arXiv:2603.29701v1 [math.QA] 31 Mar 2026

离散量子群 $su_q(2)$及其对偶

A. Van Daele(*)

摘要

Podle´s 和 Woronowicz 在 1990 [10] 中将离散量子群引入为紧量子群的对偶。 [5] 和 [16]对其进行了内在研究。在一篇较新的短文 [27], 中，我们给出了略作更新的处理方式，将离散量子群与紧量子群之间的对偶性视为代数量子群更一般对偶性的一个特例（该对偶性见 [17]），载于 [27]。

沿着这一思路，本文从离散量子群 $su_q(2)$ 入手，它并非构造为紧量子群 $SU_q(2)$ 的对偶，而是由 $SU(2)$ 的李代数的包络代数的霍普夫代数变形构造而来，如 Jimbo [6] 所给出。正如我们将看到的，过渡到 [16, 27]中研究的离散量子群并非完全显而易见。这是一种已知现象。

我们按照代数量子群的对偶性来考察这个离散量子群的对偶，并证明它确实是紧量子群 $SU_q(2)$。

日期：*2026*年*3*月*31*日

(*) 数学系，鲁汶大学，Celestijnenlaan 200B，B-3001 海弗莱，比利时。电子邮箱：Alfons.VanDaele@kuleuven.be

0. 引言

当 $(A,\ \Delta)$ 是有限维霍普夫代数时，A 的对偶空间 A' 在乘积与余乘上分别取与 A 的余乘与乘积相对偶的运算后，又是一个霍普夫代数。对于无限维霍普夫代数，这一结论不再成立。在这种情况下，可以考虑斯威德勒对偶，但无法保证它足够大。当 $(A,\ \Delta)$ 是带有积分的霍普夫代数时，可以在乘子霍普夫代数的框架下定义对偶。事实上，任何带有积分的乘子霍普夫代数都可以这样处理，而且其对偶仍是带有积分的乘子霍普夫代数。我们在此将这些对象称为代数量子群。

紧量子群和离散量子群都可以看作代数量子群的特例。此外，紧量子群与离散量子群之间的对偶性，也是代数量子群对偶性的一个特例。紧量子群和离散量子群的性质及其对偶性，均可由代数量子群对偶性的一般结果推出。事实上，从某种意义上说，这里的一般理论有时比这些特例更简单。

从历史上看，紧量子群和离散量子群的研究早于代数量子群理论的发展。遗憾的是，在进一步研究离散量子群和紧量子群时，并未采用上述观点。此外，紧量子群的发展先于离散量子群。最初，离散量子群是作为紧量子群的对偶而引入的。因此，即使在后来的研究中，离散量子群大多也被视为紧量子群的对偶。

为了说明这些事实，我们考虑 Woronowicz 在 [32]中提出的紧量子群 $SU_q(2)$。他将其称为扭曲 *SU(2)* 群。与此同时，我们也有 Drinfel'd [3] 和 Jimbo [6]关于量子群的研究。他们的量子群是经典李群的李代数的包络代数的变形。具体而言，他们对李群 $SU(2)$ 的李代数 $su(2)$ 的包络代数进行了变形。Drinfel'd 和 Jimbo 的方法彼此相似，但不同于 Woronowicz 的工作。显然，在撰写 [32] 时，Woronowicz 并不了解 Drinfel'd 和 Jimbo 的工作。

事实上，这两种方法彼此对偶。紧量子群$SU_q(2)$的对偶是在 [10] 中作为离散量子群得到的。这个离散量子群与 $SU(2)$包络李代数的变形密切相关，但两者仍存在根本差异。按照 [10] 的意义，$SU_q(2)$的对偶不是霍普夫代数，而是乘子霍普夫代数；而 Drinfel'd 和 Jimbo 所构造的则是真正的霍普夫代数。

本文主要澄清这两个对象之间的联系。毫无疑问，这种联系早已为人所知，但我认为，迄今为止尚未有人以严谨的方式对其进行阐述。我们将在本文中进一步讨论这一点。

本文内容

在较短的预备章节第1节中，我们回顾本文所讨论的离散量子群的定义及其主要性质。在第 2 节这一首个主要章节中，我们在 Hopf *-代数层面研究量子 $su_q(2)$。它是 $su_q(2)$ 李代数的变形，

其定义见 Jimbo [6] 的著作。在第 3 节中，我们研究构造量子 $su_q(2)$ 作为离散量子群所需的表示论。这部分内容广为人知，我们将其纳入本文，既是为了方便读者，也是为了统一本文使用的记号。离散量子群的构造在第 4 节中完成。在第 5 节中，我们构造其对偶（即代数量子群对偶性意义下的对偶），并如预期那样得到 Woronowicz 在 [32] 中研究的紧量子群 $SU_q(2)$。最后一节中，我们总结全文并对本文采用的方法作一些评论。

本文的目的与风格

本文中的许多内容在文献中或多或少已有介绍。然而，据我们所知，在量子群的算子代数框架内，对量子 $su_q(2)$ 进行详细而严谨的构造尚未完成。文献 [18] 中提到了这一点，但仅给出了概要。本文更应被视为一篇综述性文章。我们将在本文中进一步阐述这一观点。

记号与约定

代数中的单位元记为 1。我们用 ι 表示恒等映射。空间 A 的线性对偶记为 A'。

在大多数情况下，张量积是纯代数的。若非如此，我们会明确说明。

对于张量积中的元素以及其上的算子，我们使用腿编号记法。例如，若 x 是代数 A（带单位元）与其自身的张量积 $A \otimes A$ 中的一个元素，则 x_{12}、x_{13} 和 x_{23} 是 $A \otimes A \otimes A$ 中的元素，其中 x 分别视为位于前两个因子、第一个与第三个因子以及第二个与第三个因子上。在其余位置，我们放置该代数的单位元 1。因此，例如可得$x_{12} = x \otimes 1$。线性算子也类似，在其余因子上放置恒等映射ι。

基础参考文献

霍普夫代数理论的标准参考文献是 [4]和 [12]。我认为较新的 Radford 著作 [11]也很有用。乘子霍普夫代数和代数量子群的主要参考文献是 [15] 和 [17]。其他可供参考的文献有 [30] 和 [22, 23, 24]。另请参阅较新的论文 [1]，其中包含一些新结果。关于离散量子群，可参阅 [10]], [5] 和 [16, 27] ，不过本文的处理方式最接近 [16, 27]。关于紧量子群，基础参考文献有[31] 和 [33], ；另请参阅 [9] ，其中介绍了另一种处理方式。

我们采用的局部紧量子群理论主要参考文献是 [7]和 [8]。另请参阅 [20]中较新且简化的处理方法。

致谢

我感谢比利时的鲁汶大学，让我在正式退休后有机会继续从事研究。我也感谢 Kenny De Commer 提出的若干富有成效的

关于这个主题的讨论。

1. 离散量子群

本节首先给出离散量子群的定义。定义方式有多种，相关讨论请参阅较新论文 [27] 的附录，其中我们探讨了这些不同的方法。

离散量子空间

设 I 为一个指标集。对 I 中的每个元素 α ，关联一个自然数 $n(\alpha)$，以及 *-代数 A_α ，其元素为 $n(\alpha) \times n(\alpha)$复矩阵（具有通常的 *-代数结构）。令$A$ 为这些代数的（代数）直和。 A中的元素写作$(a_\alpha)_{\alpha\in I}$，其中对每个 $\alpha \in I$都有 $a_\alpha \in A_\alpha$ 。根据假设，只有有限多个分量 a_α 非零。这个直和 A 显然仍是一个 *-代数。注意，除非 I 是有限集，否则该代数没有单位元；但其乘积是非退化的（作为双线性形式）。我们称代数 A 为矩阵代数的直和。代数 A_α 被视为包含在 A中。

A_α 中的单位元记作 1_α ，并且也将其视为 A中的一个极小中心投影。

我们将考虑乘子代数 $M(A)$。它可以为任何具有非退化乘积的代数定义，并且其特征是：它是一个含单位元的最大代数，其中 A 是本质理想（参见例如 [15]）。如果 A 是一个 *-代数，那么 $M(A)$也是如此。在这个特定情形下，很容易看出， $M(A)$中的元素可以写成 $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$，其中对每个 $\alpha \in I$都有 $a_\alpha \in A_\alpha$ ，但不施加其他限制。这个代数称为代数 A_α的直积 。

我们还考虑 A 与自身的张量积 $A \otimes A$ ，以及 $A \otimes A$的乘子代数$M(A \otimes A)$。代数 $A \otimes A$ 是张量积代数$A_\alpha \otimes A_\beta$的直和，其中 $\alpha,\ \beta \in I$；当然，乘子代数 $M(A \otimes A)$是所有这些代数的直积。因此， $M(A \otimes A)$中的元素写作$(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\ \beta\in I}$ ，其中$a_{\alpha\beta} \in A_\alpha \otimes A_\beta$。当只有有限多个分量非零时，我们得到 $A \otimes A$中的元素。

离散量子群

现在我们来讨论如何量子化“乘积结构”。因此，我们引入此类代数上的余乘这一概念。

1.1. 定义 设 A 是矩阵代数的直和。 A 上的一个余乘 （或余乘法）是一个 *-同态 $\Delta : A \to M(A \otimes A)$，满足

i) $\Delta(A)(1 \otimes A) \subseteq A \otimes A$ and $(A \otimes 1)\Delta(A) \subseteq A \otimes A$,
ii) $(\iota \otimes \Delta)\Delta(a) = (\Delta \otimes \iota)\Delta(a)$ for all $a \in A$.

回顾一下，我们用 ι表示恒等映射。

条件 i) 用于赋予条件 ii) 以意义。事实上，若在方程左侧的左边乘以一个形如 $c \otimes 1 \otimes 1$
where

$c \in A$ 的元素，则表达式为 $(\iota\otimes\Delta)((c\otimes 1)\Delta(a))$，这是良定义的。同样，我们在方程右侧的右边乘以一个形如 $1\otimes 1\otimes b$with $b \in A$ 的元素，此时表达式为 $(\Delta\otimes\iota)(\Delta(a)(1\otimes b))$。这就是如何利用 i) 中的假设，在乘子代数 $M(A\otimes A\otimes A)$ 中解释 ii) 中的方程。

条件 ii) 称为余结合性。

当 A 是任意一个具有非退化乘积的 *-代数时，上述余乘的定义同样适用（见 [15]）。如果不假设 i) 中的条件，而只假设 Δ 是非退化的（即 $\Delta(A)(A\otimes A) = A\otimes A$），仍然可以定义余结合性，参见例如关于余结合性的注记 [25, 26]。在直和的情形下，这一点并不难看出。不过，正如我们将要看到的，i) 中的条件相当自然，而且类似的条件通常也被视为余乘定义本身的一部分。

于是，以下是本文所采用方法的主要定义。

1.2. 定义 一个离散量子群 是一个对 (A, Δ)，其中 *-代数 A 是全矩阵代数的直和，并带有一个余乘 Δ （如定义 1.1 中所述），且存在一个余单位 ε 和一个反元 S。

余单位 定义为满足以下条件的线性映射 $\varepsilon\colon A\to\mathbb{C}$

$$(\varepsilon\otimes\iota)\Delta(a) = a \qquad \text{and} \qquad (\iota\otimes\varepsilon)\Delta(a) = a$$

对所有 $a \in A$。反元 定义为满足以下条件的线性映射 $S : A\to A$

$$m(S\otimes\iota)\Delta(a) = \varepsilon(a)1 \qquad \text{and} \qquad m(\iota\otimes S)\Delta(a) = \varepsilon(a)1$$

对所有 $a\in A$ （其中 m 是乘法映射，视为从 $A\otimes A$ 到 A的线性映射）。

此外，这些公式在乘子代数 $M(A)$中也有意义。只需将某个 A中的元素左乘或右乘（视具体情况而定）即可。

容易看出，若余单位存在，则它是唯一的，因此我们可以放心地用这个余单位来表述关于反元的条件。此外，反元若存在也是唯一的。由余乘法是同态这一事实可知， ε 是同态，而 S 是反同态。由于 Δ 是一个 *-同态，因此 ε 也是一个 *-同态，并且 S 满足方程 $S(S(a)^*)^* = a$ ，对所有 $a \in A$均成立。特别地， S 是双射，并且对所有 a， $S(a^*) = S^{-1}(a)^*$。我们看到， S 是一个 *-映射，当且仅当 $S^2 = \iota$。

根据定义，很容易得出余积分的存在性。

1.3. 命题 若 (A, Δ) 是一个离散量子群，则存在一个自伴幂等元 h ，属于 A ，满足 $ah = ha = \varepsilon(a)h$ ，对所有 $a \in A$ 均成立。

余单位核是一个双边 *-不变的余维 1 理想。于是，由 A 的结构（它是全矩阵代数的直和）可得所述结论。

元素 $\Delta(h)$ 发挥着重要作用，因为它的所有腿都属于 A。还存在左积分和右积分 φ 和 ψ，它们满足以下条件，并由此得到完全刻画

$$(\iota\otimes\varphi)\Delta(h) = 1 \qquad \text{and} \qquad (\psi\otimes\iota)\Delta(h) = 1,$$

在乘子代数 $M(A)$ 中成立。

由于这是一个非常方便的工具，我们有时也会在这些讲义中使用 Sweedler记号。因此，我们写作

$$\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \qquad \text{and} \qquad (\Delta \otimes \iota)\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)} \tag{1.1}$$

当 a 是 A的一个元素时。只要在除一个因子以外的所有因子中，分别左乘或右乘来自 A 的元素，就可以这样做。乘子霍普夫代数的 Sweedler记号用法见 [2]。这项技术在 [19, 28] 中得到了改进。对于这些离散量子群，这种做法相对直观，因为只需乘以中心投影，换言之，可以限制到各个分量上。

有关离散量子群的更多信息，请参阅原论文 [16] 以及 arXiv 上近期更新的版本 [27] 。

2. 霍普夫 *-代数 $\mathfrak{A}_t$

本文研究离散量子群 $su_q(2)$。在文献中，人们已在经典的霍普夫代数框架下对其进行研究，例如 Drinfel'd[3] 和 Jimbo [6] 以及许多其他人的工作。然而，这些研究大多并未在算子代数框架下将其视为离散量子群。下文将对此作进一步说明。另一方面， [32]研究了紧量子群 $SU_q(2)$，而 [10] 则将 $SU_q(2)$的对偶构造为一个离散量子群。这两项研究彼此独立。

本节将进行一些准备工作。我们从 Hopf *代数（$\mathfrak{A}_t$, Δ）开始，它是 $SU(2)$ 李代数的包络代数的一种变形，灵感来自 Jimbo 在 [6] 中的工作。我们需要详细了解底层 *代数 $\mathfrak{A}_t$ 的有限维 * 表示。在下一节中，我们将利用这些信息构造一个离散量子群（如 [16, 27] 中所述）。

本节讨论的材料以不同形式见于各处；但在此，我们关注的是如何按照本文第一节的回顾，用它来构造离散量子群。我们将在下一节开头再讨论这一点。

$SU(2)$ 李代数的包络代数

回顾一下 $SU(2)$ 李代数包络代数的如下刻画。

2.1. 定义 我们考虑由元素 e, f 和h 生成的、定义在 $\mathbb{C}$ 上的含幺代数 $\mathfrak{A}$ ，它们满足

$$he - eh = 2e, \quad hf - fh = -2f \quad \text{and} \quad ef - fe = h. \tag{2.1}$$

