arXiv:2603.29910v1 [math.AT] 31 Mar 2026

通过点集模型统一 Koszul 对偶

DANPETERSEN、VICTOR ROCA I LUCIO、SINAN YALIN

摘要。微分分次代数与微分分次余代数之间的经典巴构造-余巴构造伴随，源自 Cartan、Eilenberg、Moore 等人发展起来的微分同调代数的开端，也是更广泛的 *Koszul* 对偶框架的一部分。近年来，人们发展了若干 ∞-范畴类比，特别是 Lurie、Francis–Gaitsgory 和 Heuts 的工作。然而，文献中尚未对经典的链级构造及其高阶范畴对应物进行比较；事实上，这两种构造并不完全兼容。

本文在微分分次语境下建立一个统一框架，以联系这些不同形式的 Koszul 对偶。我们构造了一个称为包含-限制方形的伴随交换方图，将经典的幺半群 bar-cobar 伴随与 Le Grignou–Lejay 提出的完备化变体联系起来。我们证明，该方形诱导出代数与其 Koszul 对偶余代数之间的一个 ∞-范畴伴随，特别地恢复了 Lurie 的 Bar–Cobar 伴随的微分分次情形，并准确说明我们的构造与 Francis–Gaitsgory 和 Heuts 的构造之间的关系。

目录

引言 1
1. 代数与余代数回顾 10 2. 点集包含映射-限制平方 20 3. 点集与 ∞-范畴的 bar-cobar 伴随 24 4. ∞-范畴增强 bar-cobar 伴随的对偶版本 27 5. ∞-范畴的包含映射-限制平方 33 6. 导出 Koszul 等价与良好完备化 38 7. Lurie 风格 $\mathbb{E}_n$-代数的 bar-cobar 伴随的点集模型 49 参考文献 51

引言

0.1. **Bar-cobar 对偶**。 同调代数和同伦代数中的一个基本研究对象是巴-余巴伴随 [CE56, Ada56]:

$$\text{(augmented dg algebras)} \underset{\mathrm{B}}{\overset{\Omega}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \text{(conilpotent coaugmented dg coalgebras)}. \tag{1}$$

这些函子源自代数拓扑——它们是构造分类空间 和环路空间的代数影子。若 M 是一个拓扑幺半群，那么它的链 $C_*(M;\mathbf{Z})$

日期：2026年4月1日。2020 年数学学科分类。 18N70, 18M60, 18N40, 18N60, 55P48, 55P65, 55U15, 55U35, 16T15。第一位署名作者获得了美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2424441，并获得瓦伦堡学者奖学金。第二位署名作者获得了 ANR 项目 SHoCos ANR-22-CE40-0008 的资助。第三位署名作者感谢 ANR 项目 LieDG ANR-24-CE40-5367 和 KAsH ANR-25-CE40-2861 的支持。

在庞特里亚金乘积下是一个增广微分分次代数，并且存在一个微分分次余代数的拟同构 [Sta63， May75]:

$$\mathrm{B}C_*(M;\mathbb{Z}) \simeq C_*(\mathrm{B}M;\mathbb{Z}).$$

类似地，若 X 是一个连通带基点空间，则 $C_*(X;\ \mathbb{Z})$ 是一个余增广微分分次余代数，并且存在一个微分分次代数的拟同构 [Ada56，RZ18]:

$$\Omega C_*(X;\mathbb{Z}) \simeq C_*(\Omega X;\mathbb{Z}).$$

这些定理说明了使用符号B 和Ω 分别表示 bar 函子和余巴函子的合理性。式（1）的拓扑类比是伴随

$$(2) \qquad (\text{topological monoids}) \underset{\Omega}{\overset{\mathrm{B}}{\rightleftarrows}} (\text{based spaces}).$$

在同伦意义下，（2）几乎是一个等价：它将 ∞-范畴限制为类群拓扑幺半群与连通带基点空间之间的等价。其代数影子（1）同样在拟同构意义下构成等价，只要将对象限制为适当连通的对象。代数与余代数的同伦论之间这种近乎等价的关系，以及许多风格相近、密切相关的代数对偶，通常统称为*Koszul* 对偶。

事实上，文献中有数量惊人的各种概念[1]如今都被称为 Koszul 对偶。全面梳理其历史超出了本引言的范围，但我们希望提及[Pri70、EM66、HMS74、Qui69、Sul77、BGG78、GK94、BGS96、Hino1、LV12]。

关于巴-余巴伴随，一种较新、较不经典的方法出自 Jacob Lurie [Lur17，第 5.2 节。2]设 $\mathbf{C}$ 是一个单体 ∞-范畴，且存在单纯对象的几何实现和余单纯对象的全化。在这些假设下，Lurie 构造了一个伴随

$$(3) \qquad (\text{augmented } \mathbb{E}_1\text{-algebras in } \mathbf{C}) \underset{\mathbf{cobar}}{\overset{\mathbf{bar}}{\rightleftarrows}} (\text{coaugmented } \mathbb{E}_1\text{-coalgebras in } \mathbf{C}).$$

当我们将 $\mathbf{C}$ 特化为 ∞空间范畴 $\mathbf{Spc}$时，伴随（3）就特化为（2）。事实上，Lurie 证明 $\mathbf{bar}(A)$ 可以通过一个单纯对象的几何实现来计算

$$(4) \qquad \cdots \quad A \otimes A \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; A \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \mathbf{1}$$

这就得到了拓扑幺半群分类空间的熟知公式。注意，每个空间都以唯一方式成为 E_1-余代数（余乘法为对角映射），而余增广就是一个基点；此外，空间中的每个 E_1-代数都会自动带有增广，并且可以整直化为拓扑幺半群。

取 $\mathbf{C} = \mathbf{D}(\Bbbk)$，即环 $\Bbbk$的导出范畴。于是，自然会认为对于这一 $\mathbf{C}$ 的选取，伴随（3）特化为（1）。但事实并非 如此。实际上，立刻就会遇到几个问题：

[1]更令人困惑的是，有些作者将“Koszul 对偶”这一说法仅用于一种限制更严格的概念，其中涉及小分解。这也是整个理论中唯一与 Koszul 的工作相关的部分，它是通过 *Koszul* 复形 的 [Pri70]。二次代数 A 有一个 二次对偶 余代数 $A^!$ 以及一个典范映射 $A^! \to \mathrm{B}A$；若 A 是一个 *Koszul* 代数，则该典范映射是拟同构。在这种情况下，它的伴随映射$\Omega A^! \to A$ 也是拟同构，并且是一个 A的极小分解。尽管这一版本的 Koszul 对偶有多种推广，适用于其他代数对象，但总是先构造一个合适的巴-余巴伴随，从而确立代数与余代数之间的同伦论 Koszul 对偶；在此基础上，关于极小分解的讨论才有意义。本文只关注其底层的同伦论对偶。

(i) Lurie 的 bar 函子是左 伴随；代数 bar 函子是右 伴随。(ii) Lurie 在任何地方都没有施加余幂零性条件；在代数上，余幂零性对于使 B 和 Ω 成为伴随是不可或缺的。(iii) 将微分分次余代数范畴对拟同构局部化，并不能呈现 ∞-范畴中的 E_1-余代数（该范畴取自 $\Bbbk$ 的导出 ∞-范畴），无论我们选择什么环 $\Bbbk$。

然而，(4) 表明，Lurie 的 $\mathbf{bar}(A)$ 与经典代数 bar 构造 $\mathrm{B}A$ 对任意增广微分分次代数 A都是拟同构的。因此，当 $\mathbf{C} = \mathbf{D}(\Bbbk)$时，若考虑此情形下的伴随 (3)，便会自然地产生一些问题：

(a) 我们能否为函子**bar** 和 **cobar**构造显式的链级构造？(b) 这些链级构造与伴随 (1) 之间是否存在某种关系？(c) 我们能否用 Quillen 伴随来呈现 (3)?

本文的目标之一，尤其是在 $\Bbbk$ 为域时，是回答所有这些问题。

0.2. **结合情形**。 设 $\Bbbk$ 为一个域。在我们能够有意义地讨论问题(a)之前，需要先为 $\mathbb{E}_1$-余代数在 $\mathbf{D}(\Bbbk)$中找到合适的点集模型，这正是 [PRiLY26]的主要目标。从现在起，为方便起见，我们将把注意力限制在非幺代数和余代数上，而不再追踪增广和余增广。在[PRiLY26，定理 A], 中，我们证明了存在一个等价

$$\mathbf{Coalg}^{\text{non-unital}}_{\mathbb{E}_1}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \simeq \mathcal{A}_\infty\text{-coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]$$

.....之间的 ∞-范畴，其中的非幺$\mathbb{E}_1$-余代数属于$\mathbf{D}(\Bbbk)$，并且（不一定是余幂零的）$\mathcal{A}_\infty$-余代数在拟同构意义下的范畴。通俗地说，这意味着问题(iii) 之所以存在，是因为余结合余代数过于 *strict* ，无法表现出同伦意义上正确的行为，因此需要用一种更宽松的概念来取代。

继续之前，我们先仔细看看 $\mathcal{A}_\infty$-代数和 $\mathcal{A}_\infty$-余代数的定义。通常， $\mathcal{A}_\infty$-代数被定义为一个分次向量空间 A，配备一族映射

$$\mu_n : A^{\otimes n} \longrightarrow A$$

其次数为 $n-2$，并满足一系列无限的二次关系：这些关系表达了 $\mu_1^2 = 0$，因此 $(A,\ \mu_1)$ 是一个链复形； μ_2 是满足关于微分 μ_1 的莱布尼茨法则的乘法； μ_3 是相对于 μ_1 的一个同伦，它连接 $\mu_2 \circ (\mu_2 \otimes \mathrm{id})$ 与 $\mu_2 \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_2)$，从而修正 μ_2 不严格结合所造成的缺陷，等等。对所有这些数据（以及涉及的符号）进行有效封装的一种方法是注意到，映射 μ_i 确定了一个次数为 -1 的余导子 $\boldsymbol{\mu}$，且反过来亦然；该余导子作用于悬挂后的 A 上的（约化）张量余代数 $T^c(sA)$。这是因为，这样的余导子完全由其与投影到余生成元的复合所决定：

$$\bigoplus_{n\geq 1} (sA)^{\otimes n} = \bar{T}^c(sA) \xrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \bar{T}^c(sA) \twoheadrightarrow sA. \tag{5}$$

用这些术语来说，二次关系的无限层级变成了 $\boldsymbol{\mu}^2 = 0$。这个定义的一个优点是，如何将巴构造 B 从结合代数扩展到 $\mathcal{A}_\infty$-代数变得不言自明：如果 A 是一个 $\mathcal{A}_\infty$-代数，那么 $\mathrm{B}A$ 就是由$T^c(sA)$给出的微分分次余代数，其微分由 $\boldsymbol{\mu}$确定。

$\mathcal{A}_\infty$-余代数同样可以定义为一个分次向量空间 C 以及一个映射族 s

$$\delta_n : C \longrightarrow C^{\otimes n}$$

次数为 $n-2$，满足一组二次关系的对偶层级。式（5）的对偶表述是，任意映射族 $\delta_n : C \longrightarrow C^{\otimes n}$ 都唯一确定一个次数为 -1 导子 $\boldsymbol{\delta}$

$$s^{-1}C \hookrightarrow \bar{T}^{\wedge}(s^{-1}C) \xrightarrow{\boldsymbol{\delta}} \bar{T}^{\wedge}(s^{-1}C) = \prod_{n\geq 1}(s^{-1}C)^{\otimes n} \tag{6}$$

的 完备化 在 C的降悬张量代数的完备化，因为这样的导子由其在生成元上的取值唯一确定。这一描述清楚地表明，针对余结合余代数的经典余巴函子 Ω （定义同（6），但使用直和）无法扩展为定义良好的 $\mathcal{A}_\infty$-余代数上的函子，但我们将记作$\widehat{\Omega}$的完备余巴函子却能以显然的方式扩展。

$\widehat{\Omega}$事实上，最终会发现，Lurie 的函子**余巴**（在链复形层面上）由 Ω 给出，即经典余巴函子的完备化。Ω 可能比 Ω 更自然，此外还有其他原因：

- 除非所涉及的余代数满足适当的连通性或余连通性条件，否则经典余巴函子 Ω 不保持拟同构。原因在于，Ω 会将拟同构映为滤过拟同构[2]，但所用的滤过通常并不$\widehat{\Omega}$完备。取完备化可以弥补这一缺陷，而 Ω 总是保持拟同构。

- Lurie 的**bar** 与**cobar** 在交换**C** 和$\mathbf{C}_{\mathrm{op}}$时相互转换。因此，自然可以预期，**cobar** 应由一个与**bar**对应的对偶公式给出，这意味着将 $\bigoplus$ 与 $\prod$互换。

