arXiv:2603.29556v1 [math.OA] 31 Mar 2026

C*代数中单位元的可分邻域

Mizanur Rahaman[1, 2] 和 Mateusz Wasilewski[3]

[1]瓦伦堡量子技术中心，查尔姆斯理工大学 [2]数学科学系，查尔姆斯理工大学
[3]波兰科学院数学研究所

2026年4月1日

摘要

我们研究双部 C*代数中可分元素的结构，重点关注单位元周围可分邻域的存在性与大小。尽管这一现象在有限维情形下已得到充分理解，但将其推广到一般 C*代数仍面临额外挑战。我们证明，确定此类邻域的问题可以归结为估计压缩正映射的完全有界范数。借助这一方法，我们能够根据代数的结构性质（尤其是其秩）刻画此类邻域的大小。由此，我们还解决了 Musat 和 Rørdam 最近提出的一个猜想。

1. 引言

理解可分性与纠缠的各个方面，是量子信息论的核心主题。在有限维系统中，研究可分态的结构仍是一个活跃的研究领域（[LMW24], [CĐ15]）。特别是，单位元（最大混合态）周围可分态的几何已得到深入研究，并在纠缠检测和鲁棒性问题中发挥着重要作用。然而，将这一现象从矩阵代数推广到一般的 C*-代数，既顺理成章，在技术上也颇为微妙。更具体地说，已知（[GB02]），在有限维情形下，双部单位元存在一个非平凡邻域，其中的元素全都是可分元素。换言之，单位元的充分小扰动不会产生纠缠。那么，任意 C*-代数情形又会如何?

本文着手研究这一问题：给定两个 C*-代数A 和B，我们探讨如何求得双部单位元$1_A \otimes 1_B$的可分元素的最优邻域。所谓“可分元素”，是指正元素$x \in A \otimes_{\min} B$的集合之闭包，其中的元素可分解为$x = \sum_i a_i \otimes b_i$，且$a_i \in A_+$、$b_i \in B_+$。单位元是正元素锥的自然参照点；在矩阵代数中，它是迹泛函的对偶，因此，以单位元为基础研究这一现象是合理的。

在矩阵代数中，可分性问题通常可以借助著名的 Horodecki 判据，改写为关于正映射的问题（[HHH96]）。利用这一联系，Gurvits 和 Burnum

（[GB02]）得到了元素 $1_{M_n(\mathbb{C})} \otimes 1_{M_n(\mathbb{C})}$ 的半径为 $1/n$ 的可分球（考虑算子范数时）。他们的结果还涵盖了采用不同 Schatten p-范数时半径的其他多种取值。我们主要关注算子范数，因为对我们而言，它是推广到任意 C*-代数情形的恰当方式。本研究的核心观察是，寻找可分邻域大小的问题，可以转化为计算正映射的完全有界范数（简称 cb 范数）。Ando 的工作（[And04]）隐含了这一事实；尽管他没有研究正映射的完全有界范数，但他的估计主要涉及完全有界范数。我们在关于矩阵代数情形的首个结果中（见定理 3.6）清楚地阐明了这一联系。

理解算子代数中的纠缠与可分性理论，历经了长期的努力，其研究由 Størmer（[Stø08]）、Arveson（[Arv09]）、Paulsen（[Pau]）及其他研究者（[PTT11, JKPP11]）开创。特别是，Størmer（[Stø09]）将 Horodecki 判据推广到了其中一个代数为核代数、另一个为 UHF 代数的情形。随后，Miller 和 Olkiewicz（[MO14]）将其推广到核 C* 代数。需要注意的是，这些推广旨在刻画“可分态”，而非 C*代数中的“可分元素”；若超出矩阵代数的情形，这两个概念之间存在细微差异。由于我们研究的是可分元素，因此在第 4 节中，我们为核 C*代数中的可分元素建立 Horodecki 判据。基于此，我们发现，求双部单位元 $1_A \otimes 1_B$ 的可分邻域这一问题，等价于计算从代数 A 到 B 的正映射的完全有界范数可以有多大。计算完全有界映射的完全有界范数，是算子代数中的一个基本问题，也是许多相关空间的重要概念的基础（[Pau, Smi83, Tom83]）。特别是，C*代数的秩，即不可约表示的最大维数，在决定作用于其上的线性映射的完全有界范数可以有多大方面，起着关键作用。我们的主要结果如下。

定理。 对于两个含幺 C^*-代数 A,B，设

$$\gamma(A,B) := \sup\{r \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - x \text{ is separable for all } x = x^* \text{ with } \|x\| \leqslant r\}.$$

若两者的秩均为无限，则 $\gamma(A,B) = 0$。
若至少一个的秩有限，则有

$$\frac{1}{\gamma(A,B)} = \eta(A,B) = \min(rank(A), rank(B)),$$

其中 $\eta(A,B) := \sup\{\|\Phi\|_{cb} : \Phi : A \to B$，压缩正映射$\}$。

请注意，上述定理的陈述和证明（见定理5.13）不仅涵盖了已知的有限维结果，还表明，当二部系统中的两个代数均为 $B(H)$，其中H 是可分无限维希尔伯特空间时，可分邻域问题没有非平凡解，因为其秩为无限。应将这一事实与 Clifton 和 Halvorson 的结果（[CH99]）进行比较；他们证明了，当二部系统的一个子系统是无限维时，纠缠态在迹范数拓扑中稠密。

尽管我们的主要关注点是可分邻域问题，但我们所发展的方法还有进一步的应用。具体而言，这些方法使我们能够解决 Magdalena Musat 和 Mikael Rørdam 在他们近期关于 C*-代数[MR25]中纠缠理论的研究中提出的一个猜想。

2. 预备知识

我们将研究 C^*-代数之间的（完全）正映射。

定义 2.1. 设 $\Phi : A \to B$ 是 C^*-代数之间的线性映射。如果对所有有 $a \in A$ 都有 $\Phi(a^*a) \geqslant 0$，则称其为正映射。如果对所有有 $n \in \mathbb{N}$，放大映射 $\Phi_n := Id_n \otimes \Phi : M_n \otimes A \to M_n \otimes B$ 都是正映射，则称其为完全正映射。

关于完全正映射的一个很好的综述可见于 [Pau]和 [BO08]。值得注意的是，如果定义域或陪域是交换的，那么正映射自动就是完全正映射。此外，如果定义域或陪域是矩阵代数，也有一些判断完全正性的实用准则。

引理 2.2([BO08，第 1 章：命题 5.11，命题 5.13])。设 A 是一个 C^*-代数。线性映射 $\Phi : M_n \to A$ 是完全正映射，当且仅当其 Choi矩阵 $Choi(A) := \sum_{i,\ j=1}^{n} e_{ij} \otimes \Phi(e^{ij}) \in M_n \otimes A$ 是正的。

线性映射 $\Psi : A \to M_n$ 是完全正的，当且仅当泛函 $\Psi : M_n \otimes A \to \mathbb{C}$ 是正的，其中 $\widehat{\Psi}(\sum_{i,j} e_{ij} \otimes a^{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} \Psi(a^{ij})^{ij}$。

另一个重要概念是完全有界映射，即映射 $\Phi : A \to B$，其放大 $\Phi_n : M_n(A) \to M_n(B)$ 一致有界，也就是说 $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\Phi_n\| < \infty$ 有界；这个量称为 Φ 的完全有界范数。与正性的情形类似，映入交换 C^* 代数的有界映射自动是完全有界的，但定义域为交换代数的有界映射并不一定自动是完全有界的。

我们主要通过考察二重对偶之间诱导的映射来研究 C^*-代数之间的映射；这些二重对偶就是它们的泛包络冯·诺伊曼代数。采用这种构造的原因在于，冯·诺伊曼代数之间的映射更容易研究；而在本文的具体情形中，我们主要需要处理特别良好的冯·诺伊曼代数。关于这一主题的大量信息可见于 [Tak79，第三章。2]；基础介绍也可见于 [BO08，第一章。4]。