它是一个带有 $e^* = f$ 和 $h^* = h$ 的 *-代数。

那么，以下结论是众所周知的。

2.2. 命题 代数 $\mathfrak{A}$ 是一个 Hopf *-代数，其中余乘定义为

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

对于 $x = e, f$ 或 h。

证明是标准且直接的。我们概述论证过程，因为稍后还会用到类似的论证。

i) 首先，必须验证 $\Delta(e)$ $\Delta(f)$ 和 $\Delta(h)$ 的候选元素满足与元素 e, f 和 h 相同的交换关系，但现在是在 $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}$ 中。然后我们可以将 Δ 定义为从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}$ 的同态。显然，对于这三个生成元，我们有 $\Delta(x^*) = \Delta(x)^*$，因此 Δ 是一个 *-同态。 Δ 的余结合性在生成元上成立，因此也在所有元素上成立。

ii) 余单位 ε 定义为：对于这三个生成元， $\varepsilon(1) = 1$ 且 $\varepsilon(x) = 0$ 。它自然地扩展为一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathbb{C}$ 的 *-代数同态。此外，对于这些生成元，$(\varepsilon \otimes \iota)\Delta(x) = x$ ，并且 $(\iota\otimes\varepsilon)\Delta(x) = x$。因此，这对代数中的所有元素都成立。

iii) 反元 S 首先在生成元上定义为 $S(x) = -x$。可以验证，这与交换关系相容，不过要在采用相反乘积的代数中考察。因此， S 可以定义为整个 $\mathfrak{A}$ 上的一个反同构。我们有

$$\begin{aligned} m(\iota \otimes S)\Delta(x) &= m(\iota \otimes S)(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\ &= m(x \otimes 1 + 1 \otimes (-x)) \\ &= x - x = 0 \end{aligned}$$

因此，对于生成元，有 $m(\iota\otimes S)\Delta(x) = \varepsilon(x)1$。和前面一样，我们用 m 表示从 $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$的乘法映射。可以证明，这一性质也适用于乘积。事实上，使用 Sweedler记号，

$$\begin{aligned} \sum_{(a)(b)} a_{(1)}b_{(1)}S(a_{(2)}b_{(2)}) &= \sum_{(a)(b)} a_{(1)}b_{(1)}S(b_{(2)})S(a_{(2)}) \\ &= \sum_{(a)} \varepsilon(b)a_{(1)}S(a_{(2)}) = \varepsilon(b)\varepsilon(a) \end{aligned}$$

并且我们看到，若这一性质对 a 和 b成立，则 $m(\iota \otimes S)\Delta(ab) = \varepsilon(ab)1$。这里用到 Δ 和 ε 是同态。类似地，我们还可以得到，对于所有 a，都有 $m(S \otimes \iota)\Delta(a) = \varepsilon(a)1$。

事实上，对于任意李代数，当反元 Δ 在李代数的元素 x 上定义为 $\Delta(x)$ $= x \otimes 1 + 1 \otimes x$时，其包络代数是一个霍普夫 *代数。我们上面给出的论证对一般的李代数也适用。这一结果见于有关霍普夫代数的文献中（例如 [4], [12] 和 [11]）。

$\mathfrak{A}_t$ 包络代数的变形 $\mathfrak{A}$

现在我们将变形代数结构。有两种方法。可以像 Drinfel'd 的著作中那样使用形式幂级数（见 [3]），也可以考虑 Jimbo 的方法（见 [6]）。我们采用 Jimbo 的方法，但稍作修改。

2.3. 定义 令 t 为任意实数，并令 $\lambda = \exp(t)$。此外，令 c 为任意实数。现在考虑由元素 e, f 和 q生成的含幺代数 $\mathfrak{A}_t^c$ （其中 q 可逆），满足

$$qe = \lambda eq, \quad qf = \lambda^{-1} fq, \quad \text{and} \quad ef - fe = c(q^2 - q^{-2}). \tag{2.2}$$

当我们令 $e^* = f$ 和 $q^* = q$时，它是一个 *-代数。

如果我们将 q 替换为 q^{-1}，并将 λ 替换为 λ^{-1}，则会得到相同的关系，但此时 c 被替换为 $-c$。

首先，我们也允许 $c = 0$的情形。但事实上，我们主要只关心 c 非零的情形。

在这种情况下，我们得到如下结论。

2.4. 命题 假设 c 和 c' 都是严格正实数，那么
*-代数 $\mathfrak{A}_t^c$ 和 $\mathfrak{A}_t^{c'}$ 同构。

证明：映射 $q \mapsto q$、 $e \mapsto c^{\frac{1}{2}} e$ 和 $f \mapsto c^{\frac{1}{2}} f$ 将扩展为代数 $\mathfrak{A}_t^1$ 到 $\mathfrak{A}_t^c$ 的一个 *-同构。于是结论得证。 □

在特殊情形下，当 $t > 0$ 和 $c = (\lambda - \lambda^{-1})^{-1}$ 时，我们得到 Jimbo 的原始工作 [6] 中的常见交换关系。我们主要研究这一情形。因此，我们固定以下记号。

2.5. 记号 我们用 $\mathfrak{A}_t$ 表示代数 $\mathfrak{A}_t^c$，其中 $c = (\lambda - \lambda^{-1})^{-1}$，且当 $t > 0$ 时。

2.6. 备注 i) 我们可以将这个代数 $\mathfrak{A}_t$ 视为代数 $\mathfrak{A}$ 的一种变形。粗略地说，思路如下：需要对变量 t 的形式幂级数进行运算。

ii) 若我们取 q 为 $\exp(\frac{1}{2}th)$ 形式的元素，则方程 $qe = \lambda eq$ 左侧的前几项为 $e + \frac{1}{2}the + \ldots$，而右侧则为

$$(1 + t + \ldots)e(1 + \frac{1}{2}th + \ldots) = e + te + \frac{1}{2}teh + \ldots$$

对于差值 $qe - \lambda eq$，我们得到 $t(\frac{1}{2}he - e - \frac{1}{2}eh) + \ldots$。若要使 t 的系数等于 0，则需要 $he - eh = 2e$。同理，$qf = \lambda^{-1} fq$ 将引出 $fh - hf = -2f$。对于第三个方程，我们使用 $(\lambda - \lambda^{-1})(ef - fe) = q^2 - q^{-2}$。左边的第一个非平凡项是$2t(ef - fe)$，而右边的第一个非平凡项是 $2th$。由此得到方程 $ef - fe = h$。

iii) 此外，代数 $\mathfrak{A}_t^c$ 是 $\mathfrak{A}_t^0$ 的一个变形，其中令 $c \to 0$。

我们需要以下公式。它是交换关系的推论。

2.7. 命题 在代数 $\mathfrak{A}_t^c$ 中，对于每个 $n = 1, 2, \ldots\ldots$，

$$ef^n - f^n e = f^{n-1} \Gamma_n(q)$$

其中

$$\Gamma_n(q) = c\frac{\lambda - \lambda^{-2n+1}}{\lambda - \lambda^{-1}} q^2 - c\frac{\lambda^{-1} - \lambda^{2n-1}}{\lambda^{-1} - \lambda} q^{-2}.$$

我们同意 $f^0 = 1$。

证明：给定 $n>1$，我们有

$$\begin{aligned} ef^n &= eff^{n-1} \\ &= (fe + c(q^2 - q^{-2}))f^{n-1} \\ &= fef^{n-1} + f^{n-1}c(\lambda^{-2(n-1)}q^2 - \lambda^{2(n-1)}q^{-2}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

若 $n>2$，用 $n-1$ 代替 n 应用此公式，我们得到

$$ef^{n-1} = fef^{n-2} + f^{n-2}c(\lambda^{-2(n-2)}q^2 - \lambda^{2(n-2)}q^{-2}).$$

将此式代入方程 (2.3)，可得

$$\begin{aligned} ef^n = f^2ef^{n-2} &+ f^{n-1}c(\lambda^{-2(n-2)}q^2 - \lambda^{2(n-2)}q^{-2}) \\ &+ f^{n-1}c(\lambda^{-2(n-1)}q^2 - \lambda^{2(n-1)}q^{-2}). \end{aligned}$$

如此继续下去，最终对所有 $n>2$，我们得到

$$ef^n - f^ne = f^{n-1}\Gamma_n(q)$$

其中 Γ_n 满足

$$\begin{aligned} \Gamma_n(q) &= \sum_{j=1}^{n} c(\lambda^{-2(n-j)}q^2 - \lambda^{2(n-j)}q^{-2}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} c(\lambda^{-2n}\lambda^{2j}q^2 - \lambda^{2n}\lambda^{-2j}q^{-2}) \\ &= c\lambda^{-2n}\frac{\lambda^{2(n+1)} - \lambda^2}{\lambda^2 - 1}q^2 - c\lambda^{2n}\frac{\lambda^{-2(n+1)} - \lambda^{-2}}{\lambda^{-2} - 1}q^{-2} \\ &= c\frac{\lambda^2 - \lambda^{-2n+2}}{\lambda^2 - 1}q^2 - c\frac{\lambda^{-2} - \lambda^{2n-2}}{\lambda^{-2} - 1}q^{-2} \\ &= c\frac{\lambda - \lambda^{-2n+1}}{\lambda - \lambda^{-1}}q^2 - c\frac{\lambda^{-1} - \lambda^{2n-1}}{\lambda^{-1} - \lambda}q^{-2} \end{aligned}$$

若约定 $f^0 = 1$，该公式对 $n=1$ 也成立，此时我们恰好恢复了 $ef - fe$的原始交换公式。 □

这个代数中有如下一个特殊的中心元，称为卡西米尔元。

2.8. 命题 设 C 是在 $\mathfrak{A}_t$ 中定义的元素

$$C = (\lambda + \lambda^{-1})(q^2 + q^{-2}) + (\lambda - \lambda^{-1})^2(ef + fe).$$

那么 C 属于 $\mathfrak{A}_t$ 的中心。

证明：i) 利用 $qe = \lambda eq$，我们得到

$$\begin{aligned} (q^2 + q^{-2})e - e(q^2 + q^{-2}) &= (\lambda^2 eq^2 + \lambda^{-2}eq^{-2}) - e(q^2 + q^{-2}) \\ &= (\lambda^2 - 1)eq^2 + (\lambda^{-2} - 1)eq^{-2} \end{aligned}$$

ii) 另一方面，我们有

$$(ef+fe)e-e(ef+fe)=e(fe-ef)+(fe-ef)e$$

因此，利用 $(ef-fe)=(\lambda-\lambda^{-1})^{-1}(q^2-q^{-2})$，

$$\begin{aligned}(ef+fe)e-e(ef+fe)&=(\lambda-\lambda^{-1})^{-1}(-eq^2+eq^{-2}-q^2e+q^{-2}e)\\&=(\lambda-\lambda^{-1})^{-1}(-eq^2+eq^{-2}-\lambda^2eq^2+\lambda^{-2}eq^{-2})\\&=(\lambda-\lambda^{-1})^{-1}(-(\lambda^2+1)eq^2+(\lambda^{-2}+1)eq^{-2}).\end{aligned}$$

iii) 因此，一方面我们得到

$$\begin{aligned}&(\lambda+\lambda^{-1})((q^2+q^{-2})e-e(q^2+q^{-2}))\\&\quad=(\lambda+\lambda^{-1})(\lambda^2-1)eq^2+(\lambda+\lambda^{-1})(\lambda^{-2}-1)eq^{-2}\\&\quad=(\lambda^3-\lambda^{-1})eq^2+(\lambda^{-3}-\lambda)eq^{-2}\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}&(\lambda-\lambda^{-1})^2((ef+fe)e-e(ef+fe))\\&\quad=-(\lambda-\lambda^{-1})(\lambda^2+1)eq^2+(\lambda-\lambda^{-1})(\lambda^{-2}+1)eq^{-2}\\&\quad=-(\lambda^3-\lambda^{-1})eq^2+(-\lambda^{-3}+\lambda)eq^{-2}\end{aligned}$$

这些表达式之和为 0。

iv) 我们看到 C 是 $\mathfrak{A}_t$中的一个自伴元。因此，由于它与 e对易（通过取伴随），也可推出它与 f 对易。我们还知道， C 与 q对易。因此，我们在 *-代数$\mathfrak{A}_t$中得到了一个中心元。

□

让我们看看这是如何成为经典卡西米尔不变量的一种变形的。回想一下，我们考虑 $\lambda=\exp(t)$ 和 $q=\exp(\frac{1}{2}th)$。此外，我们需要在代数 $\mathfrak{A}_t^c$中考察它，其中 $c=(\lambda-\lambda^{-1})^{-1}$。那么

$$C=(\lambda+\lambda^{-1})(q^2+q^{-2})+(\lambda-\lambda^{-1})^2(ef+fe).$$

C 的第一部分 $(\lambda+\lambda^{-1})\ (q^2+q^{-2})$ 的展开式为

$$\begin{aligned}&(1+t+\frac{1}{2}t^2\cdots+1-t+\frac{1}{2}t^2\ldots)(1+th+\frac{1}{2}t^2h^2+\cdots+1-th+\frac{1}{2}t^2h^2+\ldots)\\&\qquad=(2+t^2+\ldots)(2+t^2h^2+\ldots)\\&\qquad=4+2t^2+2t^2h^2+\ldots.\end{aligned}$$

对于第二部分，我们得到

$$(4t^2+\ldots)(ef+fe).$$

我们需要考虑 $^{C-4}_{4}$，然后 t^2 的系数为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}h^2+ef+fe.$$

不难验证， $\frac{1}{2}h^2+ef+fe$ 在经典代数 $\mathfrak{A}$ 中是中心元。事实上，我们有

$$\begin{aligned} hef-efh &= hef-ehf+ehf-efh = 2ef-2ef = 0\\ hfe-feh &= hfe-fhe+fhe-feh = -2ef+2ef = 0. \end{aligned}$$

这意味着 h 与 $\frac{1}{2}h^2+ef+fe$ 对易。另一方面，我们有

$$\begin{aligned} h^2e-eh^2 &= h(he-eh)+(he-eh)h = 2he+2eh\\ (ef+fe)e-e(ef+fe) &= e(fe-ef)+(fe-ef)e = -eh-he \end{aligned}$$

由此可见， e 也与 $\frac{1}{2}h^2+ef+fe$ 对易。

我们还需要这个卡西米尔元的另外两种形式。我们仍以 $c=(\lambda-\lambda^{-1})^{-1}$ 为例。

2.9. 命题 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}C &= \lambda q^2+\lambda^{-1}q^{-2}+(\lambda-\lambda^{-1})^2fe\\ &= \lambda^{-1}q^2+\lambda q^{-2}+(\lambda-\lambda^{-1})^2ef. \end{aligned}$$

证明：i) 利用 $ef-fe$ 的表达式，我们得到

$$\begin{aligned} &(\lambda+\lambda^{-1})(q^2+q^{-2})+(\lambda-\lambda^{-1})^2(ef+fe)\\ &\qquad = (\lambda+\lambda^{-1})(q^2+q^{-2})+2(\lambda-\lambda^{-1})^2fe+(\lambda-\lambda^{-1})(q^2-q^{-2})\\ &\qquad = (\lambda+\lambda^{-1}+\lambda-\lambda^{-1})q^2+(\lambda+\lambda^{-1}-\lambda+\lambda^{-1})q^{-2}+2(\lambda-\lambda^{-1})^2fe\\ &\qquad = 2\lambda q^2+2\lambda^{-1}q^{-2}+2(\lambda-\lambda^{-1})^2fe. \end{aligned}$$

ii) 类似地，我们得到

$$\begin{aligned} &\lambda q^2+\lambda^{-1}q^{-2}+(\lambda-\lambda^{-1})^2fe\\ &\qquad = \lambda q^2+\lambda^{-1}q^{-2}+2(\lambda-\lambda^{-1})^2ef-(\lambda-\lambda^{-1})(q^2-q^{-2})\\ &\qquad = 2\lambda^{-1}q^2+2\lambda q^{-2}+2(\lambda-\lambda^{-1})^2ef. \end{aligned}$$

□

对于 $c=0$ 的情形，其中 e 和 f 可交换，命题 2.7 的结果仅说明 $F_n=0$，并且 e 和 f^n 可交换。此外，按命题 2.8 定义的元素 C 不会与 e 可交换。请注意，代数 $\mathfrak{A}_t^0$ 中不存在这样的中心元。

Hopf *-代数 $\mathfrak{A}_t$

我们可以将变形代数 $\mathfrak{A}_t^c$ 构造成一个 Hopf *-代数。下面给出该代数的命题 2.2 的类似结果。

2.10. 命题 </style} $\mathfrak{A}_t^c$ 代数 * 是 Hopf 代数，其余乘定义为

$$\Delta(q)=q\otimes q \qquad \text{and} \qquad \Delta(e)=q\otimes e+e\otimes q^{-1}.$$