$\widehat{\Omega}$与 Ω 相比，Ω 的缺点在于：在一范畴意义下，它完全不是巴构造 B 的伴随。这使得下面的定理颇为令人惊讶。

定理 A. </style}设 为任意特征的域。令微分分次结合代数 和 $\mathcal{A}_\infty$-余代数 分别表示微分分次结合代数与 $\mathcal{A}_\infty$-余代数的相对范畴，其中弱等价由拟同构给出。这些函子

$$\text{dg assoc alg} \underset{\widehat{\Omega}}{\overset{\mathrm{B}}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}_\infty\text{-coalg}$$

都是相对函子，因而在相应的局部化之间诱导出函子；我们将继续用同样的名称 $\widehat{\ }$ 表示它们。尽管B 和Ω 在一范畴意义下并非伴随，但局部化后的函子

$$\text{dg assoc alg}\,[\mathsf{Q}.\mathrm{iso}^{-1}] \underset{\widehat{\Omega}}{\overset{\mathrm{B}}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}_\infty\text{-coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathrm{iso}^{-1}] \tag{7}$$

是伴随，并且 (7) 等价于 *Lurie* 的伴随(3)。

让我们来解释如何理解伴随（7）的单位。设 A 是一个结合微分分次代数。存在一条之字形链

$$A \xleftarrow{\sim} \Omega\mathrm{B}A \longrightarrow \widehat{\Omega}\mathrm{B}A$$

其中第一个箭头是经典伴随（余单位（1）中的 A，众所周知，对于任意 ∞，它都是拟同构；第二个箭头则源于普通余巴构造包含在其完备化中。在 $\widehat{\ }$-范畴意义下，第一个箭头“不可见”，看起来我们只有一个映射 $A \to \Omega\mathrm{B}A$，这解释了（1）与（7）之间左右方向的反转。

[2]滤过拟同构通常并不是拟同构！

上述描述还将单位识别为一个导出函子： $A \xleftarrow{\sim} \Omega \mathrm{B} A$ 是 A的余纤维替换，因此，单位的构造方式是先进行余纤维替换，再取完备化，这正是导出完备化（这一概念见于 [HH13、CPRNW24、RiL25]）。类似地，我们可以将伴随（7）的余单位描述为一条之字形链

$$C \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{B}}\widehat{\Omega}C \leftarrow \mathrm{B}\widehat{\Omega}C,$$

$\widehat{\ }$其中，B 是对经典巴构造的非余幂零扩张；我们稍后将进一步说明。现在，第一个箭头是一个纤维替换，而相应的推论是，伴随（7）的余单位是取最大余幂零子余代数这一过程的导出函子。因此我们得到：

B定理。伴随(7) 的单位是导出完备化函子，而该伴随的余单位是取最大余幂零子余代数这一过程的导出函子。

定理B 是 Heuts 更一般定理的一个特例 [Heu24], ，但我们在这里可以非常明确地看到这一点。若将同伦完备微分分次代数定义为伴随（7）的单位为拟同构的代数，并将同伦余完备 $\mathcal{A}_\infty$-余代数定义为伴随（7）的余单位为拟同构的余代数，那么（7）便自然限制为以下范畴之间的等价： ∞同伦完备结合代数与同伦余完备 $\mathcal{A}_\infty$-余代数。

0.3. **包含-限制方形**。 我们的定理以 某种意义回答了这两个问题 (a)和 (b)，但没有回答(c)。事实上，相对范畴是同伦论的一种笨重模型，因此，若能将 Lurie的Bar–Cobar伴随描述为 Quillen 伴随，就会好得多。我们将采取的做法几乎同样好：把它表示为一对左右方向相反的两个Quillen 伴随的复合。

为此，我们需要认识到还存在另一个 1-范畴的巴-余巴伴随，它与（1）对偶，关联（不一定余幂零的）余代数与一种称为绝对代数的新型代数对象。这类对象是结合代数，其中结构运算的无限和按定义良好定义，且无需假设其底层带有拓扑。绝对代数与完备代数密切相关，但存在细微差别。模M上的自由绝对代数则同构于 M上的自由代数的完备化。关于这些结构的更多细节，参见 [GL18、RiL25]。存在一个完备 *bar-cobar* 伴随 [GL18]:

$$\text{abs dg assoc alg} \underset{\widehat{\mathrm{B}}}{\overset{\widehat{\Omega}}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathcal{A}_\infty\text{-coalg} \tag{8}$$

在（不一定余幂零的） $\mathcal{A}_\infty$-余代数与微分分次绝对结合代数之间。这里，$\widehat{\ }$完备余巴函子 Ω 的定义与之前相同。完备 bar 函子的一种非正式定义是：将函子 B 中使用的张量余代数替换为（真正的、非余幂零的）余自由$\mathcal{A}_\infty$-余代数。

最后一步是将巴-余巴伴随（1）与其对偶完备版本（8）结合起来，得到以下伴随的包含-限制方阵

$$\begin{tikzcd}
\text{dg assoc alg} \arrow[r, shift left, "\mathrm{B}"] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, shift left, "c\mathrm{Abs}"] & \mathcal{A}_\infty\text{-coalg}^{\mathsf{conil}}, \arrow[l, shift left, "\Omega"] \arrow[d, shift left, "\mathrm{Inc}"] \\
\text{abs dg assoc alg} \arrow[u, shift left, "\mathrm{Res}"] \arrow[r, shift left, "\widehat{\mathrm{B}}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathcal{A}_\infty\text{-coalg}\,. \arrow[l, shift left, "\widehat{\Omega}"] \arrow[u, shift left, "\mathrm{Sub}"]
\end{tikzcd}$$

这里，函子 Res 将任意绝对微分分次结合代数的结构映射限制为有限个运算之和，从而得到其底层结合代数；它有一个左伴随 cAbs。函子 Inc 将余幂零 $\mathcal{A}_\infty$-余代数包含到所有余代数中，并且有一个右伴随 Sub。

定理 C。 链复形上的投射模型结构可以右转移为 微分分次结合代数上的模型结构，然后沿 Ω 进一步左转移为范畴 $\mathcal{A}_\infty$-余代数^{conil}上的模型结构。对偶地，链复形上的内射模型结构可以左转移为 $\mathcal{A}_\infty$-余代数上的模型结构，然后进一步右转移为范畴 绝对微分分次结合代数上的模型结构。关于这些模型结构，上述所有伴随都是 *Quillen*$\widehat{\ }$伴随。函子$\mathrm{B}\circ\mathrm{Inc}$ 就是定理B中记作 A的函子，而函子$\mathrm{Res}\circ\Omega\widehat{\ }$就是定理Ω中记作 A的函子。

0.4. 主要结果。 前面所解释的情形只是结合代数这一特殊情形中更一般现象的一个例子。在一般背景下，我们将处理一个微分分次歌剧$\mathcal{P}$。我们假设：

- $\mathcal{P}$是约化的，
- $\mathcal{P}$是非对称的，或 $\mathsf{char}(\Bbbk) = 0$，
- 每个 $\mathcal{P}(n)$ 都是可对偶链复形，也就是说，是一个总维数有限的复形。

给定这些数据，我们构造一个一般的包含-限制方形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg} & \underset{\Omega_\pi}{\overset{\mathrm{B}_\pi}{\rightleftarrows}} & \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-}\mathsf{coalg}, \\ \Big\uparrow \mathrm{Res} \quad \Big\downarrow c\mathrm{Abs} & & \Big\uparrow \mathrm{Sub} \quad \Big\downarrow \mathrm{Inc} \\ \mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{comp}} & \underset{\widehat{\Omega}_\iota}{\overset{\widehat{\mathrm{B}}_\iota}{\rightleftarrows}} & \Omega\mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{coalg}\,. \end{array} \tag{9}$$

幺半群的 bar-cobar 伴随$\mathrm{B}_\pi \vdash \Omega_\pi$，是对（1）的推广，也是 [LV12]中研究的对象；其对偶的$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$完备版本 $\mathrm{B}_\iota \vdash \Omega_\iota$，是对（8）的推广，在 [GL18]中进行了研究。

定理 D。 方形 (9)中的范畴可以像定理 C那样赋予传递模型结构，从而使所有伴随都成为 *Quillen* 伴随。若我们设定

$$\mathbf{bar}_{\mathcal{P}} \coloneqq \mathrm{Inc}\circ\mathrm{B}_\pi\,, \quad \mathbf{cobar}_{\mathcal{P}} \coloneqq \mathrm{Res}\circ\widehat{\Omega}_\iota\,,$$

那么存在一个 ∞-范畴之间的伴随

$$\mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \underset{\mathbf{cobar}_{\mathcal{P}}}{\overset{\mathbf{bar}_{\mathcal{P}}}{\rightleftarrows}} \Omega\mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \tag{10}$$

介于 ∞-范畴之间，前者是 *dg* $\mathcal{P}$-代数在拟同构处局部化所得的范畴，后者是 ∞-范畴，其中的 *dg*$\Omega\mathcal{P}^*$-余代数在拟同构处局部化。由此得到的伴随 (10) 与 *Heuts* 在 [Heu24]

与 B定理附近的讨论一样，我们可以将同伦完备的 $\mathcal{P}$-代数定义为全忠实地包含在绝对 $\mathcal{P}$-代数中的那些对象，也就是说，满足导出单位 $\mathcal{P}$-代数 A 使得 de- rived unit $A \longrightarrow \mathrm{Res}\circ\mathrm{L}c\mathrm{Abs}(A)$ 是拟同构的。我们还可以将同伦余完备的 $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数定义为全忠实地包含在余幂零 B$\mathcal{P}$-余代数中的那些对象，也就是说，满足导出余单位 $\mathrm{Inc}\circ\mathrm{RSub}(C) \longrightarrow C$ 是拟同构的 $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数。与 B定理一样，这些也是 ∞-范畴伴随 $\mathrm{bar}_{\mathcal{P}} \dashv \mathrm{cobar}_{\mathcal{P}}$ 的单位和余单位，由此我们得到同伦完备的 $\mathcal{P}$-代数与

以及同伦余完备的$\Omega\mathcal{P}^*$-余代数。这为 [Heu24，定理 2。1]在特殊情形 $\mathbf{C} = \mathbf{D}(\Bbbk)$提供了一种新的证明，而且还给出了这些范畴各自明确的点集描述。

一类重要的幺半群是具有良好完备化的幺半群，也就是说，这类幺半群的平凡代数是同伦完备的。Heuts 在 [Heu24]中引入并研究了它们。在小节6.3中，我们根据点集描述给出幺半群具有良好完备化的明确判据，并构造了第一个不具有良好完备化的幺半群实例。我们还引入了对偶概念：具有良好余完备化的余纤维化幌半群，即其上的平凡余代数是同伦余完备的，并研究了一些实例。

0.5. **Francis–Gaitsgory 的增强的 bar-cobar 伴随。** 还有另一种可以在 ∞范畴论层面 [FG12中GR17], 构造的 bar-cobar 伴随，它与此前提及的所有伴随都不同。设 $\mathscr{P}$ 为一个增广的 ∞-幺半群，其取值于$\mathbf{D}(\Bbbk)$。增广 $\mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{1}$诱导出一个伴随

$$\mathbf{Alg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\mathbf{triv}}{\overset{\mathbf{indec}}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}(\Bbbk)$$

.....之间的 ∞-范畴，其中对象为 $\mathscr{P}$-代数，而底层 ∞-范畴是定义在 $\Bbbk$上的链复形范畴。函子$\mathbf{triv}$赋予任意链复形一个平凡的 $\mathscr{P}$-代数结构，而它的左伴随$\mathbf{indec}$则是求取 $\mathscr{P}$-代数的导出不可分解部分的函子。*indec*的**同调**称为（拓扑）安德烈-奎伦同调，参见 [Bas99、Man03]。当 $\mathscr{P}$ 是$\mathbb{E}_\infty$-幺半群在$\mathbf{D}(\Bbbk)$中的幺半群时，函子$\mathbf{indec}$称为余切函子。

关键在于，这个伴随普遍地经由由余单子$\mathbf{indec} \circ \mathbf{triv}$ 在$\mathbf{D}(\Bbbk)$上诱导出的余代数范畴分解，并且这些余代数可以等同于余幂零 $\mathrm{B}\mathscr{P}$-余代数。因此，我们得到一个伴随

$$\mathbf{Alg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\mathbf{\Omega^{enh}}}{\overset{\mathbf{B^{enh}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathscr{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk)),$$

