带电粒子的磁输运与混沌轨道

D. Dubbers

物理研究所，海德堡大学，Im Neuenheimer Feld 226，69120 海德堡，德国

摘要

我运用所谓的斯托默理论，研究超越绝热近似的电磁场中电子的运动。部分电子轨道是规则的或可积的，但其测度为零。其他称为准周期的轨道并不稳定，但这种不稳定性只会在无限长的时间尺度上显现。其余轨道则是混沌或“超混沌”轨道，或是简单的散射态。文中针对所有这些情况给出了典型电子轨道的示例。一个尚未解决的问题是，斯托默理论所导致的谱变化，是否会影响中微子质量限制以及中微子—电子关联实验误差的限值。

I. 引言

当电子（或任何其他带电粒子）在恒定磁场中运动时，最简单的情况下，电子会沿着所谓导引场的一条给定磁力线作螺旋回旋运动。我将这一过程称为电子从一个位置到另一个位置的磁输运。当导引场不均匀时，磁输运过程可能相当复杂。在这种情况下，通常会采用绝热近似；也就是说，导引场在粒子参考系中只缓慢变化，相关内容可参见电动力学标准教材，例如参考文献 [1]。通常会引入绝热性系数，并要求绝热输运时该系数远小于一，但这个系数究竟应小多少仍未有定论。本文讨论强非绝热电子输运所引起的、远超绝热近似范畴的效应。随后，我将探讨过去几十年间混沌理论的兴起是否能增进我们对非绝热效应的理解。

本文结构如下。第二节概述任意形状的静态磁偶极场中电子轨道的问题，主要依据所谓的“斯托默问题”。斯托默理论将电子视为一种假想粒子，它在一个随空间变化、包含固定鞍点的势场中运动；一旦粒子的能量超过鞍点处的势，粒子便会逸向无穷远。此外，从斯托默理论出发，我发现了电子在有效势中的轨道所具有的一些意料之外的特征，而这些特征只能在混沌理论的框架下得到理解；斯托默在世时，混沌理论尚未问世。第三节讨论混沌理论及其对斯托默理论的影响。

II. 斯托默问题

偏离绝热近似可能会强烈影响带电粒子的轨道，甚至导致粒子无法控制地损失。本节讨论在混沌理论出现之前，人们为理解这类高度不规则的电子轨道及其损失所作的努力。本文对此作较为详细的介绍，因为关于这一主题的重要论文并不容易获取：它们往往以英语以外的语言撰写，发表于物理学家不易接触的期刊，使用各种不同的记号，常采用源自地球物理学的参数化方法，有时参考文献列表也不充分。这些因素使人们难以接触这一领域，也可能正是斯托默的研究在物理学家中并不广为人知的原因。

从历史上看，斯托默的主要目标是理解极光在地球偶极磁场中的形成过程；他假设该磁场轴对称且不随时间变化。斯托默是一位挪威数学家，当时因在数论和规范理论方面的研究而闻名。斯托默研究极光问题长达 30 多年，发表了约十篇相关论文，几乎全部以德文或法文撰写，最终于 1930年在参考文献 [2] 中展示了最早的混沌轨道。这项工作远早于混沌理论和计算机的出现；之所以能够完成，仅仅是因为斯托默获准调遣一营没有姓名记录的数学家来进行计算。

我们从适用于给定粒子且受外场作用的哈密顿理论开始。对于给定的哈密顿量 H_R，运动方程即哈密顿方程：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial q_i}, \tag{1}$$

由此可得粒子的位置 $q_i(t)$ 和共轭动量 $p_i(t)$。在方程 (1) 中，只涉及 H_R 对相空间变量的导数，而不涉及哈密顿量本身，因此哈密顿量的选取具有一定自由度。

在电子于静态（与时间无关）且旋转对称磁场中传播的情况下，采用三维柱坐标 $\{z, \rho, \varphi\}$ 表示的相对论正则哈密顿量为 [3]

$$\mathcal{H}_R = \{m^2c^4 + c^2[p_z^2 + p_\rho^2 + \left(p_\varphi/\rho - eA_\varphi\right)^2]\}^{1/2}, \tag{2}$$

其中电子电荷为 e，质量为 $m = \gamma m_0$，洛伦兹因子为 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$，速度 v以光速 c 表示。