我们有时会用到一种特定的逼近性质：核性适用于C^*-代数，而内射性适用于冯·诺伊曼代数。二者之间的一个重要关系是：C^*-代数是核的，当且仅当其二重对偶A^{**} 是内射的。关于这些性质的许多信息可参见书籍 [BO08]。

3. 矩阵代数情形

本节将阐明正映射完全有界范数的界与由可分元素构成的邻域大小之间的关系。

定义 3.1。若双部元 $X \in (M_n \otimes M_m)+$ 具有分解 $X = \sum_i P_i \otimes Q_i$，其中 $0 \leq P_i \in M_n$ 且 $0 \leq Q_i \in M_m$，则称其为可分的。这是 $M_n \otimes M_m$ 的一个闭凸子集，记作可分离元集合$(M_n \otimes M_m)$。

定义3.2。我们定义以下量：

- $\eta(Mn,\ Mm) :=$ 上确界$\{\|\Phi\|cb :\ \Phi :\ Mn \to Mm$，压缩正映射$\}$.
- $\eta u(Mn,Mm) := \sup\{\|\Phi\|cb :\ \Phi : Mn \to Mm$，保单位正映射$\}$。

- $\gamma(Mn, Mm) := \sup\{r \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{1}n \otimes \mathbb{1}m - x$ 对所有 $x = x^* with \|x\| \leqslant r\}$ 都是可分的。

首先注意，要使元素 $\mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_m - x$ 甚至是正的，我们必须有x 是一个压缩映射，因此，在定义 $\gamma(M_n,M_m)$时，我们所寻找的 r 必须满足性质 $r \leq 1$。量 $\gamma(M_n,M_m)$ 表示 $M_n \otimes M_m$ 中以单位元为中心、仅由可分元素构成的最大球的半径。为关联这些参数，我们需要回顾以下可分性判据，即*Horodecki* 判据。

命题 3.3 ([HHH96])。 设 $x \in (M_n \otimes M_m)_+$。那么，$x$ 是可分的，当且仅当对所有正映射 $\phi : M_n \to M_m$，都有$(Id \otimes \phi)(x) \geqslant 0$。这也等价于对所有正映射$\psi : M_m \to M_n$，都有$(\psi \otimes Id)(x) \geqslant 0$。只需考察保单位正映射 ϕ。

注记 3.4. 与第 4节讨论的无限维情形不同，这里的双部元 x 的两条支腿具有良好的对称性。原因在于，在无限维情形下，我们需要对其中一个 C^*-代数增加一项额外假设，从而打破这种对称性。

在陈述 $\gamma(M_n,M_m)$ 与 $\eta(M_n,M_m)$之间的关系之前，我们注意到，对于 $\gamma(M_n,M_m)$，论证中各部分起对称作用；而对于 $\eta(M_n, M_m)$，定义域与陪域之间存在一定的不对称性，这一点会体现在论证中。我们先处理定义域。

命题 3.5. 设 $r > 0$且 $n \in \mathbb{N}$。以下条件等价：

(i) $\gamma(M_n, M_m) \geqslant r$ *for all* $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $\eta(M_n, M_m) \leqslant \frac{1}{r}$ *for all* $m \in \mathbb{N}$;

(iii) $\eta_u(M_n, M_m) \leqslant \frac{1}{r}$ *for all* $m \in \mathbb{N}$.

证明。由 (i) 推出 (ii) 的证明可参照证明 [ADMH+24，定理 3.7],；该证明建立了由 (i) 推出 (iii)。事实上，设 $\phi : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_m$ 是一个正压缩映射，且设 $\mathrm{x} \in \mathrm{M}_n \otimes \mathrm{M}_k$ 是一个范数为 $\|\mathrm{x}\| \leqslant 1$ 的元。我们要证明 $\|\phi_k(\mathrm{x})\| \leqslant {}^{1}\mathrm{r}$。考虑元 $\mathrm{y} := \begin{bmatrix} \mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_k & \mathrm{rx} \\ \mathrm{rx}^* & \mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_k \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n \otimes \mathrm{M}_{2k}$。定义 $\tilde{\mathrm{y}} := -\begin{bmatrix} 0_n \otimes 0_k & -\mathrm{rx} \\ -\mathrm{rx}^* & 0_n \otimes 0_k \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n \otimes \mathrm{M}_{2k}$，则它是自伴的，且 $\|\tilde{\mathrm{y}}\| \leq \mathrm{r}$，因此根据假设，元 $\mathrm{y} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_k & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_k \end{bmatrix} - \tilde{\mathrm{y}}$ 在 $\mathrm{M}_n \otimes \mathrm{M}_{2k}$ 中可分。于是，根据 Horodecki 判据，$\phi_{2k}(\mathrm{y}) \geqslant 0$。但 $\phi_{2k}(\mathrm{y}) = \begin{bmatrix} \phi(\mathbb{1}_n) \otimes \mathbb{1}_k & \mathrm{r}\phi_k(\mathrm{x}) \\ \mathrm{r}(\phi_k(\mathrm{x}))^* & \phi(\mathbb{1}_n) \otimes \mathbb{1}_k \end{bmatrix}$。由于 ϕ 是压缩映射，$\|\phi(\mathbb{1}_n)\| \leqslant 1$，这意味着 $\phi(\mathbb{1}_n) \leqslant \mathbb{1}_m$，所以 $\phi_{2k}(\mathrm{y}) \leqslant \begin{bmatrix} \mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_k & \mathrm{r}\phi_k \\ \phi_k & \mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_k \end{bmatrix}$(x) r((x))。这样的矩阵是正的，当且仅当$\|\mathrm{r}\phi_k(\mathrm{x})\| \leqslant 1$，因此我们证明了$\|\phi_k\| \leqslant {}^{1}\mathrm{r}$；由于 k 是任意的，故$\|\phi\|_{cb} \leqslant {}^{1}\mathrm{r}$。

从 (ii) 到 (iii) 的推论显然，因此我们需要证明 (iii) 蕴含 (i)。设 $\mathrm{x} = \mathrm{x}^* \in \mathrm{M}_n \otimes \mathrm{M}_m$ 的范数为 r；我们要证明 $\mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_m - \mathrm{x}$ 是可分的。我们将采用霍罗德茨基判据（命题 3.3）。设 $\phi : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_m$ 是一个保幺正映射。我们有$\|\phi_m(\mathrm{x})\| \leqslant {}^{1}\mathrm{r}\|\mathrm{x}\| = 1$。由此可得 $\phi_m(\mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_m - \mathrm{x}) = \mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_m - \phi_m(\mathrm{x}) \geqslant 0$。由于这对所有保幺正映射都成立，我们 conclude that $\mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_m - \mathrm{x}$ 是可分的，因此 $\gamma(\mathrm{M}_n, \mathrm{M}_m) \geqslant \mathrm{r}$。□

现在可以给出这些量的精确值。

定理 3.6. *We have* $\gamma(M_n, M_m) = {}^{1}\!/_{\min(n,m)}$ *and* $\eta(M_n, M_m) = \eta_u(M_n, M_m) = \min(n,m)$.