称为增强的 *bar-cobar* 伴随，见 [FG12],，它介于 $\mathscr{P}$-代数与余幂零除幂$\mathbf{bar}(\mathscr{P})$-余代数之间。

直观地说，我们希望认为，式（9）中的上方水平伴随——它推广了式（1）——在 ∞-范畴层面诱导出增强的 bar-cobar 伴随。然而，正如[Che25，定理 5.31], 所指出的，这一般并不成立。主要原因是，点集余幂零$\mathrm{B}\mathcal{P}$-余代数在拟同构意义下并不等价于其 ∞-范畴对应物。我们得到的是 ∞-范畴层面的以下伴随图表：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{P}\text{-alg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] & \underset{\mathbb{R}\Omega_\pi}{\overset{\mathrm{B}_\pi}{\rightleftarrows}} & \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] & \underset{\mathbf{strict}}{\overset{\mathbf{loose}}{\rightleftarrows}} & \mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \\
 & & & \overset{\mathrm{Inc}}{\searrow}\ \underset{\mathbb{R}\mathrm{Sub}}{\nwarrow} & \Big\uparrow \mathbf{Sub}\ \ \Big\downarrow \mathbf{Inc} \\
 & & & & \Omega\mathcal{P}^*\text{-coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]
\end{array}$$

其中左伴随写在上方。复合水平伴随确实恢复了增强的巴-余巴伴随$\mathbf{B^{enh}} \dashv \mathbf{\Omega^{enh}}$但令人意外的是，伴随**松** $\dashv \mathbf{strict}$ 通常并非等价。在第 6.4 节中，我们构造了一些反例，说明其中某些函子并非完全忠实；不过，我们证明函子 **松** 确实在同伦完备的本质像上全忠实 $\mathcal{P}$-代数，证明方法是使用 bar 构造 B_π，参见推论 6.25。这汇集了文献中关于余幂零余代数的若干部分严格化结果

文献中已有相关余代数的研究，例如，当 $\mathcal{P}$ 连通且余幂零 B$\mathcal{P}$-余代数的次数为 ≥ 1 时，情况如何。

0.6. **增强的 bar-cobar 伴随的对偶版本**。 为了理解（9）中底部的水平伴随在 ∞-范畴层面上的意义，我们为非余幂零余代数构造了增强的 bar-cobar 伴随的对偶版本。设 $\mathscr{P}$ 为一个增广的 ∞-幺半群，其取值于 $\mathbf{D}(\Bbbk)$。正如我们可以使用点集算子来编码非余幂零余代数， ∞-幺半群也有同样的情形。有关详情，请参阅 [PRiLY26第 3]节。

在这里，增广映射 $\mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{1}$同样诱导出一个伴随 triv $\dashv$ prim，连接∞-范畴中的 $\mathscr{P}$-余代数与链复形在$\Bbbk$上的导出 ∞-范畴。函子 triv 为任意链复形赋予平凡的 $\mathscr{P}$-余代数结构，其右伴随 prim 则是 $\mathscr{P}$-余代数的导出原始元函子。其同调群应理解为余代数类型的（拓扑）coAndré-Quillen 同调群，其中，按照 [HS21]和 [BP23]的定义，（拓扑）coHochschild 同调群是其中的特例。这个伴随还通过由诱导单子 $\mathrm{Q}_{\mathscr{P}} = \mathrm{prim} \circ \mathrm{triv}$ 在 $\mathrm{D}(\Bbbk)$ 上的代数普遍地分解为下列伴随

$$\mathbf{Coalg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\widehat{\mathbf{\Omega}}^{\mathbf{enh}}}{\overset{\widehat{\mathbf{B}}^{\mathbf{enh}}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\top}}}} \mathbf{Alg}_{\mathbf{Q}_{\mathscr{P}}}(\mathbf{D}(\Bbbk)),$$

我们称之为完备增强 *bar–cobar* 伴随。然而，与 [FG12], 中的情形不同，要识别这个单子并非易事。为此，我们首先给出一个定义（1.34），定义丰富化 ∞-余幺半群上的代数——它们是 ∞-范畴化的类比，对应于 [RiL25]中所考察的绝对代数。随后，我们在推论4.8中证明，除去拟同构后，余幂零微分分次余幺半群上的点集代数确实呈现了相应的 ∞-范畴化对象。这种新的 ∞-范畴化定义与点集方法的结合，使我们得以证明以下结果。

定理 E (定理 4.10 和 4.13)。 设 $\mathcal{C}$ 是一个满足有限性假设ι的余幂零微分分次余幺半群。由 $\mathbf{Q}_{\Omega\mathcal{C}} = \mathbf{prim} \circ \mathbf{triv}$ 诱导的单子 $\mathbf{triv} \dashv \mathbf{prim}$ 可识别为单子

$$\widehat{\mathbf{S}}^{c}(\mathcal{C}) \simeq \prod_{n\geq 0} \left[\mathcal{C}(n), (-)^{\otimes n}\right]^{h\mathbb{S}_n}$$

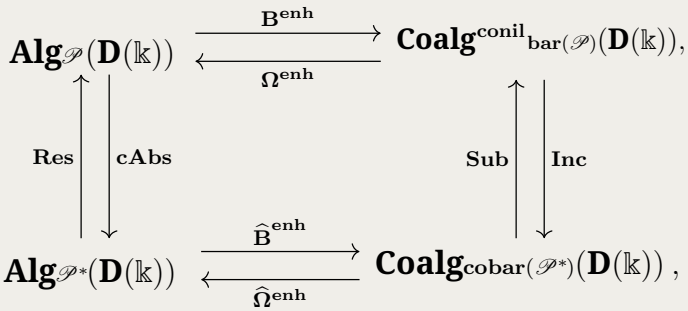
由 $\mathcal{C}$的底层富集 ∞-余幺半群所诱导，它编码了 ∞-范畴 $\mathcal{C}$-代数。此外，由完全 *bar-cobar* 伴随与关于拟同构的右 *Bousfield* 局部化复合所诱导的 ∞-范畴伴随

$$\Omega\mathcal{C}\text{-coalg}\left[\mathrm{Q}.\mathrm{iso}^{-1}\right] \underset{\widehat{\mathrm{B}}_{\iota}}{\overset{\widehat{\Omega}_{\iota}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\simeq}}}} \mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}\left[\mathrm{W}^{-1}\right] \underset{\mathbb{L}\mathrm{Id}}{\overset{\mathrm{Id}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\top}}}} \mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}\left[\mathrm{Q}.\mathrm{iso}^{-1}\right]$$

自然弱等价于 ∞-范畴的完全增强 *bar-cobar* 伴随 *n.*

0.7. **一个 ∞-范畴的包含-限制方形**。 最后，我们在 ∞-范畴层面汇集此前的所有构造，从而得到另一个包含-限制方形。

定理 F (定理5.6)。 设 $\mathscr{P}$ 是一个约化的 ∞-幺半群，其在 $\mathbf{D}(\Bbbk)$中富集，并且其各元数上的同调群均有界且为有限维。下列伴随图表



以下述意义交换：从左上方到右下方的左伴随自然地弱等价。

有趣的是，尽管这个交换方块并不等同于由式（∞-范畴层面的（9）所诱导的交换方块，但其交换性确实可由我们在本文中发展出的点集方法推出。尽管我们认为，这个方块在比 $\mathbf{D}(\Bbbk)$更一般得多的背景下也成立，但迄今为止，我们所知的唯一能得到关于 Koszul 对偶的纯粹 ∞-范畴论陈述的方法，就是点集方法。

0.8. **致谢**。我们衷心感谢 Grégory Ginot，本文的构思源于我们与他进行的几次讨论。第一作者还要感谢 Gijs Heuts 和 Brice Le Grignou，他们就这些主题进行了有益的讨论。

0.9. **约定**。 关于记号，我们采用以下约定。

- 设 $\Bbbk$ 为一个域，除非另有说明，其特征任意。我们的基底 1-范畴将是 $\Bbbk$上的链复形范畴，并带有由链复形的张量积 $-\otimes-$ 和 Koszul 符号约定给出的闭对称幺半结构。我们用 $[-,-]$表示该范畴的内 Hom。我们采用同调约定，微分的次数为 -1。我们将此 1-范畴记作 $\mathrm{Ch}(\Bbbk)$。
- 通常，$\mathrm{Ch}(\Bbbk)$中的微分分次幺半群记作 $\mathcal{P}$，微分分次余代数运算子记作 $\mathcal{C}$。对于微分分次幺半群 $\mathcal{P}$，我们将微分分次 $\mathcal{P}$-代数范畴记作 $\mathcal{P}$-alg，将微分分次 $\mathcal{P}$-余代数范畴记作 $\mathcal{P}$-coalg。微分分次余幺半群上的代数和余代数亦同。
- 设 C 为一个范畴，W 为 C 中的一个箭头类。我们将 $\mathsf{C}\,[\mathsf{W}^{-1}]$ 记作在 W 处局部化 C 所得的 ∞-范畴。在 ∞-范畴层级进行讨论时，极限和余极限均应理解为同伦极限和同伦余极限。如果

$$\mathsf{F} : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$$

是一个范畴之间的函子，它将 C 中的箭头类 W_{C} 映到 D 中的箭头类 W_{D}，我们仍将

$$\mathsf{F} : \mathsf{C}\,[\mathsf{W}_{\mathsf{C}}^{-1}] \longrightarrow \mathsf{D}\,[\mathsf{W}_{\mathsf{D}}^{-1}]$$

称为在 ∞-范畴层面诱导出的函子。不过，当 F 是一个左（分别为右）Quillen 函子且通常不保持弱等价时，我们会在 F 的左（分别为右）导出函子前加上 LF 和 RF。如果 C 是一个 1-范畴，我们通过神经函子 $\mathcal{N}$ 将其视为一个∞-范畴时，仍将其记作 C，而不是$\mathcal{N}(\mathsf{C})$。

- 我们的底层 ∞-范畴是将 $\Bbbk$ 上链复形范畴在所有拟同构类处局部化所得的范畴 $\mathrm{Ch}(\Bbbk)\,[\mathrm{Q}_{\circ}\mathrm{iso}^{-1}]$，它是一个对称幺半 ∞-范畴。我们将直接用$\mathbf{D}(\Bbbk)$ 表示这个 ∞-范畴。

- 一般而言，$\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中的富集 ∞-幺半群记作 $\mathscr{P}$，富集 ∞-余幺半群记作 $\mathscr{C}$。给定任意富集 ∞-幺半群 $\mathscr{P}$，我们用 $\mathbf{Alg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk))$ 表示底层 ∞-范畴 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中 $\mathscr{P}$-代数构成的 ∞-范畴，用 $\mathbf{Coalg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk))$ 表示$\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中 $\mathscr{P}$-余代数构成的 ∞-范畴。富集 ∞-余幺半群上的代数和余代数也类似。

1. 关于代数与余代数的回顾

本节旨在介绍本文其余部分将采用的点集框架和 ∞-范畴框架。

在点集方面，我们回顾幺半群和余幺半群的概念，以及可以在其上定义的代数与余代数范畴。随后，我们说明增广微分分次幺半群与余幂零微分分次余幺半群之间的幺半群 bar-cobar 伴随，以及如何在它们各自的代数与余代数范畴之间导出相应的 bar-cobar 伴随。最后，我们还将说明这些范畴各自可以赋予的不同模型结构。

在 ∞-范畴方面，我们采用 [Bra17 第4.1节中发展的对称序列形式体系。2], 在那里，可以将（富集） ∞-幺半群（以及（富集） ∞-余幺半群）定义为对称序列 ∞范畴中的幺半群（以及余幺半群）。另见 [Hau22、Hau19]，其中介绍了这一形式体系的另一种处理方法。我们首先回顾 ∞-幺半群上的代数，以及 ∞-余幺半群上的（除幂、余幂零）余代数的定义。然后，我们回顾在 [PRiLY26]中引入的幺半群上余代数定义的要点。最后，我们将在类似于 $\infty\mathbf{GL}\,\infty$ 的思路下，在 [范畴背景中引入18] [RiL25]所述余幺半群上代数的概念。关于余幺半群上代数的更多细节，另见

1.1. **点集预备知识**。 与 [PRiLY26 第 1], 节一样，我们考虑幺半范畴$\mathsf{sSeq}(\mathsf{Ch}(\Bbbk))$，其对象是微分分次对称序列，即由链复形组成的集合 $\{M(n)\}_{n\geq 0}$，每个链复形都带有 $\mathbb{S}_n$ 的作用（对所有 $n \geq 0$），其幺半结构由复合积给出。

