arXiv:2603.29622v1 [math.CO] 31 Mar 2026

扰动的霍夫施塔特数列良定义性的有限状态证明

有限约束约简与完整的临界核心验证

Marco Mantovanelli*

摘要

我们证明，由下式定义的扰动的霍夫施塔特型数列

$$Q(1) = 1, \quad Q(2) = 1, \quad Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) + (-1)^n$$

对所有 $n \geq 1$均良定义，即所有递归参数始终为正数——而这一性质对于经典霍夫施塔特 Q-数列仍是一个未解决的问题。

证明通过将无限递归约简为一个有限组合约束系统来进行。我们引入局部构型的符号编码，并枚举一个有限的可容许上下文集合，以及一种刻画所有有效局部转移的相容关系。该递归的全局实现对应于这个有限系统的解。

一个关键的结构性要素是将所有有效赋值分解为两种全局模式，由此可将潜在障碍约简至一个有限临界核心。随后，通过完整的有限验证排除所有障碍，并确立全局良定义性。

更广泛地说，这些论证表明，某些元斐波那契递归尽管定义是非局部的，却可以用有限状态描述，其相容性可通过穷尽式组合分析来判定。

关键词： 元斐波那契数列、霍夫施塔特数列、受扰递归、良定义性、有限状态方法、约束满足、组合动力学、递归数列

2020年数学主题分类： 11B37, 05C20, 68R10, 05A15

1 引言

元斐波那契递归是一类序列，其递归参数取决于先前计算出的值。其中最著名的例子之一是霍夫施塔特的 Q序列，该序列于 [11], 引入，其定义为

$$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)).$$

尽管定义简单，该序列却表现出极其复杂的行为，即使是基本的结构性质也仍然难以分析。尤其是，序列是否

*独立研究人员。marco@mantovanelli.de

对所有 n都有良好定义，这个问题一直以来都极难解决；相关讨论及变体可参见 [16, 17, 3, 1, 18] 。

近期研究凸显了霍夫施塔特型递归行为的多样性。特别是，Fox [8, 7, 9]指出，此类系统会因初始条件的选择不同而呈现结构化、周期性和混沌等区域。

与此同时，众所周知，关于嵌套递推关系的问题通常可能不可判定 [6], ，这凸显了证明良定义性等全局性质本身固有的难度。

本文研究以下扰动的霍夫施塔特型递归

$$Q(1) = 1, \quad Q(2) = 1, \quad Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) + (-1)^n.$$

额外的交替项对经典递归施加了可控的扰动，同时保留了其本质上的非局部特征。乍看之下，鉴于经典 Q 序列向来以难以处理著称，这一结果可能显得出人意料地强。然而，交替扰动引入了一种结构性的不对称，从根本上改变了递归的传播行为。特别是，它使一种有限状态约化成为可能，而这种约化在未经扰动的情形下似乎并不可行。

这一扰动模型由 [14], 提出，并为其规律性和自相似性提供了有力的经验与结构证据。特别是，数值和符号分析表明，尽管存在交替强迫，该序列在全局上仍表现良好。该序列已被收录于在线整数数列百科全书，编号为 A394051 [12]。

霍夫施塔特型递归的一个核心问题是良定义性，也就是说，递归是否能为每个 $n \geq 1$生成一个值；等价地说，在整个演化过程中，所有递归参数是否始终保持为正。如上所述，即使对于经典的 Q序列，这个问题也众所周知地难以解决。

本文的主要成果是解决了扰动序列的这一问题。

定理 1. 扰动的霍夫施塔特型数列

$$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) + (-1)^n$$

初始值为 $Q(1) = Q(2) = 1$，对于所有整数 $n \geq 1$ 均有定义。

1.1 证明方法

证明通过将无限递归结构替换为有限组合模型来进行。第 2 节说明如何将递归约简为有限符号系统。第 3 节介绍用于编码相关邻域数据的局部上下文，第 4 节构造支配局部传播的相容图。第 5 节阐述全局赋值的概念，并将问题重新表述为有限约束满足问题。

关键的结构性要素将在接下来的两节中介绍。第 6 节证明有效赋值的双模分解，首先给出债务为 2 的上下文的刚性结果。第 7 节引入相应的支持集，用于描述每种模式中的所有局部可容许值。

障碍分析构成了本文的最后部分。在第 8 节中，我们将障碍问题约简为一个有限临界核心。第 9 节分析该核心上的诱导结构，第 10 节则进行有限验证，证明临界核心的每个子集都存在

有效赋值。第11节随后结合此前所有约简，完成主定理的证明。

附录包含临界核心验证的机器可验证证书、完整的自动机数据，以及计算中使用的压缩转移关系。有限验证的完整计算实现已发布于公开代码仓库[15]。

1.2 文献中的位置

本文论证结合了元斐波那契递归研究中的思想，以及通常与有限符号动力系统和有限约束系统相关的方法。从这个意义上说，该证明表明，非平凡的自指递归尽管如此仍可在局部行为层面拥有有限状态描述；关于符号系统和图同态视角的一般背景，参见 [13, 10] 。近期关于霍夫施塔特型及相关元斐波那契结构的研究，也揭示了各种各样涌现的组合行为；例如，参见 [2, 19, 5]。

从更广泛的视角来看，这一结果支持这样一种观点：某些递归定义的序列虽然难以直接从全局层面分析，但可能通过有限局部模型与明确的障碍分析加以控制。

范围与局限。 本文仅关注良定义性问题，即递归是否存在全局一致的实现。本文所提出的有限状态约化为这一问题提供了完整的解，但并不旨在刻画该序列的全部组合复杂性。具体而言，我们不讨论 $Q(n)/n$趋于 $1/2$的精确渐近收敛速率，也不声称有限符号模型能够充分反映可能支配这一收敛过程的深层组合结构。更精细的分析或许会涉及更丰富的对象（例如卡塔兰型结构或格路计数），但这些超出了本文方法的范围。

2 约化为有限符号系统

分析递归的核心难点

$$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) + (-1)^n$$

在于其非局部性：递归的自变量取决于先前计算出的值，且可能涉及过去很大一部分范围。因此，直接的归纳论证难以掌控。

本文的关键思想是，尽管存在这种非局部依赖，递归仍呈现出一种强烈的局部规律性。更确切地说，尽管 $Q(n)$的数值无界，但递归在 n 的有界邻域内的相对结构 可以用有限个符号构型编码。

2.1 从递归到符号数据

而不是进行　　直接处理 $Q(n)$的值时，我们引入一个有限的符号状态集合

$$S = \{S_0, S_1, \ldots, S_7\},$$

来编码递归的局部行为。每个符号状态都代表一类局部构型的等价类，它们相对于递归规则的行为完全相同。我们用简写形式 $S_i[d]$ 表示 $S \times \{0, 2\}$ 中的元素，而不写作$(S_i,\ d)$。

此外，我们引入一个债务参数

$$d \in \{0, 2\},$$

该参数用于计入交替扰动项（-1）^{n}所引入的有界偏差。此参数确保符号系统在传播下封闭。

2.2 局部构型与上下文

为刻画递归的局部结构，我们考虑位置 n周围的有限窗口，并将其编码为上下文。每个上下文代表一类局部配置，这些配置在未来传播方面无法区分。

所有可容许上下文的集合记为 Λ_{adm}。该集合是有限的，且可以明确计算。

2.3 相容性约束

递归在相邻上下文之间产生局部相容条件。这些约束定义了一种有向关系

$$\Psi \subseteq \Lambda_{\mathrm{adm}} \times \Lambda_{\mathrm{adm}},$$

它规定了在有效配置中哪些上下文可以彼此相接。我们将 Ψ 视为 Λ_{adm}上的有向图的边集。

因此，无限递归被化约为一个有限的组合系统，由以下部分组成：

- 有限个上下文 Λ_{adm},
- 有限个符号状态,
- 有限个相容关系 Ψ。

2.4 全局一致性问题

递归的一种实现对应于将符号状态全局赋值给各个上下文，并满足所有相容性约束。

因此，良定义性问题等价于以下有限命题：

每个局部可容许配置都可以扩展为一个全局一致赋值。

在接下来的各节中，我们将精确说明这一约简，并详细分析由此得到的有限系统。

3 局部上下文

现在，我们引入用于编码递归局部配置的精确定义的形式对象。

3.1 上下文的定义

定义 1. 一上下文是一个元组

$$\lambda = (p, R, i, \pi, d),$$

其中:

- p 是描述固定局部窗口内符号状态的有限模式,
- $R \in \{R_1, R_2, R_3\}$ 指定递归机制,
- i 是模式中的指定位置,
- $\pi \in \{0, 1\}$ 是索引的奇偶性,
- $d \in \{0, 2\}$ 是债务参数。

我们还将使用一种展开记法，显式写出模式 p ，并标记各个分量:

$$(p, R, i, \pi, d) = (p_1, p_2, p_3, R, \mathrm{pos} = i, \mathrm{parity} = \pi, \mathrm{debt} = d).$$

每个上下文都表示一个以位置 n 为中心的局部配置，并包含足够的信息，以确定递归如何传播到相邻位置。

3.2 可容许性

并非每个元组 $(p,\ R,\ i,\ \pi,\ d)$ 都对应一个有效的局部配置。

定义 2. 如果存在一种递归实现，使 λ 所编码的符号数据与递归规则一致，则上下文 λ 是可容许的。

可容许性施加了局部一致性条件，包括:

- 模式中符号状态的相容性,
- 由 R确定的递归依赖的一致性,
- 奇偶性的正确传播,
- 递归过程中债务参数的一致性。

3.3 有限枚举

命题1。 可容许上下文 Λ_{adm} 是有限集，其基数为28。

我们固定一个枚举

$$\Lambda_{\mathrm{adm}} = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_{27}\},$$

并交替使用索引（“上下文 i”）或 λ_i 来指代上下文。

证明。 元组 $(p,\ R,\ i,\ \pi,\ d)$ 的每个分量都取自一个有限集合。可容许性条件仅施加局部约束，因此定义了完整参数空间的一个有限子集。通过显式枚举可得 $|\Lambda_{\mathrm{adm}}| = 28$。

□

3.4 上下文的作用

上下文构成了下一节所引入的相容图的顶点。上下文之间的一次转移对应于将序列中的观测窗口移动一个位置。因此，上下文序列对应于递归的局部一致配置。

3.5 示例：一个具体上下文及其解释

我们用一个取自临界核心的具体示例来说明上下文的概念。考虑上下文

$$\lambda_0 = (C, E, B, R_1, \mathrm{pos} = 1, \mathrm{parity} = 1, \mathrm{debt} = 0).$$

解释。这个上下文编码了索引 n 附近的局部配置，具有以下性质：

- 模式 $(C,\ E,\ B)$ 表示 Q 在 n周围一个固定窗口内各个值的符号描述。
- 规则类型 R_1 规定了递归调用

  $$Q(n - Q(n-1)), \quad Q(n - Q(n-2))$$

  在此构型中相互作用。
- 位置 $\mathrm{pos} = 1$ 表示当前索引 n 对应于该模式的第一项。
- 奇偶性 奇偶性 $= 1$ 表示 n 为奇数，因此扰动贡献 $(-1)^n = -1$。
- 债务参数 $d = 0$ 表示当前没有从前面的步骤结转任何修正项。