证明：证明过程与命题 2.2 的证明相同。我们需要

$$\Delta(f) = q \otimes f + f \otimes q^{-1}$$

使 Δ 成为一个 *-同态。首先需要检验，$\Delta(q)$ $\Delta(e)$ 和 $\Delta(f)$ 的候选表达式满足与 q, e 和 f 相同的规则。然后便可得到整个代数上的余乘存在。只需在生成元上验证余结合性。对于余单位，我们有 $\varepsilon(q) = 1$ 和 $\varepsilon(e) = \varepsilon(f) = 0$。最后，对于反元 S，我们有 $S(q) = q^{-1}$、 $S(e) = -\lambda^{-1}e$ 和 $S(f) = -\lambda f$。 □

请注意，依照上文注 2.6 的思路，公式 $\Delta(q) = q \otimes q$ 是公式 $\Delta(h) = 1 \otimes h + h \otimes 1$ 的一种变形，而 $\Delta(e)$ 的公式则是公式 $\Delta(e) = 1 \otimes e + e \otimes 1$ 的一种变形。

2.11. 命题 假设 c 和 c' 是严格正实数。那么，按照命题 2.4 得到的 $\mathfrak{A}_t^c$ 与 $\mathfrak{A}_t^{c'}$ 之间的同构，也是 Hopf *-代数的同构。

证明：令 α 为由下式给出的从 $\mathfrak{A}_t^1$ 到 $\mathfrak{A}_t^c$ 的同构

$$\alpha(q) = q, \quad \alpha(e) = c^{\frac{1}{2}} e \quad \text{and} \quad \alpha(f) = c^{\frac{1}{2}} f.$$

那么显然，对于 $x = q, e, f$，有 $\Delta(\alpha(x)) = (\alpha \otimes \alpha)\Delta(x)$，因此对所有元素 $x \in \mathfrak{A}_c^1$也成立。这里我们对两个余乘都使用记号 Δ。 □

对于 $c = 0$ 的情形，我们将在下文给出最后一条备注。

2.12. 备注 i) 代数 $\mathfrak{A}_t^0$ 是由自伴元素 q 和正规元 e 生成的含幺 *-代数，它们满足 $qe = \lambda eq$。余乘定义如下

$$\Delta(q) = q \otimes q \qquad \Delta(e) = q \otimes e + e \otimes q^{-1}.$$

取 $t = 0$，得到 $\lambda = 1$ 和 $qe = eq$。这是与下列矩阵群相关联的 Hopf *-代数

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & z \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ and } z \in \mathbb{C} \right\}.$$

元素 q 是对应于上对角线的矩阵元， q^{-1}是对应于下对角线的矩阵元。元素 e是非对角元。

iii) 文献中研究过这种霍普夫代数的各种形式。此外，也有各种尝试，试图将这个量子群从霍普夫 *-代数层面提升到算子代数层面。例如参见 [14], [13]和 [29]。

可以提出这样一个问题：这些霍普夫 *-代数是否存在积分？这里给出一个部分答案。

2.13. 命题 霍普夫 *-代数 $\mathfrak{A}_t^c$ 不存在正积分。

证明：假设 φ 是 $\mathfrak{A}_t^c$上的正积分。由 $\Delta(q^2) = q^2 \otimes q^2$ 可得 $\varphi(q^2)q^2 = \varphi(q^2)\mathbf{1}$，因此 $\varphi(q^2) = 0$。由于 $q^* = q$，我们得到 $\varphi(q^*q) = 0$，这与 φ 的忠实性矛盾。 □

事实上，预计这些 Hopf *-代数上不存在任何积分。关于这一点的讨论请参见第 6 节。

2.14. 备注 i) 存在一个 *-自同构 α，由下式给出：$\mathfrak{A}_t^c$

$$\alpha(q) = -q, \quad \alpha(e) = e \quad \text{and} \quad \alpha(f) = f.$$

然而，这并不保持余乘，因为 $\Delta(q) = q \otimes q$。

ii) 对于每个模为 1 的复数 z，都有一个 *-自同构 γ_z，由下式给出：

$$\gamma_z(q) = q, \quad \gamma_z(e) = ze \quad \text{and} \quad \gamma_z(f) = \overline{z}f.$$

这些自同构与余乘相容。

我们将在后文讨论这些自同构。

此外　我们再次考虑 $\mathfrak{A}_t$，Hopf *-代数 $\mathfrak{A}_t^c$，其中 $c = (\lambda - \lambda^{-1})^{-1}$，也就是说

$$ef - fe = \frac{1}{\lambda - \lambda^{-1}}(q^2 - q^{-2}).$$

3. 代数 $\mathfrak{A}_t$的有限维 *-表示

我们希望从命题 2.10 中的 Hopf *-代数 $\mathfrak{A}_t$ 构造一个离散量子群。这似乎比预期的更复杂，不过我们稍后会对此作出说明。

为了得到一个离散量子群 (A, Δ)，我们首先必须寻找底层代数A。它由代数 $\mathfrak{A}_t$的有限维 *-表示构造而成。

结果发现，正如 $SU(2)$ 的李代数一样，我们有不可约 *-表示π_n，分别标记为 $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\ldots$，其所在空间的维数分别为 $2n+1$。

回顾一下，我们取 t 为非零实数，并定义 $\lambda = \exp(t)$。

3.1. 命题 设 $\mathcal{H}_n$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 $(2n+1)$ 维希尔伯特空间。用 $(\xi(n, j))_j$ 表示一个标准正交基，其中 $j = -n, -n+1, \ldots\ldots, n$。定义

$$\begin{aligned}
&\pi_n(q)\xi(n,j) = \lambda^j \xi(n,j) \\
&\pi_n(e)\xi(n,j) = r_j \xi(n,j+1) \qquad \text{if } j \neq n \\
&\pi_n(f)\xi(n,j) = r_{j-1}\xi(n,j-1) \qquad \text{if } j \neq -n
\end{aligned}$$

wh其中 r_j 是严格正实数，$-n \leq j \leq n-1$。我们还定义 e

$$\pi_n(e)\xi(n,n) = 0 \qquad \text{and} \qquad \pi_n(f)\xi(n,-n) = 0.$$

可以选择数 r_j，使得我们得到代数 $\mathfrak{A}_t$ 的一个 *-表示。它是一个不可约表示。

证明：i) 我们固定指标 n。我们将 E, F, Q 记作 $\pi_n(e)$ $\pi_n(f)$ $\pi_n(q)$，并将 ξ_j 记作$\xi(n, j)$。

ii) 不难验证 $QE = \lambda EQ$ 和 $QF = \lambda^{-1}FQ$。对于这些方程，数值 (r_j) 的选取并不重要。

iii) 另一方面, 另一方面，考虑规则 $ef - fe = (\lambda - \lambda^{-1})^{-1}(q^2 - q^{-2})$。我们有

$$(EF - FE)\xi_j = \begin{cases} r_{j-1}^2 \xi_j & \text{for } j = n \\ (r_{j-1}^2 - r_j^2)\xi_j & \text{for } -n < j < n \\ -r_j^2 \xi_j & \text{for } j = -n \end{cases}$$

对于所有 j，我们有 $(Q^2 - Q^{-2})\xi_j = (\lambda^{2j} - \lambda^{-2j})\xi_j$。

iv) 由于我们希望 $\pi_n(e)\xi_n = 0$，我们约定 $r_n = 0$。然后我们使用公式

$$r_{j-1}^2 - r_j^2 = (\lambda - \lambda^{-1})^{-1}(\lambda^{2j} - \lambda^{-2j})$$

以归纳方式定义 r_{n-1}，r_{n-2}，…，r_{-n}。所有情况下我们都取正平方根（见下文备注）。由对称性可知，对于所有 j，都有 $r_{-j-1} = r_j$。特别地，我们得到 $r_{-n-1} = 0$。这将意味着 $\pi_n(f)\xi(n, -n) = 0$。

v) 容易验证 $E^* = F$，并且显然 $Q^* = Q$。因此，我们在内积空间 $\mathcal{H}_n$ 上得到一个 *-表示的 *-代数 $\mathfrak{A}_t$。

v) 也很容易看出，π_n 在 $\mathcal{H}_n$上的像给出了空间 $\mathcal{H}_n$上的所有线性算子。因此，我们得到一个不可约表示。 □

数值r_j 可以明确计算出来，但我们无需进一步讨论，留作读者练习。

3.2. 备注 为数值r_j 选取不同的符号，只相当于在上述证明中为向量 ξ_j 选取不同的符号。我们将沿用上述约定，使得 $-n \le j \le n-1$ 对应的所有数值r_j 都严格为正。事实上，这些数值会先增至中间位置，然后再递减。

受李代数表示论的启发，我们称向量 ξ（n，n）为表示 π_n的最高权向量。

接下来我们考察卡西米尔算子的取值。

3.3. 命题 对于 π_n 的表示空间中的每个向量 ξ，都有 π_n（C）ξ =2（$\lambda^{2n+1} + \lambda^{-2n-1}$）$\xi$。

证明：由于表示 π_n 不可约，且 C 属于代数 $\mathfrak{A}_t$的中心，因此算子 $\pi_n(C)$ 是单位元的标量倍数。因此，只需计算 $\pi_n(C)\xi(n, n)$。为此，我们使用公式

$$\frac{1}{2}C = \lambda q^2 + \lambda^{-1}q^{-2} + (\lambda - \lambda^{-1})^2 fe$$

在命题 2.9 中得到。由于 $\pi_n(e)\xi(n, n) = 0$，我们发现

$$\pi_n(C)\xi(n, n) = 2(\lambda^{2n+1} + \lambda^{-2n-1})\xi(n, n).$$

□

我们可以验证这一点。对于最低权向量 $\xi(n,-n)$，有 $\pi_n(f)\xi(n,-n)=0$，并使用命题 2.9 中 C 的第二种形式，

$$\frac{1}{2}C=\lambda^{-1}q^2+\lambda\, q^{-2}+(\lambda-\lambda^{-1})^2ef$$

我们得到 $\pi_n(C)\xi(n,\ -n)=2(\lambda^{-2n-1}+\lambda^{2n+1})\xi(n,\ -n)$。我们看到，得到的特征值相同。

$\pi_n(C)$ 的取值两两不同，因为 $\lambda\neq 1$，因此它们刻画了该表示。

注意，我们可以应用在注 2.14 中提到的 *-自同构 α，从而得到另一组不可约的 *-表示 π'_n。我们有

$$\pi'_n(q)\xi(n,j)=-\lambda^j\xi(n,j)$$

用 $\pi_n(q)\xi(n,\ j)=\lambda^j\xi(n,\ j)$ 代替。

将这些表示加在一起，便得到所有此类表示，证明如下。

3.4. 命题 每个有限维不可约的 *-表示 $\mathfrak{A}_t$ 都具有 π_n 或 π'_n 的形式，其中 $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$。

证明：i) 设 π 是代数 $\mathfrak{A}_t$ 的有限维 *-表示。记 $\mathcal{H}$ 为表示空间。再次记 E,F,Q 为 $\pi(e)$ $\pi(f)$ $\pi(q)$。由于 Q 是自伴的，我们可以找到一组特征向量基。若 ξ 是 $\mathcal{H}$ 中满足 $Q\xi=a\xi$ 的非零向量，其中 $a\in\mathbb{R}$，则 $QE^k\xi=\lambda^kE^kQ\xi=a\lambda^kE^k\xi$。若 $a\neq 0$，则所有这些向量两两正交。因此，必存在一个数 k 使得 $E^k\xi\neq 0$ 且 $E^{k+1}\xi=0$。

ii) 现在假设 ξ_0 是一个非零向量，满足 $Q\xi_0=a\xi_0$ 且 $E\xi_0=0$。对所有 $k=1,2,3\ldots$，记 $\xi_k=F^k\xi$。于是对所有 $k=0,1,2,\ldots$，都有 $Q\xi_k=a\lambda^{-k}\xi_k$。这些向量同样两两正交，因此必存在一个整数 n，使得 $\xi_{n+1}=0$，且对于 $k\leq n$，有 $\xi_k\neq 0$。

iii) 这意味着 $F^{n+1}\xi_0=0$，因此 $EF^{n+1}\xi_0=0$ 也成立。根据命题 2.7 中的公式，并利用 $F^{n+1}E\xi_0=0$ 也成立这一点，我们得到 $F^n\Gamma_{n+1}(Q)\xi_0=\Gamma_{n+1}(a)\xi_n=0$。由于 $\xi_n\neq 0$，我们必有 $\Gamma_{n+1}(a)=0$。这意味着

$$(\lambda-\lambda^{-2n-1})a^2+(\lambda^{-1}-\lambda^{2n+1})a^{-2}=0.$$

利用 $a^2=\lambda^n$，我们看到

$$\begin{aligned}(\lambda-\lambda^{-2n-1})\lambda^n+&(\lambda^{-1}-\lambda^{2n+1})\lambda^{-n}\\ &=(\lambda^{n+1}-\lambda^{-n-1})+(\lambda^{-n-1}-\lambda^{n+1})=0.\end{aligned}$$

若 $a=\lambda^{\frac{n}{2}}$，则得到表示 $\pi_{\frac{n}{2}}$；而若 $a=-\lambda^{\frac{n}{2}}$，则得到表示 π'_n。□

然而，卡西米尔算子无法区分 π_n 和 π'_n，因为它是 q^2 的函数。

这里我们需要用到一些特殊情形。

3.5. 例 i) 对于 $n=0$，我们只有一个向量。我们用 ξ_0 表示 $\xi(0,0)$，用 π 表示π_0。然后

$$\pi(q)\xi_0=\xi_0,\quad \pi(e)\xi_0=0\quad \text{and}\quad \pi(f)\xi_0=0.$$

我们看到 $\pi(x)\xi_0=\varepsilon(x)\xi_0$，其中 ε 是 $\mathfrak{A}_t$上的余单位。

ii) 对于 $n=\frac{1}{2}$，我们得到两个向量。我们将 ξ_1记作 $\xi(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，将 ξ_2记作 $\xi(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$。我们还将 π 记作 $\pi_{\frac{1}{2}}$。我们得到

$$\pi(q)\xi_1=\lambda^{\frac{1}{2}}\xi_1\qquad\text{and}\qquad\pi(q)\xi_2=\lambda^{-\frac{1}{2}}\xi_2.$$

我们只有一个数 r，并且

$$\pi(e)\xi_2=r\xi_1\qquad\text{and}\qquad\pi(f)\xi_1=r\xi_2$$

而 $\pi(e)\xi_1=0$ 且 $\pi(f)\xi_2=0$。我们得到

$$\pi(ef-fe)\xi_1=\pi(ef)\xi_1=r^2\xi_1$$
$$\pi(ef-fe)\xi_2=-\pi(fe)\xi_2=-r^2\xi_2.$$

另一方面，我们有

$$\pi(q^2-q^{-2})\xi_1=(\lambda-\lambda^{-1})\xi_1$$
$$\pi(q^2-q^{-2})\xi_2=(\lambda^{-1}-\lambda)\xi_2.$$

由 $ef-fe=\frac{1}{\lambda-\lambda^{-1}}(q^2-q^{-2})$，我们看到 $r^2=1$，于是这两个等式均成立。注意，我们对 r 的符号所作的选择，只是决定了两个基向量的相对符号。

iii) 接下来我们考察 $n=1$。我们分别用 ξ_1,ξ_0,ξ_{-1} 表示 $\xi(1,1)$ $\xi(1,0)$ $\xi(1,-1)$。再次用 π 表示 π_1。于是得到以下公式。对于 $\pi(q)$，得到 $\pi(q)\xi_i=\lambda^i\xi_i$。对于 $\pi(e)$ 和 $\pi(f)$，得到

$$\pi(e)\xi_0=r_0\xi_1\qquad\pi(e)\xi_{-1}=r_{-1}\xi_0$$
$$\pi(f)\xi_1=r_0\xi_0\qquad\pi(f)\xi_0=r_{-1}\xi_{-1}$$