微分分次歌剧是 $\mathcal{P}$ 中的单子对象，$\mathsf{sSeq}(\mathsf{Ch}(\Bbbk))$。对偶地，余幺半群是$\mathsf{sSeq}(\mathsf{Ch}(\Bbbk))$中的余幺半群对象。在 [PRiLY26 第 1], 节中，我们根据与微分分次向量空间相关联的自同态幺半群和余自同态幺半群，定义了微分分次歌剧上的代数与余代数。现在，我们首先想给出范畴 $\mathcal{P}$-代数的一个等价的单子性定义。单子定义自然对偶化，得到余幺半群上的余代数的余单子定义。

1.1.1. 算子上的代数与余算子上的余代数。 对任意微分分次对称序列，都可以通过舒尔实现函子在链复形范畴中构造一个自函子：

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(-) : \mathsf{sSeq}(\mathsf{Ch}(\Bbbk)) &\longrightarrow \mathsf{End}(\mathsf{Ch}(\Bbbk)) \\ M &\longmapsto \mathrm{S}(M) \coloneqq \bigoplus_{n\geq 0} M(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n}\,. \end{aligned}$$

舒尔实现函子 $\mathrm{S}(-)$ 是强幺半的。因此，对于任意微分分次歌剧 $\mathcal{P}$，其舒尔函子 $\mathrm{S}(\mathcal{P})$ 是链复形范畴中的一个单子；对于任意微分分次余幺半群 $\mathcal{C}$，其舒尔函子 $\mathrm{S}(\mathcal{C})$ 是链复形范畴中的一个余单子。

定义 1.1 （微分分次 $\mathcal{P}$-代数）。 设 $\mathcal{P}$是一个微分分次幺半群。微分分次 $\mathcal{P}$-代数 是单子 $\mathrm{S}(\mathcal{P})$ 上的代数。

定义 1.2（微分分次 $\mathcal{C}$-余代数）。设 $\mathcal{C}$ 是一个微分分次余幺半群。微分分次 $\mathcal{C}$-余代数 W 是余单子 $\mathsf{S}(\mathcal{C})$ 上的余代数。

注记 1.3（关于余幺半群上的余代数）。微分分次 $\mathcal{C}$-余代数 W 的结构映射

$$\Delta_W : W \longrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{C}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} W^{\otimes n}$$

取值于直和中。因此，任意元素 w 属于 W 都只能分解为有限和。这意味着微分分次 $\mathcal{C}$-余代数总是满足余幂零条件。此外，Δ_W 取值于右侧的余不变量这一事实意味着，这类结构中会出现除幂运算。因此，微分分次 $\mathcal{C}$-余代数的定义编码了具有除幂的余幂零型余代数结构。

1.1.2. 余幺半群上的代数。存在一个对偶 *Schur* 实现函子，其定义为

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{S}}^c : \mathsf{sSeq}(\mathsf{Ch}(\Bbbk))^{\mathsf{op}} &\longrightarrow \mathsf{End}(\mathsf{Ch}(\Bbbk)) \\ M &\longmapsto \widehat{\mathrm{S}}^c(M) \coloneqq \prod_{n\geq 0} [M(n), (-)^{\otimes n}]^{\mathbb{S}_n} . \end{aligned}$$

函子$\widehat{\mathrm{S}}^c(-)$ 由 [GL18，推论 3.4]可知是松单oidal的：因此，任意微分分次余幺半群都会在链复形范畴上诱导一个单子。

定义 1.4（微分分次 $\mathcal{C}$-代数）。一个微分分次 $\mathcal{C}$-代数 B 是单子 $\mathrm{S}^c(\mathcal{C})$ 上的一个代数（B，γ_B，d_B）。

注记 1.5（关于余幺半群上的代数以及绝对代数）。微分分次$\mathcal{C}$-代数的结构数据是一个态射

$$\gamma_B : \prod_{n\geq 0} [\mathcal{C}(n), B^{\otimes n}]^{\mathbb{S}_n} \longrightarrow B .$$

该态射将 $\mathcal{C}$ 中由 B 的元素标记的运算形式幂级数，映射到 B中的一个良定义像，而无需假设 B上存在底层拓扑。在 [RiL25], 中，第二位署名作者为此处称为余幺半群上的代数的结构引入了绝对代数这一术语。例如，按本文术语，“绝对李代数”简单来说就是余幺半群 $\mathcal{L}ie^*$上的代数，其中 $\mathcal{L}ie$是其线性对偶。“绝对结合代数”和“绝对交换代数”等也可类似定义。请注意，由于上述定义使用了不变量，这些运算默认也具有除幂运算。关于这类结构的更多内容，请参阅 [RiL25]。

1.1.3. 余幺半群上的代数的典范滤过。当余幺半群是余幂零时，余幺半群上的代数这一概念还可以有进一步的描述。回顾一下，对于任意微分分次余幺半群，都可以定义由 $\mathcal{C}$ 中至多允许 p次迭代非平凡部分分解的运算构成的子余幺半群 $R_p\mathcal{C}$，并且称 $\mathcal{C}$ 是余幂零的，如果

$$\operatorname*{colim}_p R_p\mathcal{C} \cong \mathcal{C} .$$

参见 [RiL24 第 1 节。2] 其中关于余幂零性的这一特定定义，实际上等价于 [LV12第 5 章中的定义。8]。

定义 1.6（微分分次 $\mathcal{C}$ 代数上的典范滤过）。设 $\mathcal{C}$ 是一个余幂零微分分次余幺半群，且 B 是一个微分分次 $\mathcal{C}$ 代数。B 的典范滤过是如下定义的递减滤过：

$$W^pB \coloneqq \mathrm{Im}\left(\gamma_B \circ \widehat{\mathrm{S}}^c(\pi_p)(\mathrm{id}_B) : \widehat{\mathscr{F}^c}(\mathcal{C}/R_p\mathcal{C})(B) \longrightarrow B\right)$$

where $R_p\mathcal{C}$ 表示余根滤过的第 p 项，对所有 $p \geq 0$ 。注意到我们有

$$B = W^0B \supseteq W^1B \supseteq W^2B \supseteq \cdots \supseteq \cdots .$$

典范滤过的每一步 W^pB 都是 dg $\mathcal{C}$-代数 B 的一个理想，也就是说，商B/W^kB具有一个由B原有的 dg $\mathcal{C}$-代数结构诱导的典范 dg $\mathcal{C}$-代数结构。

定义 1.7（dg $\mathcal{C}$-代数的完备化）。设 B 是一个 dg $\mathcal{C}$-代数。它的完备化 由以下极限给出

$$\widehat{B} \coloneqq \lim_p B/W^pB\,,$$

该极限取自 dg $\mathcal{C}$-代数范畴。

每个 dg $\mathcal{C}$-代数 B 都配备一个典范的 dg $\mathcal{C}$-代数态射

$$\varphi_B : B \longrightarrow \widehat{B}$$

该态射总是一个满态射，参见 [GL18，命题 4。24]。我们将 完备的 dg$\mathcal{C}$-代数定义为 dg $\mathcal{C}$-代数的全子范畴，其中这些代数的该映射是同构。它是 dg $\mathcal{C}$-代数的反射子范畴，其反射函子由完备化函子给出。注意，任何自由 dg $\mathcal{C}$-代数也都是完备的。

1.1.4. 幺半群上的余代数。 对于任意 dg 幺半群 $\mathcal{P}$，其对偶 Schur 函子 $\mathrm{S}^c(\mathcal{P})$ 不是余单子，因为对偶 Schur 函子仅是松单oidal的。然而，这种松结构赋予该自函子一种松余单子结构，据此可以定义余代数。

定义 1.8（微分分次 $\mathcal{P}$-余代数）。一个微分分次 $\mathcal{P}$-余代数 C是一个链复形（C，d_C），并配备一个结构映射

$$\Delta_C : C \longrightarrow \prod_{n\geq 0}[\mathcal{P}(n), C^{\otimes n}]^{\mathbb{S}_n}\,,$$

使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{\Delta_C} & \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P})(C) & \xrightarrow{\widehat{\mathrm{S}}^c(\mathrm{id})(\Delta_C)} & \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P})\circ\widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P})(C) \\ {\scriptstyle\Delta_C}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{\mathcal{P},\mathcal{P}}(C)} \\ \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P})(C) & & \xrightarrow{\qquad\widehat{\mathrm{S}}^c(\gamma)(\mathrm{id})\qquad} & & \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}\circ\mathcal{P})\,. \end{array}$$

一个微分分次 $\mathcal{P}$-余代数 C 的数据等价于一个微分分次幺半群的态射 $\mathcal{P} \longrightarrow \mathrm{coEnd}_C$，其中 coEnd_C 表示 C 的余自同态幺半群，由微分分次 S_n-模给出

$$\mathrm{coEnd}_C(n) \coloneqq [C, C^{\otimes n}]\,,$$

对所有 $n \geq 0$，其中幺半群结构由通常的映射复合给出。

注记 1.9（关于算子上的余代数）。微分分次 $\mathcal{P}$-余代数 C 的结构态射等价于一族映射

$$\Delta_C^n : C \longrightarrow [\mathcal{P}(n), C^{\otimes n}]^{\mathbb{S}_n}\,,$$

对所有 $n \geq 0$ 都成立。这些映射将 C 中的每个元素 c 对应到其关于 $\mathcal{P}(n)$ 中所有运算的分解，这些分解属于 $C^{\otimes n}$。这个定义涵盖了常见的余代数结构类型。例如，若 $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$ 是交换 operad，则微分分次 $\mathcal{C}om$-余代数恰好是非幺交换微分分次余代数。若 $\mathcal{P} = \mathcal{A}ss$ 是结合算子，则微分分次 $\mathcal{A}ss$-余代数就是非幺结合微分分次余代数。在这两种情况下，所得范畴都包含所有余代数，且不要求满足余幂零条件。

定理 1.10 ([Ane14，定理 2.7。11])。 设 $\mathcal{P}$ 是一个微分分次幺半群。微分分次 $\mathcal{P}$-余代数范畴具有余单子性。链复形范畴中存在一个余单子 $(\mathrm{L}(\mathcal{P})\ \omega, \zeta)$，使得 $\mathrm{L}(\mathcal{P})$-余代数范畴与微分分次 $\mathcal{P}$-余代数范畴等价。

特别是，这意味着存在一个余自由微分分次 $\mathcal{P}$余代数。在[Ane14], 的一般情形下，余单子$\mathrm{L}(\mathcal{P})$ 的构造是通过无限递归给出的，而在域$\mathrm{L}(\mathcal{P})$ 上的链复形范畴中，$\Bbbk$ 其构造在第一步便告结束。因此，它由下述纤维积给出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}(\mathcal{P}) & \xrightarrow{p_2} & \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}) \circ \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}) \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathcal{P},\mathcal{P}}} \\ \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}) & \xrightarrow{\widehat{\mathrm{S}}^c(\gamma)} & \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P} \circ \mathcal{P})\,. \end{array}$$

1.1.5. 代数运算子 *Koszul* 对偶。现在让我们回顾微分分次幺半群与余幂零微分分次余代数运算子之间存在的巴-余巴伴随。

定义 1.11 （约化微分分次代数运算子）。若微分分次代数运算子 $\mathcal{P}$ 的单位态射 $I \to \mathcal{P}$在元数 0 和 1 上是同构，则称其为约化的。类似地，若余幺半群 $\mathcal{C}$ 的余单位 $\mathcal{C} \to I$ 在元数 0 和 1 上是同构，则称其为约化的。

从现在起，我们始终默认所有微分分次幺半群和微分分次余代数运算子都是约化的。在此假设下，存在一个可追溯至 Ginzburg–Kapranov [GK94] 和 Getzler–Jones [GJ94]

$$\mathsf{Operads} \underset{\Omega}{\overset{\mathrm{B}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\top}}}} \mathsf{Cooperads},$$

微分分次幺半群与微分分次余幺半群之间。注意，约化的微分分次余幺半群自动是余幂零的。

一个 扭曲态射 $\alpha\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}$ 是一个次数为 -1的分次态射，它满足以下方程

$$\alpha \circ d_{\mathcal{C}} - d_{\mathcal{P}} \circ \alpha + \alpha \star \alpha = 0\,,$$

其中 $\alpha \star \alpha$ 由以下复合给出

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta_{(1)}} \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C} \xrightarrow{\alpha \circ_{(1)} \alpha} \mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P} \xrightarrow{\gamma_{(1)}} \mathcal{P}\,.$$

这里， $\Delta_{(1)}$ 和$\gamma_{(1)}$ 分别指 $\mathcal{C}$ 的无穷小分解和 $\mathcal{P}$的无穷小复合。上面的方程对应于由 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{P}$构造的卷积前 Lie 代数中的 Maurer-Cartan 方程。巴-余巴伴随表示并余表示微分分次余幺半群与微分分次幺半群之间的扭曲态射：

