量子色动力学中 N^{3}LO 阶的二维横动量减除与半包容深度非弹性散射

Liang Dong,[1], * *Shen Fang*,[2],† *Jun Gao*,[1],‡ *Hai Tao Li*,[3], §*Ding Yu Shao*,[2],*4, 5*, ¶ *Hua Xing Zhu*,[6],*5*, ** 和 *Yu Jiao Zhu*[7], ††

[1]*State Key Laboratory of Dark Matter Physics, Shanghai Key Laboratory for Particle Physics and Cosmology, Key Laboratory for Particle Astrophysics and Cosmology (MOE),School of Physics and Astronomy, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China*[2]*Department of Physics, Center for Field Theory and Particle Physics,and Key Laboratory of Nuclear Physics and Ion-beam Application (MOE), Fudan University Shanghai 200433 China , , , , , , ,*

[3]*School of Physics Shandong University Jinan Shandong 250100 China*

[4]*Shanghai Research Center for Theoretical Nuclear Physics,NSFC and Fudan University, Shanghai 200438, China*

[5]*Center for High Energy Physics, Peking University, Beijing 100871, China*[6]*School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China*[7]*Max-Planck-Institut fur Physik, Werner-Heisenberg-Institut, Boltzmannstr. 8, 85748 Garching, Germany*

arXiv:2603.29673v1 [hep-ph] 31 Mar 2026

已识别强子产生对于研究高能下的核子结构和量子色动力学强子化至关重要。我们给出了微扰量子色动力学中非极化半包容深度非弹性散射（半包容深度非弹性散射）在次次次领头阶（N^{3}LO）的 *first* 计算。我们的计算基于一种新颖的 *two-dimensional* 横向动量减除方法，该方法受量子色动力学因子化中软奇点与共线奇点的启发。N^{3}LO 修正总体上较为温和，但在阈值区域可能显著，并展现出优异的微扰收敛性和更小的尺度变化。全微分框架允许采用任意选择切割，并可直接支持即将建成的电子-离子对撞机开展精密核子断层成像，为达到预期实验精度奠定必要的理论基础。该方法也可推广至极化半包容深度非弹性散射的计算。

引言。— 微扰量子色动力学（QCD）中的精确预言构成了对撞机物理计划的支柱，对于充分发挥大型强子对撞机及未来对撞机设施的物理潜力至关重要。在理论方法和计算技术创新进展的推动下，微扰量子色动力学计算的前沿已推进至次次次领头阶（N^{3}LO），涵盖了若干基准过程，包括希格斯玻色子产生 [1–7], Drell–Yan 轻子对产生 [8–11],希格斯玻色子对产生 [12, 13], 以及顶夸克衰变 [14, 15]。不过，这些里程碑大多局限于玻恩级没有末态色流的过程，或对末态进行包容求和的过程。

近年来，已识别强子产生的精确计算受到广泛关注 [16–28]。这些过程为研究禁闭机制提供了独特窗口，使人们能够严格提取非微扰碎裂函数 [29–38], ，探测质子的自旋结构 [39–42], ，并搜寻味依赖的新物理。从更广泛的角度来看，识别末态中的强子是理解部分子向强子转变的必要条件。特别是在小角度因子化极限下，已识别强子的产生是描述喷注内部结构 [43–55] 以及计算能量关联观测量 [56, 57]的重要理论要素。尽管这一研究十分重要，但由于处理与观测到的强子相关的末态共线奇点十分复杂，理论研究进展受到阻碍。虽然相关计算已推进至次次领头阶（NNLO） [58–63], ，但除单包容湮灭 $e^+e^- \to h + X$ [64]之外，N^{3}LO 阶段仍未得到探索。

已识别强子产生的实验研究已十分丰富，已有大量来自 e^+e^-、 ep和 pp 碰撞的数据。展望未来，电子-离子对撞机（EIC） [65, 66]以及未来的 e^+e^- 工厂 [67, 68]等计划，有望实现前所未有的高精度测量。为充分发挥这些数据集的潜力并达到实验精度，必须将这些探针的理论精度提升至 N^{3}LO。

在本文中，我们提出一种新颖的二维横向动量减除方法，用于描述 ep 和e^+e^- 碰撞中的已识别强子产生，并将用于包容观测量的 q_T减除方法 [69–72]加以推广。我们的框架以对规范理论红外结构的严格理解为基础，[58, 61, 63], 并运用软共线有效理论（SCET） [73–75]的形式体系。作为具体应用，我们给出半包容深度非弹性散射（SIDIS）过程$e^- + p \to e^- + h + X$的首个 N^{3}LO 计算。除了这一特定过程，我们的结果还提供了在 N^{3}LO 阶计算喷注内已识别强子产生 [62]所需的微扰理论要素。

方法。— 在布赖特系中，半包容深度非弹性散射过程的散射运动学 $\gamma^* + p \to h + X$ 如图 1左图所示。在领头阶（LO），

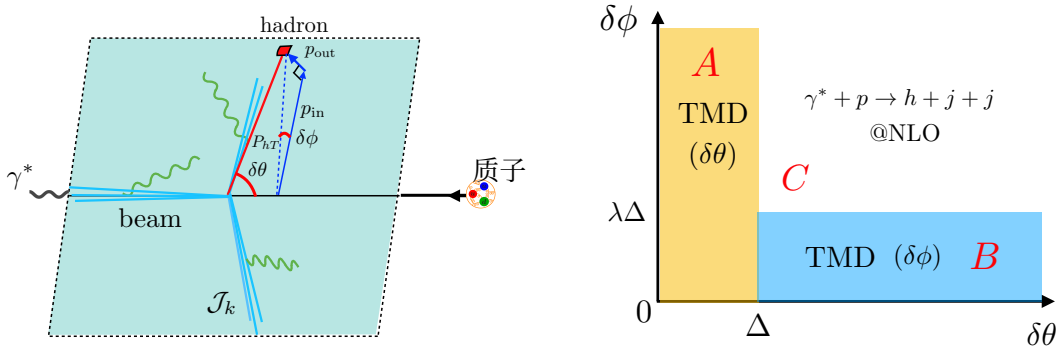


图 1：左：在布赖特系中，用于二维 q_T减除方法的运动学变量示意图。入射虚光子 γ^* 与质子发生散射，产生一个已识别强子和一个反冲的领头喷注 $\mathcal{J}_k$。沿质子方向的蓝线表示束流共线辐射。绿色曲线表示软辐射。切片变量选为束流极角 $\delta\theta$ 和方位角去关联 $\delta\phi$。右：根据 $\delta\theta > \Delta$ 和 $\delta\phi > \lambda\Delta$将相空间划分为不同区域，其中两个切片参数为 Δ，$\lambda \ll 1$。

