arXiv:2603.29639v1 [math.QA] 31 Mar 2026

有限群概形的 Drinfeld 双及其表示范畴

DANIEL ARREOLA 和 SHLOMO GELAKI

Abstract. 我们用群概形理论数据对代数闭域 k（其特征为 $p \geq 0$）上的有限群概形 G 的 Drinfeld 双 $D(G)$ 的 Hopf 代数商对 (D, θ) 的等价类进行分类。我们证明，这类 Hopf 代数商 D 是 Hopf 代数扩张 $\mathscr{O}(K)^{\mathrm{cop}}\#_{\sigma}^{\tau}\mathrm{k}[G/H]$，其中 K 和 H 是 G 的正规子群概形，且彼此中心化；此外，$B : \mathrm{k}[H] \to \mathscr{O}(K)$ 是一个 G-等变 Hopf 代数映射，并描述满射霍普夫代数映射 $\theta : D(G) \twoheadrightarrow D$。利用这一分类，我们确定了 G 的中心 $\mathscr{Z}(G) := \mathrm{Rep}(D(G))$ 中的张量子范畴，描述其中心化子，确定它们何时对称或非退化，并利用 [GS1] 描述其简单对象和射影对象。我们的范畴论结果推广了特征为 0 时 [NNW]中的相关结果。

Contents

1. 引言 2 1.1. 结构安排 3 1.2. 致谢 3 2. 预备知识 3 2.1. 有限群概形 4 2.2. 正规子群概形 5 2.3. 有限群概形的 Drinfeld 双 7 2.4. $D(G)$ 的表示范畴 7 3. $D(G)$ 的 Hopf 代数商 10 3.1. $D(G)$ 的 Hopf 商构造 10 3.2. $D(G)$ 的 Hopf 商对分类 16 3.3. $D(K, H, B)$ 上的拟三角带状结构 21 4. $\mathrm{Rep}(D(G))$ 的张量子范畴 22 4.1. 构造与分类 22 4.2. $\mathscr{Z}(K, H, B)$ 的 M¨ 中心化子 22 4.3. $\mathscr{Z}(K, H, B)$ 的简单对象与投射对象 24 5. 一些特殊情形和例子 28 5.1. 典范例子 28 5.2. 直积 29 5.3. 常值群 29

日期：2026年4月1日。关键词和短语。有限群概形；Drinfeld 双；有限编织张量范畴；表示论。

5.4. 连通群 5.5. 平凡 B 30
5.6. 交换群 6. 附录 6.1. 群概形 $\mathbb{G}_{a,r}$6.2. $\mathscr{Z}(\mathbb{G}_{a,1})$ 的中心 6.3. $\mathscr{Z}(\mathbb{G}_{a,2})$ 的中心 参考文献 31 32 33 33 33 33 36

1. Introduction

有限群概形 G 在特征为 $p \geq 0$ 的代数闭域 k 上的 Drinfeld 双 $D(G)$ 的表示范畴 $\mathscr{Z}(G)$: $=$ Rep($D(G)$) 在有限编织张量范畴理论 [CH、CCC、DGNO、ERW、FN1、FN2、Ge1、Ge2、GS1、GS2、Go、N、NNW]中发挥着核心作用。在特征为 $p = 0$ 时，范畴 $\mathscr{Z}(G)$ 是一个非退化编织融合范畴；在这一半单情形下，Naidu、Nikshych 和 Witherspoon [NNW] 对 $\mathscr{Z}(G)$ 的张量子范畴进行了分类。[NNW] 的一个关键特征是，可以利用模数据作为有效的组织原则。具体而言，S-矩阵的 $\mathscr{Z}(G)$ 能够检测 $\mathscr{Z}(G)$ 中的两个简单对象何时彼此中心化，而 M¨uger 中心化子则可根据 S-矩阵关系计算，最终将子范畴问题转化为涉及 G 的相互交换的正规子群的明确群论条件。

在正特征下 $p > 0$，$\mathscr{Z}(G)$ 通常是 非半单的。尽管有限编织张量范畴仍有一个稳健的非退化性概念（例如 Lyubashenko 意义下的概念；根据 Shimizu [Sh]，它等价于 Etingof–Nikshych–Ostrik 意义下的可因子化性），但一般不存在一个可计算的、附属于简单对象的 S-矩阵，能够发挥其在融合情形中的相同作用。因此，[NNW] 的策略无法直接推广到非半单情形。

我们的方法以对 $D(G)$ 的 Hopf 商对进行 Hopf 理论分类，取代了 S-矩阵技术；随后利用 $D(G)$ 的 Hopf 商对能够编码 $\mathscr{Z}(G)$ 的张量子范畴这一事实。事实上，对于有限维霍普夫代数 H，Rep(H) 的张量子范畴与 H 的 Hopf 代数商对的等价类一一对应（例如参见 [BN，命题 2]），因此可以通过对 $D(G)$ 的 Hopf 代数商对进行分类，来研究 $\mathscr{Z}(G)$ $=$ Rep($D(G)$) 的张量子范畴。这一视角尤其适用于正特征情形：尽管无法使用 S-矩阵，Rep($D(G)$) 上的编织结构仍由 $D(G)$ 的泛 R-矩阵控制，而且可以通过元素 $R_{21}R$ 在 Hopf 代数一侧检验中心化条件（参见下文定理 4.5 证明中使用的判据）。

本文的第一个主要结果是根据群概形理论数据对 $D(G)$ 的 Hopf 代数商对 (D, θ) 进行分类。我们证明，每个 $D(G)$ 的 Hopf 代数商 D 都具有如下形式

$$D(K, H, B) := \mathscr{O}(K)^{\mathrm{cop}} \#_{\sigma}^{\tau} \mathbf{k}[G/H],$$

其中，K 和 H 是 G 的正规子群概形，且彼此中心化；B: $\mathbf{k}[H] \to \mathscr{O}(K)$ 是一个 G-等变 Hopf 代数映射，并描述满射霍普夫代数映射 θ：$D(G) \twoheadrightarrow D$（定理 3.5 和 3.9）。此外，$D(K, H, B)$ 总是带状编织的，我们给出了其 R-矩阵和带状元的显式公式（推论 3.13）。我们还确定了 $D(K, H, B)$ 成为三角的或可因子化的精确判据，从而得到大量拟三角 Hopf 代数族，它们可实现为 $D(G)$ 的 Hopf 代数商。

第二个主要结果是对 $\mathscr{Z}(G)$ 的张量子范畴格及其中心化子理论给出的完整群概形理论描述。利用上述 Hopf 代数商对分类，我们证明如下对应

$$(K, H, B) \mapsto \mathscr{Z}(K, H, B) := \mathrm{Rep}(D(K, H, B))$$

在三元组 (K, H, B) 与 $\mathscr{Z}(G)$ 的张量子范畴之间给出一个双射。接着，我们计算 $\mathscr{Z}(G)$ 中的 Müger 中心化子：对于每个张量子范畴 $\mathscr{Z}(K, H, B)$，其中心化子为 $\mathscr{Z}(H, K, B)$（定理 4.5），将特征零情形中借助模数据方法得到的 [NNW] 图景推广为纯粹的 Hopf 理论判据。因此，我们得到了 $\mathscr{Z}(G)$ 的张量子范畴对称性、非退化性和拉格朗日性的显式判据（推论4.6）。

最后，利用 $\mathscr{Z}(G)$ 的几何描述 [GS1], ，我们描述了 $\mathscr{Z}(K，H，B)$ 中的简单对象和射影对象，并计算了它们的 Frobenius-Perron 维数（定理 4.10）。在 §5 中，我们讨论了一些特殊情形和例子，以说明我们的结果。特别是，我们的可因子化性判据构造出正特征下非退化有限编织张量范畴的一系列例子（它们来自 $D(G)$ 的可因子化 Hopf 代数商），并展示了常值情形和连通情形下的例子。

注 1.1. 本文的结果可推广到有限群概形 $D^\omega(G$ 的扭曲 Drinfeld 双 G（它是一个拟 Hopf 代数）及其表示范畴 Rep($D^\omega(G)$，所用方法与结果类似于 [Ge1、GS2]。在特征 $p = 0$ 下， [NNW 的第 5] 节已完成此项工作。□

1.1. **文章结构**。 在 §2 中，我们回顾有限群概形、Hopf 代数和 Drinfeld 双的背景知识。在 §3 中，我们构造并分类$D(G)$ 的 Hopf 代数商对，并分析其在 $D(K、H、B)$ 上诱导的（拟三角缎带）结构。在 §4 中，我们运用这些结果对 $\mathscr{Z}(G)$ 的张量子范畴进行分类，计算其中心化子，并推导出关于对称性、非退化性和拉格朗日性的判据。随后，我们利用 $\mathscr{Z}(K、H、B)$ 描述其中的单对象与投射对象。 [GS1]。

1.2. **致谢**。S.G. 的工作得到西蒙斯基金会奖 963288 的支持。

2. Preliminaries

我们在代数闭域 $\mathbf{k}$上工作，其特征为 $p \geq 0$。我们假设读者熟悉 $\mathbf{k}$上的有限张量范畴与有限群概形理论；对于任何未作解释的概念，请参阅 [EGNO、J、W] 。

2.1. 有限群概形。定义在 k 上的有限群概形 G是一个定义在 k 上的有限概形，其坐标代数 $\mathscr{O}(G)$ 是有限维交换 Hopf 代数（例如参见 [J、W]），因此其群代数 $\mathbf{k}[G] := \mathscr{O}(G)^*$ 是有限维余交换 Hopf 代数。令 $|G| := \dim_{\mathbf{k}}(\mathscr{O}(G)) = \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[G])$。

令 G° 为 G 的单位连通分支，令 $G(\mathbf{k}) \subseteq G$ 为 G 的闭点所构成的子群。回顾一下，我们有一个有限群概形的分裂正合列

$$1 \to G^\circ \to G \underset{\gamma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} G(\mathbf{k}) \to 1. \tag{2.1}$$

令 L 为 G 的一个闭子群概形，令

$$\iota = \iota_L = \iota_{L,G} : L \hookrightarrow G \tag{2.2}$$

为群概形的包含映射，并令

$$q = q_L = q_{G,L} = \iota_L^\sharp : \mathscr{O}(G) \twoheadrightarrow \mathscr{O}(L) \tag{2.3}$$

为相应的满射霍普夫代数映射。回顾 [Sc，定理 2。2] 我们可以选取一个截面

$$\mu = \mu_L : \mathscr{O}(L) \xrightarrow{1:1} \mathscr{O}(G) \tag{2.4}$$

对于 q，使得 μ 是一个 $\mathscr{O}(L)$-余线性映射；也就是说， $\varepsilon\mu = \varepsilon$ 且

$$\mu(a_1) \otimes a_2 = \mu(a)_1 \otimes q(\mu(a)_2); \quad \forall a \in \mathscr{O}(L), \tag{2.5}$$

使得 $\mu(1) = 1$ 和

$$q(\mu(a)) = a; \quad \forall a \in \mathscr{O}(L). \tag{2.6}$$

我们将代数 $\mathscr{O}(G/L) = \mathscr{O}(G)^L$ 的维数记为 $[G : L]$。

回顾一下， G 对自身的右伴随（或共轭）作用为 g iven b y

$$\mathrm{ad_r} : G \times G \to G, \quad (g, f) \mapsto f^{-1}gf; \tag{2.7}$$

即， $\mathrm{ad_r}(u)(\tilde{u}) = S(u_1)\tilde{u}u_2$ ，其中 $u, \tilde{u} \in \mathbf{k}[G]$，而代数余态射

$$\mathrm{ad_r}^\sharp : \mathscr{O}(G) \to \mathscr{O}(G) \otimes \mathscr{O}(G), \quad b \mapsto b_2 \otimes S(b_1)b_3, \tag{2.8}$$

是 $\mathscr{O}(G)$ 对自身的右伴随余作用。于是， $\mathrm{ad_r}^\sharp$ 对应于 $\rightharpoonup$ 在 $\mathscr{O}(G)$ 上的左余伴随作用，其中$\mathbf{k}[G]$，定义为

$$\mathbf{k}[G] \otimes \mathscr{O}(G) \to \mathscr{O}(G), \quad u \otimes b \mapsto u \rightharpoonup b := \langle S(b_1)b_3, u\rangle\, b_2. \tag{2.9}$$

也就是说，对于每个 $u, \tilde{u} \in \mathbf{k}[G]$ 和 $b \in \mathscr{O}(G)$，我们有

$$\langle u \rightharpoonup b, \tilde{u}\rangle = \langle b, \mathrm{ad_r}(u)(\tilde{u})\rangle. \tag{2.10}$$

显然，若 G是交换的（也就是说， $\mathscr{O}(G)$是余交换的），则 $\rightharpoonup$ 是平凡的。

2.2. **正规子群概形**。 固定一个有限群概形 G，其定义在 $\mathbf{k}$ 上，如§2.1中所述。令 $H \subseteq G$ 为一个正规子群概形；也就是说，$\mathrm{ad_r}(H \times G) \subseteq H$，因此 G/H 是一个有限群概形。令 $\pi = \pi_H : G \twoheadrightarrow G/H$ 为商群概形态射。根据 [Sc，定理 2.2], Hopf 代数正合列

$$\mathbf{k} \to \mathbf{k}[H] \xrightarrow{\iota} \mathbf{k}[G] \xrightarrow{\pi} \mathbf{k}[G/H] \to \mathbf{k} \tag{2.11}$$

是劈裂的。也就是说，将$\mathbf{k}[G]$ 视为通过以下方式得到的右 $\mathbf{k}[G/H]$-余模

$$\rho = \rho_H : \mathbf{k}[G] \to \mathbf{k}[G] \otimes \mathbf{k}[G/H], \quad u \mapsto u_1 \otimes \pi(u_2),$$

我们有$\mathbf{k}[G]^{\mathrm{co}\mathbf{k}[G/H]} = \mathbf{k}[H]$，并且可以选取一个截面

$$\gamma = \gamma_H : \mathbf{k}[G/H] \xrightarrow{1:1} \mathbf{k}[G], \tag{2.12}$$

它是一个卷积可逆的$\mathbf{k}[G/H]$-余线性映射；也就是说，$\varepsilon\gamma = \varepsilon$ 和

$$\gamma(x_1) \otimes x_2 = \gamma(x)_1 \otimes \pi(\gamma(x)_2); \quad \forall x \in \mathbf{k}[G/H], \tag{2.13}$$

使得

$$\pi(\gamma(x)) = x; \quad \forall x \in \mathbf{k}[G/H].$$

考虑映射 $\eta = \eta_H := \mathrm{id} \star (\gamma^{-1}\pi)$；也就是说,

$$\eta : \mathbf{k}[G] \to \mathbf{k}[H], \quad u \mapsto u_1\gamma^{-1}(\pi(u_2)). \tag{2.14}$$

注意，由于 γ 和 γ^{-1} 保持余单位,

$$\pi(u_1\gamma^{-1}(\pi(u_2))) = \pi(u_1)S(\pi(u_2)) = \varepsilon(u) = \varepsilon(\gamma^{-1}\pi(u)) = \varepsilon(u_1\gamma^{-1}(\pi(u_2))),$$

因此确有 $\eta(u) \in \mathbf{k}[G]^{\mathrm{co}\mathbf{k}[G/H]} = \mathbf{k}[H]$。

引理 2.1. 以下结论成立：

(1) η 是包含映射 $\iota : k[H] \hookrightarrow k[G]$的 $k[H]$-线性回缩，使得对每个 $x \in k[G/H]$, 都有 $\eta(\gamma(x)) = \varepsilon(x)$。*(2)* 对每个 $u \in k[G]$，都有 $u = \eta(u_1)\gamma(\pi(u_2))$。*(3)* 对每个 $u, \tilde{u} \in k[G]$，都有

$$\eta(u\tilde{u}) = \eta(u_1)\gamma(\pi(u_2))_1\eta(\tilde{u}_1)S(\gamma(\pi(u_2))_2)\eta\{\gamma(\pi(u_2))_3\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\}.$$

(4) 对每个 $u \in \mathbf{k}[G]$，都有 $\gamma(\pi(u)) = \eta^{-1}(u_1)u_2$。(5) 对每个 $u \in \mathbf{k}[G]$，都有 $\eta^{-1}(u) = \gamma(\pi(u_1))S(u_2)$。

证明。 (1) 利用 (2.13) 验证 $\eta(\gamma(x)) = \gamma(x)_1\gamma^{-1}(\pi(\gamma(x)_2)) = \gamma(x_1)\gamma^{-1}(x_2) = \varepsilon(x)$。

(2) 由于 $\eta = \mathrm{id} \star (\gamma^{-1}\pi)$，我们有 $\eta \star (\gamma\pi) = \mathrm{id}$。

(3) 由 (2) 可得

$$\begin{aligned} u\tilde{u} &= \{\eta(u_1)\gamma(\pi(u_2))\}\,\{\eta(\tilde{u}_1)\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\} \\ &= \eta(u_1)\,\{\gamma(\pi(u_2))_1\eta(\tilde{u}_1)S(\gamma(\pi(u_2))_2)\}\,\gamma(\pi(u_2))_3\gamma(\pi(\tilde{u}_2)), \end{aligned}$$

这意味着

$$\eta(u\tilde{u}) = \eta(u_1)\,\{\gamma(\pi(u_2))_1\eta(\tilde{u}_1)S(\gamma(\pi(u_2))_2)\}\,\eta\,\{\gamma(\pi(u_2))_3\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\},$$

如所声称的。

(4)-(5) 显而易见。 □

回顾一下，Hopf 代数 $\mathbf{k}[G/H]$ 通过 $\cdot$测量$\mathbf{k}[H]$，其定义为

$$\mathbf{k}[G/H]\otimes\mathbf{k}[H]\to\mathbf{k}[H],\quad x\cdot u=\gamma(x_1)u\gamma^{-1}(x_2).$$

还要回顾一下，$\mathbf{k}$-线性映射

$$\overline{\sigma}:\mathbf{k}[G/H]\otimes\mathbf{k}[G/H]\to\mathbf{k}[H],\quad \overline{\sigma}(x,y)=\gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma^{-1}(x_2y_2), \tag{2.15}$$

是一个 2-余循环，而 $\mathbf{k}$-线性映射

$$\begin{aligned}&\overline{\tau}:\mathbf{k}[G/H]\to\mathbf{k}[H]\otimes\mathbf{k}[H],\\ &\overline{\tau}(x)=\eta^{-1}(\gamma(x)_1)_1\eta(\gamma(x)_2)\otimes\eta^{-1}(\gamma(x)_1)_2\eta(\gamma(x)_3),\end{aligned} \tag{2.16}$$

是一个余余循环。例如，要说明 σ 定义良好，首先注意到

$$\pi(\gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma^{-1}(x_2y_2))=x_1y_1S(x_2y_2)=\varepsilon(xy).$$

另一方面，利用（2.13）可得

$$\begin{aligned}\varepsilon(\gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma^{-1}(x_2y_2))&=\varepsilon(\gamma(x)_1\gamma(y)_1\gamma^{-1}(\pi(\gamma(x)_2\gamma(y)_2)))\\ &=\varepsilon(\gamma^{-1}(\pi(\varepsilon(\gamma(x)_1)\gamma(x)_2\varepsilon(\gamma(y)_1)\gamma(y)_2)))\\ &=\varepsilon(\gamma^{-1}(\pi(\gamma(x)\gamma(y))))=\varepsilon(\gamma^{-1}(xy))=\varepsilon(xy).\end{aligned}$$

这表明 $\gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma^{-1}(x_2y_2)\in\mathbf{k}[G]^{\mathrm{co}\mathbf{k}[G/H]}=\mathbf{k}[H]$，正如所需。

最后，众所周知（例如参见 [AD，第 3 节。2]），映射

$$\mathrm{f}:\mathbf{k}[G]\to\mathbf{k}[H]\#_{\overline{\sigma}}^{\overline{\tau}}\mathbf{k}[G/H],\quad u\mapsto\eta(u_1)\#\pi(u_2),$$

是一个 Hopf 代数同构，其逆映射为

$$\mathrm{f}^{-1}:\mathbf{k}[H]\#_{\overline{\sigma}}^{\overline{\tau}}\mathbf{k}[G/H]\to\mathbf{k}[G],\quad v\#x\mapsto v\gamma(x).$$