证明。根据 [And04，推论 8.4]，我们得到 $\gamma(M_n, M_m) \geqslant {}^{1}\!/_{\min(n,m)}$。由前一个命题可知，$\eta(M_n, M_m) \leqslant n$（因为本命题中我们没有讨论对陪域的依赖）。不过，不等式 $\eta(M_n, M_m) \leqslant m$ 可由算子空间的一般理论推出，因为映射到 M_m 的完全有界范数在第 m 个矩阵层级上达到（参见 [Pau，练习 3.10、练习 3.11]）。另一方面，利用转置映射，我们可以轻易证明 $\eta(M_n, M_m) \geqslant \min(n, m)$，因此 $\eta(M_n, M_m) = \min(n, m)$。由此可得 $\gamma(M_n, M_m) = {}^{1}\!/_{\min(n,m)}$。事实上，若 $\gamma(M_n, M_m) > {}^{1}\!/_{\min(n,m)}$，则根据 γ的对称性，我们可以假设 $n \leqslant m$。于是 $\gamma(M_n, M_m) > {}^{1}\!/_{n}$；由命题 3.5 可知，这将推出 $\eta(M_n, M_m) < n$，从而产生矛盾。

η_u 的情形可以用同样的方法处理。 □

类似的论证在无限维情形中也会很有用。在本节余下部分，我们希望说明，对于一般的压缩映射，从 M_n到 M_m，无需任何正性假设，也可以得到类似的估计。我们将依赖 [And04]中关于完全正主控映射的结果，而不是调用可分邻域；这一部分无法推广到无限维情形。

定义 3.7 ([And04，第 5]节）。对于线性映射 $\Psi\colon M_m \to M_n$，若一对映射 Φ_1，$\Phi_2\colon M_m \to M_n$使得分块矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$$

为正，其中 B 是 Ψ 的 *Choi* 矩阵，而 A 和 C 分别是 Φ_1 和 Φ_2的 *Choi* 矩阵。

命题 3.8。设 $\Psi\colon M_n \to M_m$ 是一个线性映射。则 $\|\Psi\|_{cb} \leqslant$ 最小值$(m, n)\|\Psi\|$。

证明。根据 [And04，推论 6.7] Ψ 存在一个支配对(Φ_1, Φ_2)，使得 $\|\Phi_j\| \leqslant \min(n, m)\|\Psi\|$对每个 $j \in \{1, 2\}$都成立。因此，若A、C分别是 Φ_1、Φ_2 的 Choi 矩阵，且B表示 Ψ 的 Choi 矩阵，那么分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$ 是正的。

我们将验证，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$(\mathrm{Id}_k \otimes \Phi_1, \mathrm{Id}_k \otimes \Phi_2)$ 都是 $\mathrm{Id}_k \otimes \Psi$ 的支配对。这些映射从 $M_k \otimes M_n \simeq M_{nk}$ 到 $M_k \otimes M_m \simeq M_{mk}$。为了计算这类映射的 Choi 矩阵，我们将使用矩阵单位 $e^{ijrs} := e_{ij} \otimes f_{rs}$，其中 e^{ij} 是 M_k 中的标准矩阵单位，f_{rs} 是 M_n 中的标准矩阵单位。然后，$\mathrm{Id}_k \otimes \Psi$ 的 Choi 矩阵等于$\sum_{i,j,r,s}(\mathrm{Id}_k \otimes \Psi)(e^{ijrs}) \otimes e^{ijrs}$。我们可以进一步计算，得到 $\sum_{i,j,r,s}(e_{i,j} \otimes \Psi(f^{ij})) \otimes e_{ij} \otimes f_{rs}$；我们可以用同样的方法计算 $\mathrm{Id}_k \otimes \Phi_1$ 和 $\mathrm{Id}_k \otimes \Phi_2$ 的 Choi 矩阵。注意，有一个 $*$-同构 $M_m \otimes M_k \otimes M_n \otimes M_k \simeq M_m \otimes M_n \otimes M_k \otimes M_k$，将张量积的第二条和第三条腿互换。要验证支配条件，我们需要检查一个条目取自该代数的特定 2×2 矩阵的正性，而这显然是 $*$-同构下保持不变的性质。该同构将 $\mathrm{Id}_k \otimes \Psi$ 的 Choi矩阵映射为 $P_k \otimes B$，其中 B 是 Ψ 的 Choi矩阵，P_k 是 Id_k 的 Choi矩阵；当然，对 Φ_1 和 Φ_2也同样成立。因此，我们需要证明下列矩阵是正的

$$\begin{bmatrix} P_k \otimes A & P_k \otimes B \\ P_k \otimes B^* & P_k \otimes C \end{bmatrix},$$

它就是原矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$ 与 P_k的张量积，因此它是正的。

现在由 [And04，定理 5。2] 可知 $\|Id_k \otimes \Psi\| \leqslant \sqrt{\|Id_k \otimes \Phi_1\| \cdot \|Id_k \otimes \Phi_2\|}$，因此 $\|\Psi\|_{cb} \leqslant \sqrt{\|\Phi_1\|_{cb} \cdot \|\Phi_2\|_{cb}}$。但 Φ_j 是完全正的，所以 $\|\Phi_j\|_{cb} = \|\Phi_j\|$。我们得出

$$\|\Psi\|_{cb} \leqslant \sqrt{\|\Phi_1\| \cdot \|\Phi_2\|} \leqslant \min(n, m)\|\Psi\|.$$

□

现在我们可以陈述 [ADMH+24，定理 3。7] 针对一般线性映射的版本。

推论 3.9。 设 $\Phi : M_n \to V$ 是一个映入算子空间 V 的线性映射。则 $\|\Phi\|_{cb} \leqslant n\|\Phi\|$。

~证明。将 V 完全等距嵌入某个 B(H) 中，并考虑复合映射 Φ : ~ ~ ~ ~M$_n \to$ B(H)。只需证明 $\|\Phi\|_{cb} \leqslant$ n$\|\Phi\|$，因为 $\|\Phi\|_{cb} = \|\Phi\|_{cb}$ 且 $\|\Phi\| = \|\Phi\|$。设 P$_k$: H $\to$ H 是秩为 k 的正交投影，并假设序列 P$_k$ 递增~ ~到单位元。于是我们可以用 P$_k\Phi$P$_k$ （及其放大）逼近 Φ （及其放大）。但是 P$_k$B(H)P$_k \simeq$ M$_k$，因此由前一个命题可得 $\|$P$_k\Phi$P$_k\|_{cb} \leqslant$ n$\|$P$_k\Phi$P$_k\|$。由于~定义域是有限维的，这给出范数收敛，因此

~ $\|\Phi\|_{cb} = \|\Phi\|_{cb} \leqslant$ n$\|\Phi\|$ =n$\|\Phi\|$。

□

4. 冯·诺依曼代数的 Horodecki 判据

Horodecki 判据的一个重要推广见于 [MO14]。然而，他们的结果讨论的是可分态，而我们研究的是 C^*-代数中的可分元素；与有限维情形不同，这两种框架之间不能自动相互转换。幸运的是，他们的证明可以调整以适用于我们的情形，我们也将提供一些细节，方便读者理解。在此之前，我们先正式定义可分元素集合，因为我们需要区分 C^*-代数和冯·诺依曼代数这两种情形。

定义 4.1。 设 A 和 B 为 C^*-代数。我们用 $Sep(A \otimes B)$ 表示 $A \otimes B$ 中可分元素的集合，即形如 $\sum_i a_i \otimes b_i$ 的有限和的闭包，其中 a_i 和 b_i 均为正元。

对于冯·诺伊曼代数 M 和 N，我们用记号 Sep_σ（$M \bar{\otimes} N$）表示一个类似的集合，只不过这次取弱*拓扑下的闭包；该集合中的元素称为可分离的，其他正元素则称为纠缠的。

注 4.2。 在定义 Sep（$A \otimes B$）时，我们也可以取弱拓扑下的闭包，因为该集合是凸集，而根据哈恩–巴拿赫分离定理，凸集在弱拓扑和范数拓扑下的闭包相同。这一点稍后会很有用，因为 A 上的弱拓扑等于由 A^{**} 的弱* 拓扑所诱导的拓扑。

本节的主要目标 是以下定理，它与 [MO14] 的主要结果类似 .