强子的横向动量为零P_{hT}，等价地说，其束流极角为 $\delta\theta = 0$，其中$P_{hT} \equiv P_h$ 正弦 $\delta\theta$。超出领头阶后，已识别强子获得横向动量 $\vec{P}_{hT} = (p_{\rm in},\ p_{\rm out})$，由散射平面内和平面外的分量组成。该散射平面由入射束流和采用赢家通吃（WTA）重组方案的反冲领头喷注所确定 [76, 77]。这些分量可用方位角去关联 $\delta\phi$表示，其中 $p_{\rm in} \equiv P_{hT}$ 余弦 $\delta\phi$和 $p_{\rm out} \equiv P_{hT}$ 正弦 $\delta\phi$。因此，在次领头阶（NLO），强子的面外动量仍为零 $p_{\rm out}$，等价地说，$\delta\phi = 0$。因此，同时要求 P_{hT} 和 $p_{\rm out}$均非零，可大幅简化量子色动力学辐射的软、共线模式。特别是，该区域中的 N^{3}LO 修正完全由强子与双喷注伴随产生的 NLO 计算所涵盖。

受这些运动学边界的启发，我们提出一种由两个切片变量 P_{hT}和 $p_{\rm out}$ （或等价地，$\delta\theta$ 和 $\delta\phi$）控制的二维横向动量减除方案。遵循针对已识别强子产生的q_T减除方法 [58, 61, 63], ，我们将截面划分为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\mathcal{O}} = \int_0^{\Delta} \mathrm{d}\delta\theta \frac{\mathrm{d}\sigma^A}{\mathrm{d}\delta\theta \mathrm{d}\mathcal{O}} + \int_{\Delta}^{\delta\theta^{\max}} \mathrm{d}\delta\theta \times \left(\int_0^{\lambda\Delta} \mathrm{d}\delta\phi \frac{\mathrm{d}\sigma^B}{\mathrm{d}\delta\theta \mathrm{d}\delta\phi \mathrm{d}\mathcal{O}} + \int_{\lambda\Delta}^{\delta\phi^{\max}} \mathrm{d}\delta\phi \frac{\mathrm{d}\sigma^C}{\mathrm{d}\delta\theta \mathrm{d}\delta\phi \mathrm{d}\mathcal{O}} \right), \tag{1}$$

其中这三项分别对应图1右图所示的区域 A、B 和 C 的贡献。边界由两个较小的分辨率/切片参数 Δ 和 $\lambda \ll 1$ 表征。对于可分辨区域 C，基于 FMNLO框架 [78] 对已识别强子产生进行 NLO 计算。所需的单圈矩阵元用于 $ei \to ejkl$ ，而树级矩阵元用于 $ei \to ejklm$ 取自文献 [79–82], ，其中 $ijklm$代表量子色动力学部分子的所有可能味组合。

关于两个未解析区域，对于区域 A，在极限 $P_{hT} \ll Q$ 下，截面由横向动量依赖（TMD）因子化公式 [61] 控制

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^A}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}^2\vec{P}_{hT}} \propto \int \frac{\mathrm{d}^2\vec{b}_\perp}{4\pi^2} e^{-i\vec{P}_{hT}\cdot\vec{b}_\perp/z} \sum_i H_{ei\to ei}(Q) \times \mathcal{B}_{i/p}(x,\vec{b}_\perp)\, \mathcal{D}_{h/i}(z,\vec{b}_\perp/z)\, S_{qq}(\vec{b}_\perp)\,[1+\mathcal{O}(\Delta)] \tag{2}$$

在领头幂次下，可以利用其固定阶展开计算至所需的 α_s 阶；当 $\Delta \to 0$ 取极限时，幂修正消失。这里，Q、x、y 和 z 分别表示动量转移、比约肯变量、非弹性度和已识别强子动量分数。硬函数 $H_{ei\to ei}$ 由从夸克形状因子 [83–89] 中提取的夸克匹配系数确定。$\mathcal{B}_{i/p}$ 和 $\mathcal{D}_{h/i}$ 分别表示质子 p 中 parton i 的标准 TMD 束流函数，以及 parton i 碎裂成强子 h 的 TMD 碎裂函数；二者均已知至三圈 [90–92]。借助该阶的交叉性质 [94]，软函数 S_{qq} 的三圈解析结果可由 [93], 得到。

类似地，对于渐近极限下的区域 B，当面外动量较小（$p_{\rm out} \ll P_{hT}$）时，微分截面由 TMD 因子化公式 [58, 63, 95–97] 控制。

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^B}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}^2\vec{P}_{hT}\,\mathrm{d}p_{\rm out}} \propto \int \frac{\mathrm{d}b}{2\pi} e^{ip_{\rm out}b/\zeta} \times \sum_{ijk} \int \mathrm{d}\xi\, H_{ei\to ejk}(Q,\xi,\zeta) \times \mathcal{B}_{i/p}(\xi,b)\, \mathcal{D}_{h/j}(\zeta,b)\, \mathcal{J}_k(b)\, S_{ijk}(b)\,[1+\mathcal{O}(\lambda)] \tag{3}$$