例如，利用（2.13）以及 η 是$\mathbf{k}[H]$-线性的这一事实，我们计算得

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{f}^{-1}(v\otimes x))&=\mathrm{f}(v\gamma(x))=\eta(v_1\gamma(x)_1)\otimes\pi(v_2\gamma(x)_2)\\ &=v_1\eta(\gamma(x)_1)\otimes\varepsilon(v_2)\pi(\gamma(x)_2)=v\eta(\gamma(x)_1)\otimes\pi(\gamma(x)_2)\\ &=v\eta(\gamma(x_1))\otimes x_2=v\varepsilon(x_1)\otimes x_2=v\otimes x,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(u))&=\mathrm{f}^{-1}(\eta(u_1)\otimes\pi(u_2))=\eta(u_1)\gamma(\pi(u_2))\\ &=u_1\gamma^{-1}(\pi(u_2))\gamma(\pi(u_3))=u_1\varepsilon(\pi(u_2))=u,\end{aligned}$$

因此，f 和 f^{-1} 确实互为逆映射。

注 2.2。 **(1)** 若 γ (2.12) 是代数映射，则 σ (2.15）是平凡的。

(2) 若 η (2.14) 是余代数映射，等价地，若 γ (2.12) 是余代数映射（例如，若 $H=1$，或 $G=G(\mathbf{k})$ 是常值），则 τ (2.16) 是平凡的。事实上，由于$\mathbf{k}[G]$ 是余交换的，$\eta^{-1}=(\gamma\pi)\star S$ 也是一个余代数映射（见引理 2.1**(4)**），因此

$$\begin{aligned}\overline{\tau}(x)&=\eta^{-1}(\gamma(x)_1)_1\eta(\gamma(x)_2)\otimes\eta^{-1}(\gamma(x)_1)_2\eta(\gamma(x)_3)\\ &=\eta^{-1}(\gamma(x_1))_1\eta(\gamma(x_2))\otimes\eta^{-1}(\gamma(x_1))_2\eta(\gamma(x_3))\\ &=\eta^{-1}(\gamma(x_1))_1\varepsilon(x_2)\otimes\eta^{-1}(\gamma(x_1))_2\varepsilon(x_3)\\ &=\eta^{-1}(\gamma(x))_1\otimes\eta^{-1}(\gamma(x))_2=\eta^{-1}(\gamma(x_1))\otimes\eta^{-1}(\gamma(x_2))\\ &=\varepsilon(x_1)\otimes\varepsilon(x_2)=\varepsilon(x)1\otimes1,\end{aligned}$$

正如所声称的。 □

2.3. **有限群概形的 Drinfeld 双。** 固定一个有限群概形 G在 $\mathbf{k}$ 上，如 §2.1所述。回顾一下，Drinfeld 双

$$D(G) = \mathscr{O}(G)^{\mathrm{cop}} \bowtie \mathbf{k}[G]$$

的$\mathbf{k}[G]$ 是张量余代数 $\mathscr{O}(G)^{\mathrm{cop}} \otimes \mathbf{k}[G]$，其乘法规则为

$$(b \bowtie u)(b' \bowtie u') = b(u_1 \rightharpoonup b') \bowtie u_2 u',$$

其中 $\rightharpoonup$ 定义于（2.9）中。回顾一下， $D(G)$ 是一个对合的 Hopf 代数，且自然映射

$$\mathbf{k}[G] \hookrightarrow D(G), \quad \text{and} \quad \mathscr{O}(G)^{\mathrm{cop}} \hookrightarrow D(G)$$

是 Hopf 代数嵌入。由于对每个 $u \in \mathbf{k}[G]$ 和 $b \in \mathscr{O}(G)$,

$$\begin{aligned}(1 \bowtie u_1)(b \bowtie 1)(1 \bowtie S(u_2)) &= (1 \bowtie u_1)(b \bowtie S(u_2)) \\ &= (u_1 \rightharpoonup b) \bowtie u_2 S(u_3) = (u_1 \rightharpoonup b) \bowtie \varepsilon(u_2) = (u \rightharpoonup b) \bowtie 1,\end{aligned}$$

由此可知 $\mathscr{O}(G)$ 是 $D(G)$ 的正规 Hopf子代数，因此我们有一个 Hopf 代数正合列

$$\mathbf{k} \to \mathscr{O}(G) \to D(G) \to D(G)/(D(G)\mathscr{O}(G)^+) \to \mathbf{k}.$$

由于映射

$$D(G)/(D(G)\mathscr{O}(G)^+) \to \mathbf{k}[G], \quad [b \bowtie u] \mapsto \varepsilon(b)u, \tag{2.17}$$

is 是一个 Hopf 代数同构，我们有一个 Hopf 代数正合列

$$\mathbf{k} \to \mathscr{O}(G) \to D(G) \to \mathbf{k}[G] \to \mathbf{k}.$$

最后，设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbf{k}[G]$ 的一组基， $\{\delta_u \mid u \in \mathcal{B}\}$ 是 $\mathscr{O}(G)$ 的对偶基。回想一下，元素

$$R := \sum_{u \in \mathcal{B}} (1 \bowtie u) \otimes (\delta_u \bowtie 1) \tag{2.18}$$

是一个 R-矩阵 ，用于表示 $D(G)$，并且 $(D(G)\ R)$ 是可因子化的且带状的，其带状元为

$$V := \sum_{u \in \mathcal{B}} S(\delta_u) \bowtie u. \tag{2.19}$$

2.4. **表示范畴** $D(G)$。 固定一个有限群概形 G ，其定义在 $\mathbf{k}$ 上，如§2.1所述。令 ad_ℓ 为 左伴随作用 G 在自身上的作用，定义如下:

$$\mathrm{ad}_\ell(u)(\tilde{u}) = u_1 \tilde{u} S(u_2); \quad \forall u, \tilde{u} \in \mathbf{k}[G].$$

令 $\mathsf{C} := G/\mathsf{ad}_\ell$ 为 G [GS1， GS2],中共轭轨道的有限商概形，并令 $\mathsf{p}: G \twoheadrightarrow \mathsf{C} := G/\mathsf{ad}_\ell$ 为 [J，第 5] 章中的商概形态射。于是 $\mathsf{p}^\sharp : \mathscr{O}(\mathsf{C}) \xrightarrow{1\,1} \mathscr{O}(G)$ 是一个单射代数映射，并且

$$\mathrm{im}(\mathsf{p}^\sharp) = \mathscr{O}(G)^{\mathrm{co}G} := \{b \in \mathscr{O}(G) \mid \mathrm{ad}_\ell^\sharp(b) = 1 \otimes b\}$$

是 $\mathscr{O}(G)$ 的一个子代数，因此 $\mathscr{O}(\mathsf{C}) = \mathscr{O}(G)^{\mathrm{co}G}$ 可经由 $\mathsf{p}^\sharp$得到。

给定一个闭点 $g \in G$（$\mathbf{k}$），考虑概形态射

$$\mathrm{ad}_g : G \to G, \quad f \mapsto \mathrm{ad}_\ell(g, f) = fgf^{-1}, \tag{2.20}$$

并令

$$C_g := \mathrm{im}(\mathrm{ad}_g) \subset G \tag{2.21}$$

是 共轭轨道 的 g [GS1，GS2]。那么

$$\mathbf{k}[C_g] := \{\mathrm{ad}_\ell(u)(g) \mid u \in \mathbf{k}[G]\}$$

是 子余代数 $\mathbf{k}[G]$，C_g(k) $\subset$ G(k) 是 g 在 G(k) 中的共轭类，而 C(k) $= \{C_g \mid g \in G$(k)$\}$。此外，令

$$G_g := \{f \in G \mid \mathrm{ad}_g(f) = g\} \tag{2.22}$$

是 g 在 G 中的中心化子；它是 G 的子群概形，因此

$$\mathbf{k}[G_g] := \{u \in \mathbf{k}[G] \mid ug = gu\}$$

是 *Hopf*子代数，属于 $\mathbf{k}[G]$。概形态射 ad_g (2.20) 经过有限商概形 G/G_g，并诱导出一个典范概形同构

$$i_g : G/G_g \xrightarrow{\cong} C_g \tag{2.23}$$

(参见 [J，第 5] 章，详情见其中）。换言之，映射

$$i_g^\sharp : \mathscr{O}(C_g) \to \mathscr{O}(G/G_g) = \mathscr{O}(G)^{G_g} \subseteq \mathscr{O}(G), \quad \langle i_g^\sharp(c), u\rangle = \langle c, u_1 g S(u_2)\rangle,$$

是一个代数同构。

回忆一下，$\mathscr{O}(G/G_g) \subseteq \mathscr{O}(G)$ 是一个左 余理想子代数；也就是说，

$$\Delta\left(\mathscr{O}(G/G_g)\right) \subset \mathscr{O}(G) \otimes \mathscr{O}(G/G_g).$$

令 $q_g := q_{G^g}$： $\mathscr{O}(G) \twoheadrightarrow \mathscr{O}(G_g)$ 如 (2.3) 中所述，并考虑 Hopf-Galois扩张

$$0 \to \mathscr{O}(G/G_g) \hookrightarrow \mathscr{O}(G) \xrightarrow{q_g} \mathscr{O}(G_g) \to 0,$$

其中，我们通过以下方式将 $\mathscr{O}(G)$ 视为右 $\mathscr{O}(G_g)$-余模

$$\rho_g : \mathscr{O}(G) \to \mathscr{O}(G) \otimes \mathscr{O}(G_g), \quad b \mapsto b_1 \otimes q_g(b_2),$$

从而 $\mathscr{O}(G/G_g) = \mathscr{O}(G)^{\mathrm{co}\mathscr{O}(G_g)} = \{b \in \mathscr{O}(G) \mid b_1 \otimes q_g(b_2) = b \otimes 1\} \subseteq \mathscr{O}(G)$。令

$$\mu_g := \mu_{G_g} : \mathscr{O}(G_g) \xrightarrow{1:1} \mathscr{O}(G)$$

是 q_g 的截面，如（2.4）所示，并设

$$\alpha_g : \mathscr{O}(G) \twoheadrightarrow \mathscr{O}(G/G_g), \quad b \mapsto b_1 \mu_g^{-1}(q_g(b_2)),$$

是包含映射 $\mathscr{O}(G/G_g) \subseteq \mathscr{O}(G)$ 的回缩；它是 $\mathscr{O}(G/G_g)$-线性的。回忆一下，μ_g 是一个卷积可逆的 $\mathscr{O}(G/G_g)$-余线性映射；也就是说，$\varepsilon\mu_g = \varepsilon$ 并且

$$\mu_g(d_1) \otimes d_2 = \mu_g(d)_1 \otimes q_g(\mu_g(d)_2); \quad \forall d \in \mathscr{O}(G_g), \tag{2.24}$$

使得对于每个 $d \in \mathscr{O}(G_g)$，我们都有

$$q_g(\mu_g(d)) = d \quad and \quad \alpha_g(\mu_g(d)) = \varepsilon(d). \tag{2.25}$$

对于每个 $C \in \mathbf{C}(\mathbf{k})$ (2.21)，令 $\pi_C : C \twoheadrightarrow C(\mathbf{k})$ 和 $\gamma_C : C(\mathbf{k}) \xrightarrow{1\,1} C$: 为将 $\pi : G \twoheadrightarrow G(\mathbf{k})$ 和 $\gamma : G(\mathbf{k}) \xrightarrow{1\,1} G$: (2.1) 限制后得到的概形态射，并定义 $\mathscr{O}(G)$-线性代数映射

$$\chi_C := \mathrm{id} \otimes \gamma_C^\sharp : \mathscr{O}(G^\circ) \otimes \mathscr{O}(C) \twoheadrightarrow \mathscr{O}(G^\circ) \otimes \mathscr{O}(C(\mathbf{k})), \text{ and}$$
$$\nu_C := \mathrm{id} \otimes \pi_C^\sharp : \mathscr{O}(G^\circ) \otimes \mathscr{O}(C(\mathbf{k})) \xrightarrow{1:1} \mathscr{O}(G^\circ) \otimes \mathscr{O}(C).$$

（参见 [GS1、GS2]了解更多详情。）

现在令 $\mathscr{Z}(G) := \mathrm{Rep}(D(G)$ 为有限维$\mathbf{k}$-表示范畴；它是一个有限的 $D(G$的非退化缎带编织张量范畴。回忆 [Ge1] 存在典范张量等价

$$\mathrm{Coh}(G)^G \simeq \mathscr{Z}(G), \tag{2.26}$$

其中 $\mathrm{Coh}(G)^G$ 是关于 G 在自身上的右共轭作用（2.7）的 G-等变层范畴。也就是说，$\mathrm{Coh}(G)^G$ 的一个对象是一个对象$X \in \mathrm{Coh}(G)$，并配备右 $\mathscr{O}(G)$-余模结构 ρ : $X \to X \otimes \mathscr{O}(G)$，满足 $\rho(a \cdot x) = \mathrm{ad}_{\mathrm{r}}^\sharp(a) \cdot \rho(x)$。特别地， $\mathscr{Z}(G)$是一个群概形理论范畴 [Ge1]。

对于每个 $C \in \mathbf{C}(\mathbf{k})$，令 $\mathscr{Z}(G)_C \subset \mathscr{Z}(G)$为由所有被 C的定义理想 $\mathscr{I}(C) \subset \mathscr{O}(G)$所消去的对象组成的全阿贝尔子范畴，并令$\mathscr{Z}(G)_C$为 $\mathscr{Z}(G)_C$ 在 $\mathscr{Z}(G)$中的 Serre 闭包；也就是说， $\mathscr{Z}(G)_C$ 是 $\mathscr{Z}(G)$的全阿贝尔子范畴，由所有合成因子属于 $\mathscr{Z}(G)_C$的对象组成。

定理 2.3。 [GS1，定理 8。3] 如下所示：

(1) 对于每个 $C_g \in \mathrm{C}(\mathbf{k})$，其代表元为 $g \in C_g(\mathbf{k})$，都存在一个阿贝尔范畴之间的等价

$$\mathbf{F}_{C_g} : \mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G_g)) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{Z}(G)_{C_g}, \ (M, \rho_M) \mapsto \left(\mathscr{O}(C_g) \otimes M, \rho_M^g\right), \tag{2.27}$$

其中 $\rho_M : M \to \mathscr{O}(G_g) \otimes M$、 $m \mapsto \sum m^{(-1)} \otimes m^{(0)}$，并且

$$\rho_M^g : \mathscr{O}(C_g) \otimes M \to \mathscr{O}(C_g) \otimes M \otimes \mathscr{O}(G),$$
$$\rho_M^g(c \otimes m) = \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \alpha_g \left(i_g^\sharp(c)_1 \mu_g \left(m^{(-1)}\right)_1\right) \otimes m^{(0)} \otimes i_g^\sharp(c)_2 \mu_g \left(m^{(-1)}\right)_2.$$

这里， $\mathscr{O}(G)$通过满射代数映射$q_{C_g} : \mathscr{O}(G) \twoheadrightarrow \mathscr{O}(C_g)$作用于 $\mathscr{O}(C_g) \otimes M$的第一个因子上。

特别地，复合函子

$$\mathrm{Rep}(G) \simeq \mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G)) \xrightarrow{\mathbf{F}_1} \mathscr{Z}(G)_1 \hookrightarrow \mathscr{Z}(G)$$

与辫子范畴的典范嵌入 $\mathrm{Rep}(G) \hookrightarrow \mathscr{Z}(G)$ 一致。

(2) 对于每个 $C_g \in \mathrm{C}(\mathbf{k})$，其代表元为 $g \in C_g(\mathbf{k})$，简单对象 $(M, \rho_M) \in \mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G_g))$ 的等价类与 $\mathscr{Z}(G)_{C_g}$ 的简单对象之间存在一个双射，将 (M, ρ_M) 对应到 $\mathbf{F}_{C_g}(M, \rho_M)$。此外，我们有阿贝尔范畴的直和分解

$$\mathscr{Z}(G) = \bigoplus_{C_g \in \mathrm{C}(k)} \mathscr{Z}(G)_{C_g},$$

且 $\overline{\mathscr{Z}(G)_1} \subseteq \mathscr{Z}(G)$ 是一个编织子范畴。特别地，如果 G 连通，那么 $\mathscr{Z}(G)$ 的简单对象恰为 $\mathrm{Rep}(G) \simeq \mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G))$的简单对象。

(3) 对于每个简单的 $(M, \rho_M) \in$余表示$(\mathscr{O}(G_g))$，其射影覆盖为 $P_{G_g}(M, \rho_M)$，我们有

$$P_{\mathscr{Z}(G)}\left(\mathbf{F}_{C_g}(M, \rho_M)\right) \cong \left(\mathscr{O}(G^\circ) \otimes \mathscr{O}(C_g(\mathbf{k})) \otimes P_{G_g}(M, \rho_M), R_M^g\right),$$

其中，$\mathscr{O}(G)$ 在前两个因子上按对角方式作用，并且

$$R_M^g := \left(\chi_{C_g} \otimes \mathrm{id}^{\otimes 2}\right)\left(\mathrm{id}_{\mathscr{O}(G^\circ)} \otimes \rho^g_{P_{G_g}(M,\rho_M)}\right)\left(\nu_{C_g} \otimes \mathrm{id}\right).$$

(4) 对于每个 $(M, \rho_M) \in$余表示$(\mathscr{O}(G_g))$，我们有

$$\mathrm{FPdim}\left(\mathbf{F}_{C_g}(M, \rho_M)\right) = |C_g| \dim_{\mathbf{k}}(M), \quad \textit{and}$$

FP维数$\left(P_{\mathscr{Z}(G)}\left(\mathbf{F}^{C_g}(M, \rho_M)\right)\right) = [G\colon G_g(\mathbf{k})]$维数$_{\mathbf{k}}\left(P_{G_g}(M, \rho_M)\right)$.

□

3. Hopf algebra quotients of $D(G)$

固定一个有限群概形 G 在 $\mathbf{k}$ 上，如 §2.1所述。

3.1. Hopf 商的构造 $D(G)$。设 K 是 G的一个正规子群概形。设 $q_K : \mathscr{O}(G) \twoheadrightarrow \mathscr{O}(K)$为相应的满射霍普夫代数映射，并且

$$\mu_K : \mathscr{O}(K) \xrightarrow{1:1} \mathscr{O}(G) \tag{3.1}$$

是 的一个截面，见（2.3）—（2.4）。由于 K 在 G中正规，Hopf 子代数$\mathscr{O}$（G/K）在 $\mathscr{O}$（G）之下对左余伴随 $\mathbf{k}[G]$-作用（2.9）稳定，因此我们得到一个定义良好的作用 $*$，它是 $\mathbf{k}[G]$ 在 $\mathscr{O}$（K）上的作用，定义如下：

$$\mathbf{k}[G] \otimes \mathscr{O}(K) \to \mathscr{O}(K), \quad u \otimes a \mapsto u * a := q_K(u \rightharpoonup \mu_K(a)), \tag{3.2}$$

它与 μ_K 的选取无关。事实上，若 $\mu'_K : \mathscr{O}(K) \to \mathscr{O}(G)$ 是 q_K 的另一个截面，则对于每个 $a \in \mathscr{O}(K)$，都有 $\mu'_K(a) - \mu_K(a) \in \mathscr{O}(G/K)^+\mathscr{O}(G)$。由于 Hopf 理想 $\mathscr{O}(G/K)^+\mathscr{O}(G)$ 在左余伴随 $\mathbf{k}[G]$-作用（2.9）下稳定，因此对所有 $u \in \mathbf{k}[G]$，有$u \rightharpoonup (\mu'_K(a) - \mu_K(a)) \in \mathscr{O}(G/K)^+\mathscr{O}(G)$。于是，

$$q_K(u \rightharpoonup \mu'_K(a)) = q_K(u \rightharpoonup \mu_K(a)),$$

因此 $*$ （3.2）与 μ_K的选择无关，正如所声称的那样。

特别地，我们有

$$u * q_K(b) := q_K(u \rightharpoonup b); \quad \forall u \in \mathbf{k}[G],\, b \in \mathscr{O}(G). \tag{3.3}$$

现在假设 H 是 G的另一个正规子群概形，因此我们有一个 Hopf 代数正合列

$$\mathbf{k} \xrightarrow{\iota_H} \mathbf{k}[H] \to \mathbf{k}[G] \xrightarrow{\pi_H} \mathbf{k}[G/H] \to \mathbf{k},$$

并选取一个截面 γ_H 如（2.12）所示。进一步假设 H 与 K 彼此中心化；也就是说，$vw = wv$ 对于每个 $v \in \mathbf{k}[H]$ 以及 $w \in \mathbf{k}[K]$。等价地，

$$\mathrm{ad_r}(v)(w) = S(v_1)wv_2 = \varepsilon(v)w; \quad \forall v \in \mathbf{k}[H],\, w \in \mathbf{k}[K].$$