而 $\pi(e)\xi_1=0$ 且 $\pi(f)\xi_{-1}=0$。于是必须有

$$\pi(ef-fe)\xi_1=r_0^2\xi_1=\frac{1}{\lambda-\lambda^{-1}}(\lambda^2-\lambda^{-2})\xi_1$$
$$\pi(ef-fe)\xi_0=(r_{-1}^2-r_0^2)\xi_0=\frac{1}{\lambda-\lambda^{-1}}(\lambda^0-\lambda^0)\xi_1=0$$
$$\pi(ef-fe)\xi_{-1}=-r_{-1}^2\xi_{-1}=\frac{1}{\lambda-\lambda^{-1}}(\lambda^{-2}-\lambda^2)\xi_1.$$

这 3 个方程在 $r_0^2=r_{-1}^2=\lambda+\lambda^{-1}$ 成立时满足。

现在我们来考察这些表示在 $\mathrm{A_t}$ 的余乘下的行为。这些结果将在下一节构造余乘时用到。

取两个指标 n，$m\in I$ 及其对应的 *-表示 π_n 和 π_m。与之前一样，用$\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{H}_m$ 表示底空间。考虑空间$\mathcal{H}_n\otimes\mathcal{H}_m$上的 $\mathfrak{A}_t$ 的 *-表示 π，其定义为 $\pi(x)=(\pi_n\otimes\pi_m)\Delta(x)$。这是良定义的，因为 Δ 是从 $\mathfrak{A}_t$ 到张量积 $\mathfrak{A}_t\otimes\mathfrak{A}_t$的 *-同态。该表示可分解为以下不可约表示的直和。

3.6. 命题 表示 π 是以下表示 π_k 的直和，其中

$$k = |n-m|, |n-m|+1, \ldots, n+m.$$

证明：i) 考虑向量 $\xi = \xi(n,n) \otimes \xi(m,m)$，它属于 $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$。我们可以对其应用映射 $\pi(f^k)$，其中 $k=1$ 从 $k=2$ 到 $n+m$。根据交换关系，我们得到

$$\pi(q)\pi(f^k)\xi = \lambda^{-k}\pi(f^k)\pi(q)\xi = \lambda^{-k}\lambda^{(n+m)}\pi(f^k)\xi$$

而对于 $k = 2(n+m)$，我们有

$$\pi(q)\pi(f^{2(n+m)})\xi = \lambda^{-(n+m)}\pi(f^{2(n+m)})\xi.$$

因此， $\pi(f^{m+n})\xi$ 必定是 $\xi(n,-n) \otimes \xi(m,-m)$ 的一个标量倍数。如果我们再应用一次 $\pi(f)$，得到 0。可见，我们有一个维数为 $2(n+m)+1$ 的不变子空间，并得到不可约表示 π_{n+m}，它是 π 的一个子表示。

ii) 接下来考察向量 $\xi(n,n-1) \otimes \xi(m,m)$ 和 $\xi(n,n) \otimes \xi(m,m-1)$。向量 $\pi(f)\xi$ 将是这两个向量的一个线性组合。另一方面，如果我们分别对这两个向量应用 $\pi(e)$，得到的都是 ξ 的倍数。对于某个线性组合，结果为 0。这个线性组合将生成一个维数为 $2(n+m) - 1$ 的子空间，并给出一个不可约子表示 π_{n+m-1}。

ii) 我们可以继续这样做，最后得到一个子表示 $\pi_{|n-m|}$。通过检查维数即可看出这一点。事实上，假设 $n \geq m$。我们断言：

$$(2n+1)(2m+1) = \sum_k (2k+1)$$

其中求和遍及 $k = n-m$、$n-m+1$、$n-m+2$、.....、$n+m$。为验证这一断言，我们写出

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n-m}^{n+m}(2k+1) &= \sum_{k=0}^{2m}(2(k+(n-m))+1) \\
&= \sum_{k=0}^{2m}(2k) + (2m+1)(2(n-m)+1) \\
&= (2m)(2m+1) + (2m+1)(2n-2m+1) \\
&= (2m+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

□

3.7. 备注 i) 我们也可以考虑算子 $(\pi_n \otimes \pi_m)(\Delta(C))$，其中 C 是 $\mathfrak{A}_t$ 中的卡西米尔元。由于这是一个自伴算子，我们可以将其对角化，而其特征子空间恰好是各子表示的不变子空间。不过，仅凭这一点并不能明显看出分量是什么。此外，进一步证明所有分量两两不等价也很重要。

ii）我们对乘积 $\pi_n \otimes \pi'_m$、$\pi'_n \otimes \pi_m$ 和 $\pi'_n \otimes \pi'_m$ 也有类似的分解。在前两种情况下，我们得到表示 π'_k 的直和，而在最后一种情况下，我们再次得到表示 π_k 的直和。

在继续之前，我们将考察这类分解的两个具体例子。第一个例子只是对前面结果的说明。第二个例子将在稍后考察 A 上的余单位时使用，参见命题 4.12

3.8. 例 令 $n = m = \frac{1}{2}$，并考虑 π_0 在 A 上由 $\pi_0(x) = (\pi_n \otimes \pi_n)\Delta(x)$ 给出的表示。与例 3.5 中一样，我们将 ξ_1 记作 $\xi(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，将 ξ_2 记作 $\xi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$，并将 π 记作 $\pi^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}$。于是我们得到以下结果。对于 $\pi_0(q)$，我们得到

$$\pi_0(q)(\xi_1 \otimes \xi_1) = \lambda(\xi_1 \otimes \xi_1) \qquad \pi_0(q)(\xi_1 \otimes \xi_2) = \xi_1 \otimes \xi_2$$
$$\pi_0(q)(\xi_2 \otimes \xi_2) = \lambda^{-1}(\xi_2 \otimes \xi_2) \qquad \pi_0(q)(\xi_2 \otimes \xi_1) = \xi_2 \otimes \xi_1.$$

对于 e 的作用，我们得到

$$\begin{aligned}
\pi_0(e)(\xi_1 \otimes \xi_1) &= \pi(q)\xi_1 \otimes \pi(e)\xi_1 + \pi(e)\xi_1 \otimes \pi(q^{-1})\xi_1 = 0 \\
\pi_0(e)(\xi_1 \otimes \xi_2) &= \pi(q)\xi_1 \otimes \pi(e)\xi_2 + \pi(e)\xi_1 \otimes \pi(q^{-1})\xi_2 \\
&= \pi(q)\xi_1 \otimes \pi(e)\xi_2 = \lambda^{\frac{1}{2}}\xi_1 \otimes \xi_1 \\
\pi_0(e)(\xi_2 \otimes \xi_1) &= \pi(q)\xi_2 \otimes \pi(e)\xi_1 + \pi(e)\xi_2 \otimes \pi(q^{-1})\xi_1 \\
&= \pi(e)\xi_2 \otimes \pi(q^{-1})\xi_1 = \lambda^{-\frac{1}{2}}\xi_1 \otimes \xi_1 \\
\pi_0(e)(\xi_2 \otimes \xi_2) &= \pi(q)\xi_2 \otimes \pi(e)\xi_2 + \pi(e)\xi_2 \otimes \pi(q^{-1})\xi_2 \\
&= \lambda^{-\frac{1}{2}}\xi_2 \otimes \xi_1 + \lambda^{\frac{1}{2}}\xi_1 \otimes \xi_2
\end{aligned}$$

从这些方程中，我们可以看出这两个分量。令

$$\xi = \lambda^{-\frac{1}{2}}(\xi_1 \otimes \xi_2) - \lambda^{\frac{1}{2}}(\xi_2 \otimes \xi_1)$$

我们有 $\pi_0(q)\xi = \xi$，而

$$\begin{aligned}
\pi_0(e)\xi &= \lambda^{-\frac{1}{2}}\pi_0(e)(\xi_1 \otimes \xi_2) - \lambda^{\frac{1}{2}}\pi_0(e)(\xi_2 \otimes \xi_1) \\
&= \lambda^{-\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}(\xi_1 \otimes \xi_1) - \lambda^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}(\xi_1 \otimes \xi_1)
\end{aligned}$$

因此 $\pi_0(e)\xi = 0$。由此（或通过类似的计算）还可得到 $\pi(f)\xi = 0$。这给出了一维分量。其余的 3 个向量

$$\xi_1 \otimes \xi_1, \quad \frac{1}{(\lambda + \lambda^{-1})^{\frac{1}{2}}}(\lambda^{\frac{1}{2}}(\xi_1 \otimes \xi_2) + \lambda^{-\frac{1}{2}}(\xi_2 \otimes \xi_1)) \quad \text{and} \quad \xi_2 \otimes \xi_2$$

将给出 3 维分量。注意，$\pi_0(q)(\xi_1 \otimes \xi_1) = \lambda(\xi_1 \otimes \xi_1)$，而 $\pi_0(e)(\xi_1 \otimes \xi_1) = 0.$。我们还得到

$$\begin{aligned}
\pi_0(f)(\xi_1 \otimes \xi_1) &= \pi(q)\xi_1 \otimes \pi(f)\xi_1 + \pi(f)\xi_1 \otimes \pi(q^{-1})\xi_1 \\
&= \lambda^{\frac{1}{2}}(\xi_1 \otimes \xi_2) + \lambda^{-\frac{1}{2}}(\xi_2 \otimes \xi_1)
\end{aligned}$$

注意，最后这个方程与公式 $\pi_1(f)\xi(1, 1) = r\xi(1, 0)$ 兼容，其中 $r = (\lambda + \lambda^{-1})^{\frac{1}{2}}$，正如例 3.5 的 iii) 项所示。

3.9. 例 i) 考虑表示 π_0，其定义仍如命题 3.1 所述。它作用于一维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_0$。我们将唯一的基向量记为

$\mathcal{H}_0$ 的 ξ_0。按照命题 3.1 中使用的记号，它记作 $\xi(0,0)$。如例 3.5 所示，我们有 $\pi_0(x)\xi_0 = \varepsilon(x)\xi_0$，其中 ε 是 $\mathfrak{A}_t$上的余单位。

ii) 对于其他每个指标 m，表示 π_m 作用于 $(2m+1)$ 维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_m$上。现在考虑表示 $x \mapsto (\pi_0 \otimes \pi_m)\Delta(x)$。它作用于空间 $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_m$上。对于任意向量 $\xi \in \mathcal{H}_m$ 和任意 $x \in \mathfrak{A}_t$，有

$$\begin{aligned}(\pi_0 \otimes \pi_m)\Delta(x)(\xi_0 \otimes \xi) &= \sum_{(x)} \pi_0(x_{(1)})\xi_0 \otimes \pi_m(x_{(2)})\xi \\ &= \sum_{(x)} \varepsilon(x_{(1)})\xi_0 \otimes \pi_m(x_{(2)})\xi \\ &= \xi_0 \otimes \pi_m(x)\xi.\end{aligned}$$

iii) 最后，定义从 $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_m$ 到 $\mathcal{H}_m$ 的希尔伯特空间同构 T，使得$T(\mu\xi_0 \otimes \xi) = \mu\xi$，其中 $\mu \in \mathbb{C}$。于是有

$$\begin{aligned}T((\pi_0 \otimes \pi_m)\Delta(x))(\mu\xi_0 \otimes \xi) &= T(\mu\xi_0 \otimes \pi_m(x)\xi \\ &= \mu\pi_m(x)\xi \\ &= \pi_m(x)T(\mu\xi_0 \otimes \xi)\end{aligned}$$

因此 $T((\pi_0 \otimes \pi_m)\Delta(x)) = \pi_m(x)T$。

iv) 类似地，我们得到

$$(\pi_m \otimes \pi_0)\Delta(x)(\xi \otimes \xi_0) = \pi_m(x)\xi \otimes \xi_0$$

对于所有 $x \in \mathfrak{A}_t$ 和 $\xi \in \mathcal{H}_m$。在此情形下，令 T 由 $\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{H}_0$ 到 $\mathcal{H}_m$定义为 $T(\xi \otimes \mu\xi_0) = \mu\xi$，其中 $\mu \in \mathbb{C}$。于是得到 $T((\pi_m \otimes \pi_0)\Delta(x)) = \pi_m(x)T$。

4. 离散量子群 $su_q(2)$

现在，我们将运用上一节中得到的关于 *-代数 $\mathfrak{A}_t$ 的有限维 *-表示的信息，将 $su_q(2)$ 构造为一个离散量子群。据我所知，没有其他出版物曾进行过这样的构造。[18] 中曾对此作过简要讨论。正如该文中很快将要指出的，我们将在此详细阐述这一方法。

离散量子群 $su_q(2)$

取指标集 I 为数列 $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\ldots$，并令 $\mathcal{H}_n$ 为 $2n+1$ 维的复数域上的内积空间（如命题 3.1 中所述）。令 A_n 为 $\mathcal{H}_n$ 上线性映射的 *-代数。

4.1定义。我们用 A 表示代数 A_n 的直和，其中 $n \in I$。

我们还考虑乘子代数 $M(A)$。正如我们在第1节中所见，它可以识别为代数 A_n 的直积。

现在我们将在 A上构造余乘。首先，我们做一些观察。

4.2. 命题 我们有一个非退化的 *-同态 $\pi: \mathfrak{A}_t \to M(A)$，其定义为$(\pi(x))_n = \pi_n(x)$，对所有 $n \in I$ 均成立，其中 $x \in \mathfrak{A}_t$。

证明：i) 由于对于每个 n， π_n 都是从 $\mathfrak{A}_t$ 到 A_n 的 *-同态，因此我们得到 π是从 $\mathfrak{A}_t$ 到 $M(A)$的 *-同态。

ii) 由于对所有 n， $\pi(\mathfrak{A}_t)1_n = A_n$，其中 1_n 是 A_n中的单位元，因此我们有 $\pi(\mathfrak{A}_t)A = A$。换言之， π 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $M(A)$的非退化 *-同态。 □

回顾一下，当$\pi(\mathfrak{A}_t)A = A\pi(\mathfrak{A}_t) = A$时，称 *-同态 $\pi: \mathfrak{A}_t \to M(A)$是非退化的，参见例如 [15] 中的附录。

我们可以再取一份该指标集的副本，并考虑$\mathfrak{A}_t$的表示 π'_n。这将给出 A的两个副本的直和 $A \oplus A$。随后，备注 2.14 的 i) 项中定义的 *-自同构 α也将在这个直和上定义，并将一个副本映到另一个副本上。

可以预期 *-同态 π 是单射，尽管这一点并不完全明确。因此，我们需要加入以下性质。如果 π 是单射，那么下面的结果显然成立。

4.3. 命题 我们可以在 $\pi(\mathfrak{A}_t)$ 上定义余乘 Δ_1，使得

$$\Delta_1(\pi(x)) = (\pi \otimes \pi)\Delta(x)$$

对所有 $x \in A$ 均成立。它是从 $\pi(\mathfrak{A}_t)$ 到 $\pi(\mathfrak{A}_t) \otimes \pi(\mathfrak{A}_t)$ 的 *-同态，并且是单射且余结合。

证明：i) 假设 $x \in \mathfrak{A}_t$ 且 $\pi(x) = 0$。那么，对于所有 n，都有 $\pi_n(x) = 0$。由于表示 $x \mapsto (\pi_k \otimes \pi_\ell)\Delta(x)$ 是由表示 π_n 对所有 k， ℓ 作直和得到的，因此对于所有 k, ℓ，我们有 $(\pi_k \otimes \pi_\ell)\Delta(x) = 0$。因此 $(\pi \otimes \pi)\Delta(x) = 0$。这证明了 Δ_1 定义良好。

ii) 映射 Δ_1 将 $\pi(\mathfrak{A}_t)$ 映到 $\pi(\mathfrak{A}_t) \otimes \pi(\mathfrak{A}_t)$，因为 Δ 将 $\mathfrak{A}_t$ 映到 $\mathfrak{A}_t \otimes \mathfrak{A}_t$。 □

我们知道， A 上的任意非退化余乘 Δ 都有一个唯一的延拓，扩展到乘子代数 $M(A)$，另见 [15]中的附录。我们需要的是 A上的一个余乘，使得这个延拓与子代数 $\pi(\mathfrak{A}_t)$ of$M(A)$上给定的余乘一致。