定理 4.3。 设 $x \in M \bar{\otimes} N$，其中 M 是内射冯·诺伊曼代数。那么，$x \in Sep_\sigma$（$M \bar{\otimes} N$）当且仅当，对于所有正的、正规、有限秩映射 $\phi : N \to M$，（$Id \otimes \phi$）（x）$\in M \bar{\otimes} M$ 都是正元素。

注意到其中一个方向是显然的，因此我们只需证明：如果对张量的一边应用正映射后仍保持正性，那么该元素必定是可分的。正如 [MO14], 的情形 $M = M_d$ 一样，关键的第一步是先处理这一情形，然后我们将利用冯·诺依曼代数的结构性结果来得出一般情形。

引理 4.4。 设 $x \in M_d \otimes N$。则 $x \in$ 可分离元集合$\sigma(M_d \otimes N)$ 当且仅当 $(Id \otimes \phi)(x) \in M_d \otimes M_d$ 对于所有正规正映射 $\phi: N \to M_d$都是正的。

证明。我们将使用映射 $\phi : \mathrm{N} \to \mathrm{M}_d$ 与 $\mathrm{M}_d \otimes \mathrm{N}$ 上的泛函 $\widehat{\phi}$ 之间的对应关系，其定义为 $\widehat{\phi}(\sum_i \mathrm{a}_i \otimes \mathrm{b}_i) := \mathrm{Tr}(\sum_i \mathrm{a}_i^T \phi(\mathrm{b}_i))$（见引理 2.2）。在对偶情形下，这取代了 Choi- Jamiołkowski 同构的用法。显然，$\widehat{\phi}$ 在可分元素上为正，当且仅当 ϕ 是正映射。由于可分元素集合是弱* 闭锥，我们可以用一个泛函将其与任意纠缠元素分离。这意味着，元素 $\mathrm{x} \in \mathrm{M}_d \otimes \mathrm{N}$ 是可分的，当且仅当对所有正映射 $\phi : \mathrm{N} \to \mathrm{M}_d$，都有 $\widehat{\phi}(\mathrm{x}) \geqslant 0$。

令 $P = \sum_{k,l} e_{kl} \otimes e_{kl} \in M_d \otimes M_d$；它是一个正算子，因为它是一个（秩一）投影的倍数。令 $x = \sum_i a_i \otimes b_i$，并假设 $(Id \otimes \phi)(x) \geqslant 0$。那么 $(Tr \otimes Tr)(P(Id \otimes \phi)(x)) \geqslant 0$。我们可以将该值显式计算为

$$\sum_{i,k,l} Tr(e_{kl} a_i) Tr(e_{kl} \phi(b_i)) = \sum_{i,k,l} (a_i^T)_{kl} (\phi(b_i))_{lk} = Tr(\sum_i a_i^T \phi(b_i)) = \widehat{\phi}(x) \geqslant 0.$$

根据我们之前的讨论，可知x 必须是可分的。 □

引理 4.5. 设 $M := \bigoplus i\, M_i$。那么，若且唯若其分量 $x_i \in M_i \otimes N$ 均可分，$x \in M \otimes N$ 才可分。 —

证明。 若各分量x_i 均可分，则x 可分。另一方面，若x 可分，则$x_i = z_i x$ 可分，其中z_i 是对应于直和项M_i的中心投影。 □

推论 4.6. 定理 4.3对于有限维冯·诺伊曼代数成立。此外，分别处理每一种类型即可。

证明。 任意有限维冯·诺伊曼代数都是矩阵代数的直和，因此引理4.4 适用。任意冯·诺伊曼代数都可分解为固定类型的冯·诺伊曼代数的直和，因此可以分别处理每一种类型。

□

接下来的步骤是冯·诺伊曼代数理论中常用的标准化简。

引理 4.7. 设 M 是有限、内射且 σ-有限的冯·诺伊曼代数。当且仅当对所有正的正规有限秩映射 $\phi: N \to M$，$(Id \otimes \phi)(x) \in \overline{M \otimes M}$ 都是正元时，$x \in$ 属于可分离元集合 $\sigma(M \otimes N)$。

证明。 由于M 是有限且 σ-有限的，因此存在忠实正规迹态 τ。由此可知，任意冯·诺依曼子代数 $M' \subset M$ 都存在正规忠实条件期望 $\mathbb{E}_{M'} : M \to M'$。由于$M$ 是内射的，它是有限维子代数M_k 及相应条件期望 $\mathbb{E}_k$的递增并。

现在设$x \in M \otimes N$满足：对所有正的正规有限秩映射 $\phi : \overline{N \to M}$，$(Id \otimes \phi)(x) \in M \otimes M$ 都是正元。现在定义$x_k := (\mathbb{E}_k \otimes Id(x)$，于是$x_k \to x$ 在弱* 意义下，当 $\mathbb{E}_k$按点弱* 拓扑收敛到单位元时成立。现在注意到

$$(Id \otimes \phi)(x_k) = (Id \otimes \phi)(\mathbb{E}_k \otimes Id)(x) = (\mathbb{E}_k \otimes Id)(Id \otimes \phi)(x) \geq 0,$$

其中我们用到了 $(Id \otimes \phi)(x) \geq 0$ 以及 E_k 是完全正映射这一事实。由引理 4.4可知，x_k 对所有 $k \in \mathbb{N}$都是可分的。因此，x 也是可分的，因为可分元素集合是弱* 闭的。

□

引理 4.8。 定理 4.3 在 M 为半有限、内射且 σ-有限时成立。

证明。 可以考虑一个递增的投影族 p_k，其收敛到单位元，并且角代数 p_kMp_k 是有限且 σ-有限的。在 p_kMp_k 中，可以使用前述引理，再利用 p_k 的收敛性，证明同样的结论在 M中成立。

□

Lemma 4.9。 定理 4.3 在 M 是一个内射的 σ-有限 I 型冯·诺伊曼代数时成立 *II.*

证明。 可以采用与 [MO14中引理 3 相同的证明。7], 利用连续核心是半有限这一事实即可。

□

定理4.3的证明。 由上述所有引理可知，该结果对 σ-有限冯·诺伊曼代数成立，因为我们已经处理了 III 型情形和半有限情形，而每个冯·诺伊曼代数都可分解为这两种情形的直和。最后一步是去掉 σ- 有限这一假设。这可以仿照引理 4.8 来完成，因为在任意冯 · 诺伊曼代数 M 中，都可以找到一个递增的 σ-有限投影族，使其收敛到单位元。

□

推论 4.10。 设 A 和 B 是 C^*-代数，并假设 A 是核的。则 $x \in$ 属于可分离元集合$(A \otimes B)$ 当且仅当 $(Id \otimes \phi)(x) \geqslant 0$ 对所有有限秩正映射 $\phi : B \to A$ 都成立。

证明。可以完全按照 [MO14，定理 4.1] 的方法证明（另见命题 5.3 和命题 5.2 的证明）。基本思路是，若 x $\in$ 属于可分离元集合(A $\otimes$ B)，则 x 在 $A^{**} \otimes B^{**}$ 中是可分的。由于 A 是核的，$M := A^{**}$ 是内射的。现在我们可以使用定理 4.3，以及任意正映射 $\Phi : B \to A$ 都在二重对偶上诱导出一个正规正映射这一事实。

□

我们还将证明，只需考虑保单位正映射即可。

引理 4.11。 设 $x \in M \otimes N$，其中 M 是内射冯·诺伊曼代数。若对所有正规、保单位、有限秩正映射 $\phi : N \to M$，都有$(Id \otimes \phi)((x)) \geqslant 0$，则 x 是可分离的。

证明。我们先证明，只需考虑满足 $\phi(\mathbb{1}_N)$ 可逆的映射 ϕ。事实上，设 $\varphi : N \to \mathbb{C}$ 是任意一个态。于是可以定义 $\phi_\varepsilon(n) := \phi(n) + \varepsilon\varphi(n)\mathbb{1}_M$。由此可得$\phi_\varepsilon(\mathbb{1}_N) \geqslant \varepsilon\mathbb{1}_M$，所以它是可逆的。由收敛性 $\lim_{\varepsilon\to 0}\phi_\varepsilon = \phi$ 可知，如果对所有 $\varepsilon > 0$都有 $(Id \otimes \phi_\varepsilon)(x) \geqslant 0$，那么 $(Id \otimes \phi)(x) \geqslant 0$。