可容许性。 </style} $\lambda_0 \in \Lambda_{\mathrm{adm}}$ 这一事实意味着，存在一种递归的实现，使得某个索引 n的局部邻域恰好呈现出这一符号结构，并且所有递归依赖均得到满足。

传播。 相容图 Ψ 决定哪些上下文可以接在其后 λ_0。在临界核心的诱导结构中，我们有边

$$\lambda_0 \to \lambda_2,$$

这意味着，将观测窗口向右移动一个位置后，所得的局部配置必须与上下文相对应

$$\lambda_2 = (E, B, E, R_1, \mathrm{pos} = 2, \mathrm{parity} = 0, \mathrm{debt} = 0).$$

符号状态。 在 λ_0 处的支撑集为

$$\Sigma_A(\lambda_0) = \{S1[0]\}, \qquad \Sigma_B(\lambda_0) = \{S2[0]\}.$$

因此，根据全局模式， λ_0 所表示的局部配置只能实现两种符号状态之一。

在全局结构中的作用

在全局结构中的作用。这个示例展示了单个上下文如何编码：

- 有关递归的局部结构信息，
- 通过 Ψ 对相邻配置施加的约束，
- 以及通过支撑集表示的依赖于模式的可容许符号状态。

特别是， λ_0 与其后继之间的相互作用，是全局约束在系统中传播的关键机制之一。

4 相容图

上一节引入的有限符号系统由上下文之间的局部相容关系支配。该关系编码了递归在相邻位置之间的传播，并构成了证明的核心组合对象。

4.1 相容关系的定义

令 Λ_{adm} 表示可容许上下文的集合。我们定义一个有向关系

$$\Psi \subseteq \Lambda_{\mathrm{adm}} \times \Lambda_{\mathrm{adm}}$$

如下。

定义 3。 当且仅当上下文 μ 可以在递归的局部一致实现中紧接着出现在λ 右侧时，称一对$(\lambda, \mu) \in \Psi$ 成立。

更具体地说，关系 Ψ由递归规则导出，

$$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) + (-1)^n,$$

其方法是强制要求 λ和 μ 中编码的符号数据与该序列的某个共同底层配置相容。

这包括：

- 重叠的局部模式的一致性，
- 递归依赖的相容性，
- 传播下奇偶性与债务参数的一致性。

我们称 μ 为 λ 的邻居，当且仅当满足以下任一条件：$(\lambda, \mu) \in \Psi$，或 $(\mu, \lambda) \in \Psi$。

4.2 局部确定性与有限传播

该系统的一个关键特征是相容性具有局部性：转移 $(\lambda,\ \mu)$ 的可容许性仅取决于 λ 和 μ 中所含的数据，而与全局配置无关。

这一性质使该系统归入符号动力系统中有限约束系统 或有限型移位 的一般框架（例如参见 [13]）。在这种解释下，上下文充当符号，而关系 Ψ定义了符号之间允许的转移。

命题 2。 相容关系 Ψ是有限的，且可有效计算。在当前情形下，它由34 条有向边组成。

有向相容图 $(\Lambda_{\mathrm{adm}}, \Psi)$ 的完整示意图见图1。该图突出显示了分别对应债务 0 和债务 2 的两个连通分量，也清楚呈现了由 R_1、 R_2和 R_3所形成的内部状态结构。

下文中，连通性均指 $(\Lambda_{\mathrm{adm}}, \Psi)$ 的底层无向图；有向传播则沿容许有向路径单独考察。

构造概要。 对于每一对 $(\lambda, \mu) \in \Lambda_{\mathrm{adm}}^2$，检查是否存在一种局部实现，使递归与这两个上下文均相容。此验证可归结为关于符号状态和参数的有限组条件，因此可以穷尽检验。由此得到的容许对集合定义了 Ψ。

□

4.3 图结构

我们将 $(\Lambda_{\mathrm{adm}},\ \Psi)$ 视为一个有向图，称为相容图。该图中的路径对应于有效配置中可以连续出现的上下文序列。

定义 4. 路径$(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots\ldots,\ \lambda_k)$ 若满足以下条件，则称为可容许的：

$$(\lambda_i, \lambda_{i+1}) \in \Psi \quad for\ all\ i.$$

可容许路径表示递归在有限区间上的局部一致配置。

命题 3. 相容图可分解为两个连通分支。

证明思路。 这可由对 Ψ的显式计算得出。该分解反映了递归行为中的全局二分，稍后将把它与全局赋值的两种模式对应起来。

□

4.4 全局配置作为图着色

一个全局赋值

$$f : \Lambda_{\mathrm{adm}} \to S \times \{0, 2\}$$

可以解释为相容图顶点的一种标记。

当且仅当该赋值满足所有边上的要求时，它才是有效赋值：

$$(\lambda, \mu) \in \Psi \ \Rightarrow\ (f(\lambda), f(\mu)) \text{ is an admissible transition.}$$

因此，有效赋值对应于从相容图到符号状态上的有限状态转移系统的图同态 。

这一视角将问题与经典的约束满足问题（CSP）和图同态问题联系起来（例如，参见 [10]），这类问题旨在寻找满足局部相容性约束的赋值。

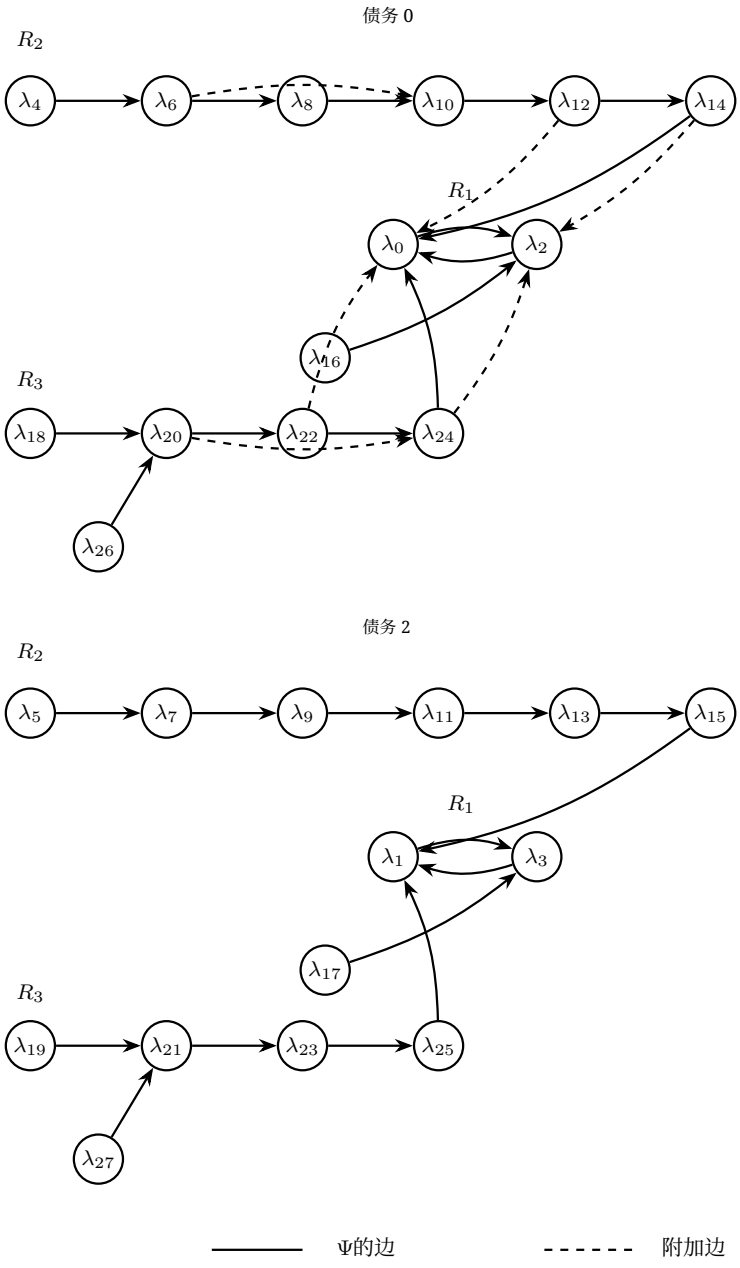

图1：相容图（Λ_{adm}，Ψ）。该图有两个连通分量，分别对应债务 0 和债务 2。实线箭头表示区域 R_1、R_2和 R_3内部的主链结构；虚线箭头表示附录 B 中完整明确列表所列的其他兼容边。

4.5 与元斐波那契动力学的关系

有限相容图的出现是递归中的一个重要结构特征。尽管元斐波那契序列通常被认为高度不规则（见 [17, 16]），但当前构造表明，扰动后的序列在局部行为层面具有有限状态描述。

这一现象与在霍夫施塔特型数列及其变体中通过经验观察到的规律模式的出现密切相关 [3, 20, 7]。

4.6 在证明中的作用

相容图为无限递归与有限阻碍问题之间搭建了桥梁。

- 局部一致性由 Ψ的边编码。
- 全局一致性对应于有效赋值的存在性。
- 可扩展性的失败对应于障碍的存在性。

在后续各节中，我们将详细分析该图的结构。特别地，我们将证明所有有效赋值都属于两种全局模式，并且任何障碍都必须由一小组关键上下文支撑。

5 全局赋值

在引入有限的上下文集合及其相容性关系 Ψ后，我们现在将系统的全局配置这一概念形式化。

5.1 赋值

定义 5. 全局赋值是一个函数

$$f : \Lambda_{\mathrm{adm}} \to S \times \{0, 2\},$$

它为每个可容许上下文赋予一个符号状态和一个债务值。

直观地说，赋值指定了对于每一种可能的局部配置，该配置中实现的是哪种符号状态。

5.2 相容性约束

并非每个赋值都对应递归的有效配置。赋值必须遵守相容关系 Ψ。

定义 6. 全局赋值 f 有效 当且仅当对于每条边 $(\lambda, \mu) \in \Psi$，这一对

$$(f(\lambda), f(\mu))$$

是符号状态之间的可容许转移。

此条件确保局部相邻的上下文被赋予兼容的符号数据。

5.3 将其解释为约束系统

数对（$\Lambda_{\mathrm{adm}}, \Psi$）与符号状态共同定义了一个有限约束满足问题（CSP）。有效赋值恰好是此约束满足问题的一个解。

等价地，可以将该问题视为一个图同态问题：相容图（Λ_{adm}， Ψ）必须映射到一个由符号状态构成的有限转移图中，并且保持边不变（见 [10]）。

5.4 与递归的关系

与原递归联系起来的关键原则如下：

> 递归的每一种实现都会导出一个有效赋值，而有限符号系统的构造方式保证了有效赋值的可扩展性足以确保递归的全局一致性。

事实上，给定序列 $Q(n)$ 的一种实现，每个位置都会确定一个上下文 λ 以及一个符号状态。相邻位置的相容性意味着导出的赋值满足所有 Ψ 约束。

因此，合适的有效赋值的存在性提供了证明良定义性时所用的有限一致性判据。

引理 1（由上下文确定的符号状态）。 对于每个可容许上下文 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{adm}}$，有限状态编码所赋予的符号状态由 λ唯一确定。等价地，如果同一个可容许上下文在递归的一种实现中出现在两个位置，那么它在这两个位置都会导出 $S \times \{0, 2\}$ 中的同一个元素。