电子的动量分量为 $p_z = mz$、$\dot{}$ 和 $p_\rho = m\dot{\rho}$。由于该问题具有旋转对称性，场的角动量是一个守恒量 $p_\varphi = const$。其中，偶极子的矢势的 φ 分量

$$A_\varphi = M_r \frac{\rho}{r^3}, \tag{3}$$

其中约化偶极矩为 $M_r = \frac{\mu_0}{4\pi} M$，真空磁导率为 μ_0，偶极矩为 M，且 $r = (z^2 + \rho^2)^{1/2}$。对于静态（即与时间无关）的磁矢势 A（其磁场为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$），此哈密顿量是一个运动常数

$$\mathcal{H}_R = \gamma mc^2 = const. \tag{4}$$

用哈密顿理论表述，斯托默问题可改写为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left[p_z^2 + p_\rho^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - eA_\varphi\right)^2\right], \tag{5}$$

H 关于相空间变量 $\{z, \rho, p_z, p_\rho\}$ 的偏导数与 H_R 相同，并且也是一个运动常数，

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} mv^2 = const. \tag{6}$$

最重要的是，H 可获得一种新的诠释：它是一个经典力学问题，描述一个虚构粒子在二维有效势 V 中运动。

将此有效势写成无量纲变量的形式，其中时间以 $t_0 = M_r/p_\varphi$ 为单位，长度以 $x_0 = mM_r^2/p_\varphi^3$ 为单位，可得

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{r^3}\right)^2. \tag{7}$$

V 可扩展为包含一个静态电场分量 – e E z_0。

将 H 的偏导数代入方程（1），即可得到一组描述子午面（穿过南北两极）内相空间元素 $\{z, \rho, p_z, p_\rho\}$ 的微分方程，即哈密顿方程

$$\begin{aligned} \dot{z} &= p_z, \quad \dot{\rho} = p_\rho, \\ \dot{p_z} &= -\frac{3z\rho}{r^5}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{r^3}\right], \\ \dot{p_\rho} &= \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{1-3\rho^2}{r^3}\right]\left[\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{r^3}\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

对于初始条件 $\{z_0, \rho_0, p_{z0}, p_{\rho 0}\}$，我们得到解 $\{z(t), \rho(t), p_z(t), p_\rho(t)\}$。（赤道面内的运动可单独用势 $V' = 1\ (2\rho^2)/\ (1 - 1/\rho)^2$, 描述粒子运动，见参考文献 [4]，但本文不采用这种方法。）在柱坐标 $\{r, \lambda\}$ 中，纬度为 λ（通常的极角 $\pi/2 - \lambda$ 称为余纬），偶极子的子午面磁力线由下式给出

$$r = r_{0\,\max} \cos^2 \lambda, \tag{9}$$

或者，用 $\{z, \rho\}$ 坐标表示，

$$z = \pm \rho^{2/3} (r_{0\,\max}^{2/3} - \rho^{2/3})^{1/2}, \tag{10}$$

图1。显示了偶极子 M 的一条磁力线（式 (9)），以及一个沿磁力线发射、动量为 p 的电子

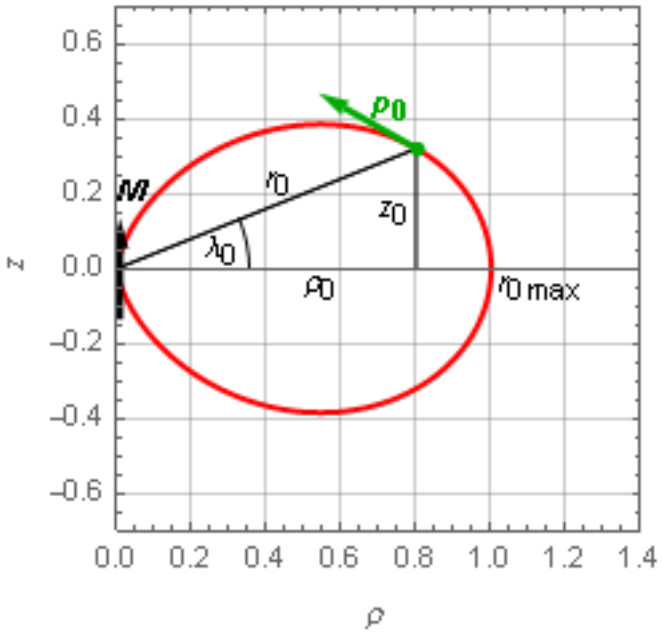


图1. 红色曲线表示点偶极子 M 的子午面内的一条磁力线。点偶极子位于原点，指向正 z 方向，见公式（10）。图中还显示了电子的动量 p（绿色箭头）；电子沿磁力线从位置 $\{\rho, z\}$（绿色圆点）发射。