这一过程并非一目了然。文献中有许多例子可以说明这一点。例如，我们可以想到 $ax + b$-群的量子化。在 Hopf *-代数层面上，公式相当明显，但要由此得到一个真正的局部紧量子群，则要复杂得多。事实上，就这个例子而言，这甚至是不可能的。例如，参见 Woronowicz 关于量子 $ax + b$-群 [34]的研究。

为了能够在这里做到这一点，显然必须确保 $\mathfrak{A}_t$ 在 $M(A)$ 中的像足够大。以下结果保证了这一点。

4.4. 命题 任取指标集 I 的一个有限子集 J。那么， $x \mapsto (\pi_k(x))_{k \in J}$是从 $\mathfrak{A}_t$ 到代数 A_k 的直和的满射，其中 $k \in J$。

证明：i）考虑 *-表示 π_k 的底层希尔伯特空间 $\mathcal{H}_k$，以及满足 $k \in J$ 的 *-表示 π_k 的直和 π。用 $\mathcal{H}$ 表示 π 的底层表示空间。它是满足 $k \in J$ 的空间 $\mathcal{H}_k$ 的直和。我们将每个空间 $\mathcal{H}_k$ 视为嵌入在 $\mathcal{H}$ 中。

ii）设 T 是 $\mathcal{H}$ 上的一个线性算子，并且与所有形如（π_k（x））$_k$的元素交换。将其写成矩阵形式。则矩阵元满足 π_k（x）$T_{k\ell}$ =$T_{k\ell}\pi_\ell$（x），对所有 x均成立。这意味着 $T_{k\ell}$ 是表示π_k 与 π_ℓ之间的交织算子。由于这里的所有表示 π_k 都是不可约且两两不等价的，因此 T 必为对角矩阵，且对角线上是单位元的标量倍数。

iii）根据双交换子定理，由元素（π_k（x））$_{k\in J}$ 组成的代数与这类对角算子的交换子重合。因此，它等于代数 A_k的直和。

□

上述结果是已知的。利用卡西米尔元以及它能区分各个分量这一事实，还可以给出如下论证。

在子空间 $\mathcal{H}_k$ 上，卡西米尔元的作用是一个标量，因为 π_k 是不可约的。用 μ_k表示这些标量。正如我们从命题3.3中的公式所看到的，它们彼此均不相同。

对于每个 $k \in J$，我们可以选取一个实系数多项式 P_k，使得对于除 $\ell = k$ 之外的所有 ℓ，都有 $P_k(\mu_\ell) = 0$；而当 $\ell = k$ 时，$P_k(\mu_k) = 1$。于是，$\pi(P_k(C))$ 将是从 $\mathcal{H}$ 到子空间 $\mathcal{H}_k$ 的正交投影。我们还有 $\pi(x)\pi(P_k(C)) = \pi_k(x)$，并且可以看出 $\pi(A_t)\pi(P_k(C))$ $= \pi_k(\mathfrak{A}_t) = A_k$。因此，对于所有 k，都有 $A_k \subseteq \pi(\mathfrak{A}_t)$。这给出了该结果的另一种证明。

现在我们将利用命题 4.4 的结果，在 A 上构造余乘 Δ。结合该命题与命题 3.6，可得以下一个初步步骤

4.5. 命题 考虑两个指标 $n, m \in I$，并令 $I_{n,m}$ 为命题 3.6 中分解里出现的指标集合。于是存在一个单射 *-同态 $\phi_{nm} : \sum_{k\in I_{nm}} \oplus A_k \to A_n \otimes A_m$，其定义如下

$$\phi_{nm}((\pi_{|n-m|}(x), \ldots, \pi_{n+m}(x))) = (\pi_n \otimes \pi_m)\Delta(x)$$

当 $x \in \mathfrak{A}_t$。

证明：i) 首先，我们使用命题 4.4 得到

$$\sum_{I_{n,m}} \oplus A_k = \{(\pi_{|n-m|}(x), \ldots, \pi_{n+m}(x)) \mid x \in \mathfrak{A}_t\}.$$

我们必须利用这样一个事实：所有满足 π_k with $k \in I_{n,m}$ 的表示彼此不等价。

ii) 接下来假设 $x \in \mathfrak{A}_t$，并且对所有 $k \in I_{n,\ m}$，$\pi_k(x) = 0$。由于表示 $x \mapsto (\pi_n \otimes \pi_m)$ $\Delta(x)$ 分解为这些表示的直和，因此对于这个元素，我们也有 $(\pi_n \otimes \pi_m)\Delta(x) = 0$。

iii) i) 和 ii) 表明映射

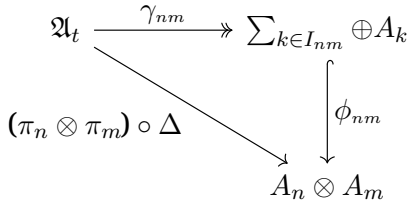
$$\phi_{nm} : (\pi_{|n-m|}(x), \ldots, \pi_{n+m}(x)) \to (\pi_n \otimes \pi_m)\Delta(x)$$

从 $\sum_{k\in I_{nm}} \oplus A_k \to A_n \otimes A_m$ 定义良好。该映射是单射。

iv) 最后，由于涉及的所有映射都是 *-同态，我们必须得出，我们的映射也是 *-同态。

□

我们有如下交换图



映射 γ_{nm} 由下式给出

$$\gamma_{nm}(x) = (\pi_{|n-m|}(x), \ldots, \pi_{n+m}(x))$$

其中指标与前面一样取遍子集 I_{nm}。根据命题 4.4，这是一个满射。

有时，我们将从 $\mathfrak{A}_t$ 到直和 $\oplus_{j\in J} A_j$ 的映射 $x \mapsto (\pi_j)_{j\in J}$ 记作 π_J，其中 J 是 I 中指标的任意有限子集。我们也用 A_J 表示这个直和。于是，上述映射 γ_{nm} 可写为 π_J，其中 $J = I_{nm}$，将 $\mathfrak{A}_t$ 映射到 A_J。

根据命题 3.6，映射 ϕ_{nm} 是单射。然而，一般而言，它并非满射。考虑 $n = m = \frac{1}{2}$ 的例子。关于这些代数的维数，对于 $A_{\frac{1}{2}} \otimes A_{\frac{1}{2}}$，我们有$4 \times 4 = 16$，而 $A_0 \oplus A_1$ 的维数为 $1 + 9 = 10$。因此，我们不能期望这些映射是满射。

代数 A 上的余乘

首先注意，为了定义 $\Delta_A : A \to M(A \otimes A)$，只需定义它的分量 $\Delta_A(a)_{nm}$。

4.6. 定义 任取两个指标 n, m。若 $a \in A_J$，其中 $J = I_{nm}$，则我们令 $\Delta_A(a)_{nm} = \phi_{nm}(a)$。若 $a \in A_k$ 且 $k \notin I_{nm}$，则我们令 $\Delta_A(a)_{nm} = 0$。这定义了一个线性映射 $\Delta_A : A \to M(A \otimes A)$。

显然，我们也可以将 Δ_A 延拓到 $M(A)$，因为对所有 n, m，根据定义，映射 $a \mapsto \Delta_A(a)_{nm}$ 仅在 A 的有限个分量上有支撑。事实上，我们有以下性质。

4.7. 命题 这里定义在 $M(A)$ 上的映射 Δ，与我们在命题 4.3 中得到的定义在 $\pi(\mathfrak{A}_t)$ 上的映射 Δ_1 相一致。

证明：取一对指标 n, m 以及 I 的关联子集 I_{nm}。仍将其记作 J。对于所有 $x \in \mathfrak{A}_t$，若 $\pi_J(x) = 0$，则表达式 $(\pi_n \otimes \pi_m)\Delta(x) = 0$。于是$\Delta(\pi(x))_{nm} = (\pi_n \otimes \pi_m)\Delta(x) = \Delta_1(\pi(x))_{nm}$ 对所有 $x \in \mathfrak{A}_t$ 都成立。 □

反过来的结论也成立。

4.8. 命题 假设 Δ是 A上的非退化余乘 Δ，且其到 $M(A)$的延拓满足：对于所有 $\mathfrak{A}_t$ 中的元素， $\Delta(\pi(x)) = \Delta(x)$（右侧使用的是 $\mathfrak{A}_t$上的原余乘）。那么， Δ就是定义 4.6 中定义的 A 上的余乘 Δ_A 。

4.9. 命题 上文定义 4.6 中定义的映射 Δ_A 是从 A 到 $M(A \otimes A)$的 *-同态。它满足正则性条件

$$(A \otimes 1)\Delta_A(A) \subseteq A \otimes A \qquad \text{and} \qquad \Delta_A(A)(1 \otimes A) \subseteq A \otimes A$$

并且按照定义 1.1 的意义，它是余结合的。

上述结果可推广到直和 $A \oplus A$，其中还包括表示 π'_n。事实上，定义 4.6 和命题 4.9 可作如下推广。

4.10. 定义 i) 定义 Δ_{12}： $A \to M(A \otimes A)$，定义为

$$\Delta_{12}(a)_{nm} = (\pi_n \otimes \pi'_m)\Delta(x)$$

对任意一对指标 n, m 其中 $a = \pi(x)$，且 π 如定义 4.6 中所述，并且 n, m。这里我们还定义：当 $a \in A_k$ 时， $\Delta_{12}(a) = 0$ ，但 $k \notin I_{nm}$。类似地，利用 $\pi'_n \otimes \pi_m$ 和 $\pi'_n \otimes \pi'_m$，我们定义Δ_{21} 和 Δ_{22}。最后，我们令 $\Delta_{11} = \Delta_A$ ，其中 Δ_A 如定义 4.6 中的 A 所定义。

ii) 将这四个余乘组合起来，便会以显然的方式在 $A \oplus A$ 上得到一个余乘。

$A(, \Delta_A, \Delta_A)$ **上的余单位**

以下内容相当显然，但要证明这一点似乎还需要仔细处理。

与前面一样，我们用 A_0 表示与指标 0 相关联的表示 π_0 下 $\mathfrak{A}_t$ 的像。表示 π_0 作用在一维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_0$ 上。唯一的基向量记为 ξ_0 ，并且有 $\pi_0(x)\xi_0 = \varepsilon(x)\xi_0$ ，其中这里的 ε 是 $\mathfrak{A}_t$ 上的余单位，见例 3.9。

4.11. 定义 定义 ε 在 A 上的取值：除 $k = 0$时外，在所有分量 A_k 上均为 0。我们有， A_0 与 $\mathbb{C}$同构，而 A_0 上的 ε由此同构给出。

从定义可知，对所有 $x \in A_t$， $\varepsilon(\pi_0(x)) = \varepsilon(x)$。注意，我们用记号 ε同时表示 $\mathfrak{A}_t$ 上的余单位和 A上的余单位。

4.12. 命题 映射 ε 是 A上的余单位。

证明：i) 我们已在命题 4.12 中证明，对任意指标 m,

$$(\pi_0 \otimes \pi_m)\Delta(x)(\xi_0 \otimes \xi) = \xi_0 \otimes \pi_m(x)\xi$$

对所有 $x \in \mathfrak{A}_t$ 和 $\xi \in \mathcal{H}_m$均成立。这意味着，当 $a = \pi_m(x)$ 时，根据 Δ_{0m} 的定义（见定义 4.6 ）， $\Delta_A(a)_{0m}(\xi_0 \otimes \xi) = \xi_0 \otimes a\xi$ 。因此，对所有 a， $\Delta_A(a)(\xi_0 \otimes \xi) = \xi_0 \otimes a\xi$。最后，我们有 $\Delta_A(a)(\xi_0 \otimes \xi) = \xi_0 \otimes (\varepsilon \otimes \iota)\Delta_A(a))\xi$ ，从而可以得出，对所有 $a \in A$， $(\varepsilon \otimes \iota)\Delta_A(a) = a$ 。

ii) 以类似的方式，我们得到 $(\iota \otimes \varepsilon)\Delta_A(a) = a$ ，对所有 $a \in A$ 均成立。 □

（A, Δ_A）上的反元

要证明这对 (A, Δ_A) 是离散量子群，最后一步是构造 A 上的反元。正如余乘的情形一样，将 A 上的反元延拓到 $M(A)$ 后，应与 $\mathfrak{A}_t$ 上给定的反元一致，即 $S(\pi(x)) = \pi(S(x))$，其中 π 是命题 4.2 中从 $\mathfrak{A}_t$ 到 $M(A)$ 的 *-同态。我们用 S 表示反元，既表示原来定义在 $\mathfrak{A}_t$上的反元，也表示将要在 A 上构造的反元延拓到 $M(A)$ 后所得的反元。关于余乘，可参见命题 4.7 和 4.8 中的结果。

我们将通过 A 的极分解 $S = R \circ \tau_{-i}$ 构造其反元，其中$_2R$ 是酉反极，而（τ_t）是缩放群，参见 [27]。请注意，我们采用 Kustermans 和 Vaes 在研究局部紧量子群时所用的方法中的约定 [7], , 另见 [21]。

首先回顾代数 $\mathfrak{A}_t$ 上反元 S 的公式。我们有（见命题 2.10）：

$$S(q) = q^{-1}, \qquad S(e) = -\lambda^{-1}e \quad \text{and} \quad S(f) = -\lambda f.$$

于是，反元的平方为

$$S^2(q) = q, \qquad S^2(e) = \lambda^{-2}e \quad \text{and} \quad S^2(f) = \lambda^2 f$$

并且我们看到，对于所有 $x \in \mathfrak{A}_t$, $S^2(x) = q^{-2}xq^2$。

这引出了 A 上的缩放群（τ_t）。

4.13. 命题 存在一个由 *同构组成的单参数群 (τ_t)，作用于 A，使得 A 中的所有元素都是解析的，并且

$$\tau_{-i}(\pi_n(x)) = \pi_n(S^2(x)).$$

证明：i) 对于 $a \in A_n$，定义 $\tau_t(a) = Q^{-2it}aQ^{2it}$，其中 $Q = \pi_n(q)$。这是良定义的，因为 $\pi_n(q)$ 是有限维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_n$ 上的正非奇异算子。对于每个 n，这定义了代数 A_n 的一参数 *自同构群。因此，我们在直和 A 上得到一个单参数群。

ii) 显然，所有元素都是解析的，并且对于所有 $x \in \mathfrak{A}_t$，我们有

$$\begin{aligned}\tau_{-i}(\pi_n(x)) &= Q^{(-2i)(-i)}\pi_n(x)Q^{(2i)(-i)} \\ &= Q^{-2}\pi_n(x)Q^2 \\ &= \pi_n(q^{-2}xq^2) = \pi_n(S^2(x)).\end{aligned}$$

□

这给出了我们要构造的离散量子群的缩放群。这个缩放群具有如下性质。

4.14. 命题 对于所有 $a \in A$，我们有 $\Delta(\tau_t(a)) = (\tau_t \otimes \tau_t)\Delta(a)$。

证明：固定一对指标 n，m。令 a 为 $\sum_{k\in I_{nm}}\oplus A_k$ 中的元素 $(\pi_k(q))_{k\in I_{nm}}$。由 $\Delta(q)=q\otimes q$ 可得

$$\Delta_{nm}(a)=(\pi_n\otimes\pi_m)\Delta(q)=\pi_n(q)\otimes\pi_m(q)=Q_n\otimes Q_m.$$

我们可以将其提升为任意复数幂，并得到

$$\Delta_{nm}(a^z)=Q_n^z\otimes Q_m^z.$$

其中 $a^z=(Q_k^z)_{k\in I_{nm}}$。

于是，对于任意 $b\in A$，我们有

$$\begin{aligned}\Delta_{nm}(\tau_t(b))&=\Delta_{nm}(Q^{-2it}bQ^{2it})\\&=\Delta_{nm}(Q^{-2it})\Delta_{nm}(b)\Delta_{nm}Q^{2it})\\&=(Q^{-2it}\otimes Q^{-2it})\Delta_{nm}(b)(Q^{2it}\otimes Q^{2it})\\&=(\tau_t\otimes\tau_t)\Delta_{nm}(b).\end{aligned}$$