证明。 根据构造，上下文

$$\lambda = (p, R, i, \pi, d) \in \Lambda_{\mathrm{adm}}$$

恰好包含编码器所用的局部符号数据：局部模式 p、递归机制 R、指定位置 i、奇偶性 π以及债务参数 d。有限状态编码的定义保证，所赋予的符号状态仅取决于这些局部参数，而不取决于任何额外的全局信息。

因此，每当递归的两个出现位置产生相同的可容许上下文 λ时，编码器的所有输入都相同。于是，编码器的输出也必然相同。换言之，与可容许上下文相关联的符号状态是仅由该上下文决定的良定义函数。

因此，有限状态编码确定了一个映射

$$\mathrm{enc} : \Lambda_{\mathrm{adm}} \to S \times \{0, 2\},$$

而 t 由任意一次 λ 出现所诱导的符号状态都由 λ 唯一确定。 □

构造该符号模型，使得递归中的局部可实现性与相应有限约束系统中的局部可满足性相一致。具体而言，局部可容许配置在递归中可扩展，当且仅当相应的部分赋值可扩展为有限模型中的有效全局赋值。因此，递归未能良定义会导致出现一个不可扩展的局部可容许配置，即有限约束系统中的一个障碍。

定理 2（有限状态约化的正确性）。扰动的霍夫施塔特型递归

$$Q(1) = 1, \qquad Q(2) = 1, \qquad Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) + (-1)^n$$

当且仅当相应的有限约束系统不存在障碍时，对所有 $n \geq 1$ 都有良好定义。

这里，相应的有限约束系统是根据第 2–4 节构造的符号模型，其可容许上下文集为 Λ_{adm}，相容关系为 Ψ，有效赋值为 $f : \Lambda_{\mathrm{adm}} \to S \times \{0, 2\}$。

证明。我们证明两个方向。

可靠性。假设对所有 $n \geq 1$，递归都有良好定义。

那么，每个索引 n 都有递归的真实实现，因此确定一个符合递归规则的局部配置。根据符号系统的构造，每个这样的局部配置都对应一个可容许上下文

$$\lambda \in \Lambda_{\mathrm{adm}},$$

以及 $S \times \{0, 2\}$ 中描述递归局部行为的一个符号状态。

根据引理 1，与可容许上下文相关联的符号状态仅取决于上下文本身，而不取决于该上下文在实现中出现的具体位置。

因此，这定义了一个映射

$$f : \Lambda_{\mathrm{adm}} \to S \times \{0, 2\},$$

该映射将每个上下文赋值为序列中实现的符号状态。

由于序列中的连续位置来自同一个全局一致的实现，重叠的局部窗口彼此兼容。因此，对于每条边

$$(\lambda, \mu) \in \Psi,$$

这对 $(f(\lambda)\ f(\mu))$ 是一个可容许符号转移。因此，f是一个有效全局赋值。

特别地，序列中出现的每个局部可容许配置都可扩展为一个有效全局赋值。

完备性。假设相关的有限约束系统不存在障碍。等价地说，每个由局部可容许构型产生的部分赋值都能扩展为有效全局赋值。

反设递归定义不良。因此，存在一个最小索引 $n \geq 3$，使得递归在此处失效。由其最小性可知，所有值 $Q(1), \ldots, Q(n-1)$ 都已定义。

因此，n 处的失效必定是由于违反了递归规则，即至少有一个参数

$$n - Q(n-1), \qquad n - Q(n-2)$$

非正，或与递归所施加的局部一致性条件不相容。

根据符号系统的构造，n 周围的局部配置决定了一个可接受的上下文

$$\lambda \in \Lambda_{\mathrm{adm}},$$

而递归失败则对应于这样一个事实：该构型无法扩展为全局一致的实现。在符号模型中，这恰恰意味着相应的局部赋值无法扩展为有效全局赋值，也就是说，它构成了一个障碍。

这与每个局部可容许配置都能扩展为有效全局赋值的假设相矛盾。因此不存在这样的索引 n，并且递归对所有$n \geq 1$都有定义。

□

5.5 扩展问题

现在可以将核心问题完全改写为关于赋值的问题 s.

定义 7。 设 $H \subseteq \Lambda_{\mathrm{adm}}$。一个部分赋值

$$f_H : H \to S \times \{0, 2\}$$

is 可扩展，如果它可以扩展为 Λ_{adm} 上的有效全局赋值。

定义 8。 一个障碍 是满足以下条件的子集 $H \subseteq \Lambda_{\mathrm{adm}}$ ： H 上的任何赋值都无法扩展为有效全局赋值。

因此，良定义性问题归结为证明不存在障碍。

5.6 证明中的作用

根据定理 2，只需排除相关有限约束系统中的障碍。在后续各节中，我们将分析有效赋值的结构，并证明任何潜在障碍都可归结为一个有限临界核心。

6 双模式结构

相容系统的一个核心结构性质是，所有有效赋值恰好分为两个全局类别。这种二分是将全局扩展问题归结为有限障碍问题的关键机制。

我们先介绍一个初步的刚性观察。在债务-2 扇区中，符号系统完全刚性。

引理 2 (债务刚性**)**。 若 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{adm}}$ 具有债务 $d = 2$，则

$$f(\lambda) = S6[2]$$

对于每个有效赋值 f。

证明。 这是传播计算的精确输出，见附录 B。 □

6.1 结果陈述

定理 3 (双模式结构**)。** 设 $f:\ \Lambda_{\mathrm{adm}} \to S \times \{0,2\}$ 是一个有效赋值。那么 f恰好属于以下两类之一：

- 模式 A：$f(\lambda_0) = S1[0]$,
- 模式 B：$f(\lambda_0) = S2[0]$。

此外，对于每种模式和每个上下文 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{adm}}$，值 $f(\lambda)$ 必须属于相应的支持集 $\Sigma_A(\lambda)$ 或 $\Sigma_B(\lambda)$。

6.2 根的确定

我们首先分析特殊上下文 λ_0。

引理 3 (根限制**)。** 对于任意有效赋值 f，值 $f(\lambda_0)$要么是 $S1[0]$，要么是 $S2[0]$。

证明。 根据计算得到的支持表，我们有

$$\Sigma_A(\lambda_0) = \{S1[0]\}, \qquad \Sigma_B(\lambda_0) = \{S2[0]\},$$

并且在 Ψ的约束下，没有其他符号状态与 λ_0 相容。因此结论成立。

□

6.3 沿相容图传播

关键步骤是证明，在 λ_0 处固定值会使约束传播到整个连通分量。

引理 4 (根选择决定全局模式**)。** 设 $f:\ \Lambda_{\mathrm{adm}} \to S \times \{0,2\}$ 是一个有效赋值。那么， $f(\lambda_0)$ 的值决定其属于两种全局模式中的哪一种： f

- 若 $f(\lambda_0) = S1[0]$，则 f 属于模式 A；
- 若 $f(\lambda_0) = S2[0]$，则 f 属于模式 B。

  特别是，根选择会沿有限相容系统传播，并确定与 f相关的支撑集族。

证明。 根据引理 3，每个有效赋值都满足

$$f(\lambda_0) \in \{S1[0], S2[0]\}.$$

根据.....，这两种可能性互斥

$$\Sigma_A(\lambda_0) = \{S1[0]\}, \qquad \Sigma_B(\lambda_0) = \{S2[0]\}.$$

因此，每个有效赋值恰好属于由根值确定的两个类别之一。相应的支撑集就是与该类别关联的支撑集，即第一种情况下的 Σ_A ，第二种情况下的 Σ_B 。

□

剩余的连通分量由债务为 2 的上下文组成，并根据引理 2 是刚性的。因此，它不会产生由λ_0 处确定的二分之外的额外全局模式。

6.4 模式分解

现在我们将这两种全局模式形式化。

定义 9. 对于每个上下文 λ，定义支撑集：

$$\Sigma_A(\lambda) = \{f(\lambda) : f \ \textit{valid and}\ f(\lambda_0) = S1[0]\},$$

$$\Sigma_B(\lambda) = \{f(\lambda) : f \ \textit{valid and}\ f(\lambda_0) = S2[0]\}.$$

这些集合通过传播约束显式计算得出。

命题 4. 对于每个上下文 λ，集合 $\Sigma_A(\lambda)$ 和 $\Sigma_B(\lambda)$ 均非空，并描述了在相应根条件下 $f(\lambda)$ 的所有可能取值。

证明。 固定一种模式（例如模式 A）。从根约束 $f(\lambda_0) = S1[0]$ 开始，沿着 Ψ 的所有边传播约束，直到达到不动点。由此得到与根约束兼容的所有取值构成的集合。

完备性由此可得，因为任何有效赋值都必须满足相同的局部约束，因此不可能引入其他取值。 □

6.5 模式的不相交性

引理 5. 这两种模式互不相交，即：

$$\Sigma_A(\lambda_0) \cap \Sigma_B(\lambda_0) = \emptyset.$$

证明。 由此立即可得

$$\Sigma_A(\lambda_0) = \{S1[0]\}, \qquad \Sigma_B(\lambda_0) = \{S2[0]\}.$$

□

6.6 全局分类

现在我们完成定理 3 的证明。

定理 3 的证明。 由引理 3 可知，每个有效赋值都必须在 λ_0 处选择 $S1[0]$ 或 $S2[0]$ 。由引理 4 可知，这一选择决定了由哪个支持族（ Σ_A 或 Σ_B）支配该赋值。由命题 4 可知，这些支撑集描述了每种选择下的所有可能赋值。

最后，引理 5 证明这两个类互不相交。
因此，每个有效赋值恰好属于两种模式中的一种。 □

6.7 解释

双模式结构揭示了递归中隐藏的全局刚性。尽管系统是在局部定义的，但单个上下文中的选择就能在有限歧义范围内决定整个全局配置。

这种现象类似于约束系统和符号动力系统中的相分离，在这类系统中，全局配置会分裂为少数几个极端类（参见 [13]）。

6.8 在证明中的作用

双模分解将扩展问题归结为以下内容 :

给定一个部分构型，只需证明两个模式中至少有一个可以扩展该构型。

特别地，同时出现的障碍必须阻断两种模式。下一节将证明，这样的障碍不可能存在。

7 支持集

上一节确立的双模式结构使我们能够根据每个上下文中的局部容许值来描述所有有效赋值。这些值由支撑集表示。

7.1 定义

定义 10. 对每个上下文 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{adm}}$，定义：

$$\Sigma_A(\lambda) = \{\, f(\lambda) \;:\; f \text{ is a valid assignment with } f(\lambda_0) = S1[0] \,\},$$

$$\Sigma_B(\lambda) = \{\, f(\lambda) \;:\; f \text{ is a valid assignment with } f(\lambda_0) = S2[0] \,\}.$$

因此， $\Sigma_A(\lambda)$ 和 $\Sigma_B(\lambda)$ 描述了在 λ 处可能出现的所有符号状态，这些状态分别对应两种全局模式。

7.2 通过约束传播进行计算

支持集是通过沿相容图传播根约束得到的。固定一种模式（例如模式 A）。从

$$f(\lambda_0) = S1[0],$$

我们迭代地强制执行所有相容性约束 $(\lambda,\ \mu) \in \Psi$，移除与已确定的可能性不相容的取值。

由于 Λ_{adm} 和状态空间都是有限的，这一过程经过有限步后便会稳定，并得出适用于所有 λ 的完整集合 $\Sigma_A(\lambda)$。

采用类似的过程可得到 $\Sigma_B(\lambda)$。

命题 5。 支持集 $\Sigma_A(\lambda)$ 和 $\Sigma_B(\lambda)$ 对于所有 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{adm}}$ 都是有限、非空且可有效计算的。

7.3 完备性

支持集描述了每种模式下所有可能的局部值。

命题 6. 设 f 是一个有效赋值。

- *If* $f(\lambda_0) = S1[0]$, *then* $f(\lambda) \in \Sigma_A(\lambda)$ *for all* λ.