那么，对于任意 $v \in \mathbf{k}[H]$ 和 $b \in \mathscr{O}(G)$，对每个 $w \in \mathbf{k}[K]$，都有：

$$\begin{aligned}\langle q_K(v \rightharpoonup b), w\rangle &= \langle v \rightharpoonup b, \iota_K(w)\rangle \\ &= \langle b, \mathrm{ad_r}(v)(\iota_K(w))\rangle = \langle b, \varepsilon(v)\iota_K(w)\rangle = \langle \varepsilon(v) q_K(b), w\rangle,\end{aligned}$$

因此 $q_K(v \rightharpoonup b) = \varepsilon(v) q_K(b)$。因此，(3.2) 诱导出一个定义良好的 $\mathbf{k}$-线性映射 $\cdot$，定义如下：

(3.4) $$\mathbf{k}[G/H] \otimes \mathscr{O}(K) \to \mathscr{O}(K), \quad x \otimes a \mapsto x \cdot a := \gamma_H(x) * a = q_K(\gamma_H(x) \rightharpoonup \mu_K(a)),$$

它与 γ_H（以及 μ_K）的选择无关。事实上，若 $\gamma'_H : \mathbf{k}[G/H] \to \mathbf{k}[G]$ 是 π_H 的另一个截面，那么对于每个 $x \in \mathbf{k}[G/H]$，我们有 $\gamma'_H(x) - \gamma_H(x) \in \mathbf{k}[G]\mathbf{k}[H]^+$。但对于任意 $uv, u \in \mathbf{k}[G]$ 以及 $v \in \mathbf{k}[H]^+$，有

$$(uv) * a = u * (v * a) = u * (q_K(v \rightharpoonup \mu_K(a))) = u * (\varepsilon(v) q_K(\mu_K(a))) = 0$$

对于每个 $a \in \mathscr{O}(K)$ 都成立。因此，对于每个 $a \in \mathscr{O}(K)$，

$$\gamma'_H(x) * a = (\gamma_H(x) + \gamma'_H(x) - \gamma_H(x)) * a = \gamma_H(x) * a,$$

因此 $\cdot$ (3.4) 与 γ_H的选择无关，断言得证。

特别地，我们有

$$\pi_H(u) \cdot a = u * a; \quad \forall u \in \mathbf{k}[G],\, a \in \mathscr{O}(K), \tag{3.5}$$

并且由（3.3），我们有

$$\pi_H(u) \cdot q_K(b) = u * q_K(b) = q_K(u \rightharpoonup b); \quad \forall u \in \mathbf{k}[G],\, b \in \mathscr{O}(G). \tag{3.6}$$

引理 3.1. *Hopf* 代数$\mathbf{k}[G/H]$ 作用并测量 $\mathscr{O}(K)$ 由（3.4）给出；也就是说，对每个 x, $y \in \mathbf{k}[G/H]$ 以及 a, $\tilde{a} \in \mathscr{O}(K)$，我们有

$$x \cdot (y \cdot a) = (xy) \cdot a, \quad x \cdot 1 = \varepsilon(x), \quad \textit{and} \quad x \cdot (a\tilde{a}) = (x_1 \cdot a)(x_2 \cdot \tilde{a}).$$

证明。 首先我们有 $(xy) \cdot a = \gamma_H(xy) * a$，并且

$$x \cdot (y \cdot a) = x \cdot (\gamma_H(y) * a) = \gamma_H(x) * (\gamma_H(y) * a) = (\gamma_H(x)\gamma_H(y)) * a,$$

因此，第一个等式由 $\gamma_H(xy) - \gamma_H(x)\gamma_H(y) \in \mathbf{k}[G]\mathbf{k}[H]^+$ 得出。

其次，由于 $\mu_K(1) = 1$和 $\varepsilon(\gamma_H(x)) = \varepsilon(x)$，对每个 $x \in \mathbf{k}[G/H]$，都有

$$x \cdot 1 = q_K(\gamma_H(x) \rightharpoonup 1) = q_K(\varepsilon(\gamma_H(x))) = \varepsilon(x),$$

如所声称的那样。

最后，由于我们有

$$\begin{aligned}&q_K(\mu_K(a\tilde{a})) = a\tilde{a} = q_K(\mu_K(a)\mu_K(\tilde{a})), \text{ and} \\ &(\pi_H \otimes \pi_H)(\gamma_H(x)_1 \otimes \gamma_H(x)_2) = \Delta(x) = (\pi_H \otimes \pi_H)(\gamma_H(x_1) \otimes \gamma_H(x_2)),\end{aligned} \tag{3.7}$$

由此可得

$$\begin{aligned}x \cdot (a\tilde{a}) &= q_K(\gamma_H(x) \rightharpoonup \mu_K(a\tilde{a})) = q_K(\gamma_H(x) \rightharpoonup \mu_K(a)\mu_K(\tilde{a})) \\ &= q_K(\gamma_H(x)_1 \rightharpoonup \mu_K(a))(\gamma_H(x)_2 \rightharpoonup \mu_K(\tilde{a})) \\ &= q_K(\gamma_H(x)_1 \rightharpoonup \mu_K(a)) q_K(\gamma_H(x)_2 \rightharpoonup \mu_K(\tilde{a})) \\ &= q_K(\gamma_H(x_1) \rightharpoonup \mu_K(a)) q_K(\gamma_H(x_2) \rightharpoonup \mu_K(\tilde{a})) = (x_1 \cdot a)(x_2 \cdot \tilde{a}),\end{aligned}$$

正如所声称的，其中我们在第二个和第五个等式中使用了（3.7）。 □

现在进一步假设我们有一个 Hopf代数映射

$$B : \mathbf{k}[H] \to \mathscr{O}(K), \tag{3.8}$$

它是 G-等变的，其含义是

$$\pi_H(u) \cdot B(v) = u * B(v) = B(\mathrm{ad}_\ell(u)(v)); \quad \forall u \in \mathbf{k}[G],\, v \in \mathbf{k}[H]. \tag{3.9}$$

注 3.2. (1) 该 G-等变 Hopf 代数映射 B (3.8) 可视为一个G-不变双特征标 B : $H \times K \to \mathbb{G}_m$，其含义是 Hopf 代数配对

$$\mathbf{k}[H] \otimes \mathbf{k}[K] \to \mathbf{k}, \quad v \otimes w \mapsto \langle B(v), w \rangle, \tag{3.10}$$

是 G-不变的；也就是说，

$$\langle B(\mathrm{ad}_\ell(u_1)(v)), \mathrm{ad}_\ell(u_2)(w) \rangle = \varepsilon(u) \langle B(v), w \rangle \tag{3.11}$$

或者等价地，

$$\langle B(\mathrm{ad}_\ell(u)(v)), w \rangle = \langle B(v), \mathrm{ad}_\ell(S(u))(w) \rangle$$

对于每个 $u \in \mathbf{k}[G]$、$v \in \mathbf{k}[H]$ 和 $w \in \mathbf{k}[K]$。

(2) 由于 B (3.8) 的像是 $\mathscr{O}(K)$ 的余交换Hopf子代数，因此存在一个正规子群概形 $L \subseteq K$，使得 K/L 是交换的，从而有 $\mathrm{im}(B) = \mathscr{O}(K/L) = \mathbf{k}[(K/L)^\vee]$，其中 $(K/L)^\vee$ 是 K/L 的 Cartier 对偶（例如参见 [GS1]）。因此，若 $\mathrm{Ker}(B) = \mathbf{k}[N]^+\mathbf{k}[H]$, $N \subseteq H$ 是一个正规子群概形，则H/N 是一个交换群概形，并且 B 诱导一个 G-等变群概形同构 $B : H/N \xrightarrow{\cong} (K/L)^\vee$。□

现在令 $\eta_H, \overline{\sigma}$ 和 τ分别如（2.14）、（2.15）和（2.16）中所定义，并定义$\mathbf{k}$-线性映射

$$\sigma := B\overline{\sigma} \quad \text{and} \quad \tau := B^{\otimes 2}\overline{\tau};$$

也就是说，

$$\sigma : \mathbf{k}[G/H] \otimes \mathbf{k}[G/H] \to \mathscr{O}(K), \quad \sigma(x, y) = B\left(\gamma_H(x_1)\gamma_H(y_1)\gamma_H^{-1}(x_2y_2)\right), \tag{3.12}$$

and

$$\begin{aligned} &\tau : \mathbf{k}[G/H] \to \mathscr{O}(K) \otimes \mathscr{O}(K), \\ &\tau(x) = (B \otimes B)\left\{\eta_H^{-1}(\gamma_H(x)_1)_1\eta_H(\gamma_H(x)_2) \otimes \eta_H^{-1}(\gamma_H(x)_1)_2\eta_H(\gamma_H(x)_3)\right\}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

并记 $\tau(x) = \tau(x)^1 \otimes \tau(x)^2$。注意，由于$\mathbf{k}[G]$的余交换性，$\tau(x)^1 \otimes \tau(x)^2 = \tau(x)^2 \otimes \tau(x)^1$,。

注记 3. 3. 根据注记 2.2之前的讨论，σ 和 τ 是良定义的。

(2) 根据注记2.2，若 γ_H 是代数映射，则 σ (3.12) 是平凡的；若 η_H (2.14) 是余代数映射，等价地，若 γ_H (2.12) 是余代数映射（例如，若 $H = 1$，或者$G = G(\mathbf{k})$ 是常值），则 τ (3.13) 是平凡的。

(3) 若 $B = 1$，则 σ (3.12) 和 τ (3.13) 都是平凡的。 □

引理 3.4. 令 $\pi := \pi_H$，以及 $\eta := \eta_H$。对于任意 u、$\tilde{u} \in \mathbf{k}[G]$，有如下结论：(1) $\sigma(\pi(u)\ \pi(\tilde{u})) = B\{\eta(\gamma(\pi(u))\gamma(\pi(\tilde{u})))\}$。(2) $\tau(\pi(u)) = (B \otimes B)\ \{\eta^{-1}(u_1)_1\eta(u_2) \otimes \eta^{-1}(u_1)_2\eta(u_3)\}$。

证明。 (1) 对每个 x， $y \in \mathbf{k}[G/H]$，由（2.13），

$$\begin{aligned}\eta(\gamma(x)\gamma(y)) &= \gamma(x)_1\gamma(y)_1\gamma^{-1}(\pi(\gamma(x)_2\gamma(y)_2))\\ &= \gamma(x)_1\gamma(y)_1\gamma^{-1}(\pi(\gamma(x)_2)\pi(\gamma(y)_2)) = \gamma(x_1)\gamma(y_1)\gamma^{-1}(x_2y_2),\end{aligned}$$

因此该断言得证。

（2）由于 γ（π（u））$= \eta^{-1}$（u_1）u_2 根据引理 2.1（4），我们有

$$\gamma(\pi(u))_1 \otimes \gamma(\pi(u))_2 \otimes \gamma(\pi(u))_3 = \eta^{-1}(u_1)_1u_2 \otimes \eta^{-1}(u_1)_2u_3 \otimes \eta^{-1}(u_1)_3u_4.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\tau(\pi(u)) &= B^{\otimes 2}\{\eta^{-1}(\gamma(\pi(u))_1)_1\eta(\gamma(\pi(u))_2) \otimes \eta^{-1}(\gamma(\pi(u))_1)_2\eta(\gamma(\pi(u))_3)\}\\ &= B^{\otimes 2}\{\eta^{-1}(\eta^{-1}(u_1)_1u_2)_1\eta(\eta^{-1}(u_1)_2u_3) \otimes \eta^{-1}(\eta^{-1}(u_1)_1u_2)_2\eta(\eta^{-1}(u_1)_3u_4)\}\\ &= B^{\otimes 2}\{\eta^{-1}(u_2)_1S(\eta^{-1}(u_1)_1)\eta^{-1}(u_1)_2\eta(u_3) \otimes \eta^{-1}(u_2)_2S(\eta^{-1}(u_1)_3)\eta^{-1}(u_1)_4\eta(u_4)\}\\ &= B^{\otimes 2}\{\eta^{-1}(u_2)_1\varepsilon(\eta^{-1}(u_1)_1)\eta(u_3) \otimes \eta^{-1}(u_2)_2S(\eta^{-1}(u_1)_2)\eta^{-1}(u_1)_3\eta(u_4)\}\\ &= B^{\otimes 2}\{\eta^{-1}(u_2)_1\eta(u_3) \otimes \eta^{-1}(u_2)_2S(\eta^{-1}(u_1)_1)\eta^{-1}(u_1)_2\eta(u_4)\}\\ &= B^{\otimes 2}\{\eta^{-1}(u_2)_1\eta(u_3) \otimes \eta^{-1}(u_2)_2\varepsilon(\eta^{-1}(u_1))\eta(u_4)\}\\ &= B^{\otimes 2}\{\eta^{-1}(u_2)_1\eta(u_3) \otimes \eta^{-1}(u_2)_2\varepsilon(u_1)\eta(u_4)\} = B^{\otimes 2}\{\eta^{-1}(u_1)_1\eta(u_2) \otimes \eta^{-1}(u_1)_2\eta(u_3)\},\end{aligned}$$

如所述。 □

定理 3.5。 设 K， $H \subseteq G$ 是 G的相互交换的正规子群概形，并设 $\cdot$，B， σ和 τ 分别如（3.4）、（3.8）、（3.12）和（3.13）中所述。则存在一对（D（K， H， B） θ），使得以下结论成立：

(1)

$$D(K,H,B) = \mathscr{O}(K)^{\mathrm{cop}}\#_\sigma^\tau\mathbf{k}[G/H]$$

是一个 *Hopf* 代数，其乘法为

$$(a\#x)(\tilde{a}\#\tilde{x}) = a(x_1 \cdot \tilde{a})\sigma(x_2,\tilde{x}_1)\#x_3\tilde{x}_2,$$

余乘映射 δ 定义为

$$\delta(a\#x) = \left(a_2\tau(x_1)^1\#x_2\right) \otimes \left(a_1\tau(x_1)^2\#x_3\right),$$

且对极映射 S 定义为

$$S(a\#x) = (1\#S(x))(S(a)\#1).$$

(2)

θ： D（G） $\to D$（K、 H、 B） $b \bowtie u \mapsto q_K$（b） B（η_H（u_1））$\#\pi_H$（u_2）是一个满射霍普夫代数映射，其核是由 $\mathscr{O}$（G/K）$^+$生成的理想，以及向量子空间 $\{\mu_K$（B（v）） $\bowtie 1 - 1 \bowtie v \mid v \in \mathbf{k}[H]\}$。

证明。 只需证明 θ 是一个满射映射，使得

$$\theta\left((b \bowtie u)(\tilde{b} \bowtie \tilde{u})\right) = \theta(b \bowtie u)\theta(\tilde{b} \bowtie \tilde{u}), \quad \text{and} \tag{3.14}$$

$$\theta(b_2 \bowtie u_1) \otimes \theta(b_1 \bowtie u_2) = \delta(\theta(b \bowtie u)) \tag{3.15}$$

˜对每个 b， $b \in \mathscr{O}(G)$ 以及 u， $\tilde{u} \in \mathbf{k}[G]$。

令 $\pi := \pi_H$, $\gamma := \gamma_H$, $\eta := \eta_H$, $\mu := \mu_K$，以及 $q := q_K$。

首先验证（3.14）。一方面，我们有

$$\begin{aligned}\theta\Big((b\bowtie u)(\tilde{b}\bowtie\tilde{u})\Big) &= \theta(b(u_1\rightharpoonup\tilde{b})\bowtie u_2\tilde{u}) = q(b(u_1\rightharpoonup\tilde{b}))B(\eta(u_2\tilde{u}_1))\#\pi(u_3\tilde{u}_2)\\
&= q(b(u_1\rightharpoonup\tilde{b}))B\left\{\eta(u_2)\gamma(\pi(u_3))_1\eta(\tilde{u}_1)S(\gamma(\pi(u_3))_2)\eta\left\{\gamma(\pi(u_3))_3\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\right\}\right\}\#\pi(u_4\tilde{u}_3)\\
&= q(b(u_1\rightharpoonup\tilde{b}))B\left\{\eta(u_2)\left\{\mathrm{ad}_\ell(\gamma(\pi(u_3))_1)(\eta(\tilde{u}_1))\right\}\eta\left\{\gamma(\pi(u_3))_2\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\right\}\right\}\#\pi(u_4\tilde{u}_3)\\
&= q(b(u_1\rightharpoonup\tilde{b}))B(\eta(u_2))\{\gamma(\pi(u_3))_1 * B(\eta(\tilde{u}_1))\}B\left\{\eta\left\{\gamma(\pi(u_3))_2\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\right\}\right\}\#\pi(u_4\tilde{u}_3)\\
&= q(b(u_1\rightharpoonup\tilde{b}))B(\eta(u_2))\{\pi(\gamma(\pi(u_3))_1)\cdot B(\eta(\tilde{u}_1))\}B\left\{\eta\left\{\gamma(\pi(u_3))_2\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\right\}\right\}\#\pi(u_4\tilde{u}_3)\\
&= q(b(u_1\rightharpoonup\tilde{b}))B(\eta(u_2))\{\pi(u_3)_1\cdot B(\eta(\tilde{u}_1))\}B\left\{\eta\left\{\gamma(\pi(u_3)_2)\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\right\}\right\}\#\pi(u_4\tilde{u}_3)\\
&= q(b(u_1\rightharpoonup\tilde{b}))B(\eta(u_2))\{\pi(u_3)\cdot B(\eta(\tilde{u}_1))\}B\left\{\eta\left\{\gamma(\pi(u_4))\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\right\}\right\}\#\pi(u_5\tilde{u}_3),\end{aligned}$$

其中我们在第三个等式中使用了引理 2.1(3)，在第五个等式中使用了（3.9），在第七个等式中使用了（2.13）。

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}&\theta(b\bowtie u)\theta(\tilde{b}\bowtie\tilde{u})\\
&= \{q(b)B(\eta(u_1))\#\pi(u_2)\}\{q(\tilde{b})B(\eta(\tilde{u}_1))\#\pi(\tilde{u}_2)\}\\
&= q(b)B(\eta(u_1))\{\pi(u_2)\cdot(q(\tilde{b})B(\eta(\tilde{u}_1)))\}\sigma(\pi(u_3),\pi(\tilde{u}_2))\#\pi(u_4\tilde{u}_3)\\
&= q(b)B(\eta(u_1))\{(\pi(u_2)\cdot q(\tilde{b}))(\pi(u_3)\cdot B(\eta(\tilde{u}_1)))\}\sigma(\pi(u_4),\pi(\tilde{u}_2))\#\pi(u_5\tilde{u}_3)\\
&= q(b(u_1\rightharpoonup\tilde{b}))B(\eta(u_2))\{\pi(u_3)\cdot B(\eta(\tilde{u}_1))\}\sigma(\pi(u_4),\pi(\tilde{u}_2))\#\pi(u_5\tilde{u}_3)\\
&= q(b(u_1\rightharpoonup\tilde{b}))B(\eta(u_2))\{\pi(u_3)\cdot B(\eta(\tilde{u}_1))\}B\left\{\eta\left\{\gamma(\pi(u_4))\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\right\}\right\}\#\pi(u_5\tilde{u}_3),\end{aligned}$$

如所需，其中我们在第三个等式中使用了引理3.1，在第四个等式中使用了（3.5）以及$\mathbf{k}[G]$的余交换性，并在最后一个等式中使用了引理 3.4(1)。

接下来我们验证（3.15）。一方面，我们有

$$\begin{aligned}(\theta\otimes\theta)\Delta(b\bowtie u) &= \theta(b_2\bowtie u_1)\otimes\theta(b_1\bowtie u_2)\\
&= (q(b_2)B(\eta(u_1))\#\pi(u_2))\otimes(q(b_1)B(\eta(u_3))\#\pi(u_4))).\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}&\delta(\theta(b\bowtie u)) = \delta(q(b)B(\eta(u_1))\#\pi(u_2))\\
&= \left(q(b_2)B(\eta(u_1)_2)\tau(\pi(u_2))^1\#\pi(u_3)\right)\otimes\left(q(b_1)B(\eta(u_1)_1)\tau(\pi(u_2))^2\#\pi(u_4)\right)\\
&= \left(q(b_2)B(\eta(u_1)_2\eta^{-1}(u_2)_1\eta(u_3))\#\pi(u_4)\right)\otimes\left(q(b_1)B(\eta(u_1)_1\eta^{-1}(u_2)_2\eta(u_5))\#\pi(u_6)\right)\\
&= \left(q(b_2)B(\eta(u_1)_1\eta^{-1}(u_2)_1\eta(u_3))\#\pi(u_4)\right)\otimes\left(q(b_1)B(\eta(u_1)_2\eta^{-1}(u_2)_2\eta(u_5))\#\pi(u_6)\right)\\
&= \left(q(b_2)B((\eta(u_1)\eta^{-1}(u_2))_1\eta(u_3))\#\pi(u_4)\right)\otimes\left(q(b_1)B((\eta(u_1)\eta^{-1}(u_2))_2\eta(u_5))\#\pi(u_6)\right)\\
&= (q(b_2)B(\eta(u_1))\#\pi(u_2))\otimes(q(b_1)B(\eta(u_3))\#\pi(u_4)),\end{aligned}$$