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Operads}}(\Omega\mathcal{C}, \mathcal{P}) \cong \mathrm{Tw}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cooperads}}(\mathcal{C}, \mathrm{B}\mathcal{P})\,.$$

更多详情请参阅 [LV12第 6] 。

1.1.6. 由扭曲态射诱导的经典巴构造-余巴构造伴随。任意扭曲态射 $\alpha\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}$ 都会诱导出一个巴-余巴伴随，其相对于 α

$$\mathcal{C}\text{-}\mathsf{coalg} \underset{\mathrm{B}_\alpha}{\overset{\Omega_\alpha}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\top}}}} \mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg},$$

在 dg $\mathcal{C}$-余代数范畴与 dg $\mathcal{P}$-代数范畴之间。对于任意 dg$\mathcal{P}$-代数 A，巴构造 $\mathrm{B}_\alpha A$ 是通过取 A 上的余自由 $\mathcal{C}$-余代数，并利用 A 上的代数结构和扭曲态射 α 构造微分得到的。同样，对于任意 dg $\mathcal{C}$-余代数

W，余 bar 构造 $\Omega_\alpha W$ 是通过取 W 上的自由 $\mathcal{P}$-代数，并利用 W 上的余代数结构构造微分以及扭曲态射 α。关于这些主题的更多详情，请参阅 [LV12第 11] 章。

1.1.7. 由扭曲态射诱导的完备 *bar-cobar* 伴随。 任意一个余幂零微分分次余幺半群 $\mathcal{C}$ 与微分分次歌剧 $\mathcal{P}$之间的扭曲态射 $\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}$，都会诱导出第二个 bar-cobar 伴随，我们称之为相对于 α的完备 *bar-cobar* 伴随

$$\mathcal{P}\text{-coalg} \underset{\widehat{\mathrm{B}}_\alpha}{\overset{\widehat{\Omega}_\alpha}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}$$

介于微分分次 $\mathcal{P}$-余代数范畴与完备微分分次 $\mathcal{C}$-代数范畴之间。与前一种情况一样，这个伴随是通过考虑自由对象与余自由对象，并为它们赋予适当的微分而得到的。更多详情请参见 [GL18]或 [GRiL23]。

1.1.8. 可容许运算子与余可容许运算子。 设 $\mathcal{P}$ 为一个微分分次歌剧。自然地，我们会考虑微分分次 $\mathcal{P}$-代数和微分分次 $\mathcal{P}$-余代数，并将拟同构视为等价。若 $\mathcal{P}$ 上的链复形范畴的射影模型结构能够沿自由-遗忘伴随传递，则称 $\mathcal{P}$ 是可容许的

$$\mathcal{P}\text{-alg} \underset{\mathrm{U}}{\overset{\mathrm{S}(\mathcal{P})(-)}{\rightleftarrows}} \mathsf{Ch}(\Bbbk)\,,$$

从而使 dg $\mathcal{P}$-代数的范畴具有一个模型结构，其中弱等价由拟同构给出，纤维化由逐次数满射给出。域的特征为零时，任何 dg 歌剧都是可容许的 [Hin97]。

对偶地，若沿余自由-遗忘伴随，$\mathcal{P}$ 上的链复形的单射模型结构可以转移，我们就称 $\mathcal{P}$ 余可容许 $\Bbbk$。

$$\mathcal{P}\text{-coalg} \underset{\mathrm{U}}{\overset{\mathrm{L}(\mathcal{P})(-)}{\underset{\top}{\rightleftarrows}}} \mathsf{Ch}(\Bbbk)\,,$$

从而使 dg $\mathcal{P}$-余代数的范畴具有一个模型结构，其中弱等价由拟同构给出，余纤维化由逐次数单射给出。即使在特征零域上，任何 dg 歌剧都余可容许这一点也不成立，反例见 [GL18，命题 8。10] 然而，余纤维 dg 歌剧（因此，形如$\Omega\mathcal{C}$的 dg 歌剧）总是通过标准论证余可容许，例如 [BM03]中的论证。更多细节亦见 [GL18、GRiL23] 。

1.1.9. 沿经典巴构造-余巴构造伴随传递的模型结构。 设 $\mathcal{P}$是一个微分分次幺半群（在我们的语境中总是容许的）。从 $\Bbbk$ 上的链复形传递而来的模型结构给出了 ∞-范畴中 $\mathcal{P}$模代数在拟同构意义下的范畴 [Hin15，Hau22]。有时，将这一模型结构沿巴-余巴伴随传递到一个合适的余幺半群上的余代数范畴中会更方便。在良好的情形下，当扭曲态射$\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}$ 称为*Koszul*时，可得到微分分次 $\mathcal{P}$-代数与微分分次$\mathcal{C}$-余代数之间的 Quillen 等价，后者带有传递而来的模型结构。关于特征零下的以下结果，参见 [Val20，DCH16] ；关于其在正特征域上的推广，参见 [GRiL23] 。

定理 1.12. 设 $\mathcal{C}$ 是一个余幂零微分分次余幺半群。在微分分次 $\mathcal{C}$-余代数范畴上存在一种组合模型范畴结构，有时称为典范模型结构，其由以下映射类给出：

(1) 弱等价类由满足$\Omega_\alpha(f)$ 为拟同构的态射 f 给出，*(2)* 余纤维化类由逐次数单射给出，

(3) 纤维化类由相对于无圈余纤维化具有右提升性质的态射给出。

此外，如果 $\alpha\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}$ 按照 [LV12第 6], 的意义是 *Koszul* 的，那么相对于 α 的巴-余巴伴随是一个 *Quillen* 等价。

例 1.13. 泛扭曲态射 $\iota\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \Omega\mathcal{C}$ 和 $\pi\colon \mathrm{B}\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$（由幺半群的 bar-cobar 伴随的单位和余单位诱导）都是 Koszul 扭曲态射。

注记 1.14. 在正特征域上，需要补充假设：余幂零微分分次余幺半群 $\mathcal{C}$ 还须按照 [GRiL23], 的意义是准平面的，并且必须将范围限制为扭曲态射 $\iota\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \Omega\mathcal{C}$。不过，如果我们的目标是理解 S-余纤维化运算子 $\mathcal{P}$ 上微分分次 $\mathcal{P}$-代数的 ∞-范畴，那么我们总可以将 $\mathcal{P}$ 替换为形如 $\Omega\mathcal{C}$ 的微分分次幺半群，其中 $\mathcal{C}$ 是拟平面幂零微分分次余代数，同时不改变微分分次 $\mathcal{P}$-代数的底层 ∞-范畴。典范选择为 $\mathcal{C} = \mathrm{B}(\mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$；对于任意微分分次幺半群 $\mathcal{P}$，它确实是准平面的，并且 $\Omega\mathrm{B}(\mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$ 总是与 $\mathcal{P}$ 拟同构。

注意，在定理 1.12中，弱等价类严格 包含于 dg 余代数的拟同构类中$\mathcal{C}$——除非扭曲态射是由 $\mathcal{C} \longrightarrow$给出的终端态射。对这类弱等价进行局部化，并不能给出 ∞在 $\mathbf{D}(\Bbbk)$中余代数范畴的内在 -范畴；相反，由于巴-余巴伴随（在适当情形下）是 Quillen 等价，它为我们提供了 dg -代数底层 $\mathcal{P}$-范畴的另一种呈现。然而，正如 [DCH16], 所示，dg $\mathcal{C}$-余代数的模型范畴允许相对于拟同构进行左 Bousfield 局部化。

命题 1.15。 设 $\mathcal{C}$是一个余幂零微分分次余幺半群。由链复形传递而来的 *dg* $\mathcal{C}$-余代数上存在一个组合模型结构，其由以下态射类确定

（*1*）余纤维化类由逐次单射给出，（*2*）弱等价类由拟同构给出，（）

*3*对所有不圈余纤维化满足性质*d*此外，该层 *ffib* *retracts* *determine* *by* *rig* 从 *dg*$\Omega\mathcal{C}$-代数传递而来的典范模型结构的左 *Bousfield* 局部化（该结构与沿任意 *Koszul* 扭曲态射传递而来的模型结构一致）。这意味着，*dg* $\mathcal{C}$-余代数上的恒等函子——在源端赋予典范模型结构，在目标端赋予拟同构模型结构——是一个左 *Quillen* 函子。

注记 1.16. 在正特征域上，同样需要添加额外假设，即$\mathcal{C}$ 是 准平面。参见 [GRiL23第 5 节。6] 了解更多详情。

1.1.10. 沿完备 *bar-cobar* 伴随传递的模型结构。 如前所述，并非所有幺半群都是余可容许的，即使在特征零域上也是如此。此外，即便它们是余可容许的，也未必能呈现其 ∞-范畴对应物，例如[Pér22]中所示。然而，通过使用余纤维 dg 歌剧可以解决这些问题，因为它们确实能呈现其 ∞-范畴对应物，参见 [PRiLY26]。事实上，不失一般性，我们可以假设该余纤维 dg 歌剧具有$\Omega\mathcal{C}$的形式，其中 $\mathcal{C}$ 是一个余幂零微分分次余幺半群。在此背景下，dg $\Omega\mathcal{C}$-余代数在拟同构意义下呈现了正确的 ∞-范畴。此外，它们允许从链复形传递而来的模型结构。事实上，由于$\Omega\mathcal{C}$ 是余纤维的，所以它特别是余可容许的。有时，沿完备 bar-cobar 伴随传递这一模型结构很方便，从而在 dg $\mathcal{C}$-代数上获得一个 Quillen 等价模型结构 [GL18]。

定理 1.17。 设 $\mathcal{C}$ 为一个余幂零微分分次余幺半群。在由以下几类映射给出的完备 $\mathcal{C}$-代数范畴上，存在一个组合模型范畴结构：

$\widehat{\ }$*(1)* 弱等价类由满足 f 且 $B_\iota(f)$ 为拟同构的态射给出；*(2)* 纤维化类由逐次数满射给出；*(3)* 余纤维化类由相对于无圈纤维化具有左提升性质的态射给出。

此外，赋予此模型结构后，相对于$\iota:\ \mathcal{C}\longrightarrow\Omega\mathcal{C}$ 的完备 *bar-cobar* 伴随成为一个 *Quillen* 等价。

注记 1.18。 对于正特征域上的准平面幂零微分分次余代数，这一结果也有推广，参见 [GRiL23，第 6 节以及 7]。

再次注意，弱等价类严格包含于完备微分分次 $\mathcal{C}$-代数的拟同构类中。在此弱等价类处局部化，并不能给出 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中代数的一个 ∞-范畴。相反，由于完备 bar-cobar 伴随是一个 Quillen 等价，它给出了微分分次 $\Omega\mathcal{C}$-余代数底层 ∞-范畴的另一种呈现。然而，完备微分分次 $\mathcal{C}$-代数可以相对于拟同构进行右 Bousfield 局部化。

命题 1.19。 设 $\mathcal{C}$ 为一个幂零微分分次余代数。存在一个从链复形转移而来的 *qp*-完备微分分次 $\mathcal{C}$-代数上的组合模型结构，其由以下态射类确定

(1) 纤维化由逐次数满射给出，*(2)* 弱等价由拟同构给出，*(3)* 余纤维化类由相对于所有无圈纤维化的左$\check{}$提升性质确定

。此外，这是从 *dg*$\Omega\mathcal{C}$-余代数上的典范模型结构转移而来的右 *Bousfield* 局部化。也就是说，*dg* $\mathcal{C}$-余代数范畴上的恒等函子，其源端赋予典范模型结构，目标端赋予拟同构模型结构，是一个右 *Quillen* 函子。

注记 1.20. 参见 [GRiL23，第7节。5]关于涉及准平面假设的一般性陈述；在特征零域上，该陈述可化归为上述命题。

1.2. **∞-范畴预备知识**。 本节中，我们采用 ∞-范畴对称序列的形式体系，该体系由 [Bra17第 4.1 节2]中发展而来。另见 [Shi23第 5.2 节4] ，其中对这些思想作了详细阐述。我们运用这一形式体系来定义富化的 ∞-(余)代数。请注意，根据 [Ara26], 近期的工作，这种富化∞-幺半群的形式体系等价于 [CH20]中发展的形式体系。

1.2.1. 对称序列、幺半群与余幺半群。 为简便起见，我们在基底为链复形的对称幺半 ∞-范畴中工作，且以拟同构为准 $\Bbbk$ $\mathbf{D}(\Bbbk)$，不过这些定义在更一般的刚性紧生成对称幺半 ∞-范畴 [PRiLY26第 6]节。