- 如果 $f(\lambda_0) = S2[0]$，那么对于所有 λ，都有 $f(\lambda) \in \Sigma_B(\lambda)$。

证明。 这直接由传播过程得出：任何有效赋值都必须满足用于构造支撑集的相同局部约束，因此不可能包含支撑集以外的值。

□

7.4 局部灵活性与刚性

支撑集量化了每个上下文的自由度。

- 如果 $|\Sigma_A(\lambda)| = 1$，那么在模式 A 中， λ 处的值是唯一确定的。
- 如果 $|\Sigma_A(\lambda)| > 1$，那么可能有多个值，这反映了局部灵活性 .

特别是，债务为 $d = 2$ 的上下文完全刚性：

引理 6 （债务刚性）。 若 λ 具有 $d = 2$，则

$$\Sigma_A(\lambda) = \Sigma_B(\lambda) = \{S6[2]\}.$$

7.5 敏感上下文

对这两个支持集的比较引出了一个关键的结构性概念。

定义 11. 如果上下文 λ满足以下条件，则称其为敏感的

$$\Sigma_A(\lambda) \neq \Sigma_B(\lambda).$$

敏感 上下文正是那些模式的选择会产生实际影响的上下文 .

7.6 临界核心中的示例

对于临界核心中的四个上下文，支持集如下：

$$\Sigma_A(\lambda_0) = \{S1[0]\}, \quad \Sigma_B(\lambda_0) = \{S2[0]\},$$

$$\Sigma_A(\lambda_2) = \{S1[0], S4[0]\}, \quad \Sigma_B(\lambda_2) = \{S2[0]\},$$

$$\Sigma_A(\lambda_{14}) = \{S1[0], S4[0], S7[0]\}, \quad \Sigma_B(\lambda_{14}) = \{S2[0], S3[0], S4[0], S5[0], S6[0]\},$$

$$\Sigma_A(\lambda_{24}) = \{S1[0], S4[0], S7[0]\}, \quad \Sigma_B(\lambda_{24}) = \{S2[0], S3[0], S4[0], S5[0], S6[0]\}.$$

这些差异是所有潜在障碍的根源。

7.7 在障碍分析中的作用

支持集使我们能够将扩展问题完全改写为局部问题：

> 当且仅当存在某个上下文子集，使得无法从相应的支撑集中选取值来满足所有相容性约束时，才会出现障碍。

特别是：

- 在两种模式下支撑集相同的上下文与障碍无关，
- 只有敏感上下文才会导致矛盾，
- Σ_A 和 Σ_B 的结构决定了临界核心。

这一观察构成了下一节所进行的约简的基础。

8 约简至临界核心

本节将说明，障碍问题可以约简为一个有限且可明确识别的上下文子集。论证首先找出两个全局模式不同的上下文，然后证明在这些上下文中，只有一个很小的子集能够构成极小障碍。

8.1 障碍

回顾一下，若在 H 上不存在任何能够扩展为有效全局赋值的赋值，则称子集 $H \subseteq \Lambda_{\mathrm{adm}}$ 为**障碍**。

若障碍 H 满足以下条件，则称其为极小的：

- H 是一个障碍，
- 每个真子集 $H' \subsetneq H$ 都是可扩展的。

8.2 敏感上下文

定义 12. 敏感集 是

$$\Lambda_{\mathrm{sens}} = \{\lambda \in \Lambda_{\mathrm{adm}} : \Sigma_A(\lambda) \neq \Sigma_B(\lambda)\}.$$

这些恰好是两个全局模式施加不同局部约束的上下文。

8.3 非敏感上下文中的局部可扩展性

我们首先提炼出用于消除非敏感上下文的关键结构性质。

引理 7（敏感上下文处的局部可扩展性计算）。设 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{adm}} \setminus \Lambda_{\mathrm{sens}}$ 是一个非敏感上下文。令 $N(\lambda) \subseteq \Lambda_{\mathrm{adm}}$ 表示相容图中 λ 的邻居集合，即

$$N(\lambda) = \{\mu \in \Lambda_{\mathrm{adm}} : (\lambda, \mu) \in \Psi \ \textit{or}\ (\mu, \lambda) \in \Psi\}.$$

那么， N（λ） 上的每个有效部分赋值都可以扩展到 λ：更确切地说，对于每个有效部分赋值

$$g : N(\lambda) \to S \times \{0, 2\},$$

存在一个值

$$s \in \Sigma_A(\lambda) = \Sigma_B(\lambda)$$

使得扩展后的赋值在

$$N(\lambda) \cup \{\lambda\}$$

定义为 g（λ） $= s$ 满足涉及 λ 的所有相容性约束。

证明。 该断言通过对由支撑集和相容关系 Ψ确定的有限状态空间进行穷举而得以证明。由于邻域构型和状态集都是有限的，验证可归结为有限检查，其完整输出可在随附的代码仓库中获得。对于每个非敏感上下文 λ，检查器枚举邻域 $N(\lambda)$ 上的所有局部可容许赋值，并确认至少存在一个值

$$s \in \Sigma_A(\lambda) = \Sigma_B(\lambda)$$

可将赋值扩张到 λ ，同时保持所有相关的 Ψ-约束。因此，对于每个非敏感上下文，所述扩张性质成立。 □

引理 8 （与模式无关的局部可扩张性）。 设 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{adm}}$ 满足

$$\Sigma_A(\lambda) = \Sigma_B(\lambda) =: \Sigma(\lambda).$$

令 $H \subseteq \Lambda_{\mathrm{adm}}$ 满足 $\lambda \notin H$，并令

$$f_H : H \to S \times \{0, 2\}$$

为一个有效部分赋值。

假设对于相容图中 λ 的每个邻居 μ （即 $(\lambda, \mu) \in \Psi$ 或 $(\mu, \lambda) \in \Psi$，其中 $\mu \in H$），值 $f_H(\mu)$ 都属于相应的支持集。

那么存在 $s \in \Sigma(\lambda)$ ，使得将 f_H 扩展为 $f(\lambda) = s$ 后，在 $H \cup \{\lambda\}$ 上得到一个有效赋值。

证明。 由于 $\lambda \notin \Lambda_{\mathrm{sens}}$，我们有

$$\Sigma_A(\lambda) = \Sigma_B(\lambda) =: \Sigma(\lambda).$$

根据限制，给定的有效部分赋值 f_H 在 H 上诱导出邻域 $N(\lambda) \cap H$ 上的一个有效部分赋值。

根据引理 7，非敏感上下文邻域上的每个有效部分赋值都可以扩展到该上下文。因此，存在

$$s \in \Sigma(\lambda)$$

使得将 $f(\lambda) = s$ 扩展到 f_H 后，可在 $H \cup \{\lambda\}$ 上得到有效赋值。 □

8.4 消除非敏感上下文

引理 9 (Eli　　非敏感上下文的判定）。 设 $H \subseteq \Lambda_{\mathrm{adm}}$ 是一个极小障碍。该　　n

$$H \subseteq \Lambda_{\mathrm{sens}}.$$

证明。 假设 $\lambda \in H$ 不是敏感的，即

$$\Sigma_A(\lambda) = \Sigma_B(\lambda).$$

令 $H' = H \setminus \{\lambda\}$。根据极小性， H' 是可扩展的。令

$$f_{H'} : H' \to S \times \{0, 2\}$$

为一个有效赋值。

我们验证引理 8 的假设均得到满足。事实上，对于每个与λ相邻的 $\mu \in H'$ ，根据模式，我们有 $f_{H'}(\mu)$ $\in \Sigma_A(\mu)$ 或 $\Sigma_B(\mu)$，因此 $f_{H'}(\mu)$ 是局部可容许的。

由于 λ 不敏感，引理 8 适用，并得出一个值

$$s \in \Sigma_A(\lambda) = \Sigma_B(\lambda)$$

使得将 $f(\lambda) = s$ 赋给$f_{H'}$ 后，可在 H上得到一个有效赋值。

这与 H 是障碍这一假设矛盾。因此，不存在这样的 λ，由此我们得出

$$H \subseteq \Lambda_{\mathrm{sens}}.$$

□

8.5 约简至临界核心

现在，我们将所需的剩余传播性质单独提取出来，以便将极小障碍从完整的敏感集合约简至四上下文核心。

引理 10 （计算传播至临界核心）。 对于每个上下文

$$\lambda \in \Lambda_{\mathrm{sens}} \setminus \Lambda_{\mathrm{crit}},$$

存在一条有向路径

$$\lambda \to \lambda_1 \to \cdots \to \lambda_k$$

在相容图 Ψ中，使得：

- $\lambda_k \in \Lambda_{\text{临界}}$,
- 沿着这条路径， λ 处的可容许值由 λ_k处的可容许值通过连续的局部相容性约束确定，
- 并且，终端临界上下文上的每个有效部分赋值都能向后传播至 λ 处至少一个容许值。

证明。 该结论通过显式计算得到的支撑集和相容关系 Ψ 经计算验证。

更确切地说，对于每个上下文

$$\lambda \in \Lambda_{\text{sens}} \setminus \Lambda_{\text{crit}},$$

检查器会枚举 Ψ 中从 λ 通向 Λ_{crit} 的有向路径，并确认至少有一条路径满足以下性质：终端临界上下文中的每个容许值，沿该路径逐步进行局部传播后，都会在每个更早的上下文中导出一个非空的容许前驱值集合，并最终在 λ 处得到一个非空的容许值集合。

因此，每个这样的 λ 都由一条终止于临界核心的传播链所控制 . □

命题 7. 每个极小障碍 H 都包含在

$$\Lambda_{\text{crit}} = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_{14}, \lambda_{24}\}.$$

证明。 根据引理 9，任何极小障碍都满足

$$H \subseteq \Lambda_{\text{sens}}.$$

反设存在

$$\lambda \in H \setminus \Lambda_{\text{crit}}.$$

Let

$$H' = H \setminus \{\lambda\}.$$

由于 H 是极小的，因此集合 H' 是可扩展的。令

$$f_{H'} : H' \to S \times \{0, 2\}$$

为 H'上的有效赋值。

根据引理 10，存在一条有向路径

$$\lambda \to \lambda_1 \to \cdots \to \lambda_k$$

其终端上下文为 $\lambda_k \in \Lambda_{\text{crit}}$，并且 λ_k 处的可容许值沿路径反向传播后，会使 λ处至少有一个可容许值。