正如所期望的，其中第二个等式用到了引理 3.4(2)，最后一个等式用到了 $\mathbf{k}[G]$ 的余交换性。

最后我们验证 θ 是满射。显然，对于任意 $b \in \mathscr{O}(G)$，都有 $\theta(b \bowtie 1) = q(b)\#1$。此外，对于任意 $u \in \mathbf{k}[G]$，利用 $\mathbf{k}[G]$ 的余交换性，我们有

$$\begin{aligned}\theta\left(\mu(B(\eta^{-1}(u_1))) \bowtie u_2\right) &= q\left(\mu(B(\eta^{-1}(u_1)))\right) B(\eta(u_2))\#\pi(u_3)\\ &= B(\eta^{-1}(u_1))B(\eta(u_2))\#\pi(u_3) = B(\eta^{-1}(u_1)\eta(u_2))\#\pi(u_3)\\ &= B(\varepsilon(u_1))\#\pi(u_2) = 1\#\pi(u).\end{aligned}$$

因此，θ 是满射，证毕。

Fi最后，令 I 为 $D(G)$中由 $\mathscr{O}(G/K)^+$ 以及子空间生成的理想

$$\{\mu(B(v)) \bowtie 1 - 1 \bowtie v \mid v \in \mathbf{k}[H]\}.$$

由于 $\theta|_{\mathscr{O}(K)} = q$，显然有 $\mathscr{O}(G/K)^+ \subseteq$ 核θ。此外，对于每个 $v \in \mathbf{k}[H]$，都有 $\theta(\mu(B(v)) \bowtie 1) = B(v)\#1 = \theta(1 \bowtie v)$。因此，$I \subseteq$ 核 θ。

另一方面，对 $D(G)$取 $\mathscr{O}(G/K)^+$ 所生成理想的商，会将 $\mathscr{O}(G)$因子与 $\mathscr{O}(K)$等同起来，因此 $D(G)/I$ 中的每个类都具有 $a \bowtie u$ 的形式的代表元，其中 $a \in \mathscr{O}(K)$且 $u \in \mathbf{k}[G]$。此外，由于对于每个 $v \in \mathbf{k}[H]$都有 $\mu(B(v)) \bowtie 1 = 1 \bowtie v$，$a \bowtie u$ 在 $D(G)/I$ 中的类只取决于u在商 Hopf 代数 $\mathbf{k}[G/H]$中的像。由此，$D(G)/I$ 由以下元素张成：它们由 $a \bowtie \gamma(x)$表示，其中 $a \in \mathscr{O}(K)$且 $x \in \mathbf{k}[G/H]$。因此，$\dim(D(G)/I) \leq \dim(\mathscr{O}(K))\dim(\mathbf{k}[G/H])$。所以，$\dim(I) \geq \dim($核 $\theta)$。

因此，$I =$ 核θ，如所声称。 □

注 3.6。 由定理3.5可知 σ （3.12）是一个余循环，τ （3.13）是一个余余循环，并且$\mathbf{k}[G]$ 余测度 $\mathscr{O}$（K）是平凡的（必要的定义参见例如 [AD、M]）。□

命题 3.7。 对于每个 *Hopf* 代数 D（K、H、B），以下结论成立：

（1） D（K、H、B）是对合的，其中 维数$_{\mathbf{k}}$（D（K、H、B））$= |K|[G: H]$。（2）该映射

$$\mathscr{O}(K)^{\mathrm{cop}} \xrightarrow{1:1} D(K,H,B), \quad a \mapsto a\#1,$$

是单射 *Hopf* 代数映射。

（3）该映射

$$D(K,H,B) \twoheadrightarrow \mathbf{k}[G/H], \quad a\#x \mapsto \varepsilon(a)x,$$

是一个满射霍普夫代数映射，其核是由 $\mathscr{O}$（K）$^+$ 生成的理想。

（4）若 η_H（2.14）是余代数映射，则 D（K，H，B）$= \mathscr{O}$（K）$^{\mathrm{cop}} \otimes \mathbf{k}[G/H]$ 是张量积余代数。

（5）若 $B = 1$，则 D（K, H）：$= D$（K, H,1）$= \mathscr{O}$（K）$^{\mathrm{cop}}\#\mathbf{k}[G/H]$ 是交叉积代数，并且 D（K, H）$= \mathscr{O}$（K）$^{\mathrm{cop}} \otimes \mathbf{k}[G/H]$ 是张量积余代数。（6）映射

$$\overline{B} := B^* \circ S : \mathbf{k}[K] \to \mathscr{O}(H)$$

是一个 G-等变的霍普夫代数映射，因此我们得到相应的霍普夫代数商 D（H, K, B），其为 D（$\overline{G}$）的商。

（7）若 G是由交换的和则 $K^\vee$ 构成、对应于 $\widetilde{G}$ $= \mathbf{k}[\widetilde{G}]$，其中

$$\sigma \in Z^2(G/H, K^\vee) \quad and \quad \tau \in Z^1(G/H, (K^2)^\vee),$$

其中 G/H 对 $K^\vee$ 的作用是平凡的，且$(K^2)^\vee$。

证明。 (1)-(2) 这些结论显而易见。

(3) 注意到 $\varepsilon(x\cdot a) = \varepsilon(x)\varepsilon(a)$、 $\varepsilon(\sigma(x,\tilde{x})) = \varepsilon(x)\varepsilon(\tilde{x})$，以及 $(\varepsilon\otimes\varepsilon)(\tau(x)) = \varepsilon(x)(1\otimes 1)$，即可直接得出。(4)-(5) 利用注记 3.3 可直接得出。(6) 这是因为 $\mathbf{k}[H]$ 是余交换的。(7) 这是因为当 K 是交换的时， $D(K,H,B)$ 是余交换的。

□

3.2. **() 的 Hopf 商对分类** $D(G)$。 $D(G)$ 的一个*Hopf* 商对是一个对 (D,φ)，其中 $\varphi: D(G)\twoheadrightarrow D$ 是一个满射霍普夫代数映射。若存在一个 Hopf$^{\sim}$ 代数同构 $f: D_1\xrightarrow{\sim} D_2$，使得 $\varphi_2 = f\varphi_1$，则称两个 Hopf 商对 (D_1,φ_1) 和 (D_2,φ_2) 是等价的。

引理 *3.8*。定理 *3.5* 中构造的两个 *Hopf* 商对 *$(D(K,H,B)\ \theta)$* 和 *$(D(K',H',B')\ \theta')$* 等价，当且仅当 *$(K,H,B) = (K',H',B')$*。

$^{\sim}$证明。 假设 $f: D(K,H,B)\xrightarrow{\sim} D(K',H',B')$ 是一个 Hopf 代数同构，且满足 $\theta' = f\theta$。特别地， $\theta'_{|\mathscr{O}(G)} = (f\theta)_{|\mathscr{O}(G)}$；也就是说， $q_{K'} = (f_{|\mathscr{O}(K)})\circ q_K$，或者等价地， $\iota_{K'} = \iota_K\circ(f_{|\mathscr{O}(K)})$，其中 $(f_{|\mathscr{O}(K)}): K'\twoheadrightarrow K$ 是相应的满射群概形态射。因此， $K = K'$ ，且 $f_{|\mathscr{O}(K)}: \mathscr{O}(K)\to\mathscr{O}(K)$ 是恒等映射。

此外，对每个 $v\in\mathbf{k}[H]$，都有 $\eta_H(v) = v$ 且 $\pi_H(v) = \varepsilon(v)$，因此有$\theta(1\bowtie v) = B(v)\#1$。将 $\varepsilon\otimes$id 应用于

$$f(B(v)\#1) = f\theta(1\bowtie v) = \theta'(1\bowtie v) = B'(\eta_{H'}(v_1))\#'\pi_{H'}(v_2)$$

即可得到 $\pi_{H'}(v) = \varepsilon(v)$。因此， $\mathbf{k}[H]^+\subseteq\ker(\pi_{H'}) = \mathbf{k}[G]\mathbf{k}[H']^+$。由对称性可得 $\ker(\pi_H) = \ker(\pi_{H'})$，从而得到 $H = H'$。

最后，由上述结果和定理 3.5(2) 可知

$$B' = \theta'_{|\mathbf{k}[H]} = (f\circ\theta)_{|\mathbf{k}[H]} = f_{|\mathscr{O}(K)}\circ\theta_{|\mathbf{k}[H]} = \theta_{|\mathbf{k}[H]} = B$$

因为 $f_{|\mathscr{O}(K)}: \mathscr{O}(K)\to\mathscr{O}(K)$ 是恒等映射。 □

定理 3.9。 定理 $(K,\ H,\ B)\mapsto(D(K,\ H,\ B)\ \theta)$ 在定理*3.5* 中构造的映射确定了三元组集合 $(K,\ H,\ B)$ 与 $D(G)$的 ***Hopf*** 商对等价类集合之间的双射。

证明。由定理 3.5 和引理 3.8，只需证明：对于 $D(G)$ 的任意 Hopf 商对 (D,φ)，都存在 $D(G)$ 的一个 Hopf 商对 $(D(K,H,B)\ \theta)$，以及一个 Hopf 代数同构 $\varphi: D(K,H,B)\xrightarrow{\sim} D$，使得 $\varphi\theta = \varphi$。

因此，设 $\varphi: D(G)\twoheadrightarrow D$ 是一个满射霍普夫代数映射。由于 $\varphi_{|\mathscr{O}(G)}$ 的像是 $\mathscr{O}(G)$ 的一个 Hopf 代数商，我们不妨假设 $\varphi(\mathscr{O}(G)) = \mathscr{O}(K)\subseteq D$，且对于某个子群概形 $K\subseteq G$，有$\varphi_{|\mathscr{O}(G)} = q_K: \mathscr{O}(G)\twoheadrightarrow\mathscr{O}(K)$。此外，由于$\mathscr{O}(G)\subseteq D(G)$ 是一个正规 Hopf 子代数， $\mathscr{O}(K)\subseteq D$ 也是一个正规 Hopf 子代数。

断言 1. $K\subseteq G$ 是一个正规子群概形。

证明。 固定 $a \in \mathscr{O}(G/K)^+\mathscr{O}(G)$。于是 $\varphi(a \bowtie 1) = q_K(a) = 0$，因此

$$0 = \varphi\left((1 \bowtie u_1)(a \bowtie 1)(1 \bowtie S(u_2))\right) = \varphi\left((u \rightharpoonup a) \bowtie 1\right) = q_K(u \rightharpoonup a);$$

也就是说， $u \rightharpoonup a \in \mathscr{O}(G/K)^+\mathscr{O}(G)$ 对每个 $u \in \mathbf{k}[G]$ 都成立。因此，coad (2.8) 将$\mathscr{O}(G/K)^+\mathscr{O}(G)$ 映到 $\mathscr{O}(G/K)^+\mathscr{O}(G) \otimes \mathscr{O}(G)$；也就是说， K 在 G中是正规子群概形。□

接下来考虑 Hopf 代数正合列

$$\mathbf{k} \to \mathscr{O}(K) \to D \to D/(\mathscr{O}(K)^+D) \to \mathbf{k}.$$

由于 $D(G)/(\mathscr{O}(G)^+D(G)) \cong \mathbf{k}[G]$ (2.17)，可知 Hopf 代数 $D/(\mathscr{O}(K)^+D)$ 是 $\mathbf{k}[G]$ 的 Hopf 商，因此我们可以假设

$$D/(\mathscr{O}(K)^+D) = \mathbf{k}[G/H]$$

对于某个正规子群概形 H of G，从而得到一个具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{k} & \longrightarrow & \mathscr{O}(G) & \longrightarrow & D(G) & \xrightarrow{\varepsilon\otimes\mathrm{id}} & \mathbf{k}[G] & \longrightarrow & \mathbf{k} \\ & & \downarrow{\scriptstyle q_K} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_H} & & \\ \mathbf{k} & \longrightarrow & \mathscr{O}(K) & \longrightarrow & D & \xrightarrow{p} & \mathbf{k}[G/H] & \longrightarrow & \mathbf{k}. \end{array} \tag{3.16}$$

特别地，根据 [AD，Sc], 我们可以假设 $D = \mathscr{O}(K)\#_\sigma^\tau\mathbf{k}[G/H]$ 作为 Hopf 代数，因此 $D = \mathscr{O}(K) \otimes \mathbf{k}[G/H]$ 作为向量空间，并且可以用显然的方式将 $\mathscr{O}(K)$ 视为一个 Hopf 子代数 D。为避免混淆，我们用 $a\#x$ 表示 D 的一个元素。

断言 2. 对于每个 $v \in \mathbf{k}[H]$, $\varphi(1 \bowtie v) \in \mathscr{O}(K)$。此外，Hopf 代数 ma p

$$B := \varphi_{|\mathbf{k}[H]} : \mathbf{k}[H] \to \mathscr{O}(K), \quad v \mapsto \varphi(1 \bowtie v),$$

是 G-等变的，如（3.11）所示。

证明。 由（3.16），对于每个 $v \in \mathbf{k}[H]$，我们有

$$\begin{aligned} (\mathrm{id} \otimes p)\Delta_D(\varphi(1 \bowtie v)) &= (\mathrm{id} \otimes p)(\varphi(1 \bowtie v_1) \otimes \varphi(1 \bowtie v_2)) \\ &= \varphi(1 \bowtie v_1) \otimes p(\varphi(1 \bowtie v_2)) = \varphi(1 \bowtie v_1) \otimes \pi_H(v_2) \\ &= \varphi(1 \bowtie v_1) \otimes \varepsilon(v_2) = \varphi(1 \bowtie v) \otimes 1, \end{aligned}$$

这意味着 $\varphi(1 \bowtie v) \in D^{\mathrm{co}\mathbf{k}[G/H]} = \mathscr{O}(K)$。

此外，对于每个 $v \in \mathbf{k}[H]$ 以及 $u \in \mathbf{k}[G]$，我们有

$$\begin{aligned} B(\mathrm{ad}_\ell(u)(v)) &= \varphi(1 \bowtie u_1 v S(u_2)) \\ &= \varphi((1 \bowtie u_1)(1 \bowtie v)(1 \bowtie S(u_2))) = \varphi(1 \bowtie u_1)\varphi(1 \bowtie v)\varphi(1 \bowtie S(u_2)) \\ &= \varphi(1 \bowtie u_1)\varphi(\mu_K(B(v)) \bowtie 1)\varphi(1 \bowtie S(u_2)) = \varphi((1 \bowtie u_1)(\mu_K(B(v)) \bowtie 1)(1 \bowtie S(u_2))) \\ &= \varphi((u_1 \rightharpoonup \mu_K(B(v)) \bowtie u_2)(1 \bowtie S(u_3))) = \varphi((u_1 \rightharpoonup \mu_K(B(v))) \bowtie u_2 S(u_3)) \\ &= \varphi((u \rightharpoonup \mu_K(B(v))) \bowtie 1) = q_K(u \rightharpoonup \mu_K(B(v))) = u * B(v). \end{aligned}$$

这里 μ_K 是 q_K 中式（2.4）。因此，对于每个 $w \in \mathbf{k}[K]$，我们有

$$\begin{aligned}\langle B(\mathrm{ad}_\ell(u_1)(v)), \mathrm{ad}_\ell(u_2)(w)\rangle &= \langle q_K\left(u_1 \rightharpoonup \mu_K(B(v))\right), \mathrm{ad}_\ell(u_2)(w)\rangle \\ &= \langle q_K\left(S(u_2) \rightharpoonup \mu_K(q_K\left(u_1 \rightharpoonup \mu_K(B(v))\right)\right), w\rangle \\ &= \langle S(u_2) * q_K\left(u_1 \rightharpoonup \mu_K(B(v))\right), w\rangle = \langle S(u_2) * (u_1 * B(v)), w\rangle \\ &= \varepsilon(u)\langle B(v), w\rangle,\end{aligned}$$

正如所声称的。 □

断言 3。 正规子群概形 K，$H \subseteq G$ 彼此中心化。

证明。 我们断言，$\mathbf{k}[H]$ 通过 φ 在 $\mathscr{O}(K)$ 上平凡作用。事实上，对于每个 $v \in \mathbf{k}[H]$ 和 $b \in \mathscr{O}(G)$，我们有

$$\begin{aligned}&\varphi(1 \bowtie v)_1\varphi(b \bowtie 1)S(\varphi(1 \bowtie v)_2) = \varphi(1 \bowtie v_1)\varphi(b \bowtie 1)\varphi(1 \bowtie S(v_2)) \\ &= \varphi(1 \bowtie v_1)\varphi(1 \bowtie S(v_2))\varphi(b \bowtie 1) = \varphi(1 \bowtie v_1S(v_2))\varphi(b \bowtie 1) = \varepsilon(v)\varphi(b \bowtie 1),\end{aligned}$$

正如所声称的，其中我们在第二个等式中应用断言 2，以利用 $\mathscr{O}(K)$的交换性。

现在，由于 $(\mathrm{ad}_\ell(1 \bowtie v))(b \bowtie 1) = (v \rightharpoonup b) \bowtie 1$，可得

$$q_K(v \rightharpoonup b) = \varepsilon(v)q_K(b); \quad \forall\, v \in \mathbf{k}[H],\ b \in \mathscr{O}(G).$$

与 $w \in \mathbf{k}[K]$ 配对并使用 (2.10)，得到

$$\langle b, \mathrm{ad}_{\mathrm{r}}(v)(w)\rangle = \langle v \rightharpoonup b, w\rangle = \langle q_K(v \rightharpoonup b), w\rangle = \varepsilon(v)\langle q_K(b), w\rangle = \varepsilon(v)\langle b, w\rangle.$$

由于这对所有 $b \in \mathscr{O}(G)$ 都成立，因此可知对所有 $w \in \mathbf{k}[K]$，$\mathrm{ad}_{\mathrm{r}}(v)(w) = \varepsilon(v)w$；也就是说，$\mathbf{k}[H]$ 和 $\mathbf{k}[K]$ 交换。□

令 $\pi := \pi_H$, $\gamma := \gamma_H$, $\eta := \eta_H$，以及 $q := q_K$。

断言 4。 对于每个 $u \in \mathbf{k}[G]$，都有 $\varphi(1 \bowtie u) = B(\eta(u_1))\#\pi(u_2)$。

证明。首先 注意到，(3.16) 的交换性意味着对于每个 $x \in \mathbf{k}[G/H]$，

$$\varphi(1 \bowtie \gamma(x)) = 1\widetilde{\#}x.$$

现在，由引理 2.1(2)， $u = \eta(u_1)(\gamma(\pi(u_2)))$ 对每个 $u \in \mathbf{k}[G]$均成立，因此可得

$$\begin{aligned}\varphi(1 \bowtie u) &= \varphi(1 \bowtie \eta(u_1)(\gamma(\pi(u_2)))) = \varphi(1 \bowtie \eta(u_1))\varphi(1 \bowtie \gamma(\pi(u_2))) \\ &= (B(\eta(u_1))\widetilde{\#}1)(1\widetilde{\#}\pi(u_2)) = B(\eta(u_1))\widetilde{\#}\pi(u_2),\end{aligned}$$

如所声称的。 □

由断言 2 和 4 可得

$$\varphi(b \bowtie u) = \varphi(b \bowtie 1)\varphi(1 \bowtie u) = q(b)B(\eta(u_1))\widetilde{\#}\pi(u_2); \quad \forall\, b \bowtie u \in D(G). \tag{3.17}$$

最后，令 $(D(K,\ H,\ B)\ \theta)$ 为 $D(G)$ 的 Hopf 商对，它根据定理 3.5 及断言 2-3 与三元组 $(K,\ H,\ B)$ 相对应，并考虑恒等映射

$$\overline{\varphi} := \mathrm{id}_{\mathscr{O}(K)\otimes\mathbf{k}[G/H]} : D(K,H,B) \to D, \quad a\#x \mapsto a\widetilde{\#}x.$$

于是 $\varphi\theta = \varphi$ 由（3.17），可得 $\theta = \varphi$，且 φ 是一个 Hopf 代数同构，因此（D，φ）等价于（D（K，H，B） θ）。□