若 $\phi(\mathbb{1}_N)$ 可逆，则可以考虑保单位正映射 $\widetilde{\phi}(n) := \phi(\mathbb{1}_N)^{-\frac{1}{2}}\phi(n)\phi(\mathbb{1}_N)^{-\frac{1}{2}}$。显然，$(Id \otimes \phi)(x) \geqslant 0$ 当且仅当$(Id \otimes \widetilde{\phi})(x) \geqslant 0$，因为 $\widetilde{\phi}$ 与 ϕ 相差一个完全正映射，且其逆映射也是完全正映射。

□

5. C**-代数情形

本节将探讨如何将第3 节的结果推广到无限维情形，灵感来自近期论文 [MR25]。我们将从定义 3.2的类似表述开始，其中需要区分C^*-代数和冯·诺依曼代数的情形。

定义5.1。设 A 和 B 为 C^{**}-代数。定义

- $\eta(A,B) := \sup\{\|\Phi\|_{cb} : \Phi : A \to B$，压缩正映射$\}$。
- $\eta_u(A,B) := \sup\{\|\Phi\|_{cb} : \Phi : A \to B$, 保单位正映射$\}$。

- $\gamma(A,B) := \sup\{r \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{1}A \otimes \mathbb{1}B - x$ 对所有 x 均可分离 $= x^*$ 其中 $\|x\| \leqslant r\}$。

对于冯·诺伊曼代数 M 和 N，我们定义

- $\eta^\sigma(M,N)$: = 上确界$\{\|\Phi\| cb :\ \Phi :\ M \to N$，正规、压缩、正映射$\}$。
- $\eta^\sigma u(M,N)$: = 上确界$\{\|\Phi\| cb :\ \Phi :\ M \to N$，正规、保单位、正映射$\}$。
- $\gamma^\sigma(M,N)$: = 上确界$\{r \in \mathbb{R}_+ :\ \mathbb{1}M \otimes \mathbb{1}N -$ 对于所有 x，x 可分 $= x^*$ 且 $\|x\| \leqslant r\}$。

我们将首先通过建立C^*-代数及其二重对偶的 η 和 γ 参数之间的对应关系，展开分析。

命题 5.2。我们有 $\gamma(A,B) = \gamma^\sigma(A^{**},B^{**})$。

证明。设 $\gamma(A, B) = r$，即对于 $A \otimes B$ 中任意范数不超过 r 的厄米元素 $H \in$，元素 $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - H$ 都是可分的。现在设 $K = K^* \in A^{**} \otimes B^{**}$ 的范数不超过 r。根据卡普兰斯基稠密性定理，我们可以用来自 $A \otimes B$、范数不超过 r 的厄米元素 K_i 在强算子拓扑下逼近它。根据我们的假设，元素 $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - K_i$ 在 $A \otimes B$ 中是可分的。由于它们强收敛，特别是弱 * 收敛于 $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - K \in A^{**} \otimes B^{**}$，因此这些元素也是可分的。由此可得 $\gamma(A^{**}, B^{**}) \geqslant r = \gamma(A, B)$。

现在假设 $\gamma(A^{**}, B^{**}) = r$，并令 $H = H^* \in A \otimes B$ 为范数不超过 r 的厄米元素。由此可知，元素 $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - H$ 在 $A^{**} \otimes B^{**}$ 中是可分的。因此，$\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - H$ 是形如 $\sum_i a_i \otimes b_i$ 的有限和的弱 *-极限，其中 $0 \leqslant a_i \in A^{**}$ 且 $0 \leqslant b_i \in B^{**}$。我们可以利用 Kaplansky 定理，分别用 A 和 B 中的正元素逼近每个 a_i 和 b_i。因此，$\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - H$ 可以在 $A^{**} \otimes B^{**}$ 的弱* 拓扑下，由形如 $\sum_i P_i \otimes Q_i$ 的有限和逼近，其中 $0 \leqslant P_i \in A$ 且 $0 \leqslant Q_i \in B$。但这意味着这些有限和在 $A \otimes B$ 的弱拓扑下收敛到 $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - H$。正如前面提到的，可分元素锥是闭凸的，因此也是弱闭的，由此可得元素 $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - H$ 是可分的。于是 $\gamma(A, B) \geqslant r = \gamma(A^{**}, B^{**})$，证明得证。

□

在附加假设下，我们现在将为 $\eta(A,B)$ 得到类似的结果。

命题 5.3. 假设 B 是核 C^*-代数。那么 $\eta(A,B) = \eta^\sigma(A^{**},B^{**})$。

证明。设 $\phi : A \to B$ 是一个正映射。我们总可以考虑双对偶映射 $\phi^{**} : A^{**} \to B^{**}$，它与 ϕ 具有相同的范数和完全有界范数。因此 $\eta(A,B) \leqslant \eta^\sigma(A^{**},B^{**})$。

反过来，问题在于并非所有从 A^{**} 到 B^{**} 的正规映射都由从 A 到 B 的映射产生。设 $\psi : A^{**} \to B^{**}$ 是一个正规正映射。利用卡普兰斯基稠密性定理，我们可以考虑限制映射$\psi_{|A}$，它与 ψ 具有相同的范数和完全有界范数。我们先验证范数的情形；完全有界范数的证明也相同，因为我们可以对放大采用同样的论证。事实上，假设对于所有压缩映射 $x \in A$，都有 $\|\psi(x)\| \leqslant C$。对于压缩映射 $x \in A^{**}$，我们可以找到一个收敛到 x 的压缩映射网 $x_i \in A$，且特别是在弱*-拓扑下收敛。因此，$\lim_i \psi(x_i) = \psi(x)$ 在弱* 拓扑下收敛。由于我们有$\|\psi(x_i)\| \leqslant C$，且球是弱* 闭的，因此 $\|\psi(x)\| \leqslant C$，从而 $\|\psi\| \leqslant \|\psi_{|A|}\|$；另一个不等式显然成立。

现在我们有映射 $\psi_{|A} : A \to B^{**}$，接下来需要构造取值于 B 的映射。这里我们将利用核性。事实上，B 的核性意味着 B^{**} 是内射的，因此我们可以用有限秩正规完全正映射逼近恒等映射。我们还将用到这一事实

：核性蕴含局部自反性（见 [BO08，第 9 章：定理 3。1]）。回顾一下，若对任意有限维算子子系统C^*-代数B，$E \subset B^{**}$ 都存在一网收缩完全正映射 $\varphi_i : E \to B$，且该映射在逐点弱Id_E 拓扑下收敛于恒等映射*,

现在令 $\mathrm{v} : \mathrm{B}^{**} \to \mathrm{B}^{**}$ 为有限秩正规完全正映射。其像是有限维自伴子空间 B^{**}，因此是一个算子系统（必要时可添加单位元）。根据局部自反性，我们可以找到一个从 Im(v) 到 B 的压缩完全正映射，它在逐点弱* 拓扑下逼近 Im(v) 上的恒等映射。由此可构造一个有限秩正规完全正压缩映射网 $\mathrm{E}_i : \mathrm{B}^{**} \to \mathrm{B} \subset \mathrm{B}^{**}$，它在逐点弱* 拓扑下收敛到恒等映射。我们有$\|\mathrm{E}_i \circ \psi_{|A}\|_{cb} \leqslant \eta(A, B)\|\mathrm{E}_i \circ \psi_{|A}\| \leqslant \eta$(A, B)$\|\psi_{|A}\| = \eta$(A, B)$\|\psi\|$。对于每个放大，我们都可以证明 $\|\psi_n\| = \|(\psi_{|A})_n\| \leqslant \limsup_i \|(\mathrm{E}_i \circ \psi_{|A})_n\| \leqslant \eta$(A, B)$\|\psi\|$，由此可得$\|\psi\|_{cb} \leqslant \eta$(A, B)$\|\psi\|$，进而 $\eta(\mathrm{A}^{**}, \mathrm{B}^{**}) \leqslant \eta$(A, B)。