若 $\lambda_k \in H'$，则赋值 $f_{H'}(\lambda_k)$ 通过沿路径反向传播，确定了 λ处的一个非空可容许值集合。任选其中一个值，记为 s。

若 $\lambda_k \notin H'$，则由于 H' 可扩展，我们可以先将 $f_{H'}$ 扩展为定义在包含 λ_k的集合上的有效赋值，再沿路径向后传播，从而在 λ处得到一个值 s 。

无论哪种情况，值 s 都与路径对 λ 施加的所有约束相容，尤其与来自 H'中上下文的所有关联 Ψ-约束相容。因此，将 $f_{H'}$ 扩展为

$$f(\lambda) = s$$

即可得到定义在 H上的有效赋值。

这与 H 是障碍这一假设矛盾。因此，不存在这样的 λ ，由此我们得出

$$H \subseteq \Lambda_{\text{crit}}.$$

□

8.6 结论

结合引理 9 和命题 7，我们得到：

推论 1. 每个极小障碍 H 都满足

$$H \subseteq \Lambda_{\mathrm{crit}}.$$

因此，障碍问题可归结为检查四元素集合 Λ_{crit}的子集。

引理 7 和引理 10 中的计算性陈述由对计算得到的支撑集和局部相容图 Ψ进行穷尽检查予以验证；参见附录 A–C 及配套源代码。

9 CriticalCore

本节分析临界集上约化系统的结构

$$\Lambda_{\mathrm{crit}} = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_{14}, \lambda_{24}\},$$

并解释为什么这一结构已经排除了障碍的存在。

9.1 诱导相容图

全局相容关系 Ψ 在 Λ_{crit}上诱导出一个有向图，该图是通过将 Ψ 限制到 Λ_{crit}中的上下文对而得到的。

根据显式计算，诱导出的边为：

$$\lambda_0 \to \lambda_2, \qquad \lambda_{14} \to \lambda_0, \qquad \lambda_{24} \to \lambda_0.$$

命题 8 (核心相容结构**)**。 Λ_{crit} 上的诱导相容图由三条有向边组成：

$$\lambda_{14} \to \lambda_0 \to \lambda_2, \qquad \lambda_{24} \to \lambda_0.$$

特别地，该图无环，且所有约束都通过根上下文 λ_0传递。

证明。 这直接由临界核心上计算得到的诱导 Ψ-边推出（见附录 A）。

□

9.2 结构性推论

诱导图具有简单的层级结构：

- 这些上下文 λ_{14} 和 λ_{24} 汇入 λ_0,
- 上下文 λ_0 汇入 λ_2,
- 核心内部不存在循环。

因此， Λ_{crit} 中元素之间的任何相容性约束都经由 λ_0 传递。特别是，一旦在 λ_0 处固定一个值，所有其他核心上下文中的容许值便只受这一有向结构上的局部且彼此独立的约束。

9.3 核心上的模式 A 支持

现在我们来考察模式 A 中的支持集：

$$\Sigma_A(\lambda_0) = \{S1[0]\}, \qquad \Sigma_A(\lambda_2) = \{S1[0], S4[0]\},$$

$$\Sigma_A(\lambda_{14}) = \{S1[0], S4[0], S7[0]\}, \qquad \Sigma_A(\lambda_{24}) = \{S1[0], S4[0], S7[0]\}.$$

特别地，符号状态 $S1[0]$属于所有模式 A 支持集：

$$S1[0] \in \Sigma_A(\lambda) \quad \text{for all } \lambda \in \Lambda_{\text{crit}}.$$

9.4 一致赋值与相容性

考虑一致赋值

$$f(\lambda) = S1[0] \quad \text{for all } \lambda \in \Lambda_{\text{crit}}.$$

我们先记录下文所需的基本一致性原理。

引理 11 (常状态约束满足问题一致性**)。** 设 $G = (V, E)$ 是一个有限有向图，且$\mathcal{T}$是有限状态空间 X上的一个二元约束关系。假设存在一个状态 $s \in X$，使得

$$(s, s) \in \mathcal{T}.$$

那么常值赋值

$$v \mapsto s \qquad (v \in V)$$

满足 G上的所有边约束。

这是约束满足和图同态视角中一个熟悉的一致性原理的最简单实例；例如，参见 [10, 4]。

证明。 设 $(u, v) \in E$ 是 G的任意一条边。由于两个端点都被赋予相同的状态 s，相应的约束恰好是

$$(s, s) \in \mathcal{T},$$

根据假设，该约束成立。因此，每条边约束都得到满足。 □

现在我们明确验证，诱导核心约束允许取常值 $S1[0]$。
诱导核心图有三条边

$$\lambda_0 \to \lambda_2, \qquad \lambda_{14} \to \lambda_0, \qquad \lambda_{24} \to \lambda_0.$$

对于这些边中的每一条，常值符号转移

$$S1[0] \to S1[0]$$

都是容许的。
更准确地说：

- 对于 $\lambda_0 \to \lambda_2$，转移 $S1[0] \to S1[0]$ 是可接受的；

- 对于 $\lambda_{14} \to \lambda_0$，转移 $S1[0] \to S1[0]$ 是可接受的；
- 对于 $\lambda_{24} \to \lambda_0$，转移 $S1[0] \to S1[0]$ 是可接受的。

等价地，诱导核心图的每条边都允许相同的常值符号转移

$$S1[0] \to S1[0].$$

由于 Λ_{crit} 上的诱导相容图有限且无环，引理 11 适用。因此，一致赋值

$$f(\lambda) = S1[0] \qquad (\lambda \in \Lambda_{\text{crit}})$$

满足 Ψ所诱导的所有相容性约束。

9.5 为什么模式 A 足够

根据 上一小节，诱导核心图存在统一的有效赋值 t

$$f(\lambda) = S1[0] \qquad (\lambda \in \Lambda_{\text{crit}}).$$

因此，模 式 A 已经在整个临界核心上提供了一个全局一致赋值 .

由于子集 Λ_{crit} 上的每个诱导约束，都是通过限制从完整的诱导核心图得到的，因此同一个常量赋值在每个子集上仍然有效。

特别是， Λ_{crit} 的任何子集都不会在模式 A 下失效。这就是下一节中的有限验证能够在临界核心的所有 15 个非空子集上统一成立的结构性原因。

9.6 结论

命题 9. 在模式 A 中， Λ_{crit} 上存在一个有效赋值。

证明。 如上所示，一致赋值 $f(\lambda) = S1[0]$ 满足所有相容性约束。

□

这确定了模式 A 中一个自然的候选赋值，并将剩余任务简化为对 Λ_{crit}的非空子集进行有限验证。

下一节将给出对所有子集的穷举验证，以及一份机器可验证证书。

10 主要有限验证

现在，我们通过将全局一致性问题约简为一个有限且可明确验证的命题，完成证明。

10.1 约简为有限族

根据第 8 节确立的约简，任何极小障碍

$$H \subseteq \Lambda_{\mathrm{adm}}$$

必须满足

$$H \subseteq \Lambda_{\mathrm{crit}}.$$

由于临界核心由四个上下文组成，

$$|\Lambda_{\mathrm{crit}}| = 4,$$

恰好有

$$2^4 - 1 = 15$$

Λ_{crit} 的非空子集。

因此，存在障碍等价于存在一个子集

$$H \subseteq \Lambda_{\mathrm{crit}}, \quad H \neq \emptyset,$$

它不存在有效赋值。

10.2 有限验证问题

对于每个子集 $H \subseteq \Lambda_{\mathrm{crit}}$，我们必须确定是否存在一个函数

$$f : H \to S \times \{0, 2\}$$

使得由 Ψ 在 H 上诱导的所有相容性约束都得到满足。

等价地，w e 必须检查每个子集 H 是否可扩展 为有效全局赋值 .

10.3 算法验证

这个问题是有限的，可以通过穷举来解决。

验证程序如下：

- 枚举全部 15 个非空子集 $H \subseteq \Lambda_{\text{临界}}$，
- 对每个 H，枚举所有赋值

$$f : H \to S \times \{0, 2\}$$

与支持集兼容，

- 检查是否 至少存在一个这样的赋值，满足所有引出的相容性约束 .

该过程通过程序 checkall() 实现，该程序完全基于从符号系统中提取的有限数据（上下文、支撑集和 Ψ-边）运行。

10.4 验证结果

计算得出以下结果：

对于每个非空子集 $H \subseteq \Lambda_{\mathrm{crit}}$，都存在一个满足所有相容性约束的有效赋值。

特别是， Λ_{crit} 的任何子集都不是障碍。

10.5 机器可验证证书

验证过程的完整输出收录于附录 A（见表 1）。该证书包含：

- 四个核心上下文的明确描述，
- 支撑集 $\Sigma_A(\lambda)$ 和 $\Sigma_B(\lambda)$，
- 核心上的诱导相容边，
- 以及对于 15 个子集 H 中的每一个，都有一个明确的有效赋值。

这些数据既以人类可读的表格形式呈现，也以原始程序输出的形式呈现，从而便于独立验证。

10.6 结论

命题 10。 Λ_{crit} 的任何子集都不是障碍。

证明。 穷举计算表明，每个子集都存在有效赋值。因此，临界核心上不存在障碍。

□

推论 2。 Λ_{adm} 中不存在障碍。

证明。 根据第 8 节，任何障碍都包含在 Λ_{crit} 中，而这一点已被排除 . □

11 证明的完成

现在，我们将前几节的结果结合起来，以完成主定理的证明。

11.1 约简概述

我们已将递归的良定义性

$$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) + (-1)^n$$

约简为一个有限约束问题，如下所示：

- 递归的局部行为由有限个上下文 Λ_{adm} 编码。
- 相邻配置之间的相容性由关系 Ψ刻画。
- 有效配置对应于满足所有 Ψ约束的全局赋值。

因此，当且仅当每个局部可容许配置都能扩展为有效的全局赋值时，递归才是定义良好的。

11.2 结构分解

我们确立了若干关键的结构性结果：

- （**双模式结构**）每个有效赋值都属于模式 A 或模式 B，具体取决于根上下文 λ_0处的值。
- （**支撑集**）对于每个上下文 λ，集合 $\Sigma_A(\lambda)$和 $\Sigma_B(\lambda)$描述了两种模式下所有可能的局部值。
- （**敏感约简**）任何极小障碍都必须包含在敏感集内

$$\Lambda_{\text{sens}} = \{\lambda : \Sigma_A(\lambda) \neq \Sigma_B(\lambda)\}.$$

- （**临界核心**）每个极小障碍都包含在有限集合内

$$\Lambda_{\text{crit}} = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_{14}, \lambda_{24}\}.$$

11.3 障碍的消除

剩下的任务是验证 Λ_{crit} 的任何子集都不是障碍。

在第 10 节中，我们证明了每个子集 $H \subseteq \Lambda_{\text{crit}}$ 都存在有效赋值。特别是，一致赋值

$$f(\lambda) = S1[0]$$

满足所有相容性约束。

T因此， Λ_{crit} 上不存在障碍，进而 Λ_{adm} 中也不存在障碍。 .