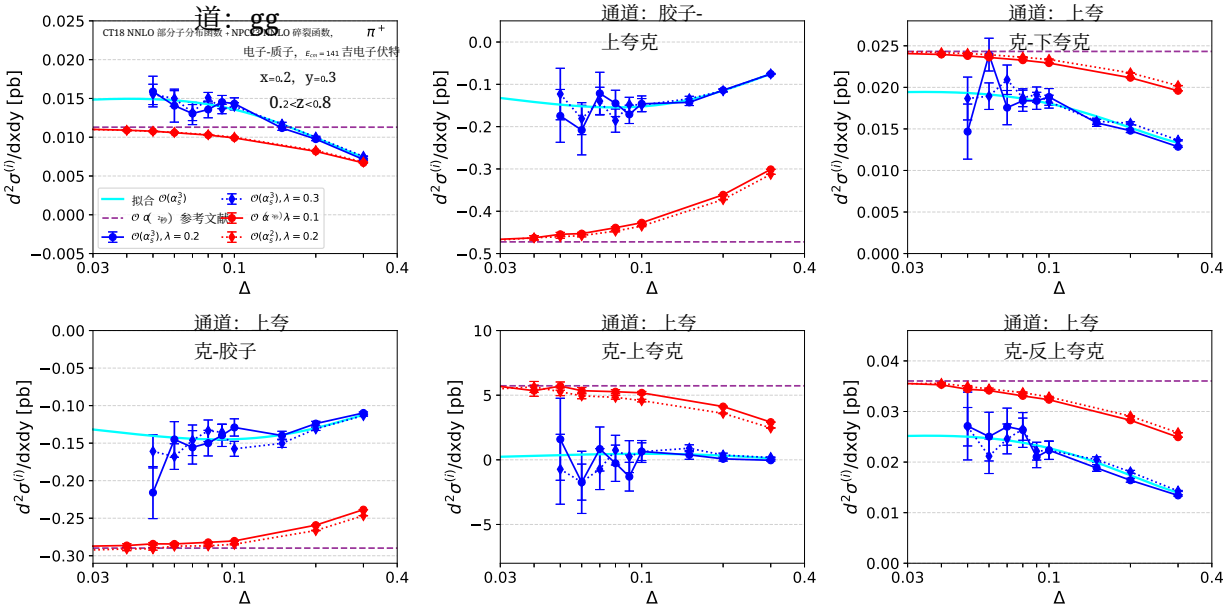


图 2：总截面修正对切片参数 Δ 的数值稳定性。各面板展示了六种具有代表性的部分子通道中 $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$（红色）和 $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$（蓝色）的贡献。误差棒表示蒙特卡罗统计不确定性。青色实线表示对渐近极限 $\Delta \to 0$ 的拟合。紫色虚线表示 $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ 的参考值。

在领头幂次下，并且幂修正在 $\lambda \to 0$的极限下消失。为达到 SIDIS 的 N^{3}LO 精度，需要对式 $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ 进行展开，该展开已在 [63]中得到验证。关于运动学变量（ξ 和 ζ），以及硬函数、软函数和喷注函数的详细讨论，请参阅参考文献 [63]。

合并区域 A、B 和 C 的贡献后，对 Δ 和 λ 的领头幂依赖相互抵消，但仍存在剩余幂修正，其可能呈线性或二次形式，具体取决于 fiducial cuts [98–100]。对这些效应进行专门研究超出了本文的范围。此外，我们的二维减法方法同样适用于 e^+e^- 碰撞的单包容湮灭（SIA）中的强子产生。在这种情况下，只需将质子替换为次领头喷注；该喷注与领头反冲喷注共同确定散射平面。虽然在因子化公式中，束流函数会被另一个喷注函数替换。对 SIA 进行完全微分的 N^{3}LO 计算，将与解析结果 [64] 形成互补。

数值结果.– 本节展示量子色动力学中 N^{3}LO 阶半包容深度非弹性散射的唯象研究。我们考虑电子-离子对撞机（$\sqrt{s} = 141$ 吉电子伏特）质心能量下的电子-质子碰撞，并采用含 5 种活跃夸克味的 CT18 NNLO 部分子分布函数 [101]，其强耦合常数为 $\alpha_s(M_Z) = 0.118$。我们计算带电π介子（π^+）产生的微分截面，采用 NPC23 NNLO 碎裂函数 [36]并计入所有阶的贡献；重整化尺度和因子化尺度均取名义值 $\mu = Q$。为简化起见，我们忽略了 Z 玻色子交换的贡献；对于所考虑的能量，该贡献较小。

为验证我们的计算框架，我们明确检验在极限 $\Delta \to 0$ 下，截面是否与任意截断 Δ 无关。图 2 展示了在电子-离子对撞机上带电π介子产生的微分截面中，$\mathcal{O}(\alpha_s^2)$（NNLO）和$\mathcal{O}(\alpha_s^3)$（N^{3}LO）修正的数值稳定性。对于 λ的两个代表性取值，即 N^{3}LO 下的 0.3 和 0.2（NNLO 下的 0.2 和 0.1），运动学条件固定为 $x = 0.2$，且$y = 0.3$，并对 $0.2 < z < 0.8$ 积分。结果展示了六个具有代表性的部分子通道，包括 uu、ug、gu、gg、$u\bar{u}$ 和 ud，这些通道根据入射部分子和碎裂部分子的味标记。其中，uu 道占主导地位，这既归因于主导的部分子分布函数，也归因于主导的碎裂函数。NNLO 结果（红点）在 $0.03 < \Delta < 0.1$范围内表现出极佳的平坦性，证实了红外发散的精确抵消，并收敛于文献 [18, 20] 中计算的参考值。在 N^{3}LO 阶（蓝点），尽管分辨截面具有较大的蒙特卡罗积分不确定性，结果同样收敛至恒定平台。采用两种不同的 λ 选择所得结果彼此一致，λ值较小。实线表示.....的拟合

对真正的 N^{3}LO 修正以及剩余幂修正的拟合 [102, 103]。根据拟合，我们认为，在 N $\Delta = 0.1$ LO 计算中选择 ^{3} 足以控制唯象研究中的幂修正。若采用更小的 Δ值，要保持相当的数值精度，就需要投入大量计算资源。在夸克和胶子引发的道中均观察到稳定性，这证明了我们方法的稳健性。总体而言，微扰展开收敛良好，N^{3}LO 修正远小于 NNLO 修正，尤其是在 3 个主导道中，uu，ug 和gu。对于 ud、$u\bar{u}$ 和 gg 道，这些道在 NNLO 阶开始出现，N^{3}LO 修正可能与 NNLO 修正相当，甚至更大。