对于初始条件 $z_0 = 0$ 和 $\rho_0 = r_{0max} = 1$，带电粒子从斯托默所称的势“谷线”处出发，此处 V = 0，由直线 $\rho^2 = r^3$ 给出，或者等价地写作 $z = \pm(1 - \rho^{2/3})^{1/2}$。

图 2 展示了电子所看到的斯托默有效势，即公式（7）。

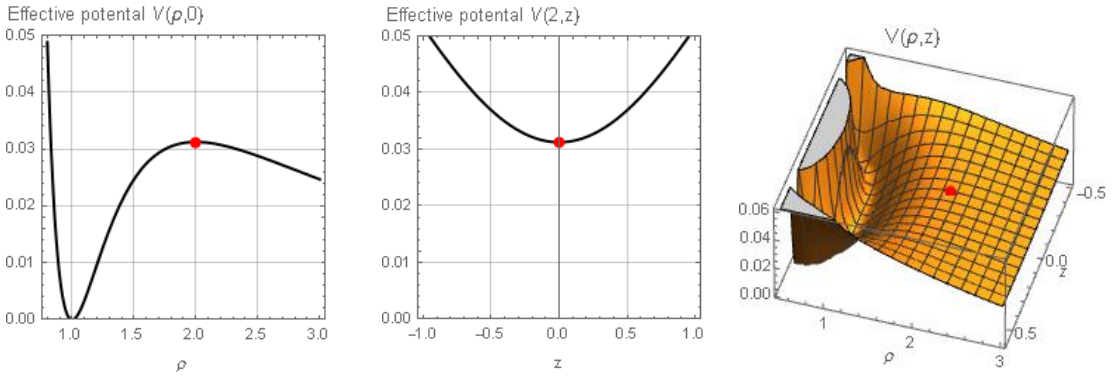


图 2 ρ = 0 。斯托默问题的有效势 V(,z) 在 $\rho = 2$ $_{saddle}$ = 1 32 ρ 0 = 0 z , 处有一个鞍点（红点），此处 V / 。图中展示了 z 处的截面 V(,)（左图）和 $\rho = 2$ 处的截面 V(2, z)（中图），以及 V(ρ, z) 的三维表示。

在这一有效势中，大多数电子将进行不规则（混沌）运动。但截至 2000 年，有关斯托默问题的出版物大多仅限于寻找粒子 [5], [6], 不规则轨道海洋中的规则（可积）轨道，这仅仅是因为混沌轨道被认为难以处理。关于在磁场装置中对正电子轨道进行的较新实验研究，请参阅文献 [7]。

势中存在鞍点，意味着在势谷内（鞍点左侧）发射、能量不足的粒子的轨迹不可积；而越过鞍点的粒子的轨迹则可积，并最终趋于一条直线。

图 3 首先展示了我们（人工）带电粒子的相空间变量 ρ(t)、z(t) 的演化。由此利用参数图推导出粒子的轨道 z(ρ)。第三排图展示了轨道 z(ρ)，随后将其叠加到第四排图中的势 V(ρ,z) 上。各纵列中的图从左到右分别对应低动量 $p_{z0} = 0.05$ 的粒子（称为“准周期”）、中等动量 $p_{z0} = 0.20$ 的粒子（称为“超混沌”）和较高动量 $p_{z0} = 030$ 的粒子（称为“散射”）。这些记号的选取与下一节关于混沌理论的内容保持一致。