令 $\mathsf{Fin}^{\simeq}$ 表示有限集及其双射所构成的 1-范畴。我们将$\boldsymbol{D}(\Bbbk)$ 中的**对称序列**定义为从 $\mathsf{Fin}^{\simeq}$ 到$\mathbf{D}(\Bbbk)$ 的 ∞-范畴函子：

$$\mathbf{sSeq}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \coloneqq \mathbf{Fun}(\mathsf{Fin}^{\simeq}, \mathbf{D}(\Bbbk))\,.$$

对于 M中的 $\mathbf{sSeq(D}(\Bbbk))$，我们将 $M(n)$ 记作 M在集合 $n=\{1,\cdots,n\}$上的取值。$\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中对称序列的∞-范畴具有一个由复合积 $\circledcirc$给出的幺半结构；对于两个对称序列 M和 N，该复合积逐点定义为

$$M\circledcirc N(n)\simeq\bigoplus_{k\geq 0}\left(\bigoplus_{\underline{n}=\sqcup_{i=1}^{k}S_i} M(k)\otimes N(S_1)\otimes\cdots\otimes N(S_k)\right)_{h\mathbb{S}_k}$$

如 [Shi23，附录 A.1 中所计算的那样。]利用这个复合积，可以将幺半群定义为幺半 ∞-范畴中的幺半群。

定义 1.21（∞-幺半群）。 ∞-幺半群 是对称序列范畴中关于复合积的一个幺半群对象。

定义 1.22（增广 ∞-幺半群）。 增广 ∞-幺半群 是一个 ∞-幺半群 $\mathscr{P}$，并带有一个 ∞-幺半群映射 $\epsilon\colon\ \mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{1}$。

定义 1.23（∞-余幺半群）。 ∞-余幺半群 是对称序列范畴中的一个余幺半群对象。

定义 1.24（余增广 ∞-余幺半群）。 余增广 ∞-余幺半群 是一个 ∞-余幺半群 $\mathscr{C}$，并带有一个 μ 映射：$\mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{C}$，其属于 ∞-余幺半群。

1.2.2. *Lurie* 在 ∞-幺半群与 ∞-余幺半群之间的 *Bar–Cobar* 伴随。 在 [Lur17], Lurie 构造了一个一般性的巴-余巴伴随，适用于带基点的幺半范畴上的增广幺半群与余增广余幺半群；该范畴 ∞-范畴 $\mathbf{C}$ 具有单纯对象的几何实现和余单纯对象的全化。更多详情请参见 [Lur17，第 4 节。3] 或第 7 节。将这一一般构造应用于 $\mathbf{C} = \mathbf{sSeq}(\mathbf{D}(\Bbbk))$，即可得到以下伴随

$$\infty\text{-}\mathbf{Op}^{\mathbf{aug}} \underset{\mathbf{cobar}}{\overset{\mathbf{bar}}{\rightleftarrows}} \infty\text{-}\mathbf{Coop}^{\mathbf{coaug}}\,,$$

它还可以进一步限制为约化 ∞-幺半群与约化 ∞-余幺半群之间的伴随。 ∞-幺半群 $\mathscr{P}$ 的 bar 构造由下列单纯对象的几何实现计算得出

$$\mathbf{bar}(\mathscr{P}) \coloneqq |\,\mathbf{bar}(\mathbb{1},\mathscr{P},\mathbb{1})_\bullet\,| = \left|\ \mathbb{1} \leftleftarrows \mathscr{P} \lefteqgtr \mathscr{P}\otimes\mathscr{P} \lefteqgtr\lefteqgtr \cdots\ \right|.$$

对偶地， ∞-幺半群 $\mathscr{C}$的 cobar 构造由下列余单纯对象的全化计算得出

$$\mathbf{cobar}(\mathscr{C}) \coloneqq \mathbf{Tot}\left(\mathbf{cobar}(\mathbb{1},\mathscr{C},\mathbb{1})_\bullet\right) = \mathbf{Tot}\left(\ \cdots \lefteqgtr\lefteqgtr \mathscr{C}\otimes\mathscr{C} \lefteqgtr\lefteqgtr \mathscr{C} \leftleftarrows \mathbb{1}\ \right).$$

此外，根据 ∞，约化 ∞-幺半群与约化 ∞-余幺半群之间的这一伴随成为 [Heu24，定理 3.4]所述的

注记 1.25。 第 1.1.5 段中的点集幺半群 bar 构造是底层 ∞-范畴 bar 构造的一个模型 ∞-幺半群。事实上，可以用与 [Bra17第 5.4 节中相同的论证比较这两种构造。2]。

1.2.3. 与富化 ∞-*(*余*)*幺半群和*(*余*)*代数相关联的舒尔函子。与点集情形一样，有一个函子

$$\mathbf{S}(-) : \mathbf{sSeq}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \longrightarrow \mathbf{End}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,,$$

从 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中对称序列的 ∞-范畴到 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中自函子的 ∞-范畴。它将任意对称序列 M 关联到一个自函子 $\mathbf{S}(M)$，其定义公式为

$$\mathbf{S}(M) = \bigoplus_{n\geq 0} \left(M(n)\otimes(-)^{\otimes n}\right)_{h\mathbb{S}_n}.$$

函子 $\mathbf{S}(-)$ 是对称幺半的，因此会将（富化的） ∞-幺半群映射为单子，并将（富化的） ∞-余幺半群映射为余单子。

定义 1.26 ($\mathscr{P}$-代数**)。** $\mathscr{P}$-代数 是单子 $\mathbf{S}(\mathscr{P})$ 上的代数。

注记 1.27. $\mathscr{P}$-代数是 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中的一个对象 A，并配备一族结构映射

$$\gamma_n^A : \left(\mathscr{P}(n) \otimes A^{\otimes n}\right)_{h\mathbb{S}_n} \longrightarrow A$$

对于所有满足结合律和幺元性条件（至高阶相干性）的 $n \geq 1$.

注记 1.28（$\mathscr{P}$-代数的点集模型）。任何在$\mathbf{D}(\Bbbk)$中富集的∞-幺半群都存在一个点集模型，该模型由某个在 $\Bbbk$上的链复形中的微分分次歌剧给出。通过以下方式比较它们各自的 ∞-代数范畴即可看出这一点：设 $\mathcal{P}$ 为一个微分分次歌剧，作为微分分次对称序列是射影的。那么存在一个 ∞-范畴的等价

$$\mathcal{P}\text{-alg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \simeq \mathbf{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk))$$

在微分分次 $\mathcal{P}$-代数（模拟同构）与$\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中由诱导的富集∞-幺半群上的代数之间。这由 Barr–Beck–Lurie 定理得出，因为当 $\mathcal{P}$的底层微分分次对称序列是射影的时，点集舒尔函子呈现 ∞-范畴的舒尔函子。类似的论述可参见 [Hin15、PS18、Hau22]。

定义 1.29 （除幂余幂零 $\mathscr{C}$-余代数）。 除幂余幂零 $\mathscr{C}$- 余代数 W 是余单子 $\mathbf{S}(\mathscr{C})$ 上的余代数。

注记 1.30. 除幂余幂零 $\mathscr{C}$-余代数是$\mathbf{D}(\Bbbk)$中的一个对象 W，并赋有一个结构映射

$$\Delta_W : W \longrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} \left(\mathscr{C}(n) \otimes W^{\otimes n}\right)_{h\mathbb{S}_n} ,$$

该映射同样满足某种结合律条件，并且只在高阶相干性的意义下成立。由于 Δ_W 落在无限余积而非无限积中，这意味着分解必须满足某种有限性条件，这也解释了“余幂零”这一修饰语。此外，这个结构映射落在同伦轨道上，因此该分解运算也具有除幂结构。

注记 1.31。 在 [Heu24], Heuts 提出了余幺半群的除幂 $\mathscr{C}$-余代数的定义 $\mathscr{C}$ 该定义大致上将上述定义中的无限余积替换为无限积，从而去除了对分解映射的余幂零性约束。

1.2.4. 对偶 *Schur* 函子与富集 ∞-余幺半群上的代数。 每个对称序列还对应另一个 Schur 函子，我们称之为对偶 *Schur* 函子。将对称序列 M 映射到其对偶 Schur 函子，定义了一个函子

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{S}}^c(-) : \mathbf{sSeq}(\mathbf{D}(\Bbbk))^{\mathsf{op}} &\longrightarrow \mathbf{End}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \\ M &\longmapsto \prod_{n\geq 0} \left[M(n), (-)^{\otimes n}\right]^{h\mathbb{S}_n} \end{aligned}$$

从 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中对称序列的 ∞-范畴到$\mathbf{D}(\Bbbk)$ 上自函子的 ∞-范畴。这里，$[-,-]$ 表示$\mathbf{D}(\Bbbk)$ 的自富集，它与张量积互为伴随。

引理 1.32. 函子$\mathbf{S}^c(-)$ 是松单*oidal*的。

证明。 我们将 [RiL22，命题 5 中给出的证明1]推广到 ∞-范畴情形 . □

注 1.33。1-范畴完全 Schur 函子 $\mathrm{S}^c(-)$ 是松单oidal的。自然映射

$$\mathsf{Alg}(\mathsf{End}(\mathsf{Ch}(\Bbbk)))[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \longrightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{E}_1}(\mathbf{End}(\mathbf{D}(\Bbbk)))$$

将其映射到 $\mathbf{S}^c(-)$，因此其 ∞-范畴对应物也是松单oidal的，从而为定理1.32提供了另一种证明。

定理 1.32 表明，一个（富集） ∞-余幺半群 $\mathscr{C}$ 在 $\mathbf{D}(\Bbbk)$中会被映射为 $\mathbf{D}(\Bbbk)$中的一个单子。因此，定义一个 ∞-余幺半群上的代数也是有意义的。

定义 1.34 ($\mathscr{C}$-代数)。 $\mathscr{C}$-代数是单子 $\mathbf{S}^c(\mathscr{C})$ 上的代数。

注 1.35。 $\mathscr{C}$-代数是$\mathbf{D}(\Bbbk)$中的一个对象 B，并配备一个结构映射

$$\gamma^B : \prod_{n\geq 0} \left[\mathscr{C}(n), B^{\otimes n}\right]^{h\mathbb{S}_n} \longrightarrow B$$

它满足结合律和幺元性条件（直至高阶相干性）。这种结构是同伦层面上所研究的绝对代数 结构的类比 [RiL25]。

1.2.5. 运算子上的余代数。 我们简要回顾 ∞-范畴中关于（富化） ∞-幺半群上的余代数的定义，该定义见 [PRiLY26，第 2]节。

定义 $\mathscr{P}$-余代数的主要障碍在于，$\mathbf{S}^c(-)$ 仅是松单oidal的，因此一个 ∞-幺半群的像先验上并非余单子。遵循 [Heu24，附录 A],中的思路，我们将这个对偶 Schur 函子扩展到 ∞pro-对象的$\mathbf{pro}(\mathbf{D}(\Bbbk))$范畴，使得该赋值

$$\widehat{\mathbf{S}}^c_{\mathrm{pro}}(-) : \mathbf{sSeq}(\mathbf{D}(\Bbbk))^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{End}(\mathbf{pro}(\mathbf{D}(\Bbbk)))$$

现在是一个强幺半函子。因此，将$\mathbf{pro(D(\Bbbk))}$中的 $\mathscr{P}$-余代数定义为关于此余单子的余代数是有意义的。

最后，记 $c : \mathbf{D}(\Bbbk) \longrightarrow \mathbf{pro(D(\Bbbk))}$为典范全忠实包含，它将$\mathbf{D}(\Bbbk)$中的对象映射到相应的常值 pro-对象。沿此包含映射取纤维积，便可得到$\mathbf{D}(\Bbbk)$中 $\mathscr{P}$-余代数的良定义。

D定义 1.36 ($\mathscr{P}$-余代数)。 ∞-范畴中的-余代数 如下定义为纤维积 k

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Coalg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) & \longrightarrow & \mathbf{Coalg}_{\widehat{\mathbf{S}}^c_{\mathrm{pro}}(\mathscr{P})}(\mathbf{pro}(\mathbf{D}(\Bbbk))) \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{U}} \\ \mathbf{D}(\Bbbk) & \xrightarrow{\quad c \quad} & \mathbf{pro}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \end{array}$$

在 ∞-范畴的 ∞-范畴中。

∞-范畴 $\mathscr{P}$-中的余代数是可呈示的，并且关于基底 ∞-范畴 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 是余单子性的。当 $\mathscr{P}$ 是一个空间富化 ∞-幺半群的线性化时，此定义恢复了 Lur17中讨论的关于 ∞-幺半群的余代数的定义， [Lur17第 2], 章中，该定义由 $\mathscr{P}$-代数在对范畴$\mathbf{D}(\Bbbk)^{\mathrm{op}}$中的对范畴给出。详情见 [PRiLY26，定理 B]。

此外，让我们回顾一下 [PRiLY26], 的主要定理，该定理比较了 ∞：在一个余纤维微分分次歌剧上、对拟同构局部化后的点集余代数 ∞的范畴，与该微分分次歌剧底层的富集 ∞-歌剧上的余代数（如上所述）。

定理 1.37 ([PRiLY26，主要定理])。 设$\mathcal{P}$是一个余纤维微分分次歌剧。存在一个 ∞范畴之间的等价

$$\mathcal{P}\text{-coalg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \simeq \mathbf{Coalg}_{\mathcal{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk))$$

在 dg $\mathcal{P}$-余代数（模拟同构）与$\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中由诱导的富集∞-歌剧上的余代数之间。

特别是，这意味着， $\mathcal{P}$余代数函子的点集描述（见[Ane14] ）也描述了 ∞-范畴的余自由构造。关于这一定义及其性质的更多细节，请参阅 [PRiLY26]。

2. 点集包含限制方块

本节中，我们构造了一个由 Quillen 伴随组成的交换方块，并称之为包含-限制方形。它将两个自然的限制函子和包含函子与 bar-cobar 伴随及完备 bar-cobar 伴随交织起来。我们还证明，这个特定的 1-范畴层面的 Quillen 伴随方块会在 ∞-范畴层面诱导出一个伴随。左、右 ∞-伴随均由左、右 Quillen 函子的复合得到，这是一个颇令人意外的现象。

记号 2.1. 在本文余下部分中，$\mathcal{P}$ 始终表示一个微分分次幺半群，$\mathcal{C}$ 始终表示一个余幂零微分分次余幺半群。

本文中的幺半群和余幺半群均满足以下假设。

假设 1.