□

注 5.4. 利用 *Choi* 矩阵，可以用另一种方法构造从 B^{**} 到 B 的映射。事实上，B^{**} 的内射性也等价于存在近似分解 $\phi_\lambda : B^{**} \to M_{n_\lambda}$和 $\psi_\lambda : M_{n_\lambda} \to B^{**}$，使得 $\psi_\lambda \circ \phi_\lambda$ 在点弱* 拓扑下收敛到 $Id_{B^{**}}$。由于 ψ_λ 的定义域是矩阵代数，我们可以利用引理 2.2 将其视为 $M_{n_\lambda}(B^{**})$中的一个元素。根据卡普兰斯基稠密性定理，该元素可以由 $M_{n_\lambda}(B)$中的正元素逼近，也就是说，可以由从 M_{n_λ} 到 B 的完全正映射逼近。与 ϕ_λ复合后，我们得到从 B^{**} 到 $B \subset B^{**}$的映射；这些映射在点弱* 拓扑下于 B^{**} 上收敛到单位映射。

与次齐次代数的秩的关系

MR 的作者 [MR25] 指出，我们在此研究的问题与次齐次 C^*-代数之间存在联系；事实证明，恰好是这一类 C^*-代数中会出现非平凡的现象。

定义 5.5。 设 A 是一个 C^*-代数。我们定义秩$(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 为满足以下条件的所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的上确界：A 存在一个维数为 n 的不可约表示。若一个 C^*-代数是次齐次代数，则称其为次齐次代数，其秩为 $rank(A) < \infty$。

很容易描述次齐次C^*-代数的二重对偶，这使我们能够运用冯·诺依曼代数技巧。

事实 5.6。 C^*-代数 A 是秩为 n 的次齐次代数，当且仅当其二重对偶具有如下形式：$\bigoplus rk=1 M_{n_k} \otimes L^\infty(X_k)$，其中 $n_r = n$。

证明。 这是由以下事实得出的：如果二重对偶 A^{**} 只有有限维不可约表示，那么它必定是 I 型的，因此该分解可由 I 型冯·诺依曼代数的一般性质推出。另请参见 [Bla06，命题 IV.1.4。6] 或 [BO08，第 2 章：命题 7。7]。

□

为了联系次齐次 C^*-代数与矩阵代数，我们将使用 Smith 的结果（参见[Smi83，引理 2。7]）。或者，也可以使用 Glimm 引理，正如 [MR25，引理 3。9]）中所做的那样。

引理 5.7 ([Smi83, 引理 2。7])。 设 A 是一个 C^*-代数，且存在维数至少为 n 的不可约表示。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在保单位完全正映射 $\rho : M_n \to A$ 到以及$\sigma : A \to M_n$，使得 $\|\sigma \circ \rho - Id\|_{cb} < \varepsilon$

推论 5.8。 对于任意 n，我们有 $\eta(A,\ B)\ \geqslant \eta(A,\ M_n)$，其中 $rank(B)$。

证明。 根据前述引理，对于任意 $n\ \in \mathbb{N}$，我们可以找到从 M_n 到 B 的保单位完全正、近乎完全等距嵌入，由此即可得出结论。 □

我们首先将关于可分邻域的结果推广到与交换代数的张量积。

引理 5.9。 设 $T\ = T^* \in (M_n \otimes L^\infty(X))\ \otimes M_d$ 满足 $\|T\| \leqslant\ \ ^1\!/_{\min(d,n)}$。则 $(1_n \otimes \mathbb{1}_X)\ \otimes 1_d - T$ 是一个可分元素。

因此，对于任意 C^*-代数 B 以及任意正压缩映射 $\Phi\colon\ M_n \otimes L^\infty(X)\ \to B$，我们有 $||\Phi||_{cb} \leq n$。特别地，这对保单位正映射也成立。

此外，将 $L^\infty(X)$ 替换为 $C(X)$ 后，上述所有断言仍然成立。

证明。我们将张量积 $(\mathrm{M}_n \otimes \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X})) \otimes \mathrm{M}_d$ 视为 X 上取值于 $\mathrm{M}_n \otimes \mathrm{M}_d$ 的可测函数。根据 [And04, 推论 8.4]，与元素 $(1_n \otimes \mathbb{1}_X)\ \otimes 1_d - \mathrm{T}$ 对应的函数几乎处处取值于可分元素。设 f 是这样的函数。于是我们可以用简单函数（即取有限多个值的函数）逼近它。由于可分元素锥是闭凸的，这些简单函数的取值本身都是可分元素，因此可以用有限和逼近，由此可知，f 可以用形如 $\sum_i \mathbb{1}_{A_i} \otimes \mathrm{P}_{ij} \otimes \mathrm{Q}^{ij}$ 的表达式逼近，其中 P^{ij} 和 Q^{ij} 均为正。显然，这个表达式是可分的；因此 f 本身也是可分的。对于 C(X) 的情形，论证类似；我们将代数 $(\mathrm{M}_n \otimes \mathrm{C(X)})\ \otimes \mathrm{M}_d$ 视为 X 上取值于 $\mathrm{M}_n \otimes \mathrm{M}_d$ 的连续函数。安藤结果表明，与元素 $(1_n \otimes \mathbb{1}_X)\ \otimes 1_d - \mathrm{T}$ 对应的函数 $\mathrm{f}: \mathrm{X}\ \to \mathrm{M}_n \otimes \mathrm{M}_d$ 逐点可分。但由于可分元素集合是闭的，可知 f 本身也是可分的；在这种情况下，我们使用单位分解，而非通过简单函数逼近。

第二个断言的证明与命题3.5类似。事实上，设 $r\ \in \mathbb{N}$，并设 $x\ \in (M_n \otimes L^\infty(X)) \otimes M_r$ 的范数为 1。我们可以构造矩阵

$$y := \begin{bmatrix} (\mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_X) \otimes \mathbb{1}_r & \frac{1}{n}x \\ \frac{1}{n}x^* & (\mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_X) \otimes \mathbb{1}_r \end{bmatrix} \in (M_n \otimes L^\infty(X)) \otimes M_{2r},$$

它到该代数中单位元的距离不超过 $^1\!/_n$。由此可知 y 是可分的，因此我们可以完全按照命题3.5的证明完成证明。对于 $C(X)$ 的情形，证明类似。

□

推论 5.10。 设 A 是一个次齐次 C^*-代数。那么 $\gamma(A,M_d)\ \geqslant\ \ ^1\!/_{秩(A\ \ \ \

证明。首先注意，只需证明 $\sup_B \eta(A, B) \geqslant \text{rank}(A)$ snd $\eta^\sigma(A^{**}, B^{**}) \leqslant \text{rank}(A)$。为此，只需对矩阵代数取上确界。事实上，我们有$\eta(A, M_d) = \eta^\sigma(A^{**}, M_d)$。由于 A^{**} 包含 $M^{rank(A)}$ 作为一个直和项（这里 M_∞ 表示 $B(\ell^2)$），我们可以利用转置映射得到 $\eta(A, M_d) = \eta^\sigma(A^{**}, M_d) \geqslant \min($秩$(A), d)$。令 d 趋于无穷即可证明该结论的第一部分。

对于第二部分，若 $\text{rank}(A) = \infty$，则无需证明。否则，我们使用引理 5.9。事实上，由该引理可知，从 $M_n \otimes L^\infty(X)$ 到任意 C^*-代数的正压缩映射，其完全有界范数不超过 n。若 $n = \text{rank}(A) < \infty$，则 A^{**} 含有 $M_n \otimes L^\infty(X)$ 的一个直和项，因此对任意正映射 $\phi : A^{**} \to B^{**}$，我们有 $||\Phi||_{cb} \leq n$。由此足以得出 $\eta(A, B) \leqslant \eta^\sigma(A^{**}, B^{**}) \leqslant \text{rank}(A)$。 □