在计算中，我们采用了 WTA 非极化和线性极化胶子喷注函数的双圈常数项的近似值 $j_g^{(2),\mathrm{WTA}}$，它们会进入 uu道 [63]的 N^{3}LO 修正。这些值是通过假设能量-能量关联（EEC）与 WTA 观测量之间存在标度关系来估算的。具体而言，我们将 WTA 夸克喷注函数常数项与 EEC 喷注函数常数项之间的相对因子 $j_q^{(2),\mathrm{WTA}}$ [104]（另见参考文献 [105–108]）应用于已知的胶子 EEC 结果 $j_q^{(2),\mathrm{EEC}}$ [109] $j_g^{(2),\mathrm{EEC}}$ [110]，如下所示：

$$j^{(2)}_{g_U,\mathrm{WTA}} \approx j^{(2)}_{g_U,\mathrm{EEC}} \times \frac{j^{(2)}_{q,\mathrm{WTA}}}{j^{(2)}_{q,\mathrm{EEC}}} = -12.9\,,$$
$$j^{(2)}_{g_L,\mathrm{WTA}} \approx j^{(2)}_{g_L,\mathrm{EEC}} \times \frac{j^{(2)}_{q,\mathrm{WTA}}}{j^{(2)}_{q,\mathrm{EEC}}} = 0.97\,, \qquad (4)$$

其中，U 和 L分别表示非极化胶子和线性极化胶子。我们检验发现，将上述非极化（极化）数值增至两倍时，uu 道的 N^{3}LO 修正变化不到 NNLO 修正的 2%（0.2%）。与此同时，$j_{g_U}^{(2),\mathrm{WTA}}$ 的数值可以通过利用希格斯玻色子衰变为两个胶子的过程提取。我们通过将蒙特卡罗计算 [111]与已知的 NNLO 部分衰变宽度 [112], 进行比较，得到结果 -9.4 ± 3.2，与我们的估算一致。

图 3 展示了我们对带电π介子微分截面的 N^{3}LO 预言，截面随动量分数 z变化；预言针对未来电子-离子对撞机的运动学条件，包括 $y = 0.3$、$0.1 < x < 0.9$ 和 $0.1 < z < 0.9$。上图展示了微扰阶次从 NLO（蓝色点线）到 NNLO（红色点划线）再到 N^{3}LO（黑色实线）的变化。下图将结果归一化到中心 NNLO 预言，揭示了显著的变微扰展开的稳定化。我们观察到 N^{3}LO 带来了适度的修正：在 z 为 0.1 时约为 -2%，并在 0.9 时升至 $+4\%$。尺度不确定性带（阴影区域）通过以下方式计算：

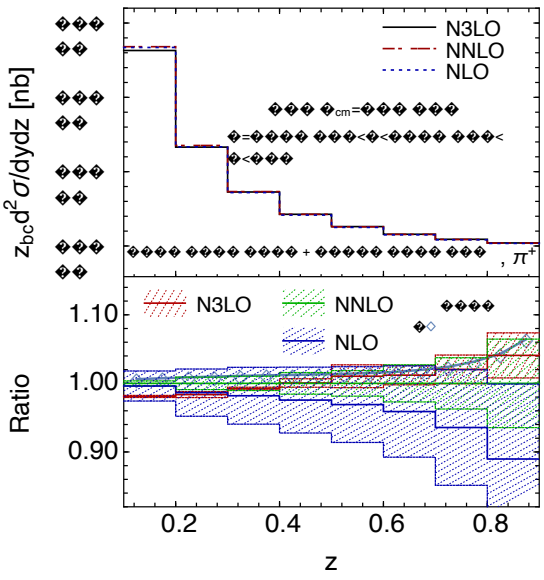


图 3：在 EIC 上以量子色动力学不同阶（包括 NLO、次次领头阶和 N^{3}LO）计算的带电π介子产生微分截面（乘以分箱中心），随强子动量分数 z 的变化。下图中，包括尺度变化在内的所有预言均以中心次次领头阶结果归一化。菱形散点表示近似的 N^{3}LO 预言。

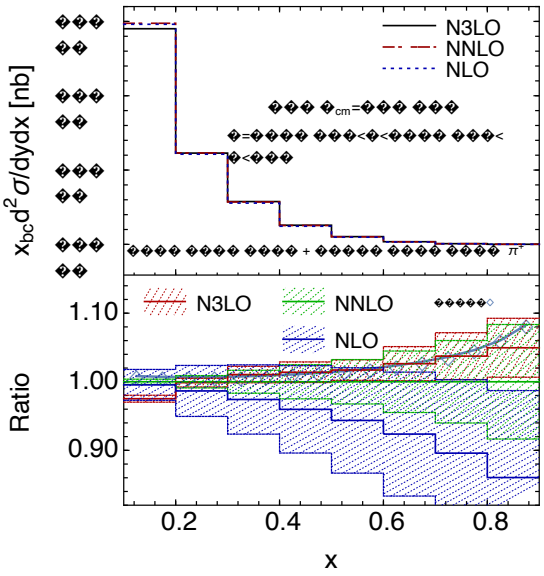


图 4：电子-离子对撞机上带电π介子产生过程的微分截面（乘以分箱中心）随比约肯变量 x 的变化，展示了量子色动力学中不同阶的结果，包括 NLO、次次领头阶和 N^{3}LO。下图中，包括尺度变化在内的所有预测均以中心次次领头阶结果归一化。菱形散点表示近似的 N^{3}LO 预测。

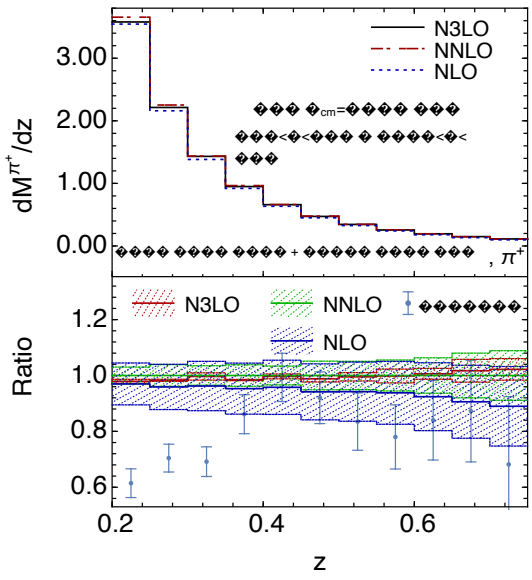


图5：在量子色动力学的不同阶次（包括 NLO、次次领头阶和 N^{3}LO）下，COMPASS 实验（质子靶，$\sqrt{s} = 17.3$吉电子伏特）中带电π介子产生的微分多重数随强子动量分数 z 的变化。下图中，所有预言（包括尺度变化）均以中心次次领头阶结果归一化。误差棒表示包含全部不确定性的 COMPASS π^+ 数据。