(1) 它们底层的微分分次对称序列是约化的，即在元数 0处平凡，且 $\Bbbk$ 在元数 1处平凡。*(2)* 基域 $\Bbbk$的特征为零，或者微分分次幺半群和余幂零微分分次余幺半群是非对称的。*(3)* 对所有 $n \geq 0$，元数为 n的运算所构成的微分分次$\mathbb{S}_n$-模是逐次有限维且有界的复形。因此，它在 $\Bbbk$上具有有限总维数。

下面对这些假设作几点说明。

- 由 (1) 可知，任何微分分次歌剧都是增广的，而任何微分分次余代数运算子都是余幂零且余增广的。
- 由 (3) 可知，微分分次歌剧的线性对偶是微分分次余幺半群，反之亦然。
- 这些假设在幺半群的 bar-cobar 伴随下保持不变。
- 在假设 (2) 下，大多数我们感兴趣的例子都满足 (3)。若 (2) 不成立，则 (3) 显得不自然：例如，任何 $\mathbb{E}_\infty$ 正特征下的幺半群在每个元数上都是无限维的> 1。在这种情况下（参见 [GRiL23，第 2] 节），需要放宽假设 (3)，使微分分次$\mathbb{S}_n$-模的元数 n 运算逐次有限维且仅有下界，以便纳入准平面微分分次余幺半群的例子，例如形如 $\mathrm{B}(\mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$的对象，其中 $\mathcal{E}$是 Barratt–Eccles 歌剧 [BFo4]。

注记 2.2（从一个幺半群和一个余幺半群开始）。在本节余下部分，我们将从 dg 幺半群 $\mathcal{P}$ 开始，并将多次使用由其线性对偶给出的余幂零 dg 余幺半群 $\mathcal{P}^*$。这只是约定问题，**同样的构造也可以**从余幂零 dg 余幺半群 $\mathcal{C}$ 及其线性对偶 dg 幺半群 $\mathcal{C}^*$ 开始。

2.1. **限制函子及其左伴随**。 本小节的目标是回顾 [RiL25第 3]节中的一些构造。特别地，我们解释 dg$\mathcal{P}^*$-代数与 dg $\mathcal{P}$-代数之间的伴随关系：该伴随关系通过将绝对结构限制到有限直和而得到；同时还介绍它的一些主要性质。

命题 2.3。 存在一个伴随

$$\mathcal{P}^*\text{-alg}^{\mathsf{comp}} \underset{c\mathrm{Abs}}{\overset{\mathrm{Res}}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}\text{-alg}\,,$$

在 *dg* $\mathcal{P}^*$-代数和 *dg* $\mathcal{P}$-代数之间，其中右伴随 Res 由将结构限制到有限多个运算的和上给出。

证明。 存在一个自然的单子包含映射

$$\iota_{\mathcal{P}} : \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n} \hookrightarrow \prod_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}_n}(\mathcal{P}^*(n), (-)^{\otimes n}) \,,$$

由典范包含映射 $V^* \otimes W \hookrightarrow \mathbf{Hom}(V,\ W)$、从余不变量到不变量的范数映射，以及从直和到直积的包含映射复合而成。沿着 ι 拉回微分分次 $\mathcal{P}^*$-代数的结构映射，会诱导出从微分分次 $\mathcal{P}^*$-代数到微分分次 $\mathcal{P}$-代数的限制函子 Res。它是一个可及函子，并且保持两个可表示范畴之间的所有极限，因此存在左伴随 $c\mathbf{Abs}$。将此左伴随与从微分分次 $\mathcal{P}^*$-代数到完备微分分次 $\mathcal{P}^*$-代数的完备化函子复合后，便得到上述函子 $c\mathbf{Abs}$及所需的伴随。 □

定理 2.4 ([RiL25，定理 3.16])。 设 $\mathcal{P}$ 是满足假设 1的微分分次歌剧。限制函子

$$\mathrm{Res} : \mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{comp}} \longrightarrow \mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}$$

是全忠实的。因此，微分分次 $\mathcal{C}$-代数是微分分次 $\mathcal{P}$-代数的反射子范畴。

注记 2.5。 考虑交换代数的情形，其中 $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$。完备绝对 dg 交换代数并不等价于 I-进完备 dg 交换代数。这是因为，除非限定在诺特情形下， I-进完备化通常并非幂等。相比之下，完备绝对 dg 交换代数总可以描述为 dg 交换代数范畴上的一个幂等单子所对应的代数。更多详情请参见[RiL25，命题 3。24] 及后续讨论。

2.2. **包含函子及其右伴随**。 现在我们比较 dg $\mathrm{B}\mathcal{P}$-余代数与 dg $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数，它们分别表示这些余代数结构的余幂零版本和不一定余幂零的版本。

命题 2.6。 设 $\mathcal{P}$ 是满足假设 1的微分分次歌剧。存在一个伴随

$$\Omega\mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{coalg} \underset{\mathrm{Inc}}{\overset{\mathrm{Sub}}{\rightleftarrows}} \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-}\mathsf{coalg}\,,$$

在 *dg* $\mathrm{B}\mathcal{P}$-余代数与 *dg* $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数之间，其中左伴随 Inc 由将 *dg* $\mathrm{B}\mathcal{P}$-余代数视为 *dg* $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数给出。

证明。 与命题 2.3 的证明类似，存在一个自然包含映射

$$\iota_{\mathrm{B}\mathcal{P}} : \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{B}\mathcal{P}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n} \hookrightarrow \prod_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}_n}(\Omega\mathcal{P}^*(n), (-)^{\otimes n}) \,,$$

因为 $(\Omega\mathcal{P}^*)^*$ 同构于 $\mathrm{B}\mathcal{P}$。后一个事实由假设 1 中的可对偶性假设推出。这个函子的自然变换诱导出一个余单子的包含映射

$$\iota'_{\mathrm{B}\mathcal{P}} : \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{B}\mathcal{P}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n} \hookrightarrow \mathrm{L}(\Omega\mathcal{P}^*)(-) \,,$$

因为可以验证它与定义余自由函子的纤维积方块相容$\mathbf{L}(\Omega\mathcal{P}^*)(-)$ （定理 1.10）。沿包含映射将 dg $\mathrm{B}\mathcal{P}$-余代数的结构态射向前推送 $\iota'_{\mathrm{B}\mathcal{P}}$，即可诱导出包含函子 Inc。它显然保留所有余极限，因为这些余极限是在底层链复形范畴中计算的；而且两个范畴均可呈示，因此它有一个右伴随 Sub。 □

注记 2.7. 函子 Sub 的定义是取给定 dg $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数的最大 dg $\mathrm{B}\mathcal{P}$-子余代数。它推广了从不一定余幂零的余代数中取最大余幂零子余代数的做法。

命题 2.8. 设 $\mathcal{P}$ 是满足假设*I*的微分分次歌剧。包含函子

$$\mathrm{Inc} : \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-coalg} \longrightarrow \Omega\mathcal{P}^*\text{-coalg}$$

是全忠实的。因此，*dg*B$\mathcal{P}$-余代数是 *dg*Ω$\mathcal{P}^*$-余代数的余反射子范畴。

证明。 显然它是忠实的，因为它不改变底层链复形。由于包含映射 $\iota'_{\mathrm{B}\mathcal{P}}$ 是单射，所以它也是全的：两个 dg B$\mathcal{P}$-余代数之间的任何 dg Ω$\mathcal{P}^*$-余代数态射，同时也是 dg B$\mathcal{P}$-余代数态射。 □

2.3. **代数包含-限制方形**。 将限制伴随和包含伴随与由经典巴-余巴伴随及完备 bar-cobar 伴随诱导的两种 Koszul 对偶交织起来，我们得到一个由伴随函子构成的交换方形。

命题 2.9。 设 $\mathcal{P}$是满足假设*I*的微分分次幺半群。伴随方形

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}\text{-代数} & \underset{\Omega_\pi}{\overset{\mathrm{B}_\pi}{\rightleftarrows}} & \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-余代数}, \\
\mathrm{Res}\downarrow \uparrow c\mathrm{Abs} & & \mathrm{Sub}\downarrow \uparrow \mathrm{Inc} \\
\mathcal{P}^*\text{-代数}^{\mathsf{comp}} & \underset{\widehat{\Omega}_\iota}{\overset{\widehat{\mathrm{B}}_\iota}{\rightleftarrows}} & \Omega\mathcal{P}^*\text{-余代数}\,,
\end{array}$$

按以下意义交换：从方形图表右上角到左下角的左伴随复合，自然同构。

证明。 我们来验证该图表交换。首先，存在一个自然同构

$$\mathrm{S}(\mathcal{P})(V) \cong \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}^*)(V),$$

对任意微分分次模 V 都成立，因为限制函子与将微分分次 $\mathcal{P}$-代数和微分分次 $\mathcal{P}^*$-代数映至微分分次模的遗忘函子相交换。这给出了分次 $\mathcal{P}^*$-代数的一个自然同构

$$c\mathrm{Abs} \circ \Omega_\pi(D) \cong \widehat{\Omega}_\iota \circ \mathrm{Inc}(D)\,,$$

对任意微分分次B$\mathcal{P}$-余代数 D 都成立。可以验证该同构与微分相交换，因为两个微分在生成元 D 上的限制均由下式给出

$$D \xrightarrow{\Delta_D} \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{B}\mathcal{P}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} D^{\otimes n} \xrightarrow{\pi \circ \mathrm{id}} \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} D^{\otimes n} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{P}}(D)} \prod_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}_n}(\mathcal{P}^*(n), D^{\otimes n})\,,$$

其中 Δ_D 是 D 和 π 的结构态射：$\mathrm{B}\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ 是典范扭曲态射。

□

2.4. **同伦包含-限制方块**。 包含-限制方形与这些范畴上的模型结构相容，具体如下。

引理 2.10。 设 $\mathcal{P}$是满足假设*I*的微分分次歌剧。

(1) 包含伴随

$$\mathrm{B}\mathcal{P}\text{-coalg} \underset{\mathrm{Sub}}{\overset{\mathrm{Inc}}{\rightleftarrows}} \Omega\mathcal{P}^*\text{-coalg}$$

是一个 *Quillen* 伴随，其中 *dg* B$\mathcal{P}$-余代数上的模型结构如命题*I.15*所述，弱等价由拟同构给出。

(2) 限制伴随

$$\mathcal{P}\text{-alg} \underset{\text{Res}}{\overset{c\text{Abs}}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}^*\text{-alg}^{\text{comp}}$$