这意味着 $\Delta(\tau_t(b))=(\tau_t\otimes\tau_t)\Delta(b)$ □

接下来，我们关注酉反极 R 及其在表示中的实现。

回想一下，$n=0,-1,2,-2,3,\ldots$而 $j=-n,\ -n-1,\ \ldots,\ n-1,\ n$。特别地，$n+j=0,\ 1,\ \ldots 2n$，这些都是整数。

4.15. 定义 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_n$ 上定义一个共轭线性 算子 G_n，使得$G_n\xi(n,\ j)=(-1)^{n+j}\xi(n,\ -j)$。我们采用命题 3.1 中的记号。

以下结论是定义的一个直接且显然的推论。

4.16. 命题 当 n 是一个整数值指标时，有 $G_n^2=1$ 和 $G_n^*=G_n$。在其他情况下，有 $G_n^2=-1$ 和 $G_n^*=-G_n$。特别地，对所有 n，有 $G_n^*G_n=1$。

证明：i) 对所有 n和 j，有

$$G_n^2\xi(n,j)=(-1)^{n+j}G_n\xi(n,-j)=(-1)^{n+j}(-1)^{n-j}\xi(n,j)$$

且$(-1)^{n+j}(-1)^{n-j}=(-1)^{2n}$。当 n 是整数时，此值为 1；否则为 -1。

ii) 取一个指标 n 以及右侧指标集合中的两个指标 $j,\ k$。于是

$$\begin{aligned}\langle G_n\xi(n,j),\xi(n,k)\rangle&=(-1)^{n+j}\langle\xi(n,-j),\xi(n,k)\rangle=(-1)^{n+j}\delta(-j,k)\\\langle G_n\xi(n,k),\xi(n,j)\rangle&=(-1)^{n+k}\langle\xi(n,-k),\xi(n,j)\rangle=(-1)^{n+k}\delta(-k,j).\end{aligned}$$

当 j 是整数时，我们有 $(-1)^{n-j}=(-1)^{n+j}$；否则有 $(-1)^{n-j}=-(-1)^{n+j}$。第一种情况发生在 n 是整数时，第二种情况则发生在它不是整数时。这证明了第二个陈述。

iii）因此，对所有 n，$G_n^*G_n=1$ G_n 是一个（共轭线性）酉映射。

□

回想一下，对于共轭线性算子 G，对所有向量 ξ, η,

$$\langle G^*\xi, \eta\rangle = \langle \xi, G\eta\rangle^- = \langle G\eta, \xi\rangle.$$

4.17. 命题 在 A 上定义 R：对于 $a \in A_n$, $R(a) = G_n^* a^* G_n$。则 R 是一个线性 *-反同构，满足 $R^2 = \iota$。我们还有

$$R(\pi_n(q)) = \pi_n(q^{-1}), \qquad R(\pi_n(e)) = \pi_n(-e) \qquad \text{and} \qquad R(\pi_n(f)) = \pi_n(-f).$$

证明：映射 R 是线性的，因为 G_n 是共轭线性的。显然可得一个 *-映射。由于 G_n^2 是 1 或 -1，我们得到一个满足 $R^2 = \iota$ 的 *-反同构。

此外，我们固定指标 n 进行讨论，并在此省略该指标。因此，我们用 π 表示 π_n，用 G 表示 G_n，并用 $\xi(j)$ 表示 $\xi(n, j)$。

i) 对于 q，我们有

$$\begin{aligned}\pi(q)G\xi(j) &= \pi(q)(-1)^{n+j})\xi(-j) = (-1)^{n+j}\lambda^{-j}\xi(-j)\\ G\pi_n(q^{-1})\xi(j) &= \lambda^{-j}G\xi(j) = (-1)^{n+j}\lambda^{-j}\xi(-j)\end{aligned}$$

于是我们看到 $\pi(q)G = G\pi(q^{-1})$。这意味着 $R(\pi_n(q)) = \pi_n(q^{-1})$。

ii) 对于 e，若满足 $j \neq n$，则有：

$$\begin{aligned}\pi(e)G\xi(j) &= \pi(e)(-1)^{n+j}\xi(-j) = (-1)^{n+j}r_{-j}\xi(-j+1)\\ G\pi(f)\xi(j) &= r_{j-1}G\xi(j-1) = r_{j-1}(-1)^{n+j-1}\xi(-j+1).\end{aligned}$$

由于 $r_{-j} = r_{j-1}$，正如我们在命题 3.1 的证明中所示，我们看到，当 $j \leq n$ 时，$\pi(e)G\xi(j) = -G\pi(f)\xi(j)$。若 $j = n$，则等式两边都为 0。因此我们得到 $\pi(e)G = G\pi(-f)$。这意味着

$$R(\pi(f)) = G^*\pi(e)G = G^*G\pi(-f)$$

以及 $R(\pi(f)) = \pi(-f)$

iii) 类似地，我们得到 $\pi(f)G = G\pi(-e)$，因此 $R(\pi(e)) = \pi(-e)$。这也可以由 ii) 通过取伴随得到。 □

对所有 $a \in A$ 都成立的等式 $R(a^*) = R(a)^*$，也可由这些公式看出。

我们也可以在霍普夫代数层面定义 R。以下结果是一个或多或少显而易见的性质。

4.18. 命题 存在一个反同构 R_0，其满足代数 $\mathcal{A}_t$

$$R_0(q) = q^{-1}, \qquad R_0(e) = -e \qquad \text{and} \qquad R_0(f) = -f.$$

它以如下意义翻转余乘：对于所有 $x \in A_t$, $\Delta(R_0(x)) = \zeta(R_0 \otimes R_0)\Delta(x)$。回想一下，$\zeta$ 是翻转映射。

证明：i) 容易验证， R_0 符合相反代数中的关系。对于 $qe = \lambda eq$ ，我们得到

$$R_0(e)R_0(q) = (-e)q^{-1} = \lambda q^{-1}(-e) = \lambda R_0(q)R_0(e).$$

关系 $qf = \lambda^{-1} fq$ 也同样成立。进一步

$$\begin{aligned} R_0(f)R_0(e) - R_0(e)R_0(f) &= fe - ef \\ &= -\frac{1}{\lambda - \lambda^{-1}}(q^2 - q^{-2}) \\ &= \frac{1}{\lambda - \lambda^{-1}}(R_0(q)^2 - R_0(q)^{-2}). \end{aligned}$$

因此，我们可以将 R_0 定义为 $\mathfrak{A}_t$ 上的反同构。

ii) 显然，对于 $x = q$ ，我们有 $\Delta(R_0(x)) = \zeta(R_0 \otimes R_0)\Delta(x)$，因为 $\Delta(q^{-1}) = q^{-1} \otimes q^{-1}$。对于 $x = e$ ，我们得到

$$\begin{aligned} \Delta(R_0(e)) &= -\Delta(e) = q \otimes (-e) + (-e) \otimes q^{-1} \\ &= \zeta(q^{-1} \otimes (-e) + (-e) \otimes q) = \zeta(R_0(q) \otimes R_0(e) + R_0(e) \otimes R_0(q)). \end{aligned}$$

因此，对于 $x = q,\ e,\ f$，我们有 $\Delta(R_0(x)) = \zeta(R_0 \otimes R_0)\Delta(x)$，从而对所有 $x \in A_t$ 均成立。 □

现在，以下结论很容易从 A的层面推出。

4.19. 命题 映射 R 翻转余乘。更确切地说，$\Delta(R(a)) = \zeta(R \otimes R)\Delta(a)$，
其中 ζ 是翻转映射。

证明：考虑两个指标 $n,\ m$。如果 $\in I_{nm}$ 且 $a = \pi_k(x)$，其中 $x \in A_t$ ，则我们有 $R(a) = \pi_k(R_0(x))$，正如我们在命题 4.17 中所看到的。于是得到

$$\begin{aligned} (\Delta(R(a)))_{mn} &= (\pi_m \otimes \pi_n)(\Delta(R_0(x)) \\ &= (\pi_m \otimes \pi_n)\zeta((R_0 \otimes R_0)\Delta(x)) \\ &= \zeta((\pi_n \otimes \pi_m)(R_0 \otimes R_0)\Delta(x)) \\ &= \zeta((R \otimes R)(\pi_n \otimes \pi_m)\Delta(x)) \\ &= \zeta(((R \otimes R)(\Delta(a)_{nm})). \end{aligned}$$

□

由于 $\pi_n(q)G_n = G_n\pi_n(q^{-1})$，并且由于 G_n 是共轭线性的，我们有 G_n 和Q^{2it} 可交换。这意味着 R 和 τ_t 可交换。

由此我们得到如下结论。

4.20. 命题 在 A 上定义 S 为 $S = R\tau_{-i/2}$。它是 A 的反同构，并且对所有 a，都有 $S(S(a)^*)^* = a$ 。它使每个分量在整体上保持不变，并且对所有 $x \in \mathfrak{A}_t$ ，都有 $S((\pi_n(x)) = \pi_n(S(x))$；此处右侧使用霍普夫代数 $\mathfrak{A}_t$ 的原始反元。

证明：i) 我们知道， A 中的元素对于单参数群 τ_t 都是解析的，因此 S 在 A 上定义良好。由于 τ_{-i} 是同构， R 是反2同构，并且- R 与 τ_{-i} 可交换，因此 S 是反同构。2 -

ii) 我们有

$$S(a)^* = R(\tau_{-\frac{i}{2}}(a))^* = R(\tau_{-\frac{i}{2}}(a)^*) = R(\tau_{\frac{i}{2}}(a^*)) = S^{-1}(a^*).$$

iii) 对于 q，我们有

$$S(\pi_n(q)) = R(\tau_{-\frac{i}{2}}(\pi_n(q)) = R(\pi_n(q)) = \pi_n(q^{-1}) = \pi_n(S(q)).$$

对于 e，我们有

$$S(\pi_n(e)) = R(\tau_{-\frac{i}{2}}(\pi_n(e)) = R(\lambda^{-1}\pi_n(e))) = \lambda^{-1}\pi_n(-e)) = \pi_n(S(e)).$$

类似地，对于 f，我们得到 $S(\pi_n(f) = \pi_n(S(f)$。 □

4.21. 命题 该映射 S 满足

$$m(S \otimes \iota)(\Delta(a)(1 \otimes b)) = \varepsilon(a)b$$
$$m(\iota \otimes S)((c \otimes 1)\Delta(a)) = \varepsilon(a)c$$

对所有 $a,\ b,\ c \in A$。

证明：i) 为证明这些等式，只需令 b 和 c 取 A_n中的单位元 1_n。这意味着我们需要考察 $A_n \otimes A_n$ 中的 $(\pi_n \otimes \pi_n)\Delta(a)$，并且可以假设 a 属于由 A_k 构成的代数直和，其中 $k = 0,$ $1, .., 2n$。

ii) 首先，我们对 $x = q$、 $x = e$ 和 $x = f$证明这一点。

iii) 对于 $x = q$，我们有

$$(\pi_n \otimes \pi_n)(\Delta((\pi(q)) = (\pi_n \otimes \pi_n)\Delta(q) = \pi_n(q) \otimes \pi_n(q)$$

并且由于 $S(\pi_n(q)) = \pi_n(q^{-1})$，我们得到

$$m(S \otimes \iota)((\pi_n \otimes \pi_n)\Delta(q)) = \pi_n(q^{-1})\pi_n(q) = \pi_n(1).$$

另一方面，若 $k \neq 0$，则有 $\varepsilon(\pi_k(1)) = 0$；而 $\varepsilon(\pi_0(1)) = 1$。由于此处 π包含 π_0，我们得到所需的公式。

对于 e，左边利用 $m(S \otimes \iota)\Delta(e) = 0$，而 $\pi_0(e) = 0$。对于 f，也可以用类似的论证。 □

现在我们可以总结这些结果并得出主要定理。

4.22. 定理 </style}数对 (, Δ) 是一个离散量子群。

证明：i) 按定义， *-代数 A 是有限维全矩阵代数的直和（参见定义 4.1）。

ii) 我们有一个余乘 Δ on A，如定义 4.6 中所定义。正如命题 4.9 所示，它是从 A 到 $M(A\otimes A)$ 的非退化 *-同态。余结合性也已在命题 4.9 中证明。

iii) 命题 4.12 中得到了一个余单位，而命题 4.20 和 4.21 中得到了一个反元。

因此，$(A,\ \Delta)$ 这一对满足定义 1.2 的所有要求。 □

在本节余下部分，我们将介绍这个离散量子群的一些补充信息。首先考虑余积分。

离散量子群 $su_q(2)$ 的余积分

我们像往常一样用 h 表示余积分。请注意，我们在定义 4.6 中使用了 h，并且在引入 Hopf *-代数 $\mathfrak{A}_t$ 之前，也在第 2 节的一些备注中使用了它。不过后续不会再用到这个元素，因此在此处用 h 表示余积分应该没有问题。 A

我们知道， h 是 A_0 中唯一满足性质 $ah=\varepsilon(a)h$的幂等元。在此情形下，这意味着 $\pi_0(x)h=\varepsilon(x)h$，其中右边是霍普夫代数 $\mathfrak{A}_t$上的余单位。由于 $\varepsilon(q)=1$ 且 $\varepsilon(e)=\varepsilon(f)=0$，我们还得到 $\pi_0(q)h=h$ 和$\pi_0(e)h=\pi_0(f)h=0$。

于是我们得到命题 4.7 的以下推论。

4.23. 命题 对于所有的 n 以及值域为$(\Delta(h))_{nn}$ 的向量 η，都有

$$(\pi_n(q)\otimes\pi_n(q))\eta=\eta,\qquad (\pi_n\otimes\pi_n)\Delta(e)\eta=0\qquad\text{and}\qquad (\pi_n\otimes\pi_n)\Delta(f)\eta=0.$$

证明：在命题 4.7 中，我们证明了对于所有 $x\in\mathfrak{A}_t$ 和 $a\in A$，都有$(\pi_n\otimes\pi_n)\Delta(x)(\Delta(a))_{nn}=\Delta(\pi(x)a)_{nn}$。若将 $a=h$ 代入其中，我们得到

$$(\pi_n\otimes\pi_n)\Delta(x)(\Delta(h))_{nn}=(\Delta(\pi(x)h))_{nn}=\varepsilon(x)\Delta(h)_{nn}.$$

于是结论得证。 □

4.24. 命题 如果 η 是 $\Delta(h)_{nn}$值域中的一个向量，那么它必定是以下对象的标量倍数

$$\sum_k(-1)^{k+n}\lambda^k\,\xi(n,-k)\otimes\xi(n,k).$$

求和遍历可容许指标 k，如命题 3.1 中所述。回忆一下，对于所有这些指标， $k+n$都是整数 k。

证明：我们固定一个指标 n，并将 $\xi(n,k)$记作 ξ_k。

i) 根据假设，我们有 $(\pi_n(q)\otimes 1)\eta=(1\otimes\pi_n(q^{-1}))\eta$，并且由于 $\pi_n(q)\xi_k=\lambda^k\xi_k$，因此 η 必须具有 $\sum_k c_k\,\xi_k\otimes\xi_{-k}$ 的形式，其中 c_k 是 $\mathbb{C}$ 中的标量。

ii) 使用命题 3.1 中的记号，我们有

$$(\pi_n(e)\otimes 1)\eta = \sum_k c_k\,\pi_n(e)\xi_{-k}\otimes\xi_k = \sum_k c_k r_{-k}\,\xi_{-k+1}\otimes\xi_k$$
$$(1\otimes\pi_n(e))\eta = \sum_k c_k\,\xi_{-k}\otimes\pi_n(e)\xi_k = \sum_k c_k r_k\,\xi_{-k}\otimes\xi_{k+1}$$
$$= \sum_k c_{k-1} r_{k-1}\,\xi_{-k+1}\otimes\xi_k$$