11.4 结论

由此我们得出结论：每个局部可容许配置都能扩展为有效全局赋值。根据定理 2，可知该递归对所有 $n \geq 1$ 都有定义。

定理的证明。 根据推论 2， Λ_{adm} 上的有限约束系统中不存在障碍。根据定理 2，这意味着扰动的霍夫施塔特型递归对所有$n \geq 1$都有良定义。

□

11.5 最后说明

证明表明，扰动的霍夫施塔特递归在局部行为层面上具有完整的有限状态描述。尽管递归具有非局部性，所有潜在的不一致都被限制在一个有限的组合结构中，可以对其进行穷尽分析。

11.6 展望

本文发展的有限状态约化表明，类似技术或许适用于其他具有有界扰动的元斐波那契递归。特别是，识别有限符号模型和临界核心，或可为证明更广泛类别的递归数列的良定义性提供一个通用框架。

12 计算验证与代码仓库

本文发展的有限状态约化依赖于明确的有限数据，包括可容许上下文集 Λ_{adm}、相容关系 Ψ、由此导出的符号转移系统，以及对临界核心的最终验证。尽管数学论证完全是有限且组合性的，其构造仍依赖大量明确的分类讨论和有限计算。

为确保透明度和可复现性，我们在公开代码仓库 [15]中提供有限验证流程的完整计算实现。

12.1 计算组件的作用

代码仓库为证明的有限组合部分提供了机器可验证证书。它的作用不是取代逻辑论证，而是验证证明所依赖的显式有限构造。

具体而言，代码支撑论证中的以下部分：

- 生成构成有限模型基础的符号轨迹和宏观轮廓数据，
- 从符号轨迹中提取结构锚点对，
- 构造压缩后的符号转移系统，
- 重构可容许上下文集 Λ_{adm}，
- 计算相容关系 Ψ，
- 验证债务-2 扇区中的刚性，
- 构造双模式结构及其相关支撑集，
- 对对应于两种全局模式的两个分支进行比较，
- 并穷举验证临界核心上不存在障碍。

12.2 仓库结构

代码仓 库由源代码、数据、文档和生成输出组成 .

- 目录 src/pipeline/ 包含有限符号模型的主要重构流程。
- 目录 src/automaton/ 包含用于确立双模式结构并比较两个分支的程序。
- 目录 src/verification/ 包含最终的关键核心检查器。
- 目录 src/data generation/ 包含用于生成从递归中提取的大规模宏观轮廓数据的生成器。
- 目录 src/trace generation/ 包含用于从第一性原理生成递归的符号轨迹的程序。

- 目录 data/ 包含符号轨迹以及流程所用的中间有限数据。

- docs/ 目录包含论文和可复现性指南。
- output/ 目录专用于存放生成输出和日志。

12.3 验证流程的结构

计算流程体现了证明的逻辑结构。

计算流程从受扰递归的符号轨迹开始。该轨迹可以作为输入数据提供，也可以使用代码仓库中包含的轨迹生成程序独立生成。根据这条轨迹，代码通过以下步骤重建有限符号系统：

1. 从递归生成宏观轮廓和债务转移数据，2. 从符号轨迹中提取结构锚点对，3. 将观测到的转移数据压缩为有限符号转移系统，4. 重建可容许上下文及相容关系 Ψ，5. 传播局部约束并验证债务刚性，6. 构建双模式自动机，7. 比较由此得到的两个分支并提取依赖模式的支撑集，8. 穷举验证临界核心的所有非空子集。

每一步都由代码仓库中的专用程序实现，并且中间数据都有明确记录。

12.4 主程序

代码仓库中的主要程序如下。

轨迹生成（可选）。目录 src/trace generation/ 中包含一些程序，它们直接根据定义递推生成扰动霍夫施塔特递推的符号轨迹。有限验证在逻辑上并不要求执行这一步，但它提供了一种独立的方法，可从第一性原理复现流水线所用的输入数据。

数据生成。 程序 src/data generation/q D macro profiles stream occ win64.c 直接根据扰动的霍夫施塔特递归计算大规模宏观轮廓数据和债务转移数据。这些数据构成了压缩有限符号模型所依据的经验输入。

流水线重建。 目录 src/pipeline/ 包含主要的重建程序：

- make_exact_anchor_pairs_win64.c，用于从符号轨迹中提取结构锚点对；
- compress_edges_to_9state.c，用于构造压缩符号转移关系；
- construct_and_propagate.c，用于重构 Λ_{adm} 和 Ψ，传播局部约束，并验证债务-2 扇区中的刚性。

双模态分析。 目录 src/automaton/ 包含：

- two_mode_automaton.c，用于构造双模态符号结构；
- branch_comparison_solver.c，用于比较两个分支，并提取障碍分析中使用的依赖模式的支撑行为。

最终有限验证。 程序 src/verification/checkall.cpp 对临界核心进行了穷尽验证

$$\Lambda_{\mathrm{crit}} = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_{14}, \lambda_{24}\}.$$

它检查全部 1 − 5 个 Λ_{crit} 的非空子集，并确认每个子集都存在有效赋值 .

12.5 临界核心的有限验证

证明的最后一步归结为检查临界核心的全部 15 个非空子集 e

$$\Lambda_{\mathrm{crit}} = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_{14}, \lambda_{24}\}.$$

这项验证通过程序 checkall.cpp 进行穷举，确认每个子集都存在有效赋值。

这项计算的输出收录于附录 A，并提供了不存在任何障碍的完整证明。

12.6 可复现性与保证

代码仓库中的所有计算都是有限且确定的，不需要随机性或启发式选择。这些程序处理明确定义的有限数据，可以独立重新编译和执行。

因此，该代码仓库提供了对证明中有限组合部分的完整可复现、可由机器验证的实现。

展望：形式化验证

本文所发展的有限状态约化得到一个完全明确且有限的组合系统。具体而言，所有涉及的对象——上下文集 Λ_{adm}、相容关系Ψ、支撑集、双模分解以及临界核心验证——都是有限的，且可通过算法进行检查。

这使得该证明非常适合在 Lean 或 Coq 等证明助手中进行形式化验证。在这种环境下，可以直接对有限约束系统进行编码，并通过完全由机器核验的证明来确认不存在障碍。

我们预计，按照这些思路进行形式化将进一步提升严谨性和可复现性，因此将其留作未来的研究方向。

13 附录 A：机器验证证书

本附录包含第 10 节所述临界核验证程序的完整输出。这些数据证明，临界核心的任何子集都不构成障碍。

所有计算均使用程序 checkall() 完成，该程序穷尽验证了 Λ_{crit} 的全部 15 个非空子集。

13.1 临界核心数据

上下文。

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= (C, E, B, R_1, \mathrm{pos}=1, \mathrm{parity}=1, \mathrm{debt}=0),\\
\lambda_2 &= (E, B, E, R_1, \mathrm{pos}=2, \mathrm{parity}=0, \mathrm{debt}=0),\\
\lambda_{14} &= (D, C, E, R_2, \mathrm{pos}=6, \mathrm{parity}=0, \mathrm{debt}=0),\\
\lambda_{24} &= (D, C, E, R_3, \mathrm{pos}=4, \mathrm{parity}=0, \mathrm{debt}=0).
\end{aligned}$$

支撑集。

$$\begin{aligned}
\Sigma_A(\lambda_0) &= \{S1[0]\}, & \Sigma_B(\lambda_0) &= \{S2[0]\},\\
\Sigma_A(\lambda_2) &= \{S1[0], S4[0]\}, & \Sigma_B(\lambda_2) &= \{S2[0]\},\\
\Sigma_A(\lambda_{14}) &= \{S1[0], S4[0], S7[0]\}, & \Sigma_B(\lambda_{14}) &= \{S2[0], S3[0], S4[0], S5[0], S6[0]\},\\
\Sigma_A(\lambda_{24}) &= \{S1[0], S4[0], S7[0]\}, & \Sigma_B(\lambda_{24}) &= \{S2[0], S3[0], S4[0], S5[0], S6[0]\}.
\end{aligned}$$

诱导相容边。

$$\lambda_0 \to \lambda_2, \quad \lambda_{14} \to \lambda_0, \quad \lambda_{24} \to \lambda_0.$$

13.2 穷举验证

13.3 结果

该表显示，每个子集 $H \subseteq \Lambda_{\mathrm{crit}}$ 都存在有效赋值（事实上，在模式 A 下就已经成立）。因此，临界核心的任何子集都不是障碍。

子集 H	Mode	赋值
$\{\lambda_0\}$	A	$(S1[0])$
$\{\lambda_2\}$	A	$(S1[0])$
$\{\lambda_0, \lambda_2\}$	A	$(S1[0],\ S1[0])$
$\{\lambda_{14}\}$	A	$(S1[0])$
$\{\lambda_0, \lambda_{14}\}$	A	$(S1[0],\ S1[0])$
$\{\lambda_2, \lambda_{14}\}$	A	$(S1[0],\ S1[0])$
$\{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_{14}\}$	A	$(S1[0], S1[0], S1[0])$
$\{\lambda_{24}\}$	A	$(S1[0])$
$\{\lambda_0, \lambda_{24}\}$	A	$(S1[0],\ S1[0])$
$\{\lambda_2, \lambda_{24}\}$	A	$(S1[0],\ S1[0])$
$\{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_{24}\}$	A	$(S1[0], S1[0], S1[0])$
$\{\lambda_{14}, \lambda_{24}\}$	A	$(S1[0],\ S1[0])$
$\{\lambda_0, \lambda_{14}, \lambda_{24}\}$	A	$(S1[0], S1[0], S1[0])$
$\{\lambda_2, \lambda_{14}, \lambda_{24}\}$	A	$(S1[0], S1[0], S1[0])$
$\{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_{14}, \lambda_{24}\}$	A	$(S1[0], S1[0], S1[0], S1[0])$

表 1：对全部 15 个非空子集 $H \subseteq \Lambda_{\text{crit}}$ 的穷举验证。对于每个子集，都给出了一个满足所有相容性约束的有效赋值（已处于模式 A）。

13.4 原始程序输出

==========用于临界核心验证的关键核心检查器==========

核心上下文:
0 : (C,E,B,R_1,位置=1,奇偶性=1,债务=0) 2 : (E,B,E,R_1,位置=2,奇偶性=0,债务=0) 14 : (D,C,E,R_2,位置=6,奇偶性=0,债务=0) 24 : (D,C,E,R_3,位置=4,奇偶性=0,债务=0)

模式 A 支撑集: 0 : S1[0]2 : S1[0]S4[0]14 : S1[0]S4[0] S7[0]24 : S1[0]S4[0]S7[0]

模式 B 支撑集: 0 : S2[0]2 : S2[0]14 : S2[0]S3[0]S4[0]S5[0] S6[0]24 : S2[0]S3[0]S4[0]S5[0] S6[0]