将 μ相对于标称值上下浮动两倍Q，从 NLO 过渡到 N^{3}LO 时显著缩小，证实缺失的高阶项现已得到控制。在下方面板中，菱形散点表示近似的 N^{3}LO 预言，其计算方法是在精确的 NNLO 预言中加入 $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ 阈值对数贡献。阈值修正的计算见文献 [28, 113]，其中包含领头阶和部分次领头阶奇异项。阈值 K因子呈现出明显的运动学依赖性，在较大的 z处显著上升。我们发现，在 $z > 0.5$ 处，我们的 N^{3}LO 修正与近似结果吻合良好 $z > 0.5$，这表明阈值修正在大z 区域占主导地位。

在图4 中，我们展示了 N^{3}LO 对带电π介子微分截面的预测，该截面是比约肯变量 x 的函数，所用条件与图3相同。我们观察到 N^{3}LO 修正的行为与 z 分布中的行为非常相似，无论是运动学依赖性还是修正的大小都是如此。N^{3}LO 修正约达到 $+5$%，对应于 x 取值为 0.9 的情况，且其符号变化发生在略低于 x 的取值处，相较于 z分布而言。总体而言，N^{3}LO 尺度不确定性普遍降至 NNLO 时的一半左右，这再次表明缺失的高阶项处于可控范围内。我们还发现，我们的 N^{3}LO 修正与近似结果相符。将我们计算 N^{3}LO 修正的方法推广到极化半包容深度非弹性散射中的比约肯-x 分布十分直接，这对质子自旋分解的高精度研究可能十分重要。值得探究的是，极化半包容深度非弹性散射中是否也存在类似的微扰收敛性。

最后，我们给出了 COMPASS 实验中 μ子散射质子靶这一设置下的结果，其中$\sqrt{s} = 17.3$吉电子伏特，$0.14 < x < 0.4$，以及 $0.3 < y < 0.5$。图5 展示了 π^+ 的微分多重数，即强子产生截面与包含 DIS 截面的比值，随强子动量分数 z的变化，并与 COMPASS 数据 [114]进行比较。我们观察到 N^{3}LO 修正幅度适中，且尺度变化显著减小，现已远低于实验不确定性。另一方面，理论预言始终高于数据，尤其是在低z 区域，这表明碎裂函数输入可能带来较大的不确定性 [34, 35]。

总结与展望.— 总而言之，我们提出了一种新颖的二维横向动量减除方法，可用于已识别强子产生的计算，适用于单包容湮灭和深度非弹性散射。我们展示了该方法在非极化半包容深度非弹性散射中的成功应用，给出了 N^{3}LO 量子色动力学修正；这是首次将这一微扰阶次的计算应用于涉及初态和末态均含已识别强子的过程。总体而言，修正幅度适中，微扰收敛性优异，尺度变化也显著减小。我们的框架能够进行完全微分描述，允许采用任意选择性切割，特别适用于在即将建成的电子-离子对撞机上高效、精确地研究强子层析。将计算扩展到极化半包容深度非弹性散射已指日可待，这将进一步增进我们对核子自旋分解的理解。

致谢。— LD 和 JG 的研究工作获得国家自然科学基金委员会（NSFC）项目（批准号：12275173）和上海市教育委员会项目（批准号：2024AIZD007）的资助。SF 和 DYS 获得国家自然科学基金委员会项目（批准号：12275052、12147101 和 12547102）以及量子科学与技术创新计划项目（批准号：2024ZD0300101）的资助。HTL 获得国家自然科学基金委员会项目（批准号：12275156 和 12321005）的资助。HXZ 获得国家自然科学基金委员会项目（批准号：12425505）的资助。本文的计算在上海交通大学高性能计算中心支持的思源一号集群上完成。

* 电子地址： liang.dong@sjtu.edu.cn † 电子地址： sfang23@m.fudan.edu.cn ‡ 电子地址： jung49@sjtu.edu.cn § 电子地址： haitao.li@sdu.edu.cn