推论 3.10。对于每个 *Hopf* 商对 $(D(K,H,B)\ \theta)\ \ D(G)$ 的以及满射 *Hopf* 代数同态 $\varphi:\ D(K,H,B)\twoheadrightarrow D$，*Hopf* 商对 $(D,\varphi\theta)$ 等价于某些正规子群概形 $K'\subseteq K$ 和 $H\subseteq H'$ 的一个 *Hopf* 商对 $(D(K',H',B')\ \theta')$，其中这些正规子群概形属于 G，满足

$$\iota^{\sharp}_{K',K}\circ B=B'\circ\iota_{H,H'}:\mathbf{k}[H]\to\mathscr{O}(K').$$

证明。由于 $(D,\varphi\theta)$ 是 $D(G)$ 的 Hopf 商对，由定理 3.9可知，存在一个 Hopf 商对 $(D(K',H',B')\ \theta')$，以及一个 Hopf 代数同构 $f:\ D(K',H',B')\xrightarrow{\sim} D$，使得 $\varphi\theta=f\theta'$。特别地，我们有

$$(\varphi\theta)|_{\mathscr{O}(G)}=\left(\varphi|_{\mathscr{O}(K)}\right)\circ q_K.$$

另一方面，由于 $\varphi\theta=f\theta'$ 和 $\theta'|_{\mathscr{O}(G)}=q_{K'}$，我们有 $(\varphi\theta)|_{\mathscr{O}(G)}=\left(f|_{\mathscr{O}(K')}\right)\circ q_{K'}$。因此，$\varphi q_K=fq_{K'}$，所以 $f^{-1}\circ\left(\varphi|_{\mathscr{O}(K)}\right):\ \mathscr{O}(K)\twoheadrightarrow\mathscr{O}(K')$ 是一个满射霍普夫代数映射，因此 $K'\subseteq K$ 是一个子群概形。

接下来，对于每个 $v\in\mathbf{k}[H]^+$，我们有

$$\varphi(B(v)\#1)=\varphi\theta(1\bowtie v)=f\theta'(1\bowtie v)=f\left(B'(\eta_{H'}(v_1))\#\pi_{H'}(v_2)\right),$$

因此，我们有

$$B'(\eta_{H'}(v_1))\#\pi_{H'}(v_2)=f^{-1}\left(\varphi(B(v)\#1)\right)\in\mathscr{O}(K')^+\#1.$$

在上一个等式两边应用 $\varepsilon\otimes\mathrm{id}$，得到 $\pi_{H'}(v)=0$，这意味着$v\in\mathbf{k}[H']^+\mathbf{k}[G]$。因此，$\mathbf{k}[H]^+\mathbf{k}[G]\subseteq\mathbf{k}[H']^+\mathbf{k}[G]$；也就是说，$H\subseteq H'$，正如所求。

最后，由于 $\varphi\theta=f\theta'$，且定理 3.5(2) 给出 $\theta|_{\mathbf{k}[H]}=B$ 和 $\theta'|_{\mathbf{k}[H']}=B'$，根据函子性可知，我们有 $\iota^{\sharp}_{K',K}\circ B=B'\circ\iota_{H,H'}:\mathbf{k}[H]\to\mathscr{O}(K')$，正如所求。□

推论 *3.11.* 设 $(D(K,H,B)\ \theta)$ 和 $(D(K',H',B')\ \theta')$ 是 $D(G)$ 的两个 *Hopf* 商对，其中 $K\subseteq K'$ 和 $H'\subseteq H$ 是 G 的正规子群概形，且 $q\circ B'=B\circ\iota_{H',H}:\mathbf{k}[H']\to\mathscr{O}(K)$，其中 $q:=\iota^{\sharp}_{K,K'}:\ \mathscr{O}(K')\twoheadrightarrow\mathscr{O}(K)$ 是典范满射 *Hopf* 代数映射。那么存在唯一的满射 *Hopf* 代数映射 $\varphi:\ D(K',H',B')\twoheadrightarrow D(K,H,B)$，使得 $\theta=\varphi\theta'$。

证明。由于 $K\subseteq K'$，我们有 $\mathscr{O}(G/K')\subseteq\mathscr{O}(G/K)$ 是 $\mathscr{O}(G)$ 的 Hopf子代数，因此$\mathscr{O}(G/K')^+\subseteq\mathscr{O}(G/K)^+$。接下来固定 $v\in\mathbf{k}[H']$ 并考虑

$$r_v:=\mu_{K'}(B'(v))\bowtie 1-1\bowtie v\ \in D(G).$$

我们断言 $r_v\in\ker(\theta)$。首先注意到

$$\theta(1\bowtie v)=B(\eta_H(v_1))\#\pi_H(v_2)=B(v_1)\#\varepsilon(v_2)=B(v)\#1.$$

另一方面，

$$\theta(\mu_{K'}(B'(v))\bowtie 1)=q_K(\mu_{K'}(B'(v)))\#1.$$

利用 $\mathbf{q}\,q_{K'}=q_K$ 和 $q_{K'}\mu_{K'}=\mathrm{id}_{\mathscr{O}(K')}$，我们得到

$$q_K(\mu_{K'}(B'(v)))=\mathbf{q}(q_{K'}(\mu_{K'}(B'(v))))=\mathbf{q}(B'(v)).$$

根据假设，$\mathbf{q}\circ B'=B\circ\iota_{H',H}$，并通过 $\iota_{H',H}$ 将 $v\in\mathbf{k}[H']$ 视为嵌入在 $\mathbf{k}[H]$ 中，这就得到 $\mathbf{q}(B'(v))=B(v)$。因此，

$$\theta(\mu_{K'}(B'(v))\bowtie 1)=B(v)\#1=\theta(1\bowtie v),$$

于是 $\theta(r_v) = 0$，如所声称。

因此，由定理 3.5(3)，我们得到 $\ker(\theta') \subseteq \ker(\theta)$，因此存在唯一的满射霍普夫代数映射 $\varphi\colon D(K', H', B') \twoheadrightarrow D(K, H, B)$，使得 $\theta = \varphi\theta'$，如所声称的。□

固定两个 Hopf 商对 $(D(K, H, B)\ \theta)$ 和 $(D(K', H', B')\ \theta')$，它们属于 $D(G)$，并定义 Hopf 代数映射

$$\begin{aligned} &\beta_{B,B'} : \mathbf{k}[K \cap K'] \to \mathscr{O}(H \cap H') \\ &w \mapsto \left(\iota^{\sharp}_{H\cap H',H} B^* \iota_{K\cap K',K}(w_1)\right)\left(\iota^{\sharp}_{H\cap H',H'} \overline{B'} \iota_{K\cap K',K'}(w_2)\right); \end{aligned} \tag{3.18}$$

也就是说，$\beta_{B,B'} = \left(\iota^{\sharp}_{H\cap H',H} B^* \iota_{K\cap K',K}\right) \star \left(\iota^{\sharp}_{H\cap H',H'} B' \iota_{K\cap K',K'}\right)^{-}_{\circ}$

令 $L \subseteq K \cap K'$ 为子群概形，使得

$$\operatorname{Ker}(\beta_{B,B'}) = \mathbf{k}[L]^{+}\mathbf{k}[K \cap K'],$$

并定义 G-等变 Hopf 代数映射

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}_{B,B'} : \mathbf{k}[L] \to \mathscr{O}(HH'), \\ &w \mapsto \left(\mu_{H,HH'} B^* \iota_{L,K}(w_1)\right)\left(\mu_{H',HH'} \overline{B'} \iota_{L,K'}(w_2)\right); \end{aligned} \tag{3.19}$$

即，$\mathbf{B}_{B,\ B'} = (\mu_{H,\ HH'} B^* \iota_{L,\ K}) \star \left(\mu_{H',\ HH'} B' \overline{\iota_{L,\ K'}}\right)_{\circ}$。令

$$\mathbf{B} := \mathbf{B}^*_{B,B'} : \mathbf{k}[HH'] \to \mathscr{O}(L), \tag{3.20}$$

and 令 $(D(L,\ HH',\ \mathbf{B})\ \Theta)$ 为 $D(G$ 对应的 Hopf 商对 $)$.

命题 3.12。以下结论成立：

(1) 存在满射*Hopf*代数映射 $\varphi\colon D(K, H, B) \twoheadrightarrow D(L, HH', \mathbf{B})$ 以及$\varphi'\colon D(K', H', B') \twoheadrightarrow D(L, HH', \mathbf{B})$，使得 $\varphi\theta = \Theta = \varphi'\theta'$。(2) ***Hopf*** 商对 $(D(L, HH', \mathbf{B})\ \Theta)$ 是具有 ***(1)*** 中性质的极大者。

证明。 **(1)** 这由推论3.11。

(2) 假设

$$\phi : D(K, H, B) \twoheadrightarrow D(K'', H'', B''), \quad \phi' : D(K', H', B') \twoheadrightarrow D(K'', H'', B'')$$

是满射Hopf代数映射，满足 $\phi\theta = \theta'' = \phi'\theta'$。由推论 3.10，$K'' \subseteq K \cap K'$ 和 $HH' \subseteq H''$ 是 G的正规子群概形，

$$\iota^{\sharp}_{K'',K} \circ B = B'' \circ \iota_{H,H''} : \mathbf{k}[H] \to \mathscr{O}(K''), \quad \text{and}$$

$$\iota^{\sharp}_{K'',K'} \circ B' = B'' \circ \iota_{H',H''} : \mathbf{k}[H'] \to \mathscr{O}(K'').$$

我们断言 $K'' \subseteq L$。事实上，对于每个 $w \in \mathbf{k}[K'']$ 和 $v \in \mathbf{k}[H \cap H']$，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle \beta_{B,B'}(\iota_{K'',K\cap K'}(w))\ v\rangle \\
&= \langle \iota^{\sharp}_{H\cap H',H} B^{*} \iota_{K\cap K',K}(\iota_{K'',K\cap K'}(w_1)), v_1\rangle \langle \iota^{\sharp}_{H\cap H',H'} \overline{B'} \iota_{K\cap K',K'}(\iota_{K'',K\cap K'}(w_2)), v_2\rangle \\
&= \langle \iota^{\sharp}_{H\cap H',H} B^{*} \iota_{K'',K}(w_1), v_1\rangle \langle \iota^{\sharp}_{H\cap H',H'} \overline{B'} \iota_{K'',K'}(w_2), v_2\rangle \\
&= \langle w_1, \iota^{\sharp}_{K'',K} B \iota_{H\cap H',H}(v_1)\rangle \langle S(w_2), \iota^{\sharp}_{K'',K'} B' \iota_{H\cap H',H'}(v_2)\rangle \\
&= \langle w_1, B'' \iota_{H,H''} \iota_{H\cap H',H}(v_1)\rangle \langle S(w_2), B'' \iota_{H',H''} \iota_{H\cap H',H'}(v_2)\rangle \\
&= \langle w_1, B'' \iota_{H\cap H',H''}(v_1)\rangle \langle S(w_2), B'' \iota_{H\cap H',H''}(v_2)\rangle \\
&= \langle w_1 S(w_2), B'' \iota_{H\cap H',H''}(v)\rangle = \langle \varepsilon(w), B'' \iota_{H\cap H',H''}(v)\rangle = \langle \varepsilon(w), v\rangle.
\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{k}[K'']^{+} \subseteq \mathrm{Ker}(\beta_{B,\ B'}) = \mathbf{k}[L]^{+}\mathbf{k}[K \cap K']$，所以 $K'' \subseteq L$，如所述。

接下来我们断言，满射霍普夫代数映射

$$\Phi : D(L, HH', \mathbf{B}) \twoheadrightarrow D(K'', H'', B'')$$

由推论 3.11给出，满足 $\Phi\varphi = \phi$ 且 $\Phi\varphi' = \phi'$。事实上，由推论 3.11，$\theta'' = \Phi\Theta$，并且根据假设，$\varphi\theta = \Theta = \varphi'\theta'$ 且 $\phi\theta = \theta'' = \phi'\theta'$。因此，我们有

$$\phi\theta = \theta'' = \Phi\Theta = \Phi\varphi\theta,$$

因此 $\Phi\varphi = \phi$，因为 θ 是满射。类似地，$\Phi\varphi' = \phi'$。 □

3.3. 上的拟三角带状结构 $D(K,\ H,\ B)$。分别固定 $\mathcal{B}_K \subseteq \mathcal{B}\mathrm{fork}[K]$ 和 $\mathbf{k}[G]$ 的基，并令 $\{\delta_u \mid u \in \mathcal{B}\}$ 为 $\mathscr{O}(G)$ 的对偶基。显然，$\{q_K(\delta_u) \mid u \in \mathcal{B}_K\}$ 是 $\mathcal{B}_K$ 关于 $\mathscr{O}(K)$ 的对偶基，并且对于 $u \in \mathcal{B}_K$，$\langle q_K(\delta_u)\ v\rangle \neq 0$ 当且仅当 $v \in \mathcal{B}_K$。

推论 3.13。 *$D(G)$ 的每个 Hopf 商 $D(K, H, B)$ 都是拟三角带状的，其 R-矩阵为*

$$R(K,H,B) := \sum_{u\in\mathcal{B}_K} (B(\eta_H(u_1))\#\pi_H(u_2)) \otimes (q_K(\delta_u)\#1),$$

以及带状元

$$V(K,H,B) := \sum_{u\in\mathcal{B}_K} q_K(S(\delta_u))B(\eta_H(u_1))\#\pi_H(u_2).$$

证明。 由定理 3.5(2)，元素

$$\begin{aligned}
R(K,H,B) &= (\theta\otimes\theta)(R) \\
&= \sum_{u\in\mathcal{B}} \theta(1\bowtie u)\otimes\theta(\delta_u\bowtie 1) = \sum_{u\in\mathcal{B}_K} (B(\eta_H(u_1))\#\pi_H(u_2))\otimes(q_K(\delta_u)\#1)
\end{aligned}$$

是 $D(K,\ H,\ B)$ 的 R-矩阵，并且

$$V(K,H,B) = \theta(V) = \sum_{u\in\mathcal{B}} \theta(S(\delta_u)\bowtie u) = \sum_{u\in\mathcal{B}_K} q_K(S(\delta_u))B(\eta_H(u_1))\#\pi_H(u_2)$$

正如所声称的，这是一个带状元。 □

4. Tensor subcategories of $\mathrm{Rep}(D(G))$

固定一个有限群概形 G，定义在 $\mathbf{k}$ 上，如 §2.1所述。

4.1. **构造与分类。** 令 $\mathscr{Z}(G) :=$ 表示范畴$(D(G))$，如 §2.4 中所述。对于定理 3.5 中的每个三元组 (K, H, B)，令

$$\mathscr{Z}(K, H, B) := \mathrm{Rep}(D(K, H, B)).$$

于是，利用满射霍普夫代数映射 $\theta\colon D(G) \twoheadrightarrow D(K, H, B)$，我们可以（并且将会）把 $\mathscr{Z}(K, H, B)$ 视为 $\mathscr{Z}(G)$ 的一个张量子范畴。

推论 4.1. 张量范畴 $\mathscr{Z}(K, H, B)$ 是带状编织的，其 *Frobenius-Perron* 维数为 $|K||G : H|$。

证明。 这由命题 3.7 得出。 □

定理 4.2。 赋值 $(K, H, B) \mapsto \mathscr{Z}(K, H, B)$ 确定了三元组集合 (K, H, B) 与 $\mathscr{Z}(G)$ 的张量子范畴集合之间的一个双射。

证明。 众所周知，有限维 Hopf 代数的表示范畴的张量子范畴集合与其商对的等价类集合之间存在双射（例如，参见 [BN，命题 2]）。因此，结论由定理 3.9 得出。 □

定理 4.2 给出某些有限编织群概形理论范畴的分类 [Ge。

推论 4.3。 设 $\mathscr{B}$ 是任意一个有限编织群概形理论范畴，并且存在一个到 Vect 的纤维函子。那么存在一个有限群概形 G，以及一个三元组(K, H, B) 如定理 *3.5* 中所述，使得 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{Z}(K, H, B)$ 编织张量等价。

证明。 由于任意有限编织群概形理论范畴 $\mathscr{B}$ 都是其中心 $\mathscr{Z}(\mathscr{B})$ 的编织张量子范畴，并且根据 [Ge1]，后者与$\mathscr{Z}(G)$ 编织张量等价，其中 G 是某个有限群概形（因为 $\mathscr{B}$ 与某个 Hopf 代数的表示范畴张量等价），结论由定理 4.2 得出。 □

推论 4.4. 以下结论成立：

(1) $\mathscr{Z}(K', H', B') \subseteq \mathscr{Z}(K, H, B)$ 当且仅当 $K' \subseteq K$ 和 $H \subseteq H'$ 是 G的正规子群概形，且 $\iota^{\sharp}_{K',K} \circ B = B' \circ \iota_{H,H'} : \mathbf{k}[H] \to \mathscr{O}(K')$. *(2)* $\mathscr{Z}(K, H, B) \cap \mathscr{Z}(K', H', B') = \mathscr{Z}(L, HH', B)$，其中 B 在 *(3.20)* 中定义。

证明。 (1) 由推论3.10和定理 4.2可得。(2) 由命题 3.12可得。

□

4.2. **的 M¨uger 中心化子** $\mathscr{Z}(K, H, B)$。 对于每个 Hopf 代数 $D(K, H, B)$，回顾命题 $D(H, K, B)$ 中的 Hopf 代数 3.7(6)。

定理 4.5。 对于每个张量子范畴 $\mathscr{Z}(K, H, B) \subseteq \mathscr{Z}(G)$，张量子范畴 $\mathscr{Z}(H, K, B) \subseteq \mathscr{Z}(G)$ 是其在 $\mathscr{Z}(G)$中的 *M¨uger* 中心化子。

证明。取 $D := D(K, H, B)$，并令 $D := D(H, K, B)$。此外，令 $\mathscr{Z} := \mathscr{Z}(K, H, B)$，以及 $\mathscr{Z} := \mathscr{Z}(H, K, B)$。令 $\theta : D(G) \twoheadrightarrow D$ 和 $\theta : D(G) \twoheadrightarrow D$ 为定理 3.5 中构造的 Hopf 代数商。

断言 1. $\mathscr{Z}$ 与 $\mathscr{Z}$ 彼此中心化，当且仅当 $(\theta \otimes \theta)(R_{21}R) = 1 \otimes 1$。

证明。回顾一下，$\mathscr{Z}(G)$ 中的平方编织由乘以 $R_{21}R$ 定义。若 $\mathscr{Z}$ 与 $\mathscr{Z}$ 彼此中心化，则 $(\theta \otimes \theta)(R_{21}R)$ 在所有 $X \in \mathscr{Z}$ 和 $Y \in \mathscr{Z}$ 上都作用为恒等映射，$X \otimes Y$。特别地，我们可以取 $D \otimes D$ 的忠实表示 $D \otimes D$，从而得到 $(\theta \otimes \theta)(R_{21}R) = 1 \otimes 1$。

反之，若 $(\theta \otimes \theta)(R_{21}R) = 1 \otimes 1$，则对所有 $X \in \mathscr{Z}$ 和 $Y \in \mathscr{Z}$，$R_{21}R$ 在 $X \otimes Y$ 上作用为恒等映射，因此 $\mathscr{Z}$ 与 $\mathscr{Z}$ 彼此中心化，断言得证。□

现在固定一个基 $\mathcal{B}$ for $\mathbf{k}[G]$, such that $\mathcal{B}$ containsbases $\mathcal{B}_H$ and $\mathcal{B}_K$ for $\mathbf{k}[H]$ and$\mathbf{k}[K]$, respectively, and let $\{\delta_u \mid u \in \mathcal{B}\}$ be the dual basis for $\mathscr{O}(G)$. 根据（2.18），我们有

$$R_{21}R = \sum_{u,\tilde{u} \in \mathcal{B}} (\delta_u \bowtie \tilde{u}) \otimes ((u_1 \rightharpoonup \delta_{\tilde{u}}) \bowtie u_2).$$

我们断言 $(\theta \otimes \theta)(R_{21}R) = 1 \otimes 1$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
(\theta \otimes \overline{\theta})(R_{21}R) &= \sum_{u,\tilde{u} \in \mathcal{B}} \theta(\delta_u \bowtie \tilde{u}) \otimes \overline{\theta}((u_1 \rightharpoonup \delta_{\tilde{u}}) \bowtie u_2) \\
&= \sum_{u,\tilde{u} \in \mathcal{B}} (q_K(\delta_u) B(\eta_H(\tilde{u}_1)) \# \pi_H(\tilde{u}_2)) \otimes \left(q_H(u_1 \rightharpoonup \delta_{\tilde{u}}) \overline{B}(\eta_K(u_2)) \# \pi_K(u_3)\right) \\
&= \sum_{u \in \mathcal{B}_K,\, \tilde{u} \in \mathcal{B}_H} (q_K(\delta_u) B(\eta_H(\tilde{u}_1)) \# \pi_H(\tilde{u}_2)) \otimes \left(q_H(u_1 \rightharpoonup \delta_{\tilde{u}}) \overline{B}(\eta_K(u_2)) \# \pi_K(u_3)\right) \\
&= \sum_{u \in \mathcal{B}_K,\, \tilde{u} \in \mathcal{B}_H} (q_K(\delta_u) B(\eta_H(\tilde{u})) \# 1) \otimes \left(q_H(\delta_{\tilde{u}}) \overline{B}(\eta_K(u)) \# 1\right) \\
&= \sum_{u \in \mathcal{B}_K,\, \tilde{u} \in \mathcal{B}_H} (q_K(\delta_u) B(\tilde{u}) \# 1) \otimes \left(q_H(\delta_{\tilde{u}}) \overline{B}(u) \# 1\right).
\end{aligned}$$