按照约定，$r_n = 0$。由于 $S(e) = -\lambda^{-1}e$，方程 $(1\otimes\pi_n(e))\eta = (\pi_n(S(e))\otimes 1)\eta$ 成立，当且仅当对所有 k，$-\lambda^{-1}c_k r_{-k} = c_{k-1}r_{k-1}$。由于 $r_{-k} = r_{k-1}$，我们需要对所有 k，$-\lambda^{-1}c_k = c_{k-1}$。

iii) 当 $c_k = (-1)^{k+n}\lambda^k$ 时，这一条件成立。 □

我们看到，$\Delta(h)$ 的值域在每个子空间$\mathcal{H}_n\otimes\mathcal{H}_n$中都由一个向量张成。这与一般理论一致，参见例如 [16] 中的命题 4.4。

在 [27] 的命题 2.16 中，我们得到了一个公式，给出了在一般离散量子群情况下 $\Delta(h)$ 的表达式，其中 h 是余积分。由于此处对所有 $x\in\mathfrak{A}_t$ 都有 $S^2(x) = q^{-2}xq^2$，而现在 q 是 $\mathfrak{A}_t$ 中的元素（不是[27]的命题 2.16 中的那个元素），因此我们现在有

$$\Delta(h)(1_n\otimes 1_n) = \frac{1}{c}\sum_{i,j}\lambda^{2i}S(e_{ij})\otimes e_{ji}$$

其中 $c = \sum_i \lambda^{2i}$。我们有来自表示 π_n 中基向量（$\xi(n,\ j)$）的矩阵元，表示 $\mathfrak{A}_t$ 如命题 3.1 所述。回想一下，$\pi(q)\xi(n,\ j) = \lambda^j\xi(n,\ j)$。此外，上述方程中的求和是对可容许指标进行的。

要在此处求出这个公式的显式形式，我们需要一个关于 $S(e_{ij})$的公式。下一个命题将给出该公式。我们利用 S 使 A_n 整体不变这一点。

4.25. 命题 我们有 $S(e_{rs}) = (-1)^{s-r}\lambda^{s-r}e_{-s,\ -r}$。

Pr证明：我们利用命题 4.20 中的极分解 $S = R\circ\tau_{-\frac{i}{2}}\circ$

i) 首先我们计算 $\tau_{-\frac{i}{2}}(e_{rs})$。因为

$$\tau_t(e_{rs}) = Q^{-2it}e_{rs}Q^{2it} = \lambda^{-2itr}\lambda^{2its}e_{rs}$$

其中 $Q = \pi_n(q)$（见命题 4.13），我们有

$$\tau_{-\frac{i}{2}}(e_{rs}) = \lambda^{-2i(-\frac{i}{2})r}\lambda^{2i(-\frac{i}{2}s)}e_{rs} = \lambda^{-r}\lambda^s e_{rs}.$$

ii) 对于 $R(e_{rs})$，我们使用命题 4.17 中给出的公式 $GR(e_{rs}) = e_{sr}G$，其中算子 G 按定义 4.15 定义。我们声称 $R(e_{rs}) = (-1)^{s-r}e_{-s,\ -r}$。事实上

$$e_{sr}G\xi_k = (-1)^{n+k}e_{sr}\xi_{-k} = (-1)^{n+k}\delta(r,-k)\xi_s = (-1)^{n-r}\delta(r,-k)\xi_s$$

而

$$\begin{aligned} G((-1)^{s-r}e_{-s,-r}\xi_k) &= (-1)^{s-r}\delta(-r,k)G\xi_{-s} \\ &= (-1)^{s-r}\delta(-r,k)(-1)^{n-s}\xi_s \\ &= (-1)^{n-r}\delta(-r,k)\xi_s. \end{aligned}$$

这就证明了该断言。

iii) 将这两个结果结合起来，便得到命题的公式。 □

现在很容易将它们结合起来，得到 $\Delta(h)$的公式。

4.26. 命题 对于所有 n我们有

$$\Delta(h)(1_n \otimes 1_n) = \frac{1}{c}\sum_{r,s}(-1)^{s-r}\lambda^{r+s}e_{-s,-r}\otimes e_{sr}.$$

其中 $c = \sum_r \lambda^{2r}$。

若将此应用于任意向量 $\xi_{-j}\otimes\xi_j$，则得到

$$\begin{aligned} \Delta(h)(\xi_{-j}\otimes\xi_j) &= \frac{1}{c}\sum_{r,s}(-1)^{s-r}\lambda^{r+s}e_{-s,-r}\xi_{-j}\otimes e_{sr}\xi_j \\ &= \frac{1}{c}\sum_{s}(-1)^{s-j}\lambda^{j+s}\xi_{-s}\otimes\xi_s \\ &= \frac{1}{c}(-1)^{-j-n}\sum_{s}(-1)^{n+s}\xi_{-s}\otimes\xi_s. \end{aligned}$$

这与命题 4.24 中的结果一致。

我们还可以验证， $\Delta(h)$ 是一个幂等元。事实上，对于 $\Delta(h)^2$，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2}\sum_{r,s,r',s'}(-1)^{s-r+s'-r'}\lambda^{r+s+r'+s'}e_{-s,-r}e_{-s',-r'}\otimes e_{sr}e_{s'r'} \\ &\quad= \frac{1}{c^2}\sum_{s,r,r'}(-1)^{s-r+r-r'}\lambda^{r+s+r+s'}e_{-s,-r'}\otimes e_{sr'} \\ &\quad= \frac{1}{c^2}\sum_{r}\lambda^{2r}\sum_{s,r'}(-1)^{s-r'}\lambda^{s+r'}e_{-s,-r'}\otimes e_{sr'} \\ &\quad= \frac{1}{c}\sum_{s,r'}(-1)^{s-r'}\lambda^{s+r'}e_{-s,-r'}\otimes e_{sr'} = \Delta(h). \end{aligned}$$

也很容易看出， $\Delta(h)$ 是自伴的。

若 ω_n 是 A_n 上的归一化迹，我们得到

$$\begin{aligned} (\omega_n\otimes\iota)\Delta(h) &= \frac{1}{c}\sum_{r,s}(-1)^{s-r}\lambda^{r+s}\omega_n(e_{-s,-r})e_{sr} \\ &= \frac{1}{c}\sum_{r}\lambda^{2r}e_{rr} = \frac{1}{c}q^2. \end{aligned}$$

这确实是迹为 1 的元素，它将 S^2 实现为 $c = \omega_n(q^2)$。这正是我们根据一般理论所预期的结果，可与 [27] 中的命题 2.16 对照。

积分及相关数据

由上述命题中的公式，我们可以读出左积分和右积分。这里我们也使用分量 A_n 上的迹 ω_n，并用 $\omega_n(1_n) = 2n+1$ 进行归一化。回想一下， A_n 作用于空间 $\mathcal{H}_n$，且 $2n+1$ 是 $\mathcal{H}_n$ 的维数。

4.27. 命题 对于左积分 φ 和右积分 ψ，我们有

$$\varphi(e_{rs}) = c\delta(r,s)\lambda^{-2r} \qquad \text{and} \qquad \psi(e_{r,s}) = c\delta(r,s)\lambda^{2r}$$

其中 $c = \sum_j \lambda^{2j}$。

证明：我们有 $\varphi(e_{rs}) = c\delta(r,s)\lambda^{-2r}$，因为确实

$$\sum_{r,s}(-1)^{s-r}\lambda^{r+s}\delta(r,s)\lambda^{-2r}e_{-s,-r} = \sum_r e_{-r,-r} = 1_n.$$

类似地， $\psi(e_{r,s}) = c\delta(r,s)\lambda^{2r}$，因为

$$\sum_{r,s}(-1)^{s-r}\lambda^{r+s}\delta(-r,-s)\lambda^{-2r}e_{s,r} = \sum_r e_{-r,-r} = 1_n.$$

□

我们看到，对于 $a \in A_n$,

$$\varphi(a) = \omega_n(\pi(q)^2)\omega_n(a\pi(q)^{-2}) \quad \text{and} \quad \psi(a) = \omega_n(\pi(q)^2)\omega_n(a\pi(q)^2)$$

这些公式与 [27] 中定理 2.18 和 2.19 得到的一般结果一致。事实上，这里的元素 q^2 表示 [27] 中的元素 q，因为对于所有 $x \in \mathfrak{A}_t$， $xq^2 = q^2S^2(x)$，因此 $a\pi_n(q^2) = \pi_n(q^2)S^2(a)$。还可以看到，这里的 $\omega_n(\pi(q^2)) = \omega_n(\pi(q^{-2}))$，因为这是 $\sum_r \lambda^{2r}$，其中 r 从 $-n$ 取到 n。

还可以验证，这些公式正是 [18] 中已经得到的公式。

最后，从这些公式中也很容易求出模自同构和模元，并验证它们与离散量子群一般情形下得到的公式（如 [27] 中所示）一致。对于模元，例如我们得到

$$\begin{aligned}(\varphi\otimes\iota)(\Delta(h)(1\otimes 1_n)) &= \frac{1}{c}\sum_{r,s}(-1)^{s-r}\lambda^{r+s}\varphi(e_{-s,-r})e_{sr}\\ &= \frac{1}{c}\sum_{r,s}(-1)^{s-r}\lambda^{r+s}c\delta(r,s)\lambda^{2r}e_{sr}\\ &= \sum_r \lambda^{4r}e_{rr} = \pi_n(q^4)\end{aligned}$$

并且我们看到 $\delta = q^4$。这与我们在 [27]的命题 2.20 中得到的 δ 的一般公式一致。事实上，我们在那里发现

$$\delta_\alpha = \frac{\omega_\alpha(q^{-1})}{\omega_\alpha(q)}q_\alpha^2$$

这里有 $q_\alpha = \pi_n(q^2))$，而 $\omega_n(\pi_n(q^{-2}) = \omega_n(\pi_n(q^2))$.

5. 离散量子群的对偶 $su_q(2)$

考虑上一节定理 4.22 中得到的离散量子群 (A, Δ)。代数 A 是代数 A_k 的直和，其中 $k = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\ldots$ 而 A_k 是 $n \times n$ 阶复数域矩阵的代数，其中此时 $n = 2k + 1$。

我们将按照代数量子群对偶性的意义来构造对偶。因此，对偶 A 定义为 $\widehat{A}$ $\varphi_A \cdot a$ $a \in A$ 上形如（ ）的线性泛函空间，其中 φ_A 是 A 上的左积分。作为向量空间， A 是空间 A_k 的对偶空间的直和。

我们将使用 $\widehat{B}$ 表示 A，并采用配对记号。因此，当 $b = \varphi(\cdot c)$ 时，我们将 $\langle a, b\rangle$ 记作 $\varphi(ac)$。

我们在 B 中定义以下元素。我们考虑子代数 $A_{\frac{1}{2}}$，并利用它是复矩阵代数这一事实。

5.1. 记号 我们在 B 中定义一个元素为 (u_{ij}) 的 2×2 矩阵，如下：

$$\langle a, u_{ij}\rangle = a_{ij}$$

当 $a \in A_{\frac{1}{2}}$ 对于 $\langle a, u_{ij}\rangle = 0$，当 a 属于 A 的任何其他分量时，对所有 i, j 均成立。

对于 a，当 $a \in A_{\frac{1}{2}}$ 时，我们将使用 $\langle a, u\rangle$。此记号取决于我们为 $A_{\frac{1}{2}}$ 的表示所选用的基 $(\xi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \xi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}))$。

考虑例 3.5 中的第二个例子。再次令 π 用于 $\pi_{\frac{1}{2}}$，并采用该例中的基，即 $(\xi(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \xi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}))$。于是得到以下公式。

5.2. 命题 对于 $\langle \pi(1)\, u\rangle$，我们在 M_2 中得到单位矩阵；而对于 $\mathfrak{A}_t$ 的其他生成元 q, e, f，我们得到

$$\langle \pi(q), u\rangle = \begin{pmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \langle \pi(e), u\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \langle \pi(f), u\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们可以验证这一点。对于 $ef - fe$，我们发现

$$\begin{aligned} \langle \pi(e)\pi(f) - \pi(f)\pi(e), u\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

而对于 $(\lambda - \lambda^{-1})^{-1}(q^2 - q^{-2})$，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda - \lambda^{-1}}\langle (q^2 - q^{-2}), u\rangle &= \frac{1}{\lambda - \lambda^{-1}}\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda - \lambda^{-1}}\begin{pmatrix} \lambda - \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

对于对偶 B 上的余乘、余单位、反元和对合，我们采用关于离散量子群的新论文中的约定，参见 [27] 中的备注 3.4 和 3.5。因此，对于 B 上的余乘，我们采用

$$\langle a \otimes a', \Delta(b)\rangle = \langle aa', b\rangle$$

至于反元，我们利用 $\langle a, S(b))\rangle = \langle S^{-1}(a)\ b\rangle$。对于 B 上的对合，我们有 $\langle a, b^*\rangle = \langle S(a^*)\ b\rangle^-$。我们用 z^- 表示复数z的复共轭。

于是我们得到元素 u_{ij} 的以下性质。

5.3. 命题 对于余乘，我们得到 $\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$。余单位满足$\varepsilon(u_{ij}) = \delta(i, j)$，而对于反元，在 B 上的 S 得到

$$\begin{pmatrix} S(u_{11}) & S(u_{12}) \\ S(u_{21}) & S(u_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{22} & -\lambda u_{12} \\ -\lambda^{-1}u_{21} & u_{11} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

证明：i) 首先取 $a, a' \in A_{\frac{1}{2}}$。于是对于所有指标 i, j，我们有

$$\begin{aligned} \sum_k \langle a, u_{ik}\rangle\langle a', u_{kj}\rangle &= \sum_k a_{ik}a'_{kj} \\ &= (aa')_{ij} = \langle aa', u_{ij}\rangle. \end{aligned}$$

如果元素 a, a' 中有一个属于另一个分量，那么结果为 0，公式仍然显然成立。因此 $\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$。

ii) 因为 $\langle \pi(1)\ u_{ij}\rangle = \delta(i,\ j)$，所以我们有 $\varepsilon(u_{ij}) = \delta(i,\ j)$。于是确实

$$(\varepsilon \otimes \iota)\Delta(u_{ij}) = (\iota \otimes \varepsilon)\Delta(u_{ij}) = u_{ij}$$

对于所有指标对 $(i,\ j)$，

iii) 当 $a \in A_{\frac{1}{2}}$ 时，我们有

$$\langle a, S(u_{ij})\rangle = \langle S^{-1}(a), u_{ij}\rangle = (S^{-1}(a))_{ij}.$$

由 $a = \pi(q)$，我们可得 $S(u_{11}) = u_{22}$，并且 $S(u_{22}) = u_{11}$，因为$S(q) = q^{-1}$。由 $a = \pi(e)$，我们可得 $S(u_{12}) = -\lambda u_{12}$，因为 $S(e) = -\lambda^{-1}e$；而由$a = \pi(f)$，我们得到 $S(u_{21}) = -\lambda^{-1}u_{21}$，因为 $S(f) = -\lambda f$。当 a 位于另一个分量中时，两边都得到 0。

□

对于伴随，我们得到以下性质。

5.4. 命题 对于所有指标，我们有 $u^*_{ij} = S(u_{ji})$。

证明：当 $a \in A_1$ 我们有[2]

$$\begin{aligned} \langle a, u^*_{ij}\rangle &= \langle S(a^*), u_{ij}\rangle^- = \langle (S^{-1}(a))^*, u_{ij}\rangle^- \\ &= ((S^{-1}(a))^*)^-_{ij} = (S^{-1}(a))_{ji} \\ &= \langle a, S(u_{ji})\rangle. \end{aligned}$$

当 a 属于另一个分量时，我们得到 0。因此，对于所有指标 $i,\ j,\ u^*_{ij} = S(u_{ji})$。

□

现在我们来考察这些公式的推论

$$m(S\otimes\iota)\Delta(u_{ij})=\varepsilon(u_{ij})1 \qquad \text{and} \qquad m(\iota\otimes S)\Delta(u_{ij})=\varepsilon(u_{ij})1.$$

这些恰好说明

$$\begin{pmatrix} S(u_{11}) & S(u_{12}) \\ S(u_{21}) & S(u_{22}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S(u_{11}) & S(u_{12}) \\ S(u_{21}) & S(u_{22}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

我们已经看到

$$\begin{pmatrix} S(u_{11}) & S(u_{12}) \\ S(u_{21}) & S(u_{22}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{pmatrix}.$$

由此可 知，矩阵 u 是在 B 上的 2×2 矩阵代数中的酉矩阵 .