¶ 电子地址：dyshao@fudan.edu.cn ** 电子地址：zhuhx@pku.edu.cn †† 电子地址：yzhu@mpp.mpg.de

[1] C. Anastasiou、C. Duhr、F. Dulat、F. Herzog 和 B. Mistlberger，《物理评论快报》114，212001（2015），arXiv:1503.06056 [高能物理-唯象学]。[2] C. Anastasiou、C. Duhr、F. Dulat、E. Furlan、T. Gehrmann、F. Herzog、A. Lazopoulos 和 B. Mistl- berger，《高能物理学杂志》05，058，arXiv:1602.00695 [高能物理-唯象学]。[3] F. A. Dreyer 和 A. Karlberg，《物理评论快报》117，072001（2016）1606（），arXiv:。00840 [高能物理-唯象学]。[4] B. Mistlberger，《高能物理学杂志》05，028，arXiv:1802.00833 [高能物理-唯象学]。[5] C. Duhr、F. Dulat 和 B. Mistlberger，《物理评论快报》125，051804（2020），arXiv:1904.09990 [高能物理-唯象学]。[6] C. Duhr、F. Dulat、V. Hirschi 和 B. Mistlberger，《高能物理学杂志》08（08），017，arXiv:2004.04752 [高能物理-唯象学]。[7] J. Baglio、C. Duhr、B. Mistlberger 和 R. Szafron，《高能物理学杂志》12，066，arXiv:2209.06138 [高能物理-唯象学]。[8] C. Duhr、F. Dulat 和 B. Mistlberger，《物理评论快报》125，172001（2020），arXiv:2001.07717 [高能物理-唯象学]。[9] C. Duhr、F. Dulat 和 B. Mistlberger，《高能物理学杂志》11，143，arXiv:2007.13313 [高能物理-唯象学]。[10] C. Duhr 和 B. Mistlberger，《高能物理学杂志》03，116，arXiv:2111.10379 [高能物理-唯象学]。[11] X. Chen、T. Gehrmann、E. W. N. Glover、A. Huss、P. F. Monni、E. Re、L. Rottoli 和 P. Torrielli，《物理评论快报》128，252001（2022），arXiv:2203.01565 [高能物理-唯象学]。[12] L.-B. Chen、H. T. Li、H.-S. Shao 和 J. Wang，《高能物理学杂志》03，072，arXiv:1912.13001 [高能物理-唯象学]。[13] L.-B. Chen、H. T. Li、H.-S. Shao 和 J. Wang，《物理学快报B》803，135292（2020），arXiv:1909.06808 [高能物理-唯象学]。[14] L. Chen、X. Chen、X. Guan 和 Y.-Q. Ma，（2023），arXiv:2309.01937 [高能物理-唯象学]。[15] L.-B. Chen、H. T. Li、Z. Li、J. Wang、Y. Wang 和 Q.-f. Wu，《物理评论D》109，L071503（2024），arXiv:2309.00762 [高能物理-唯象学]。[16] M. Abele、D. de Florian 和 W. Vogelsang，《物理评论D》104，094046（2021），arXiv:2109.00847 [高能物理-唯象学]。[17] S. Goyal、S.-O. Moch、V. Pathak、N. Rana 和 V. Ravindran，《物理评论快报》132，251902（2024），arXiv:2312.17711 [高能物理-唯象学]。[18] L. Bonino 、 T. Gehrmann 和 G. Stagnitto，《物理评论快报》132，251901（2024），arXiv:2401.16281 [高能物理-唯象学]。[19] L. Bonino、T. Gehrmann、M. L¨ochner、K. Sch¨onwald 和 G. Stagnitto，《物理评论快报》133，211904（2024），arXiv:2404.08597 [高能物理-唯象学]。[20] S. Goyal、R. N. Lee、S.-O. Moch、V. Pathak、N. Rana 和 V. Ravindran，《物理评论快报》133，211905（2024），arXiv:2404.09959 [高能物理-唯象学]。[21] S. Goyal、R. N. Lee、S.-O. Moch、V. Pathak、N. Rana 和 V. Ravindran，《物理评论D》111，094007（2025），arXiv:2412.19309 [高能物理-唯象学]。[22] L. Bonino 、 T. Gehrmann 、 M. L¨ochner 、 K. Sch¨onwald 和 G. Stagnitto，（2025），arXiv:2504.05376 [高能物理-唯象学]。[23] J. Haug 和 F. Wunder，（2025），arXiv:2505.18109 [高能物理-ph]。[24] L. Bonino, T. Gehrmann, M. L¨ochner, K. Sch¨onwald, and G. Stagnitto, 《高能物理学杂志》10, 016, arXiv:2506.19926 [高能物理-唯象学]。[25] B. Zhou and J. Gao, 《物理评论D》112, 074016 (2025), arXiv:2507.13185 [高能物理-唯象学]。[26] L. Bonino, T. Gehrmann, M. L¨ochner, K. Sch¨onwald, and G. Stagnitto, (2025), arXiv:2510.00100 [高能物理-唯象学]。[27] S. Goyal, R. N. Lee, S.-O. Moch, V. Pathak, and V. Ravindran, (2025), arXiv:2510.18872 [高能物理-唯象学]。[28] S. Goyal, S.-O. Moch, V. Pathak, N. Rana, and V. Ravindran, 《物理评论D》113, 034004 (2026), arXiv:2506.24078 [高能物理-唯象学]。[29] V. Bertone, S. Carrazza, N. P. Hartland, E. R. Nocera, and J. Rojo (NNPDF), 《欧洲物理学杂志C》77, 516 (2017), arXiv:1706.07049 [高能物理-唯象学]。[30] M. Soleymaninia, M. Goharipour, and H. Khanpour, 《物理评论D》98, 074002 (2018), arXiv:1805.04847 [高能物理-唯象学]。[31] E. Moffat, W. Melnitchouk, T. C. Rogers, and N. Sato (杰斐逊实验室角动量组 (JAM)), 《物理评论D》104, 016015 (2021), arXiv:2101.04664 [高能物理-唯象学]。[32] R. Abdul Khalek, V. Bertone, A. Khoudli, and E. R. Nocera (MAP (多维部分子分布分析)), 《物理学快报B》834, 137456 (2022), arXiv:2204.10331 [高能物理-唯象学]。[33] I. Borsa, R. Sassot, D. de Florian, M. Stratmann, and W. Vogelsang, 《物理评论快报》129, 012002 (2022), arXiv:2202.05060 [高能物理-唯象学]。[34] J. Gao, C. Liu, X. Shen, H. Xing, and Y. Zhao, 《物理评论快报》132, 261903 (2024), arXiv:2401.02781 [高能物理-唯象学]。[35] J. Gao, C. Liu, X. Shen, H. Xing, and Y. Zhao, 《物理评论D》110, 114019 (2024), arXiv:2407.04422 [高能物理-唯象学]。[36] J. Gao, X. Shen, H. Xing, Y. Zhao, and B. Zhou, 《物理评论快报》135, 041902 (2025), arXiv:2502.17837 [高能物理-唯象学]。[37] J. Gao, C. Liu, and B. Zhou, (2025 2507 14637), arXiv: . [ ] 高能物理-唯象学。[38] J. Gao, C. Liu, M. Li, X. Shen, H. Xing, Y. Zhao, and Y. Zhou, 《物理评论D》112, 054045 (2025), arXiv:2503.21311 [高能物理-唯象学]。[39] V. Bertone, A. Chiefa, and E. R. Nocera (MAP (多维部分子分布分析)), 《物理学快报B》865, 139497 (2025), arXiv:2404.04712 [高能物理-唯象学]。[40] I. Borsa, M. Stratmann, W. Vogelsang, D. de Florian, and R. Sassot, 《物理评论快报》133, 151901 (2024), arXiv:2407.11635 [高能物理-唯象学]。[41] J. Cruz-Martinez, T. Hasenack, F. Hekhorn, G. Magni, E. R. Nocera, T. R. Rabemananjara, J. Rojo, T. Sharma, and G. van Seeventer, 《高能物理学杂志》07, 168, arXiv:2503.11814 [高能物理-唯象学]。[42] C. Cocuzza, N. T. Hunt-Smith, W. Melnitchouk, N. Sato, and A. W. Thomas (JAM合作组 (自旋PDF分析组)), 《物理评论D》112, 114017 (2025), arXiv:2506.13616 [高能物理-唯象学]。[43] M. Procura and I. W. Stewart, 《物理评论D》81, 074009 (2010), [勘误：Phys.Rev.D 83, 039902 (2011)], arXiv:0911.4980 [高能物理-唯象学]。[44] A. Jain, M. Procura, and W. J. Waalewijn, JHEP **05**, 035, 1101 4953 [ ] arXiv: . 高能物理-唯象学。[45] H.-M. Chang, M. Procura, J. Thaler, and W. J.