为证明 $\sum_{u \in \mathcal{B}_K,\ \tilde{u} \in \mathcal{B}_H} (q_K(\delta_u) B(\tilde{u}) \# 1) \otimes \left(q_H(\delta_{\tilde{u}}) B(u) \# 1\right) = (1 \# 1) \otimes (1 \# 1)$，我们对任意 $v \in \mathbf{k}[K]$ 和 $w \in \mathbf{k}[H]$ 进行计算，

$$\begin{aligned}
&\sum_{u \in \mathcal{B}_K,\, \tilde{u} \in \mathcal{B}_H} \langle q_K(\delta_u) B(\tilde{u}), v \rangle \left\langle q_H(\delta_{\tilde{u}}) \overline{B}(u), w \right\rangle \\
&= \sum_{u \in \mathcal{B}_K,\, \tilde{u} \in \mathcal{B}_H} \langle q_K(\delta_u), v_1 \rangle \langle B(\tilde{u}), v_2 \rangle \langle q_H(\delta_{\tilde{u}}), w_1 \rangle \left\langle \overline{B}(u), w_2 \right\rangle \\
&= \sum_{u \in \mathcal{B}_K,\, \tilde{u} \in \mathcal{B}_H} \left\langle q_K(\delta_u) \left\langle u, \overline{B}^*(w_2) \right\rangle, v_1 \right\rangle \langle q_H(\delta_{\tilde{u}}) \langle \tilde{u}, B^*(v_2) \rangle, w_1 \rangle \\
&= \left\langle \overline{B}^*(w_2), v_1 \right\rangle \langle B^*(v_2), w_1 \rangle = \left\langle \overline{B}^*(w_2), v_1 \right\rangle \langle B(w_1), v_2 \rangle = \left\langle \overline{B}^*(w_2) B(w_1), v \right\rangle \\
&= \langle B(S(w_2)) B(w_1), v \rangle = \langle B(S(w_2) w_1), v \rangle = \varepsilon(v) \varepsilon(w).
\end{aligned}$$

因此，$(\theta \otimes \theta)(R_{21}R) = 1 \otimes 1$，如所声称的那样。

因此，由断言 1 可得 $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{Z}'$，并且由于根据推论 4.1 和 [Sh，定理 4.9]，两类具有相同的 Frobenius-Perron 维数，故等式成立，如所声称的那样。□

回顾（例如，见 [EGNO]），有限编织张量范畴称为非退化，如果其 M¨uger 中心是平凡的。

推论*4.6.* 对于每个张量子范畴 $\mathscr{Z}(K,H,B) \subseteq \mathscr{Z}(G)$，以下结论成立：*(1)* $(D(K,H,B)\ R(K,H,B))$ 是三角的，当且仅当 $\mathscr{Z}(K,H,B)$ 是对称的，当且仅当，$K \subseteq H$ 和 $B \circ \iota_K, {}_H = \iota^{\sharp}_{K,H} \circ B : \Bbbk[K] \to \mathscr{O}(K)$。

此外，在这种情况下，K 是交换的，因此 $D(K, H, B) = \mathbf{k}[G]$ 如命题 3.7*(7)* 中所述，并且我们有

$$R(K,H,B) = \sum_{u \in \mathcal{B}_K} (B(u)\#1) \otimes (q_K(\delta_u)\#1) \in \mathbf{k}[K^\vee]^{\otimes 2} \quad and$$

$$V(K,H,B) = \sum_{u \in \mathcal{B}_K} q_K(S(\delta_u))B(u)\#1 \in \mathbf{k}[K^\vee].$$

(2) $(D(K,H,B)\ R(K,H,B))$ 是可因子化的，当且仅当 $\mathscr{Z}(K,H,B)$ 是非退化的，当且仅当，$HK = G$ 和

$$\beta_{B,\overline{B}} = \left(\iota^{\sharp}_{K\cap H,K} B^* \iota_{K\cap H,H}\right) \star \left(\iota^{\sharp}_{K\cap H,H} B \iota_{K\cap H,K}\right) : \mathbf{k}[K \cap H] \to \mathscr{O}(K \cap H)$$

是一个 *Hopf* 代数同构。特别地，如果 $\mathscr{Z}(K,H,B)$ 非退化，那么 $K \cap H$ 是 G的自对偶中心子群概形。

(3) $\mathscr{Z}(K,H,B)$ 是拉格朗日的，当且仅当 $K = H$和 $B = B$。特别地，如果$\mathscr{Z}(K,H,B)$ 是拉格朗日的，那么 $K = H$ 是交换的，因此

$$D(H,H,B) = \mathbf{k}[H^\vee]\#^\tau_\sigma \mathbf{k}[G/H] = \mathbf{k}[\widetilde{G}],$$

如命题 3.7*(7)*.

证明。 固定 $\mathscr{Z} := \mathscr{Z}(K,H,B) \subseteq \mathscr{Z}(G)$.

(1) 由于 $\mathscr{Z}$ 是对称的，当且仅当 $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{Z}'$，根据定理 4.5，$\mathscr{Z}(K,H,B) \subseteq \mathscr{Z}(H,K,B)$，故该结论由推论 4.4(1)得出。

(2) 由于 $\mathscr{Z}$ 非退化，当且仅当 $\mathscr{Z}' \cap \mathscr{Z} = \mathrm{Vec}$；根据定理 4.5，$\mathscr{Z}(K,H,B) \cap \mathscr{Z}(H,K,B) = \mathscr{Z}(1,G,1)$，又由推论4.4(2)，$\mathscr{Z}(K,H,B) \cap \mathscr{Z}(H,K,B) = \mathscr{Z}(L, KH, \mathrm{B})$，可得 $\mathscr{Z}(K,H,B)$非退化，当且仅当 $G = KH$和 $L = 1$，因此 $\beta_{B,B} : \mathbf{k}[K \cap H] \to \mathscr{O}(K \cap H)$ 是单射的，从而是 Hopf 代数同构，正如所述。

(3) 由于 $\mathscr{Z}$是拉格朗日的，当且仅当 $\mathscr{Z}' = \mathscr{Z}$；而根据定理 4.5，$\mathscr{Z}(H,\ K,\ B) = \mathscr{Z}(K,\ H,\ B)$，当且仅当 $\mathscr{Z}' = \mathscr{Z}$，故由定理 4.2可得所述结论。□

4.3. $\mathscr{Z}(K,H,B)$ 的单对象与投射对象。保留 §2.4 中的记号。固定一个如定理 3.5 中所述的三元组 (K,H,B)。回忆一下，$K \subseteq G$ 是一个正规子群概形，因此对每个 $g \in K(\Bbbk)$，都有 $C_g \subset K$，并令 $\mathrm{C}_K(\Bbbk) := \{C_g \mid g \in K(\Bbbk)\} \subseteq \mathrm{C}(\Bbbk)$。

固定 $C_g \in \mathbf{C}_K(\mathbf{k})$，其代表元为 $g \in C_g(\mathbf{k})$，并令 $(M, \rho_M) \in$余表示$(\mathscr{O}(G_g))$。回忆一下，对于 $m \in M$，我们记 $\rho_M(m) = m^{(-1)} \otimes m^{(0)} \in \mathscr{O}(G_g) \otimes M$。令

$$\rho_M^g : \mathscr{O}(C_g) \otimes M \to \mathscr{O}(C_g) \otimes M \otimes \mathscr{O}(G),$$

$$\rho_M^g(c \otimes m) = \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \alpha_g\left(i_g^\sharp(c)_1 \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_1\right) \otimes m^{(0)} \otimes i_g^\sharp(c)_2 \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_2,$$

并定义 $\mathbf{F}^{C_g}(M,\ \rho_M) = (\mathscr{O}(C_g) \otimes M,\ \rho_M^g) \in \mathscr{Z}(G)^{C_g}$。特别地，$u \in \mathbf{k}[G]$ 在 $c \otimes m \in \mathscr{O}(C_g) \otimes M$ 上的作用由下式给出

$$u \cdot (c \otimes m) = \left\langle u, i_g^\sharp(c)_2 \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_2 \right\rangle \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \alpha_g\left(i_g^\sharp(c)_1 \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_1\right) \otimes m^{(0)}. \tag{4.1}$$

注意，由于 $g \in K$, $H \subseteq G$ 是正规子群概形，且 H 与 K彼此中心化，因此 $H \subseteq G_g$ 是正规子群概形，并且 $q_{G,\ H} = q_{G_g,\ H} \circ q_{G,\ G_g}$。

引理 4.7。对于每个 $v \in \mathbf{k}[H]$ 和 $c \otimes m \in \mathscr{O}(C_g) \otimes M$，有

$$\iota_{H,G}(v) \cdot (c \otimes m) = \left\langle \iota_{H,G_g}(v), m^{(-1)} \right\rangle c \otimes m^{(0)} = c \otimes m \cdot \iota_{H,G_g}(v).$$

证明。由于对于每个 $c \in \mathscr{O}(C_g)$，$\Delta(i_g^\sharp(c)) \in \mathscr{O}(G) \otimes \mathscr{O}(G/G_g)$，由（4.1）可知，对于每个 $v \in \mathbf{k}[H] \subseteq \mathbf{k}[G_g]$ 和 $c \otimes m \in \mathscr{O}(C_g) \otimes M$，有

$$\begin{aligned}
\iota_{H,G}(v) \cdot (c \otimes m) &= \left\langle \iota_{H,G}(v), i_g^\sharp(c)_2 \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_2 \right\rangle \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \alpha_g\left(i_g^\sharp(c)_1 \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_1\right) \otimes m^{(0)} \\
&= \left\langle \iota_{H,G}(v_1), i_g^\sharp(c)_2 \right\rangle \left\langle \iota_{H,G}(v_2), \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_2 \right\rangle \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \alpha_g\left(i_g^\sharp(c)_1 \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_1\right) \otimes m^{(0)} \\
&= \varepsilon(i_g^\sharp(c)_2)\varepsilon(\iota_{H,G}(v_1)) \left\langle \iota_{H,G}(v_2), \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_2 \right\rangle \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \alpha_g\left(i_g^\sharp(c)_1 \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_1\right) \otimes m^{(0)} \\
&= \left\langle \iota_{H,G}(v), \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_2 \right\rangle \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \alpha_g\left(i_g^\sharp(c) \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_1\right) \otimes m^{(0)} \\
&= \left\langle \iota_{H,G}(v), \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_2 \right\rangle \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \left(i_g^\sharp(c) \alpha_g\left(\mu_g\left(m^{(-1)}\right)_1\right)\right) \otimes m^{(0)} \\
&= \left\langle \iota_{H,G}(v), \mu_g\left(m^{(-1)}\right)_2 \right\rangle \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \left(\alpha_g\left(\mu_g\left(m^{(-1)}\right)_1\right)\right) c \otimes m^{(0)} \\
&= \left\langle v, q_{G,H}(\mu_g\left(m^{(-1)}\right)_2) \right\rangle \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \left(\alpha_g\left(\mu_g\left(m^{(-1)}\right)_1\right)\right) c \otimes m^{(0)} \\
&= \left\langle v, q_{G_g,H}(q_{G,G_g}(\mu_g\left(m^{(-1)}\right)_2)) \right\rangle \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \left(\alpha_g\left(\mu_g\left(m^{(-1)}\right)_1\right)\right) c \otimes m^{(0)} \\
&= \left\langle v, q_{G_g,H}(m_2^{(-1)}) \right\rangle \left(i_g^{-1}\right)^\sharp \left(\alpha_g(\mu_g(m_1^{(-1)}))\right) c \otimes m^{(0)} = \left\langle v, q_{G_g,H}(m^{(-1)}) \right\rangle c \otimes m^{(0)} \\
&= \left\langle \iota_{H,G_g}(v), m^{(-1)} \right\rangle c \otimes m^{(0)} = c \otimes m \cdot \iota_{H,G_g}(v),
\end{aligned}$$

如所述，其中我们在倒数第四个等式中使用了（2.24），在倒数第三个等式中使用了（2.25）。□

从该 G-等变 Hopf 代数映射 $B : \mathbf{k}[H] \to \mathscr{O}(K)$，我们得到映射

$$B_g : \mathbf{k}[H] \to \mathbf{k}, \quad v \mapsto \langle B(v), g \rangle, \tag{4.2}$$

这是一个 G_g-不变特征，因为对于每个 $u \in \mathbf{k}[G_g]$ 和 $v \in \mathbf{k}[H]$,

$$B_g(\mathrm{ad}_\ell(S(u))(v)) = \langle B(\mathrm{ad}_\ell(S(u))(v)), g \rangle = \langle B(v), \mathrm{ad}_\ell(u)(g) \rangle = \langle B(v), g \rangle = B_g(v).$$

我们还得到用于 $\mathscr{O}(G_g/H)$ 的 Drinfeld 扭曲 ψ_g（即 $\mathbf{k}[G_g/H]$ 的 Hopf 2-余循环），其形式为

$$\psi_g(x, y) = \langle \sigma(x, y), g \rangle; \quad \forall x, y \in \mathbf{k}[G_g/H]. \tag{4.3}$$

设 $\mathbf{k}^{\psi_g}[G_g/H] = (\mathscr{O}(G_g/H)^{\psi_g})^*$ 为相应的扭曲群代数，并令 $\cdot$ 表示其乘法。

引理 4.8. 对于每个 $g \in K(\mathbf{k})$，映射

$$p_g : \mathbf{k}[G_g] \to \mathbf{k}^{\psi_g}[G_g/H], \quad u \mapsto B_g(\eta_H(u_1))\pi_H(u_2),$$

is 一个满射代数同态，它将每个 $v \in \mathbf{k}[H]$ 映射到 $B_g(v)$ 1.

*P*证毕。 由引理 2.1(3) 和引理 3.4(1)，对每个 u， $\tilde{u} \in \mathbf{k}[G_g]$，有

$$\begin{aligned}
p_g(u\tilde{u}) &= B_g(\eta(u_1\tilde{u}_1))\pi(u_2\tilde{u}_2) \\
&= B_g\left(\eta(u_1)\gamma(\pi(u_2))_1\eta(\tilde{u}_1)S(\gamma(\pi(u_2))_2)\eta\{\gamma(\pi(u_2))_3\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\}\right)\pi(u_3\tilde{u}_3) \\
&= B_g\left(\eta(u_1)\eta(\tilde{u}_1)\eta\{\gamma(\pi(u_2))\gamma(\pi(\tilde{u}_2))\}\right)\pi(u_3\tilde{u}_3) \\
&= B_g(\eta(u_1)\eta(\tilde{u}_1))\langle\sigma(\pi(u_2),\pi(\tilde{u}_2)),g\rangle\pi(u_3\tilde{u}_3) \\
&= B_g(\eta(u_1)\eta(\tilde{u}_1))\psi_g(\pi(u_2),\pi(\tilde{u}_2))\pi(u_3\tilde{u}_3) \\
&= B_g(\eta(u_1)\eta(\tilde{u}_1))\pi(u_2)\cdot\pi(\tilde{u}_2) = p_g(u)\cdot p_g(\tilde{u}),
\end{aligned}$$

如所述。 □

单射的余代数同态 p_g^* : $\mathscr{O}(G_g/H)_{\psi_g} \xrightarrow{1-1} \mathscr{O}(G_g)$ 诱导出一个阿贝尔嵌入 Corep($\mathscr{O}(G_g/H)^{\psi_g}$) $\subseteq$Corep($\mathscr{O}(G_g)$)，因此 Corep($\mathscr{O}(G_g/H)^{\psi_g}$) 由所有满足以下条件的 G_g-模 M 构成：

$$m \cdot \iota_{H,G_g}(v) = B_g(v)m; \quad \forall v \in \mathbf{k}[H],\, m \in M. \tag{4.4}$$

现在，对每个 $C_g \in \mathrm{C}_K(\mathbf{k})$，考虑全阿贝尔子范畴

$$\widetilde{\mathscr{Z}}(K,H,B)_{C_g} := \mathbf{F}_{C_g}(\mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G_g/H)_{\psi_g})) \subseteq \mathscr{Z}(G)_{C_g},$$

并令

$$\widetilde{\mathscr{Z}}(K,H,B) := \bigoplus_{C_g \in \mathrm{C}_K(\mathbf{k})} \overline{\widetilde{\mathscr{Z}}(K,H,B)_{C_g}} \subseteq \mathscr{Z}(G). \tag{4.5}$$

引理 4.9。 固定 $\mathscr{Z} := \mathscr{Z}(K, H, B)$ 如 (4.5) 所示。则有以下结论：

(1) 对每个简单的 $M \in$ 余表示($\mathscr{O}(G_g/H)^{\psi_g}$)，有

$$P_{\widetilde{\mathscr{Z}}}(\mathbf{F}_{C_g}(M)) = \mathscr{O}(K^\circ) \otimes \mathscr{O}(C_g(\mathbf{k})) \otimes P_{(G_g/H,\psi_g)}(M).$$

(2) 阿贝尔子范畴 $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{Z}(G)$ 的 *Frobenius-Perron* 维数等于 $|K|[G : H]$。

(3) 对每个 $C_g \in \mathrm{C}_K(\mathbf{k})$，有 $\overline{\mathscr{Z}_{C_g}} = \mathscr{Z}(K, H, B) \cap \overline{\mathscr{Z}(G)_{C_g}}$。*Thu s,*

$$\mathscr{Z}(K,H,B) = \bigoplus_{C_g \in \mathrm{C}_K(\mathbf{k})} \mathscr{Z}(K,H,B) \cap \overline{\mathscr{Z}(G)_{C_g}}.$$

证明。 (1) 证明与 [GS1，定理8.3(5)的证明类似]。

(2) 根据定义，利用(1)，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{FPdim}(\widetilde{\mathscr{Z}}) &= \sum_{X\in\mathcal{O}(\widetilde{\mathscr{Z}})} \mathrm{FPdim}(X)\mathrm{FPdim}(P_{\widetilde{\mathscr{Z}}}(X)) \\
&= \sum_{C_g\in \mathrm{C}_K(\mathbf{k}),\, M\in\mathcal{O}(G_g/H,\psi_g)} \mathrm{FPdim}(\mathbf{F}_{C_g}(M))\mathrm{FPdim}(P_{\widetilde{\mathscr{Z}}}(\mathbf{F}_{C_g}(M))) \\
&= \sum_{C_g\in \mathrm{C}_K(\mathbf{k}),\, M\in\mathcal{O}(G_g/H,\psi_g)} |C_g|\dim_{\mathbf{k}}(M)|K^\circ||C_g(\mathbf{k})|\dim_{\mathbf{k}}\left(P_{(G_g/H,\psi_g)}(M)\right) \\
&= \sum_{C_g\in \mathrm{C}_K(\mathbf{k})} |C_g||K^\circ||C_g(\mathbf{k})|[G_g:H] = \sum_{C_g\in \mathrm{C}_K(\mathbf{k})} [G:H]|K^\circ||C_g(\mathbf{k})| \\
&= [G:H]|K| \sum_{C_g\in \mathrm{C}_K(\mathbf{k})} \frac{|C_g(\mathbf{k})|}{|K(\mathbf{k})|} = [G:H]|K|,
\end{aligned}$$

正如所声称的。

(3) 若 $\mathbf{F}^{C_g}(M,\rho_M)\in\mathscr{Z}(K,H,B)\cap\mathscr{Z}(G)^{C_g}$，则由引理 4.7，

$$\left\langle \iota_{H,G_g}(v), m^{(-1)}\right\rangle c\otimes m^{(0)} = q_{K,C_g}(B(v))c\otimes m$$

对每个 $v\in\mathbf{k}[H]$ 以及 $c\otimes m\in\mathscr{O}(C_g)\otimes M$。将 $g\otimes\mathrm{id}_M$ 作用于等式两边，得到

$$\left\langle \iota_{H,G_g}(v), m^{(-1)}\right\rangle c(g)m^{(0)} = B_g(v)c(g)m,$$

