷，第 12 期，2016 年，第 2615–2626 页。[11] DeMars, K. J., Bishop, R. H., and Jah, M. K., “非线性动力系统不确定性传播的基于熵的方法”，《制导、控制与动力学杂志》，第 36 卷，第 4 期，2013 年，第 1047–1057 页。[12] Risken, H.,《福克-普朗克方程：求解方法与应用》，2nd 版，Springer-Verlag，1996 年。[13] Kumar, M., Chakravorty, S., Singla, P., and Junkins, J. L., “采用 hp 细化的单位分解有限元方法求解定常福克-普朗克方程”，《声学与振动杂志》，第 327 卷，第 1–2 期，2009 年，第 144–162 页。[14] Berz, M.,《粒子束物理中的现代映射方法》，Academic Press，1999 年。[15] Park, R. S., and Scheeres, D. J., “高斯统计量的非线性映射：理论及其在航天器轨迹设计中的应用”，《制导、控制与动力学杂志》，第 29 卷，第 6 期，2006 年，第 1367–1375 页。[16] Valli, M., Armellin, R., Di Lizia, P., and Lavagna, M. R., “天体力学中的不确定性非线性映射”，《制导、控制与动力学杂志》，第 36 卷，第 1 期，2013 年，第 48–63 页。[17] Armellin, R., Di Lizia, P., Bernelli-Zazzera, F., and Berz, M., “利用微分代数表征小行星近距离交会：以阿波菲斯为例”，《天体力学与动力天文学》，第 107 卷，第 4 期，2010 年，第 451–470 页。[18] Wittig, A., Di Lizia, P., Armellin, R., Makino, K., Bernelli-Zazzera, F., and Berz, M., “通过自动域分割传播轨道动力学中的大型不确定性集”，《天体力学与动力天文学》，第 122 卷，第 3 期，2015 年，第 239–261 页。[19] Vazquez, R., Rivas, D., and Franco, A., “沿航迹风不确定性影响下飞机巡航的燃油消耗随机分析”，《航空航天科学与技术》，第 66 卷，2017 年，第 304–314 页。https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.03.027。[20] Servadio, S., and Zanetti, R., “用于轨道确定的递归多项式最小均方误差估计”，《制导、控制与动力学杂志》，第 43 卷，第 5 期，2020 年，第 939–954 页。[21] Bradbury, J., Frostig, R., Hawkins, P., Johnson, M. J., Leary, C., Maclaurin, D., Necula, G., Paszke, A., VanderPlas, J., Wanderman-Milne, S., and Zhang, Q., “JAX：基于图的可微计算”，，2018 年。网址：http://github.com/google/ jax。