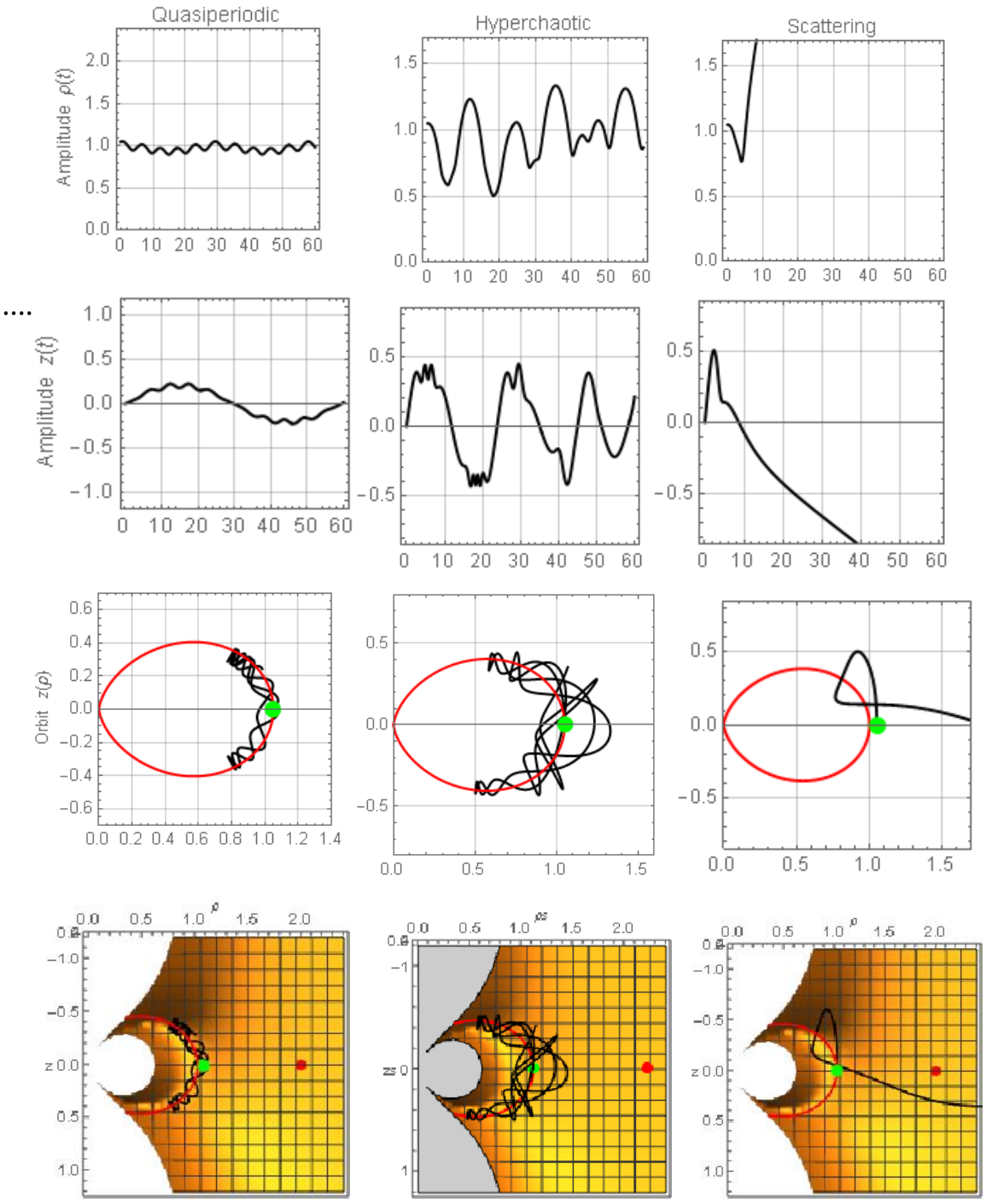


图 3. 带电粒子相空间变量的演化，初始条件选为 $\{z_0, \rho_0, p_{z0}, p_{\rho 0}\} = \{0, 1.05, p_{z0}, 0\}$。这些粒子以相对于红色场线为零的角度发射。水平排列的各行面板首先显示粒子的位置振幅 $\rho(t)$ 和 z(t)。随后通过参数图消去时间参数，得到电子轨道 $z(\rho)$，见第三行面板。接着，将该轨道叠加在图 2 右侧所示的有效势上，见第四行面板。粒子从 t = 0 处的绿色圆点出发，而红色圆点表示有效势鞍点的位置 $z = 0, \rho = 2$ 。

接下来，我们考察一个从原点附近的高场值处出发、随后沿下坡方向运动的粒子，如图4所示。

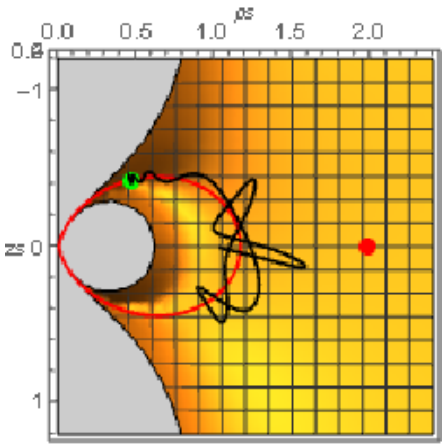


图4。斯托默问题中的下坡轨道，初始条件为 $\{z_0, \rho_0, p_{z0}, p_{\rho 0}\}$ ={0.37, 0.4, −0.2, 0}。