这意味着 $(M,\rho_M)\in$余表示$(\mathscr{O}(G_g/H)^{\psi_g})$，因此

$$\mathscr{Z}(K,H,B)\cap\mathscr{Z}(G)_{C_g}\subseteq\widetilde{\mathscr{Z}}(K,H,B)_{C_g}.$$

因此，$\mathscr{Z}(K,H,B)\cap\mathscr{Z}(G)_{C_g}\subseteq\mathscr{Z}(K,H,B)^{C_g}$，所以 $\mathscr{Z}(K,H,B)\subseteq\mathscr{Z}(K,H,B)$。由于根据（2），$\mathscr{Z}(K,H,B)$ 和 $\mathscr{Z}(K,H,B)$ 具有相同的 Frobenius-Perron 维数，结论得证。□

定理 4.10。 固定一个辫子子范畴 $\mathscr{Z}:=\mathscr{Z}(K,H,B)\subseteq\mathscr{Z}(G)$，并对每个$C_g\in\mathrm{C}_K(\mathbf{k})$，令 $\mathscr{Z}_{C_g}:=\mathscr{Z}\cap\mathscr{Z}(G)$*{v39>*。则有以下结论：

(1) 阿贝尔等价 $\mathbf{F}^{C_g}$ *(2.27)* 限制为一个等价

$$\mathbf{F}_{C_g}:\mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G_g/H)_{\psi_g})\xrightarrow{\simeq}\mathscr{Z}_{C_g},\quad (M,\rho_M)\mapsto(\mathscr{O}(C_g)\otimes M,\rho_M^g).$$

特别地，复合函子

$$\mathrm{Rep}(G/H)\simeq\mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G/H))\xrightarrow{\mathbf{F}_1}\mathscr{Z}_1\hookrightarrow\mathscr{Z}$$

与辫子范畴的典范嵌入 表示范畴$(G/H)\hookrightarrow\mathscr{Z}$一致。

(2) 对于每个 $C_g\in\mathrm{C}_K(\mathbf{k})$，其代表元为 $g\in C_g(\mathbf{k})$，简单对象 $M\in\mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G_g/H)^{\psi_g})$的等价类集合与 $\mathscr{Z}_{C_g}$ 的简单对象同构类之间存在一个双射，将 M对应到 $\mathbf{F}^{C_g}(M)$。此外，我们有阿贝尔范畴的直和分解

$$\mathscr{Z}(K,H,B)=\bigoplus_{C_g\in\mathrm{C}_K(\mathbf{k})}\overline{\mathscr{Z}_{C_g}},$$

以及$\underline{\mathrm{Rep}(G/H)} \simeq \underline{\mathscr{Z}_1} = \mathscr{Z}\left(K^\circ, H, \iota^\sharp_{K^\circ,K} \circ B\right)$。特别地，若 G 是连通的

则 $\mathscr{Z}$ 的简单对象恰好是$\mathrm{Rep}(G/H) \simeq \mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G/H))$中的简单对象。

(3) 对于每个 $(M, \rho_M) \in \mathbf{Corep}(\mathscr{O}(G_g/H)^{\psi_g})$，我们有 $\mathbf{F}^{C_g}(M, \rho_M)^* \cong \mathbf{F}^{C_{g^{-1}}}(M^*, \rho_{M^*})$。

(4) 对于每个$(M、\ \rho_M) \in \mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G_g/H)^{\psi_g})$，我们有

$$\mathrm{FPdim}\left(\mathbf{F}_{C_g}(M, \rho_M)\right) = |C_g| \dim_{\mathbf{k}}(M).$$

(5) 对于每个简单的$(M、\ \rho_M) \in \mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G_g/H)^{\psi_g})$，我们有

$$P_{\mathscr{Z}}\left(\mathbf{F}_{C_g}(M, \rho_M)\right) \cong \left(\mathscr{O}(K^\circ) \otimes \mathscr{O}(C_g(\mathbf{k})) \otimes P_{(G_g/H, \psi_g)}(M, \rho_M), R^g_M\right),$$

其中 $\mathscr{O}(K)$ 以对角方式作用于前两个因子上，并且

$$R^g_M := \left(\chi_{C_g} \otimes \mathrm{id}^{\otimes 2}\right)\left(\mathrm{id}_{\mathscr{O}(K^\circ)} \otimes \rho^g_{P_{(G_g/H,\psi_g)}(M,\rho_M)}\right)\left(\nu_{C_g} \otimes \mathrm{id}\right).$$

特别地，我们有

$$\mathrm{FPdim}\left(P_{\mathscr{Z}}\left(\mathbf{F}_{C_g}(M, \rho_M)\right)\right) = |K^\circ||C_g(\mathbf{k})| \dim_{\mathbf{k}}\left(P_{(G_g/H,\psi_g)}(M, \rho_M)\right).$$

(6) 对于每个 $C_g \in \mathrm{C}_K(\mathbf{k})$，都有 FP维数 $\left(\mathscr{Z}_{C_g}\right) = |K^\circ||C_g(\mathbf{k})|[G : H]$。

证明。(1)-(2) 由引理4.9可得。

(3) 由 [GS1，定理 83] (见定理 2.3) 可得。(4) 由 (1) 可得。(5)-(6) 由 [GS1，定理 83] 及前述各部分可得。

□

5. Some special cases and examples

5.1. **典范例子**。以下是 $D(G)$ 的一些典范 Hopf 商及其在 $\mathscr{Z}(G)$ 中对应的编织子范畴：

(1) 我们有

$$D(1, G, 1) = \mathbf{k}, \quad D(G, 1, 1) = D(G), \quad D(1, 1, 1) = \mathbf{k}[G].$$

因此，我们有

$$\mathscr{Z}(1, G, 1) = \mathrm{Vect}, \quad \mathscr{Z}(1, G, 1)' = \mathscr{Z}(G, 1, 1) = \mathscr{Z}(G), \quad \mathscr{Z}(1, 1, 1) = \mathrm{Rep}(G).$$

(2) 对于每个正规子群概形 $K \subseteq G$，我们有 $D(1, K, 1) = \mathbf{k}[G/K]$，并且$D(K, 1, 1) = \mathscr{O}(K)^{\mathrm{cop}}\#\mathbf{k}[G]$ 是张量积余代数和交叉积代数。特别地，$D(1, G^\circ, 1) = \mathbf{k}[G(\mathbf{k})]$，以及 $D(G^\circ, 1, 1) = \mathscr{O}(G^\circ)^{\mathrm{cop}}\#\mathbf{k}[G]$。

(3) 对于每个正规子群概形 $K \subseteq G$、一个中心的子群概形 $H \subseteq G$，以及一个 G-等变群概形态射 $B : K \to H^\vee$，Hopf 代数

$$D(K, H, B) = \mathscr{O}(K)\#^\tau_\sigma \mathbf{k}[G/H]$$

是张量积余代数和交叉积代数，并且根据命题 3.7（7），

$$D(H, K, \overline{B}) = \mathbf{k}[H^\vee]\#^\tau_\sigma \mathbf{k}[G/K] = \mathbf{k}[\widetilde{G}],$$

其中，$\widetilde{G}$ 是与以下内容对应的 $H^\vee$ 由 G/K 扩张而成的群概形：

$$\sigma \in Z^2(H^\vee, G/K), \quad \tau \in Z^1(H^\vee, G/K),$$

其作用是平凡的。因此，我们有

$$\mathscr{Z}(K,H,B)=\mathrm{Rep}\left(\mathscr{O}(K)\#_\sigma^\tau\mathbf{k}[G/H]\right),$$

~和 $\mathscr{Z}(K,H,B)'=\mathscr{Z}(H,K,B)$ = 表示范畴(G)。

5.2. 直积。 设 $G:=K\times H$，并设 $B:\mathbf{k}[H]\to\mathscr{O}(K)$ 是任意一个 G-等变 Hopf代数映射。那么

$$\mathscr{Z}(K\times 1,1\times H,B)\subseteq\mathscr{Z}(G)$$

是一个非退化的编织子范畴。注意，由于 σ 和 τ 根据备注3.3是平凡的，因此可得

$$\mathscr{Z}(K\times 1,1\times H,B)\cong\mathscr{Z}(K)$$

作为辫子范畴（无论 B 如何选择）。

5.3. 常值群。 假设 G 是常值的；也就是说，$G=G(\mathbf{k})$。对于 $g\in G$，令$\delta_g\in\mathscr{O}(G)$ 为 g 处的狄拉克函数。元素 $\{\delta_g\}_{g\in G}$ 两两正交，且为幂等元，因此任何 $\mathscr{O}(G)$-模 V 都可分解为

$$V=\bigoplus_{g\in G}V_g,\qquad V_g:=\delta_gV.$$

回顾一下，在这种情况下，$D(G)$-模是一个 G分次向量空间 $V=\bigoplus_{g\in G}V_g$，并配备有 G的作用，使得对于每个 x，$g\in G$，都有 $x\cdot V_g\subseteq V_{xgx^{-1}}$。

现在固定一个三元组 (K,H,B)，并令 $\theta\colon D(G)\twoheadrightarrow D(K,H,B)$ 为定理 3.5中的商映射。由于在这种情况下 γ_H 是一个余代数映射，因此我们有

$$D(K,H,B)=\mathscr{O}(K)^{\mathrm{cop}}\#_\sigma\mathbf{k}[G/H]$$

根据命题 3.7(4)，它是一个张量积余代数。

若 $V\in\mathrm{Rep}(D(K,H,B))=\mathscr{Z}(K,H,B)$，并沿着 θ 将 V膨胀为一个 $D(G)$-模，那么 $\mathscr{O}(G)$-作用可经由 $q_K:\mathscr{O}(G)\twoheadrightarrow\mathscr{O}(K)$分解。特别地，对于 $g\notin K$，$q_K(\delta_g)=0$，因此除非 $g\in K$，否则 $V_g=\delta_gV=0$。于是，V支撑在 K上。此外，对于$h\in H$，我们有 $\pi_H(h)=1$ 且 $\eta_H(h)=h$，因此

$$\theta(1\bowtie h)=B(h)\#1\in\mathscr{O}(K)\#_\sigma\mathbf{k}[G/H],$$

因此，在每个齐次分量 V_k，$k\in K$ 上，元素 h 的作用由标量 $B(h)(k)$ 给出。等价地，令

$$\beta:H\times K\to\mathbf{k}^\times,\qquad\beta(h,k):=B(h)(k),$$

我们看到，$\mathscr{Z}(K,H,B)$ 恰由支撑在 K 上的 G-等变层构成，其中 H 在 $k\in K$ 上方纤维上的作用由 $\beta(h,k)$ 给出。因此，在融合情形下，$\mathscr{Z}(K,H,B)$ 就是 NNW 第 3] 节中的范畴 $\mathcal{S}(K,H,B)$。

由定理4.10可得，与 [GS2推论 6.4], 类似，我们有阿贝尔范畴的直和分解

$$\mathscr{Z}(K,H,B)=\bigoplus_{C_g\in\mathrm{C}_K}\mathscr{Z}(K,H,B)_{C_g}\simeq\bigoplus_{C_g\in\mathrm{C}_K}\mathrm{Corep}(\mathscr{O}(G_g/H)_{\psi_g}),$$

由$\mathbf{F}^{C_g}$, $C_g \in \mathsf{C}_K$给出，并且对于每个简单的 $M \in$余表示$(\mathscr{O}(G_g/H)^{\psi_g})$，我们有

$$P_{\mathscr{Z}(K,H,B)}\left(\mathbf{F}_{C_g}(M)\right) = \mathbf{F}_{C_g}(P_{(G_g/H,\psi_g)}(M)) = \left(\mathscr{O}(C_g) \otimes P_{(G_g/H,\psi_g)}(M), \rho^g_{P_{(G_g/H,\psi_g)}(M)}\right),$$

其中 $\mathscr{O}(K)$ 作用于第一个因子。

5.4. 连通群。假设 G 是连通的；也就是说， $G(\mathbf{k}) = 1$ （例如， G 是与有限维受限 p-李代数 $\mathfrak{g}$ 相关联的有限群概形）。由定理 4.10 可知，类似于 [GS2，例 7.5]，对于定理 3.5 中的每个三元组 (K, H, B)，都有 $\mathscr{Z}(K, H, B) =$表示范畴 (G/H)；并且对于每个简单的$M \in$ 表示范畴 (G/H)，都有

$$P_{\mathscr{Z}(K,H,B)}\left(\mathbf{F}(M)\right) \cong \left(\mathscr{O}(K) \otimes P_{G/H}(M), \mathrm{id} \otimes \rho_{P_{G/H}(M)}\right),$$

其中 $\mathscr{O}(K)$ 作用于第一个因子。

例 5.1。 设 $\mathfrak{g}$ 是唯一的具有基 $\{x, y\}$ 的二维非阿贝尔受限 p-李代数，满足 $[x, y] = y$、 $x^{[p]} = x$ 和 $y^{[p]} = 0$。那么 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G_1)$，其中$G_1$ 是群概形 $G :=\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 的 Frobenius 核，该群概形是仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 的自同构群。显然， $\mathfrak{a} := \mathrm{sp}_{\mathbf{k}}\{y\} = \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_{a,\ 1}) \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个理想， $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_{m,\ 1})$，且 $G_1 = \mathbb{G}_{a,\ 1} \rtimes \mathbb{G}_{m,\ 1}$。

我们有编织子范畴（退化且非对称）

$$\mathscr{Z}\left(\mathbb{G}_{a,1}, 1, 1\right) = \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_{a,1}^{\vee} \times G_1) \subseteq \mathscr{Z}(G_1)$$

其 Frobenius-Perron 维数为 p^3，以及由无限族非等价编织子范畴组成的族

$$\mathscr{Z}_\lambda := \mathscr{Z}\left(\mathbb{G}_{a,1}, \mathbb{G}_{a,1}, B_\lambda\right) = \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_{a,1}^{\vee} \times \mathbb{G}_{m,1}, R_\lambda) \subseteq \mathscr{Z}(G_1)$$

其 Frobenius-Perron 维数为 p^2 由 $\lambda \in \mathbf{k}$参数化，其中 B_λ 和 R_λ 见 §6.2。注意， $\mathscr{Z}_\lambda$ 是拉格朗日的，当且仅当 $\lambda = 0$，并且 $\mathscr{Z}_0$ 和$\mathscr{Z}(1,\ 1,\ \mathbf{1}) = \mathrm{Rep}(G_1,\ 1 \otimes 1)$ 作为 $\mathscr{Z}(G_1$ 的编织子范畴并不等价，正如定理 4.2 所预言的那样。□

例 5.2。 设 $\mathfrak{g}$ 是具有基 $\{x, y, z\}$的 3 维 Heisenberg p-李代数，满足 $[x, y] = z$。令 $\mathfrak{h} := \mathrm{sp}_{\mathbf{k}}\{z\} \subset \mathfrak{g}$，并令 $\mathfrak{k} := \mathrm{sp}_{\mathbf{k}}\{x, z\} \subset \mathfrak{g}$；前者是一个中心理想，后者是一个理想。回忆一下，对于 $p > 2$， $\mathfrak{g}$ 恰好具有三种非同构的 $[p]$-结构，分别为

$$x^{[p]} = y^{[p]} = z^{[p]} = 0; \quad x^{[p]} = z,\ y^{[p]} = z^{[p]} = 0; \quad x^{[p]} = y^{[p]} = 0,\ z^{[p]} = z.$$

在每种情况下，令 G 为满足 $\mathscr{O}(G) =(u^{[p]}(\mathfrak{g}))^*$ 的有限群概形；它是一个维数为 p^3 的局部交换 Hopf 代数（因此， $u^{[p]}(\mathfrak{g})$ 是连通的）。此外，令 $H \subset G$ 为满足 $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ 的中心子群概形，并令 $K \subset G$ 为满足 $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ 的正规子群概形。

情形 $x^{[p]} = y^{[p]} = z^{[p]} = 0$**：** 在此情形下， $\mathfrak{g}$ 是 $[p]$-幺幂的，因此 $u^{[p]}(\mathfrak{g})$是局部的（且连通）。于是， $D(G) = (u^{[p]}(\mathfrak{g}))^{*\mathrm{cop}} \bowtie u^{[p]}(\mathfrak{g})$是局部且连通的。此外， $H \cong \mathbb{G}_{a,\ 1}$， $G/H \cong \mathbb{G}_{a,\ 1}^2$， $K \cong \mathbb{G}_{a,\ 1}^2$，以及$G/K \cong \mathbb{G}_{a,\ 1}$。

(1) 我们有一个由两两不等价的幺幂 编织子范畴构成的无限族

$$\mathscr{Z}(H,H,B_\lambda)=\mathrm{Rep}(\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}^\vee]\#_\sigma^\tau\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}^2],R_\lambda)=\mathrm{Rep}(\widetilde{G},R_\lambda)\subseteq\mathscr{Z}(G)$$

~Frobenius-Perron 维数为 p^3，由 $\lambda\in\mathbf{k}$ 参数化，其中 G 是对应于 $\tau\in Z^1(\mathbb{G}_a^2,1,(\mathbb{G}_a^\vee,1)^2)$ 和$\sigma\in Z^2(\mathbb{G}_a^2,1,\mathbb{G}_a^\vee,1)$ 的 $\mathbb{G}_a^2,1$ 通过 $\mathbb{G}_a^\vee,1$ 得到的有限群概形扩张，而 B_λ 和 R_λ 见 §6.2。

(2) 我们有一个由 参数化的非等价幺幂 编织子范畴无限族，其

$$\mathscr{Z}(K,H,B)=\mathrm{Rep}(\mathbf{k}[(\mathbb{G}_{a,1}^\vee)^2]\#_\sigma^\tau\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}^2],R_B)=\mathrm{Rep}(\widetilde{G},R_B)\subseteq\mathscr{Z}(G)$$

~Frobenius-Perron 维数为 p^4，由 $B\in\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{a,\,1},(\mathbb{G}_{a,\,1}^\vee)^2)$ 参数化，其中 G是对应于 $\sigma\in Z^2(\mathbb{G}_{a,\,1}^2,(\mathbb{G}_{a,\,1}^\vee)^2)$ 和 $\tau\in Z^1(\mathbb{G}_{a,\,1}^2,(\mathbb{G}_{a,\,1}^\vee)^4)$ 的 $(\mathbb{G}_{a,\,1}^\vee)^2$ 通过 $\mathbb{G}_{a,\,1}^2$ 得到的群概形扩张。

情形 $x^{[p]}=z,\quad y^{[p]}=z^{[p]}=0$**：** 在此情形下 $H\cong\mathbb{G}_{a,\,1}$ 且 $G/H\cong\mathbb{G}_{m,\,1}\times\mathbb{G}_{a,\,1}$，因此我们得到无限族两两不等价的编织子范畴

$$\mathscr{Z}(H,H,B_\lambda)=\mathrm{Rep}(\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}^\vee]\#_\sigma^\tau\mathbf{k}[\mathbb{G}_{m,1}\times\mathbb{G}_{a,1}],R_\lambda)=\mathrm{Rep}(\widetilde{G},R_\lambda)\subseteq\mathscr{Z}(G)$$

~其 Frobenius-Perron 维数为 p^3，由 $\lambda\in\mathbf{k}$ 参数化，其中 G 是对应于 $\sigma\in Z^2(\mathbb{G}_m,1\times\mathbb{G}_a,1,\mathbb{G}_a^\vee,1)$ 和 $\tau\in Z^1(\mathbb{G}_m,1\times\mathbb{G}_a,1,(\mathbb{G}_a^\vee,1)^2)$ 的、由 $\mathbb{G}_a^\vee,1$ 扩张 $\mathbb{G}_m,1\times\mathbb{G}_a,1$ 得到的群概形扩张，而 B_λ 和 R_λ 见 §6.2。

情形 $x^{[p]}=y^{[p]}=0,\quad z^{[p]}=z$**：** 在此情形下 $H\cong\mathbb{G}_{m,\,1}$ 且 $G/H\cong\mathbb{G}_{a,\,1}^2$。由于唯一的群概形态射 $\mathbb{G}_{a,\,1}\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是平凡的，我们只有对称子范畴

$$\mathscr{Z}(H,H,1)=\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{G}_{a,1}^2,1\otimes1)\subseteq\mathscr{Z}(G)$$