诱导的 CORE_PSI 边:
lambda_0 -> lambda_2

λ_14-> λ_0λ_24-> λ_0

正在检查全部 15 个非空子集……

LaTeX 行：

H = {0} -> 模式A -> lambda_0=S1[0]$\{\lambda_0\}$& A & $(S1[0])$ \\ H = {2} -> 模式A -> lambda_2=S1[0]$\{\lambda_2\}$& A & $(S1[0])$ \\ H = {0,2} -> 模式A-> lambda_0=S1[0]，lambda_2=S1[0]$\{\lambda_0,\lambda_2\}$ & A & $(S1[0]，S1[0])$ \\ H = {14} ->模式 A -> lambda_14=S1[0]$\{\lambda_14\}$ & A & $(S1[0])$ \\ H = {0,14} -> 模式 A ->lambda_0=S1[0]，lambda_14=S1[0]$\{\lambda_0,\lambda_14\}$ & A & $(S1[0]，S1[0])$ \\ H = {2,14} -> 模式 A ->lambda_2=S1[0]，lambda_14=S1[0]$\{\lambda_2,\lambda_14\}$ & A & $(S1[0]，S1[0])$ \\ H = {0,2,14} ->模式 A -> lambda_0=S1[0]，lambda_2=S1[0]，lambda_14=S1[0]$\{\lambda_0,\lambda_2,\lambda_14\}$ & A & $(S1[0]，S1[0]，S1[0])$ \\ H = {24} ->模式 A -> lambda_24=S1[0]$\{\lambda_24\}$ & A & $(S1[0])$ \\ H = {0,24} -> 模式 A ->lambda_0=S1[0]，lambda_24=S1[0]$\{\lambda_0,\lambda_24\}$ & A & $(S1[0]，S1[0])$ \\ H = {2,24} -> 模式 A ->lambda_2=S1[0]，lambda_24=S1[0]$\{\lambda_2,\lambda_24\}$ & A & $(S1[0]，S1[0])$ \\ H = {0,2,24} ->模式 A -> lambda_0=S1[0]，lambda_2=S1[0]，lambda_24=S1[0]$\{\lambda_0,\lambda_2,\lambda_24\}$ & A & $(S1[0]，S1[0]，S1[0])$ \\ H = {14,24} -> 模式A -> lambda_14=S1[0]，lambda_24=S1[0]$\{\lambda_14,\lambda_24\}$ & A & $(S1[0]，S1[0])$ \\ H = {0,14,24} ->模式 A -> lambda_0=S1[0]，lambda_14=S1[0]，lambda_24=S1[0]$\{\lambda_0,\lambda_14,\lambda_24\}$ & A & $(S1[0]，S1[0]，S1[0])$ \\ H = {2,14,24} ->模式 A -> lambda_2=S1[0]，lambda_14=S1[0]，lambda_24=S1[0]$\{\lambda_2,\lambda_14,\lambda_24\}$ & A & $(S1[0]，S1[0]，S1[0])$ \\ H = {0,2,14,24}-> 模式 A -> lambda_0=S1[0]，lambda_2=S1[0]，lambda_14=S1[0]，lambda_24=S1[0]$\{\lambda_0,\lambda_2,\lambda_14,\lambda_24\}$ & A & $(S1[0]，S1[0]，S1[0]，S1[0])$ \\

已验证：临界核心上不存在同时障碍。

所有计算均可使用所提供的机器可读数据（附录 B 和 C）独立复现。可应要求提供一个精简的独立验证器。

14 附录 B：上下文与支持表

本附录包含该符号系统的完整有限数据：

- 所有可容许上下文，
- 支持集 $\Sigma_A(\lambda)$ 和 $\Sigma_B(\lambda)$，
- 以及相容关系 Ψ。

14.1 可容许上下文

可容许上下文集 Λ_{adm} 由 28 个上下文组成：

上下文 0: (C,E,B,R_1,位置=1,奇偶性=1,债务=0) 上下文 1: (C,E,B,R_1,位置=1,奇偶性=1,债务=2) 上下文 2: (E,B,E,R_1,位置=2,奇偶性=0,债务=0) 上下文 3: (E,B,E,R_1,位置=2,奇偶性=0,债务=2) 上下文 4: (B,E,A,R_2,位置=1,奇偶性=1,债务=0) 上下文 5: (B,E,A,R_2,位置=1,奇偶性=1,债务=2) 上下文 6: (E,A,D,R_2,位置=2,奇偶性=0,债务=0) 上下文 7: (E,A,D,R_2,位置=2,奇偶性=0,债务=2) 上下文 8: (A,D,D,R_2,位置=3,奇偶性=1,债务=0) 上下文 9: (A,D,D,R_2,位置=3,奇偶性=1,债务=2) 上下文 10: (D,D,D,R_2,位置=4,奇偶性=0,债务=0) 上下文 11: (D,D,D,R_2,位置=4,奇偶性=0,债务=2) 上下文 12: (D,D,C,R_2,位置=5,奇偶性=1,债务=0) 上下文 13: (D,D,C,R_2,位置=5,奇偶性=1,债务=2) 上下文 14: (D,C,E,R_2,位置=6,奇偶性=0,债务=0) 上下文 15: (D,C,E,R_2,位置=6,奇偶性=0,债务=2) 上下文 16: (B,E,B,R_1,位置=1,奇偶性=1,债务=0) 上下文 17: (B,E,B,R_1,位置=1,奇偶性=1,债务=2) 上下文 18: (B,E,A,R_3,位置=1,奇偶性=1,债务=0) 上下文 19: (B,E,A,R_3,位置=1,奇偶性=1,债务=2) 上下文 20: (E,A,D,R_3,位置=2,奇偶性=0,债务=0) 上下文 21: (E,A,D,R_3,位置=2,奇偶性=0,债务=2) 上下文 22: (A,D,C,R_3,位置=3,奇偶性=1,债务=0) 上下文 23: (A,D,C,R_3,位置=3,奇偶性=1,债务=2) 上下文 24: (D,C,E,R_3,位置=4,奇偶性=0,债务=0) 上下文 25: (D,C,E,R_3,位置=4,奇偶性=0,债务=2) 上下文 26: (C,E,A,R_3,位置=1,奇偶性=1,债务=0) 上下文 27: (C,E,A,R_3,位置=1,奇偶性=1,债务=2)

14.2 支撑集

我们列出了两种模式下所有上下文的支撑集。

模式 A ($\lambda_0 = S1[0]$**)**上下文 0：S1[0]上下文 1：S6[2]

上下文 2：S1[0] S4[0]上下文 3：S6[2]上下文 4：S
1[0] S2[0]S3[0] S4[0] S5[0] S6[0]上下文 5：S6[2]上
下文 6：S1[0] S2[0]S3[0] S4[0] S5[0] S6[0] S7[0]
上下文 7：S6[2]上下文 8：S1[0] S2[0]S3[0] S4[0] S
5[0] S6[0] S7[0]上下文 9：S6[2]上下文 10：S1[0] S
2[0]S3[0] S4[0] S5[0] S6[0] S7[0]上下文 11：S6[2]
上下文 12：S1[0] S2[0]S3[0] S4[0] S5[0] S6[0] S
7[0]上下文 13：S6[2]上下文 14：S1[0] S4[0]S7[0]上下
文 15：S6[2]上下文 16：S1[0] S2[0]S3[0] S4[0] S
5[0]上下文 17：S6[2]上下文 18：S1[0] S2[0]S3[0] S
4[0] S5[0] S6[0]上下文 19：S6[2]上下文 20：S1[0]
S2[0]S3[0] S4[0] S5[0] S6[0] S7[0]上下文 21：S6[2]
上下文 22：S1[0] S2[0]S3[0] S4[0] S5[0] S6[0] S
7[0]上下文 23：S6[2]上下文 24：S1[0] S4[0]S7[0]上下
文 25：S6[2]上下文 26：S1[0] S2[0]S3[0] S4[0] S
5[0] S6[0]上下文 27：S6[2]

模式 B ($\lambda_0 = S2[0]$**)**

ctx 0:S2[0]ctx 1:S6[2]ctx 2:S2[0]ctx 3:S6[2]ctx 4:S2[0]
ctx 5:S6[2]ctx 6: S2[0] S3[0]S4[0]ctx 7:S6[2]ctx 8: S
1[0] S2[0]S3[0] S4[0] S5[0] S6[0]ctx 9:S6[2]ctx
10: S1[0] S2[0]S3[0] S4[0] S5[0] S6[0] S7[0]ctx
11: S6[2]ctx 12: S1[0] S2[0]S3[0] S4[0] S5[0] S
6[0] S7[0]ctx 13: S6[2]ctx 14: S2[0] S3[0]S4[0] S
5[0] S6[0]ctx 15: S6[2]ctx 16: S2[0] S3[0]S4[0] S
5[0] S6[0]

ctx 17: S6[2]ctx 18: S2[0] S3[0]S4[0] S5[0] S6[0]
ctx 19: S6[2]ctx 20: S1[0] S2[0]S3[0] S4[0] S5[0]
S6[0] S7[0]ctx 21: S6[2]ctx 22: S1[0] S2[0]S3[0]
S4[0] S5[0] S6[0] S7[0]ctx 23: S6[2]ctx 24: S2[0]
S3[0]S4[0] S5[0] S6[0]ctx 25: S6[2]ctx 26: S1[0]
S2[0]S3[0] S4[0] S5[0] S6[0] S7[0]ctx 27: S6[2]

以下边列表是检查器所使用的精确上下文级转移关系。特别是，第6–10节中所有依赖相容图的陈述，均以此显式列表为依据得到验证。

14.3 完整相容关系

相容关系 $\Psi \subseteq \Lambda_{\mathrm{adm}} \times \Lambda_{\mathrm{adm}}$ 恰好由 以下 34 条有向边组成，且不包含其他转移。

为便于阅读，我们根据各边在传播图中的结构作用对其进行分组。

(i) 局部二循环（状态 R_1）。

$$\lambda_0 \to \lambda_2, \qquad \lambda_2 \to \lambda_0,$$
$$\lambda_1 \to \lambda_3, \qquad \lambda_3 \to \lambda_1.$$

(ii) 前向链（状态 R_2）。

$$\lambda_4 \to \lambda_6 \to \lambda_8 \to \lambda_{10} \to \lambda_{12} \to \lambda_{14} \to \lambda_0,$$
$$\lambda_5 \to \lambda_7 \to \lambda_9 \to \lambda_{11} \to \lambda_{13} \to \lambda_{15} \to \lambda_1.$$

(iii) 前向链（ R_3 区间）。

$$\lambda_{18} \to \lambda_{20} \to \lambda_{22} \to \lambda_{24} \to \lambda_0,$$
$$\lambda_{19} \to \lambda_{21} \to \lambda_{23} \to \lambda_{25} \to \lambda_1,$$
$$\lambda_{26} \to \lambda_{20}, \qquad \lambda_{27} \to \lambda_{21}.$$

(iv) 额外的兼容边。

$$\lambda_{16} \to \lambda_2, \qquad \lambda_{17} \to \lambda_3,$$
$$\lambda_{14} \to \lambda_2, \qquad \lambda_{24} \to \lambda_2,$$
$$\lambda_6 \to \lambda_{10}, \qquad \lambda_{20} \to \lambda_{24},$$
$$\lambda_{12} \to \lambda_0, \qquad \lambda_{22} \to \lambda_0.$$