Waalewijn, 《物理评论快报》111, 102002 (2013), arXiv:1303.6637 [高能物理-唯象学] . [46] M. Ritzmann and W. J. Waalewijn, 《物理评论D》90, 054029 2014 1407 ( ), arXiv: . 3272 [高能物理-唯象学] . [47] T. Kaufmann, A. Mukherjee, and W. Vogelsang, 《物理评论D》 **92**, 054015 2015 [101, ( ), 勘误: 079901 2020 1506 Phys.Rev.D ( )], arXiv: .01415 [高能物理-唯象学] . [48] L. Dai, C. Kim, and A. K. Leibovich, 《物理评论D》94, 114023 2016 1606 ( ), arXiv: .07411 [高能物理 - 唯象学] . [49] Y.-T. Chien and I. Vitev, 《物理评论快报》119, 112301 (2017), arXiv:1608.07283 [高能物理-唯象学] . [50] Z.-B. Kang, F. Ringer, and I. Vitev, 《高能物理学杂志》11, 155, arXiv:1606.07063 [高能物理-唯象学] . [51] Z.-B. Kang, X. Liu, F. Ringer, and H. Xing, JHEP **11**, 068, 1705 08443 [ ] arXiv: . 高能物理-唯象学 . [52] D. P. Anderle, T. Kaufmann, M. Stratmann, F. Ringer, and I. Vitev, 《物理评论D》96, 034028 (2017), arXiv:1706.09857 [高能物理-唯象学] . [53] Z.-B. Kang, K. Lee, J. Terry, and H. Xing, 《物理学快报B》798, 134978 (2019), arXiv:1906.07187 [高能物理-唯象学] . [54] Z.-B. Kang, K. Lee, D. Y. Shao, and F. Zhao, 《高能物理学杂志》11, 005, arXiv:2106. 15624 [高能物理-唯象学] . [55] S. Caletti, A. J. Larkoski, S. Marzani, and D. Reichelt, 《高能物理学杂志》10, 158, arXiv:2205.01117 [高能物理-唯象学] . [56] L. J. Dixon, I. Moult, and H. X. Zhu, 《物理评论D》100, 014009 2019 1905 ( ), arXiv: . 01310 [高能物理-唯象学] . [57] H. Chen, I. Moult, X. Zhang, and H. X. Zhu, 《物理评论D》102, 054012 (2020), arXiv:2004.11381 [高能物理-唯象学] . [58] R.-J. Fu, R. Rahn, D. Y. Shao, W. J. Waalewijn, and B. Wu, 《物理评论快报》135, 171903 (2025), arXiv:2412.05358 [高能物理-唯象学] . [59] M. Czakon, T. Generet, A. Mitov, and R. Poncelet, 《物理评论快报》135, 17 (2025), arXiv:2503.11489 [高能物理-唯象学] . [60] T. Generet, R. Poncelet, and M. Muˇskinja, (2025), arXiv:2510.24525 [高能物理-唯象学] . [61] J. Gao, H. T. Li, H. X. Zhu, and Y. J. Zhu, (2026), arXiv:2602.06364 [高能物理-唯象学] . [62] L. Bonino, A. Gehrmann-De Ridder, T. Gehrmann, A. Huss, F. Merlotti, and G. Stagnitto, (2026), arXiv:2602.12344 [高能物理-唯象学] . [63] L. Dong, S. Fang, J. Gao, H. T. Li, D. Y. Shao, and Y. J. Zhu, (2026), arXiv:2602.22972 [高能物理-唯象学] . [64] C.-Q. He, H. Xing, T.-Z. Yang, and H. X. Zhu, 《物理评论快报》135, 101901 (2025), arXiv:2503.20441 [高能物理-唯象学] . [65] R. Abdul Khalek *et al.*, 核物理 A 1026, 122447 (2022), arXiv:2103.05419 [物理学 - 仪器与探测器] . [66] R. Abdul Khalek *et al.*, (2022), arXiv:2203.13199 [高能物理-唯象学] . [67] M. Dong *et al.* (CEPC研究组), (2018), arXiv:1811.10545 [高能物理-实验] . [68] A. Abada *et al.* (未来环形对撞机), 欧洲物理学杂志专题 228, 261 (2019). [69] S. Catani and M. Grazzini, 《物理评论快报》98, 222002 (2007), arXiv:hep-ph/0703012 . [70] S. Catani, L. Cieri, G. Ferrera, D. de Florian, and M. Grazzini, 《物理评论快报》103, 082001 (2009), arXiv:0903.2120 [高能物理-唯象学] . [71] S. Catani, G. Ferrera, and M. Grazzini, 《高能物理学杂志》05, 006, arXiv:1002.3115 [高能物理-唯象学] . [72] S. Catani, L. Cieri, D. de Florian, G. Ferrera, and M. Grazzini, 《物理评论快报》108, 072001 (2012), [勘误: Phys.Rev.Lett. 117, 089901 (2016)], arXiv:1110.2375 [hep-ph] . [73] C. W. Bauer、S. Fleming、D. Pirjol 和 I. W. Stewart, 《物理评论D》63, 114020 (2001), arXiv:hep-ph/0011336 。[74] C. W. Bauer 和 I. W. Stewart, 《物理学快报B》516, 134 (2001), arXiv:hep-ph/0107001 。 [75] C. W. Bauer、D. Pirjol 和 I. W. Stewart, 《物理评论D》65, 054022 (2002), arXiv:hep-ph/0109045 。 [76] G. Salam, E_t^∞方案, 未发表。 [77] D. Bertolini、T. Chan 和 J. Thaler, 《高能物理学杂志》04, 013, arXiv:1310.7584 [hep-ph] . [78] C. Liu、X. Shen、B. Zhou 和 J. Gao, 《高能物理学杂志》09, 108, arXiv:2305.14620 [hep-ph] . [79] Z. Bern、L. J. Dixon 和 D. A. Kosower, 《核物理B辑》513, 3 (1998), arXiv:hep-ph/9708239 。 [80] J. M. Campbell 和 R. K. Ellis, 《物理评论D》65, 113007 (2002), arXiv:hep-ph/0202176 。 [81] J. M. Campbell、R. K. Ellis 和 D. L. Rainwater, 《物理评论D》68, 094021 (2003), arXiv:hep-ph/0308195 。 [82] J. M. Campbell 和 R. K. Ellis, 《核物理B辑会议增刊》205-206, 10 (2010), arXiv:1007.3492 [hep-ph] . [83] T. Becher、M. Neubert 和 B. D. Pecjak, 《高能物理学杂志》01, 076, 0607228 arXiv:hep-ph/ 。 [84] S. Moch、J. A. M. Vermaseren 和 A. Vogt, 《物理学快报B》625, 245 (2005), arXiv:hep-ph/0508055 。 [85] S. Moch、J. A. M. Vermaseren 和 A. Vogt, 《高能物理学杂志》08, 049, 0507039 arXiv:hep-ph/ 。 [86] P. A. Baikov、K. G. Chetyrkin、A. V. Smirnov、V. A. Smirnov 和 M. Steinhauser, 《物理评论快报》102, 212002 2009 0902 ( ), arXiv: 。3519 [hep-ph] . [87] T. Gehrmann、E. W. N. Glover、T. Huber、N. Ikizlerli 和 C. Studerus, 《高能物理学杂志》06, 094, arXiv:1004.3653 [hep- ph] . [88] T. Gehrmann、E. W. N. Glover、T. Huber、N. Ikizlerli 和 C. Studerus, 《高能物理学杂志》11, 102, arXiv:1010.4478 [hep- ph] . [89] R. N. Lee、A. von Manteuffel、R. M. Schabinger、A. V. Smirnov、V. A. Smirnov 和 M. Steinhauser, 《物理评论快报》 128, 212002 (2022), arXiv:2202.04660 [hep- ph] . [90] M.-x. Luo、T.-Z. Yang、H. X. Zhu 和 Y. J. Zhu, 《物理评论快报》124, 092001 (2020), arXiv:1912.05778 [hep- ph] . [91] M.-x. Luo、T.-Z. Yang、H. X. Zhu 和 Y. J. Zhu, 《高能物理学杂志》06, 115, arXiv:2012.03256 [hep-ph] . [92] M. A. Ebert、B. Mistlberger 和 G. Vita, 《高能物理学杂志》146, 2006 05329 [ ] **69**, arXiv: 。hep-ph 。[93] Y. Li 和 H. X. Zhu, 《物理评论快报》118, 022004 (2017), arXiv:1604.01404 [hep-ph] . [94] Y. J. Zhu, 《高能物理学杂志》02, 018, arXiv:2009.08919 [hep-ph] . [95] Y.-T. Chien、R. Rahn、S. Schrijnder van Velzen、D. Y. Shao、W. J. Waalewijn 和 B. Wu, 《物理学快报B》815, 136124 2021 2005 ( ), arXiv: 。12279 [hep-ph] . [96] Y.-T. Chien、R. Rahn、D. Y. Shao、W. J. Waalewijn 和 B. Wu, 《高能物理学杂志》02, 256, arXiv:2205.05104 [hep-ph] . [97] R.-J. Fu、R. Rahn、D. Y. Shao、W. J. Waalewijn 和 B. Wu, (2026), arXiv:2602.20249 [hep-ph] . [98] M. A. Ebert、I. Moult、I. W. Stewart、F. J. Tack- mann、G. Vita 和 H. X. Zhu, 《高能物理学杂志》04, 123, arXiv:1812. 08189 [hep-ph] . [99] S. Camarda、L. Cieri 和 G. Ferrera, 《欧洲物理学杂志C》82, 575 (2022), arXiv:2111.14509 [hep-ph] . [100] L. Buonocore、S. Kallweit、L. Rottoli 和 M. Wiesemann, 《物理学快报B》829, 137118 (2022),