图5.左侧面板显示了被限制在两条磁力线之间的粒子轨道的最大宽度$\Delta\rho$ 。右侧面板预测了不同初始值ρ_0 对应的轨道宽度$\Delta\rho$ 会出现意想不到的跃变。

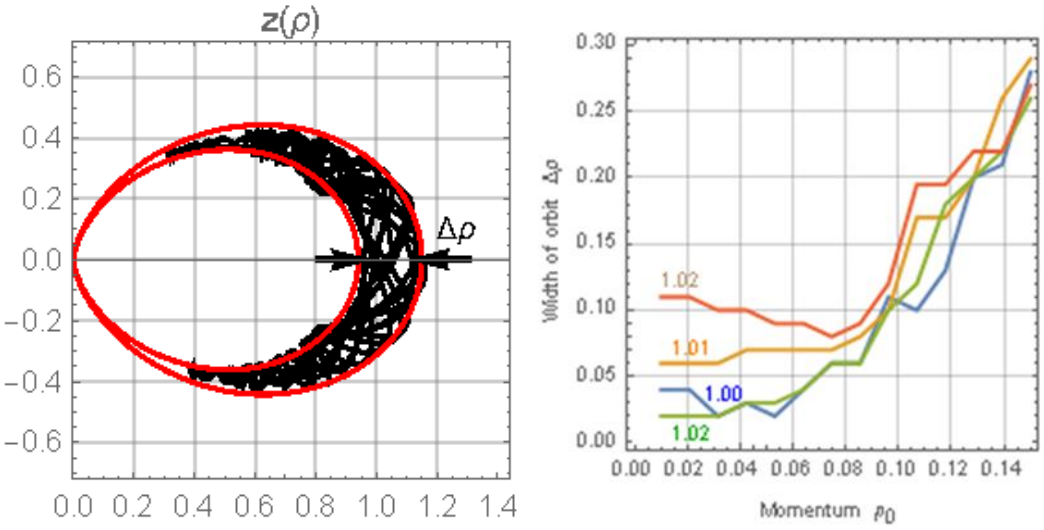


图5 左图：初始条件为 $\{z_0, \rho_0, p_{z0}, p_{\rho 0}\}$ = {0, 1.05, 0.21, 0} 的轨道宽度 $\Delta\rho$ 。右图：对于低动量，轨道宽度 $\Delta\rho$ 会随初始条件 ρ_0 =1.00，……，至 ρ_0 =1.02 发生显著变化。

接下来，我将概述混沌理论的主要特征。

III. 混沌理论与斯托默问题

众所周知，当初始条件的微小变化导致系统未来轨迹发生大幅分化时，动力系统就称为混沌系统。分离速率由所谓的李雅普诺夫指数Λ表征。对于哈密顿系统，李雅普诺夫指数之和必须为零，且必须成对出现、符号相反。对于一个 n 维动力系统，最多有 n 个正李雅普诺夫指数。

对于我们所研究的相空间为 $\{z, \rho, p_z, p_\rho\}$ 的二维系统，至多有两个正李雅普诺夫指数。如果最大李雅普诺夫指数为 $\Lambda = 0$，则粒子具有准周期轨道。如果存在一个正李雅普诺夫指数，则称粒子的轨道为混沌轨道；如果存在两个正李雅普诺夫指数，则称其为超混沌轨道。

受限粒子的运动类型主要取决于其能量。低能量粒子具有准周期轨道；中等能量粒子将以混沌方式运动，其李雅普诺夫指数有一个为正；高能量粒子则表现出超混沌运动，其李雅普诺夫指数有两个为正。

因此，混沌理论将斯托默势 V 中的轨道分为五种不同类型：

- 对于 $\Lambda = 0$，部分轨道稳定且为纯振荡（可积、规则），但其测度为零。- 所有其他满足 $\Lambda = 0$ 的轨道原则上都不稳定，但实际上是稳定的（例如地球绕月球和太阳运行的轨道，可视为一个三体问题），称为准周期轨道。- 对于 $\Lambda = 1$，不规则轨道称为混沌轨道。- 对于 $\Lambda = 2$，不规则轨道称为超混沌轨道。- 当能量参数为 $h > 1/32$ 时，粒子越过鞍点逃逸至无穷远，这种情况也称为散射态。