命题 5.12。 我们有 $\eta(A, B) = \min($秩$(A),$ 秩$(B))$。

证明。由前述引理可知， $\eta(A, B) \leqslant \text{rank}(A)$，而 $\eta(A, B) \leqslant \text{rank}(B)$ 这一结论众所周知，但我们仍将概述其证明。若 $\text{rank}(B) = \infty$，则该命题显然成立；若 B 是次齐次的，则由 Tom83 定理 2.1] 可知，所有到 B 的有界映射都是完全有界的。~由于 B 嵌入 $B := M_{rank(B)} \otimes C(K)$，只需估计到 B 的正压缩映射的完全有界范数。但 B 由矩阵值函数构成，因此通过与点求值复合，可将问题归结为 $M^{rank(B)}$的情形。 [Smi83 定理 2.10] 证明了在此情形下$\|\phi\|_{cb} = \|\phi_{rank(B)}\| \leqslant \text{rank}(B)\|\phi\|$；最后一个估计是众所周知的，见 Pau 练习 3.10、练习 3.11]。由此可得 $\eta(A, B) \leqslant \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$。

为了得到另一个估计，注意到由推论 5.8 可知，对于任意满足 $n \leqslant \text{rank}(B)$ 的自然数 n，有 $\eta(A, B) \geqslant \eta(A, M_n)$。由于 M_n 是核的，我们有 $\eta(A, M_n) = \eta^\sigma(A^{**}, M_n)$。现在可以使用转置映射得出，对于任意满足 $n \leqslant \text{rank}(B)$ 的自然数 n，有 $\eta(A, B) \geqslant \min(\text{rank}(A), n)$，也就是说 $\eta(A, B) \geqslant \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$。

□

现在我们可以陈述并证明主要结果。

定理 5.13. 我们有 $\eta(A,B) =$最小值$(秩(A), 秩(B)) = \gamma^{\frac{1}{2}}(A,B)$。

证明。由前一个命题可知， $\eta(A, B) = \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$，因此我们只需处理 $\gamma(A, B)$ 的情形。如果 A 和 B 都不是次齐次的，我们可以利用 $\gamma(A, B) = \gamma^\sigma(A^{**}, B^{**})$，并注意到 A^{**} 和 B^{**} 都包含一个与 $B(\ell^2)$ 同构的直和项，从而得出 $\gamma(A, B) = 0$；这由定理 3.6 得出。

现在我们可以假设A 或B 是次齐次的。由于 $\gamma(A,B)$ 关于变量是对称的，因此不失一般性，我们可以假设A 是次齐次的。我们将证明$\gamma(A, B) = \frac{1}{2}\min(秩(A),秩(B))$。

设 $x = x^* \in A \otimes B$ 的范数至多为 $\frac{1}{2}\min(\text{rank}(A),\text{rank}(B))$。我们将证明 $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - x$ 是可分的。由于 A 是核代数，我们可以使用 Horodecki 判据（推论 4.10）证明： $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - x$ 可分，当且仅当它在对 B 到 A 的任意保单位正映射作用后仍为正。因此我们考察 $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - (\text{Id} \otimes \varphi)(x)$。由于 $\eta(A, B) = \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$，可得 $\|(\text{Id} \otimes \varphi)(x)\| \leqslant \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))\|x\| = 1$，因此 $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - (\text{Id} \otimes \varphi)(x) \geqslant 0$。由此可 $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B - x$ 可分，因此 $\gamma(A, B) \geqslant \frac{1}{2}\min(\text{rank}(A),\text{rank}(B))$。为证明另一侧的不等式，注意到 $\gamma(A, B) = \gamma^\sigma(A^{**}, B^{**})$，且二重对偶分别包含与 $M^{rank(A)}$ 和 $M^{rank(B)}$ 同构的直和项，因此我们可以利用矩阵的相关结果（定理 3.6）得出$\gamma(A, B) \leqslant \frac{1}{2}\min(\text{rank}(A),\text{rank}(B))$

□

推论 5.14。 对于任意 C^*-代数 A，以及任意 $n \in \mathbf{N}$，C^*-代数 $M_n(A) \cong M_n \otimes A$ 中的单位元 $1_n \otimes 1_A$ 都有半径为 $1/n$ 的可分邻域。

此外，C^*-代数 A 是次齐次的，当且仅当对于任意 C^*-代数 B，在 $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B$ 周围都存在一个由可分元素组成的非平凡球。事实上，只需取一个无限秩的 C^*-代数 B 即可，例如紧算子的单位化或 *UHF* 代数 M_{2^∞}。

证明。由定理可轻易得出，因为 M_n 的秩为 n。

对于第二部分，注意到 $\gamma(A, B) = \frac{1}{\min(\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B))}$，这意味着若 $\mathrm{rank}(A) = \infty$，则我们可以轻易找到一个 C^*-代数 B，使得 $\gamma(A, B) = 0$。另一方面，若 $\mathrm{rank}(A) < \infty$，则$\gamma(A, B) \geqslant \frac{1}{\mathrm{rank}(A)}$。 □

6. Musat-Rørdam 在 [MR25] 中提出的一个问题

本节将回答 Musat-Rørdam 在其近期关于 C^* 代数中纠缠理论的文章里提出的一个问题。

令 $\kappa(A,B) = \sup\{\|\rho\|_{max} : \rho \in S(A) \otimes^* S(B)\}$，其中 $S(A) \otimes^* S(B)$ 是代数张量积 $A \odot B$ 上的泛函集合ρ，满足 $\rho(\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B) = 1$，且 ρ 在可分元素上为正。我们希望证明以下结论

命题 6.1。 我们有 $\kappa(A, B) = \min(秩(A),秩(B))$。

证明。 根据 [MR25，命题 3.14 (iii)] 若 A 和 B 都不是次齐次的，则该量为无穷大。

因此，我们不妨假设其中一个是次齐次的。 [MR25的命题 3.4、定理 3.15] 中已经指出，参数 $\kappa(A,B)$ 与 $\eta(A,B)$相关，至少对矩阵代数的情形如此。我们将证明在当前设定下这一结论仍然成立，并根据关于 $\eta(A,B)$的结果得出结论。

不失一般性，我们可以假设 A 是次齐次的，因为 $\kappa(A, B) = \kappa(B, A)$。注意，$A \otimes B$ 上的任意泛函都可以视为二重对偶 $A^{**} \otimes B^{**}$ 上的弱*连续泛函。由于 A^{**} 是矩阵代数与交换代数张量积的直和，并且可分元素关于直和分解（引理 4.5），我们可以将 A^{**} 替换为 $L^\infty(X) \otimes M_d$，其中 $d \leqslant \mathrm{rank}(A)$。由于 $L^\infty(X)$ 是交换的，很容易看出，$(L^\infty(X) \otimes M_d) \otimes B^{**}$ 中的可分元素与 $M_d \otimes (L^\infty(X) \otimes B^{**})$ 中的可分元素相同，因为在这两种情况下，它们都可以视为取值于 $M_d \otimes B^{**}$ 中可分元素的 X 上的函数。在这种情况下，正可分元素上的泛函与从 $L^\infty(X) \otimes B^{**}$ 到 M_d 的正映射 ϕ 之间存在一一对应关系，由 $\widehat{\phi}(\sum_i a_i \otimes b_i) = \mathrm{tr}(\sum_i a_i^T \phi(b_i))$ 给出。此外，$\widehat{\phi}$ 的含单位性对应于 $\mathrm{tr}(\phi(1)) = 1$。