这个显式列表是通过对所有局部一致的上下文转移进行穷举验证而得到的，并构成有限验证过程的完整输入。

14.4 机器可读数据

完整的自动机（上下文、支撑集和边）也以机器可读的形式包含在随附的源代码中。

15 附录 C：压缩边关系

本附录记录有限验证中使用的精确压缩后继关系。转移写作如下形式

$$S_i[a] \to S_j[b],$$

其中 S_i、S_j 是符号状态，而 a、$b \in \{0, 2\}$ 是债务值。

15.1 状态空间约定

符号状态记为 S_0、S_1、……、S_7，其中 S_1、……、S_7 构成分析中使用的主要符号类。

辅助状态 $S_0[2]$ 仅出现在压缩转移系统中，是由局部传播器生成的中间债务携带状态。它不会出现在可容许上下文的最终支撑集中，但为确保转移关系的完备性，仍将其纳入此处。

15.2 精确转移关系

压缩符号转移关系恰好由以下37条有向边构成，并包含所有由可容许上下文对诱导的转移。

为清晰起见，我们按结构类型对转移进行分组。

(i) 债务级别0内的转移。

$$\begin{aligned}
&S_1[0] \to S_1[0], \quad S_1[0] \to S_4[0], S_2[0] \to S_2[0], \ S_2[0] \to S_3[0], \ S_2[0] \to S_4[0], \ S_2[0] \to S_5[0], \\
&S_2[0] \to S_6[0], S_3[0] \to S_2[0], \ S_3[0] \to S_3[0], \ S_3[0] \to S_4[0], \ S_3[0] \to S_5[0], \ S_3[0] \to S_6[0], \\
&S_4[0] \to S_1[0], \ S_4[0] \to S_2[0], \ S_4[0] \to S_3[0], \ S_4[0] \to S_4[0], \ S_4[0] \to S_5[0], \ S_4[0] \to S_6[0], \\
&S_5[0] \to S_2[0], \ S_5[0] \to S_3[0], \ S_5[0] \to S_4[0], \ S_5[0] \to S_5[0], \ S_5[0] \to S_6[0], S_6[0] \to S_2[0], \\
&S_6[0] \to S_3[0], \ S_6[0] \to S_5[0], \ S_6[0] \to S_6[0], \ S_6[0] \to S_7[0], S_7[0] \to S_1[0], \ S_7[0] \to S_4[0].
\end{aligned}$$

(ii) 债务创造型转变。

$$\begin{aligned}
S_1[0] &\to S_0[2], \\
S_4[0] &\to S_0[2], \\
S_7[0] &\to S_0[2].
\end{aligned}$$

(iii) 债务传播转移。

$$S_0[2] \to S_7[0],$$
$$S_0[2] \to S_6[2],$$
$$S_6[2] \to S_7[0],$$
$$S_6[2] \to S_6[2].$$

该关系是将完整的相容图 Ψ 投影到符号状态上所得。具体而- 言，对于每个可容许上下文转移（λ，μ）$\in \Psi$ 以及每个有效赋值 f，所诱导的转移

$$f(\lambda) \to f(\mu)$$

出现在上面的列表中。

关键结构特征。自环

$$S_1[0] \to S_1[0]$$

存在。这一性质对于临界核心验证中所用统一的 A 模式赋值的一致性至关重要。

15.3 压缩转移关系的自动机式表示

图 2 给出了状态空间上压缩后继关系的简洁自动机式表示

$$\{S0[2], S1[0], S2[0], S3[0], S4[0], S5[0], S6[0], S6[2], S7[0]\}.$$

该图等价于下文记录的精确转移列表和邻接表形式。债务为 2 的状态与债务为 0 的状态分开显示，以便直观地呈现系统中具有刚性的部分。

为确保精确的可复现性，相同的转移关系也以机器可读形式记录在第 15.5 节中。

15.4 与相容图的关系

压缩边关系是完整相容关系 Ψ 在符号状态上的投影。更准确地说，如果（λ，μ）$\in \Psi$ 是一个可容许上下文转移，并且 f 是一个有效赋值，那么

$$f(\lambda) \to f(\mu)$$

必须出现在压缩边关系中。

因此，上述关系包含了可由可容许上下文转移产生的所有符号转移。

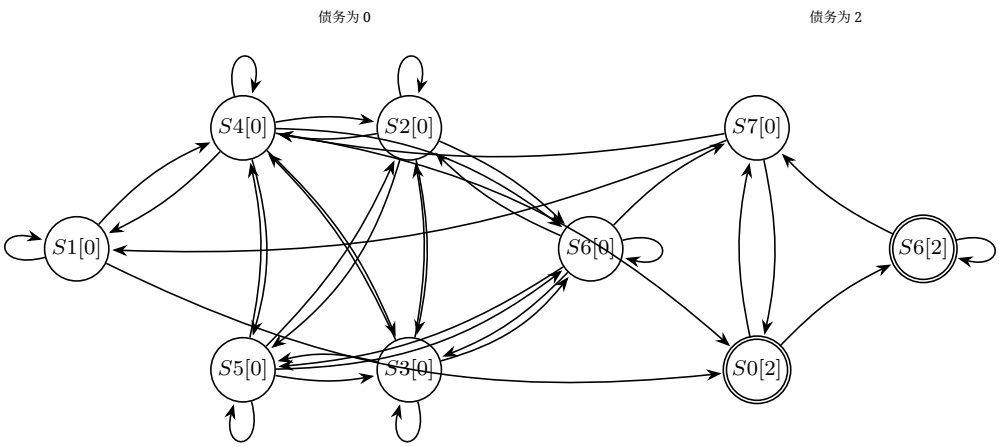

图 2：压缩后继关系的自动机式表示。普通圆圈表示债务为 0 的状态；双圆圈表示债务为 2 的状态。

15.5 机器可读形式

为确保可复现性，可将同一关系记录为检查器使用的精确数组形式：static const int REAL EDGES [][4] = {

```
{3,0,6,0},
{7,0,4,0},
{4,0,5,0},
{5,0,5,0},
{4,0,2,0},
{2,0,6,0},
{6,0,6,0},
{6,0,7,0},
{7,0,1,0},
{1,0,1,0},
{0,2,7,0},
{7,0,0,2},
{1,0,4,0},
{4,0,4,0},
{2,0,4,0},
{2,0,3,0},
{3,0,5,0},
{5,0,4,0},
{3,0,3,0}
{3,0,4,0},
{4,0,3,0},
{5,0,2,0},
{1,0,0,2},
{0,2,6,2},
{6,2,7,0},
{3,0,2,0},
{2,0,2,0},
{2,0,5,0},
{5,0,3,0},
{6,2,6,2},
{6,0,3,0},
{4,0,6,0},
{6,0,5,0},
{4,0,1,0},
{4,0,0,2},
{5,0,6,0},
{6,0,2,0},
```

};

15.6 邻接表形式

等价地，转移关系也可以按源状态分组如下：

$$\begin{aligned}
&S0[2] \to S7[0],\ S6[2],S1[0] \to S1[0],\ S4[0],\ S0[2],\\
&S2[0] \to S6[0],\ S4[0],\ S3[0],\ S2[0],\ S5[0],S3[0] \to S6[0],\\
&\ S5[0],\ S3[0],\ S4[0],\ S2[0],S4[0] \to S5[0],\ S2[0],\ S4[0],\\
&\ S3[0],\ S6[0],\ S1[0],\ S0[2],S5[0] \to S5[0],\ S4[0],\ S2[0],\\
&\ S3[0],\ S6[0],S6[0] \to S6[0],\ S7[0],\ S3[0],\ S5[0],\ S2[0],\\
&S6[2] \to S7[0],\ S6[2],S7[0] \to S4[0],\ S1[0],\ S0[2].
\end{aligned}$$

15.7 关键结构性质

该转移

$$S1[0] \to S1[0]$$

存在于压缩关系中。

这个自环对证明至关重要，因为它确保统一的模式 A 赋值满足临界核心上的所有相容性约束。

15.8 一致性检查

诱导核心关系（附录 A）中出现的所有转移都包含在上文列出的压缩边关系中。

这为局部传播器、相容图 Ψ和临界核心验证之间提供了独立的一致性检查。

参考文献

[1] A. Alkan。关于霍夫施塔特 Q 数列的一种推广：一族混沌代际结构。*Complexity*，文章编号 8517125，2018年。[2] A. Alkan、N. Fox 和 O. O. Aybar。关于霍夫施塔特心形序列。*Complexity*，文章编号 2614163，2017年。[3] B. Balamohan、A. Kuznetsov 和 S. Tanny。关于霍夫施塔特 Q 序列的一个变体的行为。*Journal of Integer Sequences*，10：文章编号 07.1.2，2007年。[4] M. Bodirsky 和 D. Kr´al'。具有二元约束的局部一致约束满足问题。载于 *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*，第 3787 卷*Lecture Notesin Computer Science*，第 235–246 页。Springer，2005年。

[5] J. M. Campbell 和 B. Cloitre。《元自动序列》。***arXiv*** 预印本，2026年。

[6] M. Celaya 和 Frank Ruskey。一个不可判定的嵌套递推关系。载于《计算的世界》，第 7318 卷《Lecture Notes in Computer Science》，第 138–149 页。Springer，2012年。[7] Nathan Fox。利用符号计算寻找类霍夫施塔特递推的线性递推解。*arXiv* 预印本，2016年。[8] Nathan Fox。霍夫施塔特 Q 递推的新方法。*arXiv* 预印本，2018年。[9] Nathan Fox。具有线性初始条件的三项类霍夫施塔特递推的行为。*arXiv* 预印本，2024年。[10] Pavol Hell 和 Jaroslav Ne˘set˘ril。《图与同态》。牛津大学出版社，2004年。[11] Douglas R. Hofstadter。《G》¨ *odel, Escher, Bach:* 一条永恒的金带。Basic Books，1979年。[12] OEIS基金会。在线整数数列百科全书中的条目 a394051。https: //oeis.org/A394051，2026年。访问日期：2026年3月31日。[13] Douglas Lind 和 Brian Marcus。《符号动力学与编码导论》。剑桥大学出版社，1995年。[14] Marco Mantovanelli。扰动霍夫施塔特递归中的二进自相似性。*arXiv* 预印本，2026年。[15] Marco Mantovanelli。《扰动的霍夫施塔特数列良定义性的有限状态证明》的验证代码。https://github.com/Mantovanelli1110/ perturbed-hofstadter-well-definedness，2026年。与该论文对应的版本。[16] Klaus Pinn。霍夫施塔特 Q 数列中的有序与混沌。*Complexity*，4(3):41–46，1999年。[17] Stephen M. Tanny。霍夫施塔特数列的一个性质良好的近亲数列。《离散数学》，105:227–239，1992年。[18] P. Trojovsk´y。关于一个与霍夫施塔特数列及莫比乌斯函数相关的元斐波那契数列的若干性质。《混沌、孤子与分形》，134:109719，2020年。[19] P. Trojovsk´y。关于霍夫施塔特–默滕斯函数的若干性质。*Complexity*，文章编号 1816756，2020年。[20] Pavel Trojovsk´y。关于霍夫施塔特 Q 数列的性质。《混沌、孤子与分形》，133:109644，2020年。