arXiv:2111.13661 [hep-ph] . [101] T.-J. Hou *et al.*, 《物理评论D》103, 014013 (2021), arXiv:1912.10053 [hep-ph] . [102] M. Grazzini、S. Kallweit 和 M. Wiesemann, 《欧洲物理学杂志C》78, 537 (2018), arXiv:1711.06631 [hep-ph] .[103] M. A. Ebert 和 F. J. Tackmann, 《高能物理学杂志》03, 158, arXiv:1911.08486 [hep-ph] . [104] S. Fang、M.-S. Gao、H. T. Li 和 D. Y. Shao, 《高能物理学杂志》01, 029, arXiv:2409.09248 [hep-ph] . [105] D. Gutierrez-Reyes、I. Scimemi、W. J. Waalewijn 和 L. Zoppi, 《高能物理学杂志》10, 031, arXiv:1904.04259 [hep-ph] . [106] G. Bell、K. Brune、G. Das 和 M. Wald, 《SciPost物理学论文集》7, 021 (2022), arXiv:2110.04804 [hep-ph] . [107] K. M. Brune, *Automation of jet function calculations in Soft-Collinear Effective theory* , 博士论文, 锡根大学 (2022)。 [108] L. Buonocore、M. Grazzini、F. Guadagni、J. Haag 和 L. Rottoli, 《欧洲物理学杂志C》85, 1290 (2025), arXiv:2508.19226 [hep-ph] . [109] M.-X. Luo、X. Wang、X. Xu、L. L. Yang、T.-Z. Yang 和 H. X. Zhu, 《高能物理学杂志》10, 083, arXiv:1908.03831 [hep- ph] . [110] M.-X. Luo、T.-Z. Yang、H. X. Zhu 和 Y. J. Zhu, 《高能物理学杂志》01, 040, arXiv:1909.13820 [hep-ph] . [111] Y. Hu、C. Sun、X.-M. Shen 和 J. Gao, 《高能物理学杂志》08, 122, arXiv:2101.08916 [hep-ph] . [112] P. A. Baikov 和 K. G. Chetyrkin, 《物理评论快报》97, 061803 2006 0604194 ( ), arXiv:hep-ph/ 。[113] M. Abele、D. de Florian 和 W. Vogelsang, 《物理评论D》106, 014015 (2022), arXiv:2203.07928 [hep-ph] . [114] G. D. Alexeev *et al.* (COMPASS实验), 《物理评论D》112, 012002 2025 2410 ( ), arXiv: 。12005 [hep-ex] .