分隔 $\Lambda = 1$、2、3 各稳定性区域的边界线呈分形，而分隔 $\Lambda = 2$ 区域与散射区域的边界线则十分清晰，这是由于能量守恒。

在混沌理论出现之前，关于斯托默问题的论文大多局限于寻找规则轨道，因为人们认为其他轨道难以处理。混沌理论的出现起初并未对此状况带来太大改变；据我所知，直到千禧年前后，文献 {v1} 才发表了该问题一个特殊情形下的首个李雅普诺夫系数。

造成这一不足的原因，或许是李雅普诺夫系数的计算非常耗时（代价高昂），而且容易出错 [8]。

近期参考文献 [9] 中的图6展示了相空间 $\{0, \rho, p_z, 0\}$ 中正李雅普诺夫指数 Λ=0、1、2 的数量分布。红色、橙色和黄色分别对应 Λ= 0、1 和 2。彩色凸曲线表示能量，插图中以 h 标示。

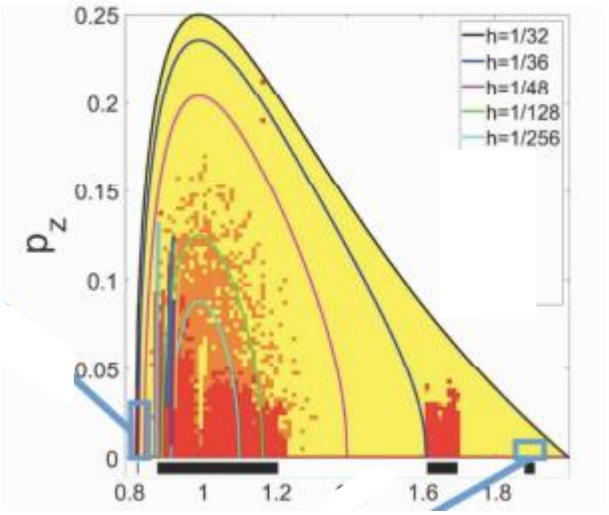


图6. 子午面内二维斯托默问题的相空间 $\{0, \rho, p_z, 0\}$ 中可能的正李雅普诺夫指数数量 n 的分布。红色表示 n = 0 （准周期轨道），橙色表示 n = 1 （混沌），黄色表示 n = 2（超混沌轨道）。彩色凸曲线表示能量等值线（插图中以 h 标示）。引自 Yuxin Xie 和 Siming Liu，《混沌》30，23108，（2020），参考文献 [9]。

目前仍有一个悬而未决的问题：斯托默所导致的谱变化（见公式（6））是否会引起β衰变能谱的变化，进而影响根据KATRIN实验[10], 得出的中微子质量限制，以及根据aSPECT实验[11]得出的电子-中微子关联。这将另行撰文研究。

参考文献

[1] J.D. Jackson，《经典电动力学》（J. Wiley，纽约，1999年）[2] C. Störmer，《点磁体场中的周期性电子轨道》，《天体物理学杂志》1，237（1930年）[3] A.J. Dragt，磁偶极场中的俘获轨道，《地球物理学评论：空间物理》3，112（1966年）（勘误，同上，4，112（1966年））[4] O. F. De Alcantara Bonfim、David J. Griffiths 和 Sasha Hinkley，带电粒子在磁偶极场中的混沌与超混沌运动，《国际分岔与混沌杂志》10，1，265（2000年）[5] V. V. Markellos、S. Klimopoulos 和 C. Goudas，磁偶极子子午面内的周期运动，II，《天体力学》17，233（1978年）[6] V. V. Markellos 和 A. A. Halioulias，关于磁偶极子子午面内周期运动的总体性，《天体物理与空间科学》51，177（1977年）[7] H. Saitoh、Z. Yoshida、Y. Yano、M. Nishiura、Y. Kawazura、J. Horn-Stanja 和 T. Sunn Pedersen，偶极磁场中高能正电子轨道的混沌及其在新型注入方案中的潜在应用，《物理评论E》94，043203（2016年）[8] Tancredi、A. Sánches 和 F. Roig，计算李雅普诺夫指数的方法比较，《天文杂志》121，1171（2001年）[9] Yuxin Xie 和 Siming Liu，从周期到准周期再到混沌：偶极磁场中被俘获带电粒子轨道的连续轨道谱，《混沌》30，23108（2020年）。[10] Max Aker 等，基于KATRIN 259天数据的中微子质量直接测量，《科学》288，180（2025年）[11] M. Beck、W. Heil、Ch. Schmidt、S Baeßler、F. Glück、G. Konrad 和 U. Schmidt，基于aSPECT实验的β-ν 角关联测量的再分析；；关于菲尔兹干涉的新约束，《物理评论快报》132，102501（2024年）