它具有如下性质

$$u_{22}=S(u_{11})=u_{11}^* \qquad \text{and} \qquad u_{12}=-\lambda^{-1}S(u_{12})=-\lambda^{-1}u_{21}^*.$$

因此， u 具有如下形式

$$u=\begin{pmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha=u_{11}$， $\gamma=u_{21}$ 和 $q=\lambda^{-1}$。因此我们得到如下性质。

5.5. 命题 存在一个 A_n-同态 θ ， 它从 Woronowicz 量子 $SU_q(2)$群的底层 A_t-代数映射到对偶 B ， 其定义为

$$\theta(\alpha)=u_{11} \qquad \text{and} \qquad \theta(\gamma)=u_{21}.$$

它还是一个余代数同态。

在此陈述中，元素 α 和 γ 是量子群 $SU_q(2)$ 的生成元，其定义见 [32]。该结果的证明是直接的。

要证明该 *-同态是满射相对容易。

5.6. 命题 命题 5.5 中定义的 *-同态 θ 是满射。

> **证明**： n 重张量积 $\pi_{\frac{1}{2}}\otimes\pi_{\frac{1}{2}}\otimes\cdots\pi_{\frac{1}{2}}$ 根据命题 4.5 包含 $\pi_{\frac{n}{2}}$ 的一个副本。因此， B 中支撑在 A_n 的任意元素都可以表示为 n 个形如 u_{ij} 的元素之乘积的线性组合。 □

虽然预计如此，但尚不清楚这个同态是否也是单射，因而实际上是同构。关于这一问题的更多评论，请参见第 6 节。

B 上的积分及其性质

我们知道， B 上的左积分 φ_B 由公式 $\varphi_B(b)=\langle h,\ b\rangle$ 给出，其中 h 是 A中的余积分。由于 h 不仅是左余积分，也是右余积分，因此 φ_B也是右积分。事实上，按照此定义，我们有 $\varphi_B(1)=1$ 和 $\varphi_B\circ S=\varphi_B$。

要给出 B上的积分 φ_B 的表达式并非易事。根据定义，对于 n 个元素的乘积，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_B(u_{ij}u_{k\ell}\dots) &= \langle h, u_{ij}u_{k\ell}\dots\rangle \\ &= \langle \Delta^{(n)}(h), \dots \otimes u_{k\ell} \otimes u_{ij}\rangle.\end{aligned}$$

请记住，按照我们的约定，有 $\langle \Delta(a)\ b\otimes b'\rangle = \langle a,\ b'b\rangle$，参见 [27]中的备注 3.4 和 3.5。计算这相当于在张量积表示 π_0 中提取分量$\pi_1 \otimes \pi_1 \otimes \dots$。22

不过，利用我们在命题 4.26 中得到的 $\Delta(h)$ 公式，我们可以计算 φ_B 在两个元素的乘积上的值。

5.7. 命题

$$\begin{aligned}\varphi(u_{k\ell}u_{ij}) &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\delta(i,-k)\delta(j,-\ell)(-1)^{k-l}\lambda^{k+\ell} \\ &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\delta(i,-k)\delta(j,-\ell)(-1)^{j-i}\lambda^{-i-j}.\end{aligned}$$

证明：我们已在命题 4.26 中证明

$$\Delta(h)(1_n\otimes 1_n) = \frac{1}{c}\sum_{r,s}(-1)^{s-r}\lambda^{r+s}e_{-s,-r}\otimes e_{sr}.$$

其中 $c=\sum_r \lambda^{2r}$。元素 e_{pq} 是 A_n 中与我们用于表示 π_n 的基相对应的矩阵元。这里有 $n=\frac{1}{2}$，我们得到

$$\begin{aligned}\varphi_B(u_{k\ell}u_{ij}) &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\sum_{r,s}(-1)^{s-r}\lambda^{r+s}\langle e_{-s,-r}, u_{ij}\rangle\langle e_{sr}, u_{k\ell}\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\sum_{r,s}(-1)^{s-r}\lambda^{r+s}\delta(-s,i)\delta(-r,j)\delta(s,k)\delta(r,\ell) \\ &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}(-1)^{k-\ell}\lambda^{k+\ell}\delta(-k,i)\delta(-\ell,j)\end{aligned}$$

第二个公式可直接得出。 □

我们可以验证左不变性。计算得

$$\begin{aligned}(\iota\otimes\varphi_B)(u_{ij}u_{k\ell}) &= \sum_{r,s} u_{ir}u_{ks}\varphi(u_{rj}u_{s\ell}) \\ &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\sum_{r,s} u_{ir}u_{ks}(-1)^{r-j}\lambda^{r+j}\delta(r,-s)\delta(j,-\ell) \\ &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\sum_{s} u_{i,-s}u_{ks}(-1)^{-s-j}\lambda^{-s+j}\delta(j,-\ell)\end{aligned}$$

现在我们断言 $u_{ks} = (-1)^{s-k}\lambda^{s-k}S(u_{-s,\ -k})$。于是得到

$$\begin{aligned}(\iota\otimes\varphi_B)(u_{ij}u_{k\ell}) &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\delta(j,-\ell)\sum_s u_{i,-s}S(u_{-s,-k})(-1)^{s-k}\lambda^{s-k}(-1)^{-s-j}\lambda^{-s+j}\\ &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\delta(j,-\ell)\sum_s u_{i,-s}S(u_{-s,-k})(-1)^{-k-j}\lambda^{-k+j}\\ &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\delta(j,-\ell)\delta(i,-k)(-1)^{-k-j}\lambda^{-k+j}\\ &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\delta(j,-\ell)\delta(i,-k)(-1)^{i-j}\lambda^{i+j}\end{aligned}$$

由此得到

$$(\iota\otimes\varphi_B)(u_{ij}u_{k\ell}) = \varphi(u_{ij}u_{k\ell})1.$$

现在证明这一断言。我们使用命题 5.3 中得到的 $S(u_{pq})$公式。

我们从公式 $S(e_{pq}) = (-1)^{q-p}\lambda^{q-p}e_{-q,\ -p}$开始，见命题 4.25。然后得到

$$\begin{aligned}\langle e_{pq}, S^{-1}(u_{rs})\rangle &= \langle S(e_{pq}), u_{rs}\rangle\\ &= (-1)^{q-p}\lambda^{q-p}\langle e_{-q,-p}, u_{rs}\rangle\\ &= (-1)^{s-r}\lambda^{s-r}\langle e_{pq}, u_{-s,-r}\rangle\end{aligned}$$

因此 $S^{-1}(u_{rs}) = (-1)^{s-r}\lambda^{s-r}u_{-s,\ -r}$ 且 $S(u_{rs}) = (-1)^{r-s}\lambda^{r-s}u_{-s,\ -r}$。这就证明了这一断言。论证至此完成。

我们还得到了 φ_B的模自同构 σ 的公式。

5.8. 命题 我们有 $\sigma(u_{pq}) = \lambda^{2p+2q}u_{pq}$。

证明:

$$\begin{aligned}\lambda^{2i+2j}\varphi_B(u_{k\ell}u_{ij}) &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\lambda^{2i+2j}\delta(i,-k)\delta(j,-\ell)(-1)^{j-i}\lambda^{-i-j}\\ &= \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}\delta(i,-k)\delta(j,-\ell)(-1)^{j-i}\lambda^{i+j}\\ &= \varphi_B(u_{ij}u_{k\ell}).\end{aligned}$$

我们用到了 $(-1)^{j-i} = (-1)^{i-j}$。 □

现在我们可以验证一些涉及模自同构的其他公式。

从 g 一般理论可知，我们必有 $\langle a,\ \sigma(b)\rangle = \langle S^{-2}(a)\delta,\ b\rangle$，参见 [27] 中的命题 3.7。

$$\begin{aligned}\langle e_{rs}, \sigma(u_{rs})\rangle &= \langle S^{-2}(e_{rs})\delta, u_{rs}\rangle\\ &= \langle \pi(q)^2 e_{rs}\pi(q)^{-2}\pi(q)^4, u_{rs}\rangle\\ &= \langle \lambda^{2r}e_{rs}\lambda^{2s}, u_{rs}\rangle\end{aligned}$$

因此 $\sigma(u_{rs}) = \lambda^{2r+2s}u_{rs}$。我们用到了 $\delta_{\frac{1}{2}} = \pi(q^4)$，参见第 4 节末尾。

根据一般理论，我们必有 $\Delta(\sigma(b)) = (S^2 \otimes \sigma)\Delta(b)$。由 $b = u_{rs}$ 可得

$$\begin{aligned}(S^2 \otimes \sigma)\Delta(u_{rs}) &= \sum_j S^2(u_{rj}) \otimes \sigma(u_{js}) \\ &= \sum_j \lambda^{2r-2j} u_{rj} \otimes \lambda^{2j+2s} u_{js} \\ &= \sum_j \lambda^{2r+2s} u_{rj} \otimes u_{js} = \lambda^{2r+2s}\sigma(u_{rs}).\end{aligned}$$

我们用到了 $S^2(u_{rj}) = \lambda^{2r-2j} u_{rj}$。事实上

$$\langle e_{k\ell}, S^2(u_{rj})\rangle = \langle S^{-2} e_{k\ell}, u_{rj}\rangle = \lambda^{2k-2\ell}\langle e_{k\ell}, u_{rj}\rangle.$$

最后，我们可以验证 σ 是一个自同构。

$$\sigma(\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & \lambda^{-2} u_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}.$$

它不是一个 *-自同构，而是 $\sigma(b^*) = \sigma^{-1}(b)^*$。

6. 结论与进一步研究

尽管本文证明的结果在意料之中，但要给出这些结果的严格证明却更为困难。而这正是本文的目的。

仍有一些性质尚未完全明了。首先，我们需要考察 Hopf *-代数 $\mathfrak{A}_t^c$ 上的积分的存在性，这一点见命题 2.10。正如命题 2.13 中所述，要证明不存在正积分相对容易。但这一事实的证明无法用来证明不存在（可能非正的）积分。

另一个可以提出的问题是，是否存在一种方法，能够以更接近 Hopf *-代数 $\mathfrak{A}_t$ 原始性质的方式得出结果。

命题 5.5 中提到的从 quantum $SU_q(2)$ 到我们的对偶 B 的 *-同态，在命题 5.6 中证明了是满射；预计它也是单射（因而是一个 *-同构），但我们没有证明这一点。

离散量子群 $su_q(2)$中的余积分 h 给出了对偶B上的积分 φ_B。若能利用这一点为该积分导出具体公式，将会很有意思。

此外，还有一些可能的附带结果。我们不仅考察了表示π_n，还考察了表示 π'_n 以及相关的定义 4.10，从而得到了 $su_q(2)$ 与 $\mathbb{Z}_2$ 的乘积。对此还可以进一步研究。此外，我们没有深入探究带有 $c = 0$ 的 Hopf *-代数 $\mathfrak{A}_t^c$（见注释 2.12）。若能看看本文所用的一些技巧是否能为这一特殊情形带来新的见解，也会很有意思。

参考文献

[1] K. DeCommer 和 A. Van Daele，嵌入局部紧量子群中的乘子霍普夫代数，Rocky Mountain J. Math. 40 (2010)，第 4 期，1149–1182。MR 2718809 3

[2] B . Drabant and A. Van Daele, *Pairing A_n d the equan tum bouble of multiplier Hopf* 代数, 《代数与表示理论》4 (2001), 109–132. 6[3] V.G. Drinfel'd, 《量子群》, (1986), 798–820. 2, 6, 7[4] Abe E., 《霍普夫代数》, 《剑桥数学丛书》第74卷, 剑桥大学出版社, 剑桥、纽约, 1980. 3, 7[5] E.G. Effros 和 Z.-J. Ruan, 《离散量子群 I》。Haar测度, 5 (1994), 681–723. 1, 3[6] M. Jimbo, $u(\mathfrak{g})$ 和 Yang-Baxter方程的 q-差分类比, 《数学物理快报》10 (1985), 63–69. 1, 2, 3, 6, 7, 8[7] Johan Kustermans 和 Stefaan Vaes, 《局部紧量子群》, 《科学年鉴》（第4辑）33 (2000), 第6期, 837–934. MR 1832993 3, 24[8] ,《冯·诺依曼代数框架下的局部紧量子群》, 《斯堪的纳维亚数学杂志》92 (2003), 第1期, 68–92. MR 1951446 3[9] A. Maes 和 A. Van Daele, 《紧量子群札记》, 《数学新档案》第四辑16 (1998), 73–112. 3[10] P. Podle´s 和 S.L Woronowicz, 《Lorentz群的量子变形》, 《数学物理通讯》130 (1990), 381–431. 1, 2, 3, 6[11] D.E. Radford, 《霍普夫代数》, 载于《纽结与万物》第49卷, Word Scientific, 新泽西州, 2012. 3, 7[12] Moss E. Sweedler, 《霍普夫代数》, 《数学讲义系列》, W. A. Benjamin公司, 纽约, 1969. MR 0252485 3, 7[13] A. Van Daele, 当 $ab = \lambda ba$时的算子 $a \otimes b + b \otimes a^{-1}$, KU Leuven预印本, 1989. 12 [14] ,《Hopf *-代数对偶对》, 讲义（第二版）, 《伦敦数学会通报》25 (1993), 209–230. 12[15] ,《乘子霍普夫代数》, 《美国数学会汇刊》342 (1994), 第2期, 917–932. MR 1220906 3, 4, 5, 20[16] ,《离散量子群》, 《代数杂志》180 (1996), 第2期, 431–444. MR 1378538 1, 3, 6, 30[17] ,《群对偶性的代数框架》, 《数学进展》140 (1998), 第2期, 323–366. MR 1658585 1, 3[18] , 《具有不变积分的量子群》, 《美国国家科学院院刊》97 (2000), 541–546. 3, 19, 32 [19] ,《乘子Hopf代数的研究工具》, ASJE（《阿拉伯科学与工程杂志》）C专题刊33 (2008), 505–528. 6

[20] ———, 《局部紧量子群：冯·诺依曼代数方法》, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 10 (2014), 论文082, 41页. MR 3261862 3
[21] ,从霍普夫代数到拓扑量子群：简史、各个方面及若干问题, Banach Center Publications 120 (2020), 179–220. 24[22] , 《代数量子群与对偶性 I》, https://arxiv.org/pdf/2304. 13448, 2023. 3[23] ,《代数量子群与对偶性 II：具有正积分的乘子霍普夫 *-代数》, https://arxiv.org/pdf/2304.13482, 2023. 3[24] , 《代数量子群与对偶性 III：模结构与解析结构》, https://arxiv.org/pdf/2304.13523, 2023. 3[25] , 《非幺代数的余乘》, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 31 (2024), 593–627. 5[26] , 关于非幺代数余乘的思考, https://arxiv.org/pdf/2402.00476, 2024. 5[27] , 《离散量子群及其对偶》, http://arxiv.org/abs/2512. 12350, 2025. 1, 3, 4, 6, 24, 30, 32, 34, 36, 37[28] , （弱）乘子霍普夫代数的Sweedler记号, KU Leuven预印本, 2025. 6[29] A. Van Daele 和 S.L. Woronowicz, 量子 E(2) 群的对偶性, 《太平洋数学杂志》173 (1996), 第2期, 375–385. 12[30] A. Van Daele 和 Y. Zhang, 乘子霍普夫代数综述, 载于《霍普夫代数与量子群》（布鲁塞尔, 1998）, 《纯数学与应用数学讲义》第209卷, Dekker, 纽约, 2000, 第269–309页. MR 1767620 3[31] S.L. Woronowicz, 《紧矩阵拟群》, Comm. Math. Phys. 111 (1987), 613–665. 3[32] , 扭曲的 $SU(2)$群：非交换微分演算的一个例子, Publ. RIMS, Kyoto University 23 (1987), 117–181. 2, 3, 6, 35[33] , 《紧量子群》, (1998), 845–884. 3[34] S.L. Woronowicz 和 S. Zakrzewski, 量子“ax + b”群, 《数学物理评论》14 (2002), 797–828. 20