我们可以利用公式 $\widehat{\phi}(x \otimes y) = \mathrm{tr}((\sum_{i,j} e_{ij} \otimes e^{ij})(x \otimes \phi(y)))$ 得到 $\widehat{\phi}$。现在，我们可以仿照 [MR25 中的命题 3.4]，，证明任意 $\Phi \in S(M_d) \otimes^* S(L^\infty(X) \otimes B^{**})$ 都具有 $\Phi = \rho \circ (\mathrm{Id} \otimes \phi)$ 的形式，其中 ϕ 是从 $L^\infty(X) \otimes B^{**}$ 到 M_d 的保单位正映射，而 ρ 是 $M_d \otimes M_d$上的一个态。由此可得 $\|\Phi\| \leqslant \|\phi\|_{cb} \leqslant d \leqslant \mathrm{rank}(A)$。

现在我们证明另一个不等式，即 $\kappa(A, B) \geqslant \mathrm{rank}(A)$。由前面提到的对称性，不妨设 $\mathrm{rank}(A) \leqslant \mathrm{rank}(B)$，因此 $\mathrm{rank}(A) = \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$。只需对每个 $\varepsilon > 0$，找到一个保单位正映射 $\phi : B \to A$，以及一个定义在 $A \otimes B$ 上的态 ρ，使得$\|\rho(\mathrm{Id} \otimes \phi)\| \geqslant \mathrm{rank}(A) - \varepsilon$。由引理 5.7，对每个 $\varepsilon > 0$，存在保单位完全正映射$\rho_A : M^{rank(A)} \to A$ 和 $\sigma_A : A \to M^{rank(A)}$，使得 $\|\sigma_A \circ \rho_A - \mathrm{Id}\|_{cb} \leqslant \varepsilon$。由于 $\mathrm{rank}(B) \geqslant \mathrm{rank}(A)$,

我们可以使用同样的论证，找到保单位完全正映射 $\rho_B : M^{rank(A)} \to B$ 以及$\sigma_B : B \to M^{rank(A)}$，使得 $\|\sigma_B \circ \rho_B - Id\|_{cb} \leqslant \varepsilon$。注意，由此可知 ρ_A 和 ρ_B 几乎是完全等距的。我们定义 $\phi := \rho_A \circ T \circ \sigma_B$，其中 $T : M^{rank(A)} \to M^{rank(A)}$ 是转置映射。我们有

$$\|\phi\|_{cb} \geqslant \|\sigma_A \circ \phi \circ \rho_B\|_{cb} = \|\sigma_A \circ \rho_A \circ T \circ \sigma_B \circ \rho_B\|_{cb}.$$

由于复合映射 $\sigma_A \circ \rho_A$ 和 $\sigma_B \circ \rho_B$ 接近单位元，我们得到 $\|\phi\|_{cb} \geqslant$ 秩$(A)(1-\varepsilon)^2$,，因为 $\|T\|_{cb} =$ 秩(A)。接下来只需证明 ϕ 的完全有界范数几乎可以在某个自伴元处取到，因为这样就可以利用态计算范数。已知转置映射的完全有界范数在一个范数为 1 的自伴元 $x \in M_{rank(A)} \otimes M^{rank(A)}$ 处取到。考虑 $y := (\rho_A \otimes \rho_B)(x)$，则 $\|y\| \simeq 1$，因为 ρ_A 和 ρ_B 几乎是完全等距的。注意

$$\|(Id_A \otimes T)(Id_A \otimes \sigma_B)(y)\| \geqslant \|(Id_A \otimes T)(\sigma_A \otimes \sigma_B)(y)\|.$$

根据 y 的定义，我们得到 $\sigma_A \otimes \sigma_B$(y) $= (\sigma_A \circ \rho_A \otimes \sigma_B \circ \rho_B)$(x) $\simeq$ x，因此 $\|(\mathrm{Id}_A \otimes$ T)(Id$_A \otimes \sigma_B$)(y) $\| \simeq$ 秩(A)。由此可得 $\|(\mathrm{Id}_A \otimes \phi)(y)\| \simeq$ 秩(A)，且 y 是自伴的。因此，我们可以找到一个态 ρ : A $\otimes$ A $\to \mathbb{C}$，使得 $|\rho(\mathrm{Id} \otimes \phi)(y)| \simeq$ 秩(A)，进而得到κ(A, B) $\geqslant$ 秩(A) $=$ min(秩(A), 秩(B))。

□

7. 致谢

我们谨向研讨会“非交换调和分析与量子信息”的组织者表示感谢。该研讨会于 2026 年 1 月在奥伯沃尔法赫举行，会上提出了关于 C*-代数中单位元的可分邻域的问题。本研究部分得到了瓦伦堡量子技术中心（WACQT）的资助，该中心由克努特与爱丽丝·瓦伦堡基金会（KAW）资助。MW 还部分得到了波兰国家科学中心（NCN）项目（编号：2021/43/D/ST1/01446）的资助。

参考文献

[ADMH+24]纪尧姆·奥布伦、肯尼斯·R·戴维森、亚历山大·米勒-赫尔墨斯、Vern I Paulsen 和 Mizanur Rahaman。k-正映射的完全有界范数。伦敦数学会杂志，109(6):e12936，2024。[And04] T·安藤。矩阵空间张量积中的锥与范数。线性代数及其应用，379:3–41，2004。国际线性代数学会第十届会议（奥本，2002）专刊。[Arv09] 威廉·阿维森。纠缠的概率。数学物理通讯，286(1):283–312，2009。[Bla06] B·布拉卡达尔。算子代数，数学科学百科全书第122卷。施普林格出版社，柏林，2006。C**-代数与冯·诺伊曼代数理论，《算子代数与非交换几何》第III卷。[BO08] 纳撒尼尔·P·布朗和小泽成隆。*C**-代数与有限维逼近，数学研究生教材第88卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年。

[CĐ15] Lin Chen 和 Dragomir Ž. Đokovi´c。可分态集合的边界。伦敦皇家学会会刊 A辑，471(2181):20150102，2015年9月。[CH99] Rob Clifton 和 Hans Halvorson。无限维系统的双体混合态通常不可分。物理评论 A，61(1):012108，1999年12月。[GB02] Leonid Gurvits 和 Howard Barnum。最大混合双体量子态周围最大的可分球。物理评论 A，66(6):062311，2002年12月。[HHH96] Michał Horodecki、Paweł Horodecki 和 Ryszard Horodecki。混合态的可分性：充要条件。物理快报 A，223(1-2):1–8，1996。[JKPP11] Nathaniel Johnston、David W. Kribs、Vern I. Paulsen 和 Rajesh Pereira。纠缠理论中的最小与最大算子空间和算子系统。《泛函分析杂志》，260(8):2407–2423，2011。[LMW24] Rotem Liss、Tal Mor 和 Andreas Winter。维数不超过三的希尔伯特子空间中的纠缠几何与可分性。《数学物理通讯》，114(3):86，2024年6月。[MO14] Marek Miller 和 Robert Olkiewicz。冯·诺伊曼代数和 C*-代数中混合态可分性的 Horodecki 判据。《无限维分析、量子概率及相关主题》，17(4):1450028，15，2014。[MR25] Magdalena Musat 和 Mikael Rørdam。C*-代数中的纠缠：态空间的张量积。arXiv:2512.10410，2025。[Pau] Vern Paulsen。完全有界映射与算子代数，剑桥高等数学研究第78卷。剑桥大学出版社，剑桥。[PTT11] Vern I. Paulsen、Ivan G. Todorov 和 Mark Tomforde。有序空间上的算子系统结构。伦敦数学会会刊，102(1):25–49，2011。[Smi83] R. R. Smith。C*-代数之间的完全有界映射。《伦敦数学会杂志》（第2辑），27(1):157–166，1983。[Stø08] Erling Størmer。可分态与正映射。《泛函分析杂志》，254(8):2303–2312，2008。[Stø09] Erling Størmer。可分态与正映射 II。《斯堪的纳维亚数学杂志》，105(2):188–198，2009。[Tak79] Masamichi Takesaki。算子代数理论 I。施普林格出版社，纽约-海德堡，1979。[Tom83] Jun Tomiyama。C*-代数之间完全有界映射理论的最新进展。《数学科学研究所刊物》，19(3):1283–1303，1983。