Frobenius-Perron 维数为 p^3。 □

5.5. **平凡** B。令 $\mathscr{Z}(K,H):=\mathscr{Z}(K,H,1)$。根据定义，对象 X 属于 $\mathrm{Coh}(K)^{G/H}$ 是表示范畴 $\mathrm{Rep}(\mathscr{O}(K)$-模，因此由命题 3.7(5) 可知，我们有一个张量范畴的自然嵌入

$$\mathrm{Coh}(K)^{G/H}\xrightarrow{1:1}\mathscr{Z}(K,H).$$

由于这两个范畴具有相同的 Frobenius-Perron 维数，因此可知我们有一个张量范畴的等价

$$\mathscr{Z}(K,H)\simeq\mathrm{Coh}(K)^{G/H}.$$

现在将 K 视为 $K\times G/H$ 的子群概形，通过群概形嵌入

$$\Delta_{K,H}:K\to K\times G/H,\quad k\mapsto(k,\pi_H(k)).$$

接下来，类似于证明 $\mathscr{Z}(G)\simeq\mathrm{Coh}(G)^G\simeq\mathscr{C}(G\times G,\Delta_{G,1}(G))$ [GS1，第 8], 节，我们有一个张量范畴的等价

$$\mathrm{Coh}(K)^{G/H}\simeq\mathscr{C}(K\times G/H,\Delta_{K,H}(K)),$$

因此 $\mathscr{Z}(K,H)$ 按照 [Ge1] 的意义是群概形理论的。特别地，由 [N], 可知，$\mathscr{Z}(K,H)$ 具有有限生成性质，而 [Ge1] 则给出了 $\mathscr{Z}(K,H)$ 上正合不可分解模范畴的分类。

5.6. 交换群。 假设 $A \subseteq G$ 是一个正规交换子群概形（例如， A 包含于 G 的中心中）。那么 $D(A, A, 1) = \mathbf{k}[A^\vee \times G/A]$ 是一个三角霍普夫代数，其中 $A^\vee$ 是 A 的 Cartier 对偶，并且

$$\mathscr{Z}(A, A, 1) = \mathrm{Rep}\,(A^\vee \times G/A) \subseteq \mathscr{Z}(G)$$

是一个拉格朗日子范畴。

更一般地，如果 $B : A \to A^\vee$ 是任意的 G-等变群概形态射，那么 $\widetilde{D(A, A, B)} = (\mathbf{k}[A^\vee]\#_\sigma^\tau \mathbf{k}[G/A], R_B) = (\mathbf{k}[G], R_B)$ 是一个拟三角 Hopf 代数（见命题 3.7(7)），并且根据推论 4.6(3)，编织子范畴

$$\mathscr{Z}(A, A, B) = \mathrm{Rep}\,(\mathbf{k}[A^\vee]\#_\sigma^\tau \mathbf{k}[G/A], R_B) = \mathrm{Rep}(\widetilde{G}, R_B) \subseteq \mathscr{Z}(G)$$

是拉格朗日的，当且仅当 $B = \overline{B} := B^\vee S$。

进一步假设 G 是交换的。那么对于任意群概形态射 $B : A \to A^\vee$，我们有编织子范畴

$$\mathscr{Z}(A, A, B) = \mathrm{Rep}\,(\mathbf{k}[A^\vee]\#_\sigma^\tau \mathbf{k}[G/A], R_B) = \mathrm{Rep}(\widetilde{G}, R_B) \subseteq \mathscr{Z}(G);$$

根据推论4.6(3)，它是拉格朗日的，当且仅当 $B = \overline{B}$。

进一步假设 G是自对偶。那么对每个群概形态射$B : G \to G^\vee$，由推论4.6(2)，编织子范畴

$$\mathscr{Z}(G, G, B) = \mathrm{Rep}\,(\mathbf{k}[G^\vee], R_B) \subseteq \mathscr{Z}(G)$$

$\widetilde{\ }$是非退化的，当且仅当 $B \star B^\vee : G \xrightarrow{=} G^\vee$ 是群概形同构。例如，设 $G := \mathbb{G}_{a,\ 1}$。在§6.2 中，我们证明

$$\mathscr{Z}(\mathbb{G}_{a,1}, \mathbb{G}_{a,1}, B_\lambda) = \mathrm{Rep}\left(\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}^\vee], R_\lambda\right) \subseteq \mathscr{Z}(\mathbb{G}_{a,1})$$

是一个由 Frobenius–Perron 维数 p的、由 $\lambda \in \mathbf{k}^\times$参数化的无限族不等价的非退化编织子范畴，其中 R_λ 由（6.2）给出。

例 5.3。 如备注3.6所述，若 η 或 γ 是余代数映射，则 τ 是平凡的。在§6.3 中，我们给出一个非平凡 τ 的例子，其中$G = \mathbb{G}_{a,\ 2}$ 且$H = K = \mathbb{G}_{a,\ 1}$（6.2），并推得对每个 $\lambda \in \mathbf{k}^\times$，拟三角霍普夫代数

$$(D(\mathbb{G}_{a,1}, \mathbb{G}_{a,1}, B_\lambda), R_\lambda) = \left(\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}^\vee]\#^\tau \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}/\mathbb{G}_{a,1}], R_\lambda\right) = \left(\mathbf{k}[\widetilde{\mathbb{G}_{a,1}}], R_\lambda\right)$$

既不是张量积余代数，也不是张量积代数，其中 R_λ 由式（6.3）给出。因此，

$$\mathscr{Z}(\mathbb{G}_{a,1}, \mathbb{G}_{a,1}, B_\lambda) = \mathrm{Rep}\left(\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}^\vee]\#^\tau \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}/\mathbb{G}_{a,1}], R_\lambda\right) = \mathrm{Rep}\left(\widetilde{\mathbb{G}_{a,1}}, R_\lambda\right) \subseteq \mathscr{Z}(\mathbb{G}_{a,2})$$

是一个由 $\lambda \in \mathbf{k}$ 参数化的非等价编织子范畴的无限族，其 Frobenius-Perron 维数为 p^2。

注意，由于 σ 是平凡的，我们有 $\widetilde{\mathbb{G}_{a,1}} = \mathbb{G}_{a1}^2$. □

6. Appendix

6.1. 群概形 $\mathbb{G}_{a,\ r}$。 令 $\mathbb{G}_{a,\ r}$ 表示 $\mathbb{G}_a$的第 r 个 Frobenius 核。回顾，$\mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,\ r}) = \mathbf{k}[t]/(t^{p^r})$，其中 t 为原始元。固定 $\mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,\ r})$ 的基 $\{t^i\}_{0\le i\le p^r-1}$，并将其对偶基记为 $\{\delta_i\}_{0\le i\le p^r-1}$。$\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,r}]$ 中的乘法由下式确定：

$$\delta_m\delta_n = \begin{cases} \binom{m+n}{m}\delta_{m+n}, & m+n<p^r \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

单位元为 δ_0，并且有

$$\Delta(\delta_n) = \sum_{a+b=n}\delta_a\otimes\delta_b, \quad \varepsilon(\delta_n) = \delta_{n,0}, \quad S(\delta_n) = (-1)^n\delta_n.$$

众所周知，该映射

$$F_r : \mathbf{k}[X_0,\dots,X_{r-1}]/(X_0^p,\dots,X_{r-1}^p) \to \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,r}], \quad X_i\mapsto\delta_{p^i},$$

是一个代数同构，其逆映射由下式给出

$$F_r^{-1} : \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,r}] \to \mathbf{k}[X_0,\dots,X_{r-1}]/(X_0^p,\dots,X_{r-1}^p), \quad \delta_n\mapsto\frac{1}{a_0!\cdots a_{r-1}!}X_0^{a_0}\cdots X_{r-1}^{a_{r-1}},$$

其中 $n = a_0+\cdots+a_{r-1}p^{r-1}$ 是 n的 p-进展开。

6.2. 中心 $\mathscr{Z}(\mathbb{G}_{a,\ 1})$。 由于 F_1^{-1}: $\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}] \xrightarrow{\cong} \mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,\ 1})$ 是 Hopf 代数同构，因此 Hopf 代数映射$\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}] \to \mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,\ 1})$ 可由元素 $\lambda\in\mathbf{k}$ 参数化，其中

$$B_\lambda : \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}] \to \mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,1}), \quad \delta_n\mapsto\frac{\lambda^n}{n!}t^n. \tag{6.1}$$

当且仅当 $\lambda\neq 0$ 时，这是一个同构。注意，$B_\lambda = B_{\overline{\lambda}}$ 当且仅当 $\lambda = \overline{\lambda}$或 $p=2$（因为 $B_\lambda = B_\lambda^*$）。

由推论 3.13 可以直接得出，对于每个 $\lambda\in\mathbf{k}$,

$$R_\lambda := \sum_{i=0}^{p-1}\frac{\lambda^i}{i!}(t^i\otimes t^i) \tag{6.2}$$

是一个 R-矩阵，对应于 $D(\mathbb{G}_{a,\ 1},\ \mathbb{G}_{a,\ 1},\ B_\lambda) = \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}^\vee]$。由推论 4.6(2)，$(\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}^\vee],\ R_\lambda)$ 可因子化，当且仅当 $\lambda\neq 0$；也就是说，$R_\lambda\neq 1\otimes 1$。

6.3. $\mathscr{Z}(\mathbb{G}_a,2)$ 的中心。根据定理 3.5，由于 $\mathbb{G}_a,2$ 是交换的，$D(\mathbb{G}_a,2)$ 的 Hopf 商对由 (K,H,B) 索引，其中 K 和 H 是 $\mathbb{G}_a,2$ 的子群概形，并且 $B:\mathbf{k}[H]\to\mathscr{O}(K)$ 是一个 Hopf代数映射。现在我们将按照第 3 节中给出的构造，计算 $K = H = \mathbb{G}_a,1$ 的 Hopf 商对，直到等价为止。

我们有

$$q := q_{\mathbb{G}_{a,1}} : \mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,2}) \twoheadrightarrow \mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,1}), \quad t\mapsto t,$$

带有截面

$$\mu := \mu_{\mathbb{G}_{a,1}} : \mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,1}) \xrightarrow{1:1} \mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,2}), \quad t\mapsto t.$$

接下来考虑 Hopf 代数正合列

$$\mathbf{k} \to \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}] \to \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}] \xrightarrow{\pi:=\pi_{\mathbb{G}_{a,1}}} \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}/\mathbb{G}_{a,1}] \to \mathbf{k}.$$

引理 6.1. 以下结论成立：

(1) 满射霍普夫代数映射 π 由下式确定

$$\delta_n \mapsto \begin{cases} \delta_{n/p}, & p \mid n \\ 0, & p \nmid n \end{cases}$$

(2) 由下式确定的映射 $\gamma := \gamma_{\mathbb{G}_{a,1}}$

$$\gamma : \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}/\mathbb{G}_{a,1}] \to \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}], \quad \delta_n \mapsto \delta_{pn},$$

是一个裂分映射。

(3) γ 不是余代数映射。(4) γ 的卷积逆由 $\gamma^{-1}(\delta_n) = (-1)^n \delta_{pn}$给出。(5) $\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}/\mathbb{G}_{a,1}]$ 在 $\mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,1})$ 上的作用 $\cdot$ 是平凡的。(6) $\eta := \eta_{\mathbb{G}_{a,1}} = \mathrm{id} \star \gamma^{-1}\pi$ 是 $\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}]$ 到子空间$\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}]$上的投影。(7) η 的卷积逆由下式给出

$$\eta^{-1}(\delta_n) = \begin{cases} (-1)^n \delta_n, & 0 \le n < p, \\ 0, & p \le n < p^2. \end{cases}$$

证明。 (1) 显然有 $\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}]^+ = \mathrm{sp}_{\mathbf{k}}\{\delta_1, \dots, \delta_{p-1}\}$，并且

$$\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}]^+\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}] = \mathrm{sp}_{\mathbf{k}}\{\delta_n \mid p \nmid n\}.$$

由下式确定的 $\mathbf{k}$-线性映射 $\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}] \to \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}]$

$$\delta_n \mapsto \begin{cases} \delta_{n/p}, & p \mid n \\ 0, & p \nmid n \end{cases}$$

是一个满射代数映射，其核为 $\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}]^+\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}]$，因此 $\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}/\mathbb{G}_{a,1}] \cong \mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}]$ ，且该映射正是所述的 Hopf代数映射 π。

(2)–(4) 这些都可直接验证，而 (5) 显然成立。

(6) 对每个 $0 \le n < p^2$，我们有

$$\eta(\delta_n) = \sum_{a+b=n} \delta_a \gamma^{-1}\pi(\delta_b) = \sum_{a+pb'=n} (-1)^{b'} \delta_a \delta_{pb'} = \sum_{a+pb'=n} (-1)^{b'} \binom{n}{a} \delta_n.$$

设 $n = ps + r$ with $0 \le s, r < p$。那么满足 $a + pb' = n$ 的数对 (a, b') 具有形式 $(r + ip, s - i)$，其中 $0 \le i \le s$。因此

$$\eta(\delta_n) = \sum_{i=0}^{s} (-1)^{s-i} \binom{r+ps}{r+pi} \delta_n = \sum_{i=0}^{s} (-1)^{s-i} \binom{s}{i} \delta_n,$$

最后一个等式是卢卡斯定理的又一次应用。当$s > 0$时，该和等于 0；当 $s = 0$时，该和等于 δ_n。换言之，我们有

$$\eta(\delta_n) = \begin{cases} \delta_n, & 0 \le n < p, \\ 0, & p \le n < p^2, \end{cases}$$

因此结论得证。

（7）与（6）类似。 □

回顾 σ、τ和 σ、τ在（2.15）、（2.16）以及（3.12）、（3.13）中给出的定义。

Lemma 6.2. 余循环 σ 是平凡的，而余余循环 τ 满足 $\tau(\delta_0) = 1 \otimes 1$，

$$\tau(\delta_1) = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda^p}{j!(p-j)!} t^j \otimes t^{p-j},$$

且 $\tau(\delta_n) = 0$，其中 $2 \le n < p$。

证明。根据 σ的定义，$\sigma(\delta_m, \delta_n)$是 $\delta_{p(m+n)}$的整数倍。由于 σ 的像属于 $\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}]$，它仅在 $m = n = 0$时非零，因此 $\sigma = \varepsilon \otimes \varepsilon$。

接下来我们计算 τ。由于 η和 η^{-1}在 $j \ge p$时消去 δ_j，因此 $\tau(\delta_n)$的任何非零贡献都必须来自 $\Delta^{(2)}(\gamma(\delta_n)) = \Delta^{(2)}(\delta_{pn}) = \sum_{a+b+c=pn} \delta_a \otimes \delta_b \otimes \delta_c$ 中满足 a，b，$c < p$ 的求和项。展开 τ 的定义，得到

$$\overline{\tau}(\delta_n) = \sum_{\substack{a+b+c=pn \\ a,b,c<p}} (-1)^a \sum_{r+s=a} \binom{r+b}{b} \binom{s+c}{c} \delta_{r+b} \otimes \delta_{s+c} \in \mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,1})^{\otimes 2}.$$

由于 $(r+b)+(s+c) = pn$，每一项的总次数都是 pn。由于 $\mathscr{O}(\mathbb{G}_{a,1})^{\otimes 2}$ 中的简单张量 $\delta_u \otimes \delta_v$ 的总次数至多为 $2(p-1)$，因此 $\tau(\delta_n) = 0$，当 $n \ge 2$时。

由于 δ_0 是 $\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}]$中的单位元，我们有 $\gamma(\delta_0) = \delta_0$ 且 $\eta(\delta_0) = \eta^{-1}(\delta_0) = \delta_0$，因此$\tau(\delta_0) = \delta_0 \otimes \delta_0$。剩下要计算的只有 $n = 1$时的情形。我们有

$$\overline{\tau}(\delta_1) = \sum_{\substack{a+b+c=p \\ a,b,c<p}} (-1)^a \sum_{r+s=a} \binom{r+b}{b} \binom{s+c}{c} \delta_{r+b} \otimes \delta_{s+c}.$$

我们来提取 $\delta_j \otimes \delta_{p-j}$的系数 κ_j。由于 $a = p-b-c$ 和 $a < p$，我们有$b+c > 0$。令 $r+b = j$ 和 $s+c = p-j$，得到

$$\kappa_j = \sum_{\substack{0 \le b,c<p \\ 0<b+c \le p}} (-1)^{p-b-c} \binom{j}{b} \binom{p-j}{c}.$$

若 $1 \le j \le p-1$，则按 $m = b+c$ 分组可得

$$\kappa_j = \sum_{m=1}^{p} (-1)^{p-m} \sum_{b=0}^{m} \binom{j}{b} \binom{p-j}{m-b} = \sum_{m=1}^{p} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} = 1,$$

其中，在第二个等式中我们用到了范德蒙德恒等式。若 $j = 0$ 或 $j = p$，则按 $m = b+c$分组时不可能有 $m = p$。因此，在这种情况下

$$\kappa_j = \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} = 0.$$

因此，$\tau(\delta_1) = \sum_{j=1}^{p-1} \delta_j \otimes \delta_{p-j}$，故由（6.1）可得所需结果。 □

最后，由推论3.13可直接得出

$$R_\lambda := \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\lambda^i}{i!}(t^i\#1)\otimes(t^i\#1) \tag{6.3}$$

是一个 R-矩阵，对每个 $\lambda\in\mathbf{k}$，都有 $D(\mathbb{G}_{a,1},\mathbb{G}_{a,1},B_\lambda)=\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}^\vee]\#^\tau\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,2}/\mathbb{G}_{a,1}]=\mathbf{k}[\mathbb{G}_{a,1}]$。

References

[AD] N. Andruskiewitsch 和 J. Devoto. Hopf 代数的扩张。《代数与分析》7 (1995), 第 1 期, 22–61.[BN] C.-G. Bontea 和 D. Nikshych. 关于有限对称张量范畴的 Brauer–Picard 群。J. Algebra 440 (2015), 187–218.[CH] H.-X. Chen 和 G. Hiss. 关于有限维群代数的 Drinfeld 双的札记。Algebra Colloq. 19 (2012), 第 3 期, 483–492.[CCC] G. Carnovale, N. Ciccoli 和 E. Collacciani. 有限群的 Drinfeld 双的多样性。arXiv:2410.11978.[DGNO] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych 和 V. Ostrik. 关于辫融合范畴 I。Selecta Math. (N.S.) 16 (2010), 第 1 期, 1–119.[ERW] P. Etingof, E. Rowell 和 S. Witherspoon. 由有限群的扭曲量子双代数得到的辫群表示。Pacific J. Math. 234 (2008), 第 1 期, 33–41.[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych 和 V. Ostrik. 《张量范畴》。Math. Surveys Monogr., 第 205 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2015.[FN1] E. M. Friedlander 和 C. Negron. 某些无穷小群概形的 Drinfeld 双的上同调。Algebra & Number Theory 12 (2018), 第 5 期, 1281–1309.[FN2] E. M. Friedlander 和 C. Negron. 某些无穷小群概形的 Drinfeld 双的支撑理论。Algebra & Number Theory 17 (2023), 第 1 期 , 217–260.[Ge1] S. Gelaki. 仿射群概形上的模范畴。Quantum Topol. 6 (2015), 第 1 期, 1–37.[Ge2] S. Gelaki. 正特征下 Tannakian 范畴的极小扩张。J. Algebra 603 (2022), 213–234.[Go] M. Gould. 量子双有限群代数及其表示。Bull. Austral. Math. Soc. 48 (1993), 第 2 期, 275–301.[GS1] S. Gelaki 和 G. Sanmarco. 关于有限群概形理论范畴，I。载于《量子群、Hopf 代数及其应用：纪念 Earl Jay Taft》, Contemp. Math., 第 814 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2025，第 55–95 页.[GS2] S. Gelaki 和 G. Sanmarco. 关于有限群概形理论范畴，II。arXiv:2403.08785.[J] J. C. Jantzen. 《代数群的表示》。第二版，Math. Surveys Monogr., 第 107 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2003.[M] S. Montgomery. Hopf-Galois 理论：综述。Geom. Topol. Monogr. 16 (2009), 367–400.[N] C. Negron. 有限群概形的 Drinfeld 双的上同调有限生成性。Selecta Math. (N.S.) 27 (2021), 第 2 期, 论文编号 26.[NNW] D. Naidu, D. Nikshych 和 S. Witherspoon. 有限群扭曲量子双代数的表示范畴的融合子范畴。Int. Math. Res. Not. IMRN 2009, 第 22 期, 4183–4219.[Sc] H.-J. Schneider. Hopf 代数交叉积的正规基与传递性。J. Algebra 152 (1992), 第 2 期, 289–312.[Sh] K. Shimizu. 辫有限张量范畴的非退化条件。Adv. Math. 355 (2019), 106778.[W] W. C. Waterhouse. 《仿射群概形导论》。Grad. Texts in Math., 第 66 卷，施普林格出版社，纽约，1979.

Department of Mathematics, Iowa State University, Ames, IA 50100, USA.
电子邮件地址：darre@iastate.edu

Department of Mathematics, Iowa State University, Ames, IA 50100, USA.电子邮箱地址: gelaki@iastate.edu