是一个 *Quillen* 伴随，其中微分分次 $\mathcal{P}^*$-代数上的模型结构如命题*1.19*所述，其中弱等价由拟同构给出。

证明。 显然，Inc 保持余纤维化和弱等价，因为在两边它们分别由单态射和拟同构给出。同样，Res 保持纤维化和弱等价，因为在两边它们分别由满态射和拟同构给出。

□

定理 2.11 (包含-限制矩形)。 设 $\mathcal{P}$ 是满足假设 *1*的微分分次幺半群。存在一个由 ∞-范畴构成的伴随矩形

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{P}\text{-alg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] & \underset{\Omega_\pi}{\overset{\mathrm{B}_\pi}{\rightleftarrows}} & \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-coalg}\,[\mathsf{W}.\mathsf{eq}^{-1}] & \underset{\mathbb{R}\mathrm{Id}}{\overset{\mathrm{Id}}{\rightleftarrows}} & \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}], \\
\uparrow \mathrm{Res} \quad \downarrow \mathbb{L}c\mathrm{Abs} & & & & \uparrow \mathbb{R}\mathsf{Sub} \quad \downarrow \mathrm{Inc} \\
\mathcal{P}^*\text{-alg}^{\text{comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] & \underset{\mathrm{Id}}{\overset{\mathbb{L}\mathrm{Id}}{\rightleftarrows}} & \mathcal{P}^*\text{-alg}^{\text{comp}}\,[\mathsf{W}.\mathsf{eq}^{-1}] & \underset{\widehat{\Omega}_\iota}{\overset{\widehat{\mathrm{B}}_\iota}{\rightleftarrows}} & \Omega\mathcal{P}^*\text{-coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]\,,
\end{array}$$

其中巴-余巴伴随和完备 *bar-cobar* 伴随是 ∞-范畴的伴随等价。该矩形是交换的，这意味着从左上角到右下角的左伴随函子之间存在自然弱等价。

证明。 这个矩形的存在，以及它能够下降到 ∞-范畴情形这一事实，直接由命题 2.9 和引理 2.10得出。我们来检验它确实是交换的，并构造以下两个复合之间的自然弱等价

$$\widehat{\mathrm{B}}_\iota \circ \mathrm{Id} \circ \mathbb{L}c\mathrm{Abs} \simeq \mathrm{Inc} \circ \mathrm{Id} \circ \mathrm{B}_\pi\,.$$

为简化等式，我们将省略非导出的恒等函子。思路是明确计算左侧。设 A 是一个微分分次 $\mathcal{P}$-代数。首先，我们可以取 $\Omega_\pi \mathrm{B}_\pi A$ 作为 A 的函子性余纤维化替换，因此导出函子 $\mathrm{L}c\mathbf{Abs}(A)$ 可计算为

$$\mathbb{L}c\mathrm{Abs}(A) \simeq \widehat{\Omega}_\iota \circ \mathrm{Inc} \circ \mathrm{B}_\pi(A)\,.$$

因此，左侧为

$$\widehat{\mathrm{B}}_\iota \circ \mathbb{L}c\mathrm{Abs}(A) \simeq \widehat{\mathrm{B}}_\iota \circ \widehat{\Omega}_\iota \circ \mathrm{Inc} \circ \mathrm{B}_\pi(A)\,,$$

而余单位

$$\epsilon_{\mathrm{Inc} \circ \mathrm{B}_\pi(A)} : \widehat{\mathrm{B}}_\iota \circ \widehat{\Omega}_\iota \circ \mathrm{Inc} \circ \mathrm{B}_\pi(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inc} \circ \mathrm{B}_\pi(A)$$

为我们提供 了我们所寻求的自然弱等价，因为它是一个自然拟同构 .

□

记号 2.12. 为减轻记号负担，从现在起，只要不存在歧义，我们就省略定理 2.11 及其推论中出现的非导出恒等函子。

2.5. **The ∞-范畴 bar-cobar 伴随。** 利用定理2.11中的交换矩形，我们在 ∞-范畴层次上得到 dg $\mathcal{P}$-代数与其 Koszul 对偶 dg $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数之间的伴随。正如我们将在第7节中解释的那样，这个伴随推广了 Lurie 的伴随；该伴随由 Lurie 在[Lur17，定理 5.2.2.17 中构造，适用于增广幺半群与余增广余幺半群。]。

定义 2.13 （相对于 $\mathcal{P}$ 的 ∞-范畴巴构造）。 ∞-范畴的巴构造$\mathbf{bar}_{\mathcal{P}}$是如下函子

$$\mathbf{bar}_{\mathcal{P}} \coloneqq \mathrm{Inc} \circ \mathrm{B}_{\pi} : \mathcal{P}\text{-alg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \longrightarrow \Omega\mathcal{P}^*\text{-coalg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right]$$

从在拟同构处局部化的 dg $\mathcal{P}$-代数的 ∞-范畴到在拟同构处局部化的 dg $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数的 ∞-范畴。

定义 2.14 （相对于 $\mathcal{P}$ 的 ∞-范畴余 bar 构造）。 ∞-范畴的余 *bar* 构造$\mathbf{cobar}_{\mathcal{P}}$是如下函子

$$\mathbf{cobar}_{\mathcal{P}} \coloneqq \mathrm{Res} \circ \widehat{\Omega}_{\iota} : \Omega\mathcal{P}^*\text{-coalg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \longrightarrow \mathcal{P}\text{-alg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right]$$

从在拟同构处局部化的 dg $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数的 ∞-范畴到在拟同构处局部化的 dg $\mathcal{P}$-代数的 ∞-范畴。

注记 2.15。严格来说，函子 $\mathbf{cobar}_{\mathcal{P}}$ 定义为 $\mathrm{Res} \circ \mathrm{LId} \circ \widehat{\Omega}_{\iota}$。然而，完备 cobar 函子的像在带有传递模型结构的完备 dg $\mathcal{P}^*$-代数范畴中总是余纤维的；因此，导出恒等函子 LId 就是恒等函子，为简洁起见，我们省略它。

定理 2.16. 设$\mathcal{P}$是满足假设1的微分分次幺半群。存在一个 ∞-范畴

$$\mathcal{P}\text{-alg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \underset{\mathbf{cobar}_{\mathcal{P}}}{\overset{\mathbf{bar}_{\mathcal{P}}}{\rightleftarrows}} \Omega\mathcal{P}^*\text{-coalg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right]$$

之间的伴随：一边是局部化于拟同构的微分分次 ∞-代数范畴，另一边是局部化于拟同构的微分分次$\Omega\mathcal{P}^*$-余代数的 ∞-范畴。

证明。 由定理 2.11立即得出。 □

注记 2.17。 这个伴随也与 [Heu24] 在特征零域上构造的伴随一致。一般而言，在正特征域上有两种不同的伴随形式，而 同上引文 考察了其中一种。参见第5.4小节。

3. 点集与 ∞-范畴的 bar-cobar 伴随

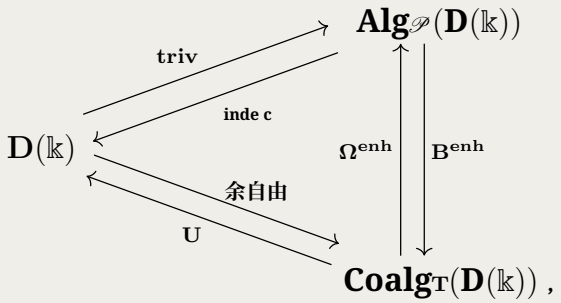
本节旨在比较段落1.1.6 中的点集层面的 operadic bar-cobar 伴随与 ∞-范畴的增强的 bar-cobar 伴随，后者构造于 [FG12]。后一个 bar-cobar 伴随连接了某个（富集） ∞-幺半群上的代数与其拟运算子 bar 构造上的（余幂零、具有除幂的）余代数。与预期相反，前一个伴随并不能呈现后一个伴随。这是因为余幺半群上的余幂零余代数的严格化结论并不成立，正如 [Che25第 5 节所指出的那样。3], 这一点源自 [GR17第 6 章注记 2.6。7]尽管如此，我们仍构造了一种比较这两个伴随的方法，并解释了这两个函子各自的底层链复形。

3.1. **Francis–Gaitsgory 的增强的 bar-cobar 伴随**。在本小节中，我们回顾 [FG12第 3]节中的一些结果。设 $\mathscr{P}$ 是 ∞D**中的一个带增广的（富集）**($\Bbbk$)-幺半群。增广映射 $\epsilon\colon\ \mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{1}$ 诱导出一个伴随

$$\mathbf{Alg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\mathbf{triv}}{\overset{\mathbf{indec}}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}(\Bbbk)\,,$$

∞范畴的 $\mathscr{P}$-代数与底层的、由 $\Bbbk$ 上的链复形构成的 ∞ 范畴之间。函子 triv 为任意链复形赋予平凡的 $\mathscr{P}$-代数结构，而其左伴随 indec 是一个 $\mathscr{P}$-代数的导出不可分解部分函子。indec 的同调称为（拓扑）安德烈-奎伦同调，参见 [Bas99、Man03]。这个伴随具有一项泛性质：它将 D($\Bbbk$) 表示为 $\mathscr{P}$-代数的 ∞范畴的稳定化 [BM05]。当$\mathscr{P}$ 是 D($\Bbbk$) 中的 E_∞- 幺半群时，这个伴随与余切复形的一个特例相一致（参见 [Lur17，第 7.3] 节，特别是 [Lur17，注记 7.3.0.1]）。

下面解释增强的 bar-cobar 伴随如何从上述数据中导出。伴随$\mathbf{indec} \dashv \mathbf{triv}$ 在$\mathbf{D}(\Bbbk)$ 上诱导出一个余单子$\mathbf{T} := \mathbf{indec} \circ \mathbf{triv}$。根据其泛性质，伴随$\mathbf{indec} \dashv \mathbf{triv}$ 可经由余单子$\mathbf{T}$上的余代数 ∞范畴分解，由此得到



其中右伴随绘制在上方和右侧。此外，余单子 $\mathbf{T}$ 可以被显式识别。

命题 3.1。 存在一个 ∞-范畴余单子的自然弱等价

$$\mathbf{T} \simeq \mathbf{S}(\mathbf{bar}(\mathscr{P}))(-) \simeq \bigoplus_{n\geq 0} \mathbf{bar}(\mathscr{P})(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n}$$

由伴随$\mathbf{T} \dashv \mathbf{triv}$ 诱导的余单子与由 ∞-余幺半群$\mathbf{bar}(\mathscr{P})$的 *Schur* 函子给出的余单子之间。

证明。 我们来计算复合$\mathbf{indec} \dashv \mathbf{triv}$。设 V是一个链复形。由于∞-代数的范畴是单子性的，任意 $\mathscr{P}$-代数都有一个分解，该分解是由自由 $\mathscr{P}$-代数组成的单纯对象的几何实现。特别地， $\mathscr{P}$-代数$\mathbf{triv}(V)$ 也如此，它可以表示为几何实现

$$\mathbf{triv}(V) \simeq |\,\mathbf{bar}(\mathbf{S}(\mathscr{P}), \mathbf{S}(\mathscr{P}), \mathbf{triv}(V))_\bullet\,|\,,$$

其中右侧取的是该单纯对象的几何实现

$$\mathbf{S}(\mathscr{P})(\mathbf{triv}(V)) \;\substack{\longleftarrow\\[-2pt]\longrightarrow}\; \mathbf{S}(\mathscr{P}) \circ \mathbf{S}(\mathscr{P})(\mathbf{triv}(V)) \;\substack{\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow\\[-2pt]\longrightarrow}\; \mathbf{S}(\mathscr{P}) \circ \mathbf{S}(\mathscr{P}) \circ \mathbf{S}(\mathscr{P})(\mathbf{triv}(V)) \;\substack{\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow\\[-2pt]\longleftarrow\\[-2pt]\longrightarrow}\; \cdots\,.$$

由于**indec** 与余极限可交换，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{indec}\circ\mathbf{triv}(V) &\simeq |\,\mathbf{indec}\,(\mathbf{bar}(\mathbf{S}(\mathscr{P}),\mathbf{S}(\mathscr{P}),\mathbf{triv}(V))_\bullet)\,|\\ &\simeq |\,(\mathbf{bar}(\mathbf{id},\mathbf{S}(\mathscr{P}),\mathbf{triv}(V))_\bullet)\,|\\ &\simeq \mathbf{S}(\mathbf{bar}(\mathscr{P}))(V)\,,\end{aligned}$$

其中 **id** 是恒等自函子。最后一个等价来自这样一个事实：**S**(–) 也与余极限交换，并且 **triv**(V) 的结构映射全都平凡。□

因此，我们得到一个伴随

$$\mathbf{Alg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\mathbf{\Omega^{enh}}}{\overset{\mathbf{B^{enh}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathscr{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,,$$

称为 增强的 *bar-cobar* 伴随，见 [FG12], , 介于 $\mathscr{P}$-代数与余幂零除幂**bar**($\mathscr{P}$)-余代数之间，定义见1.29。此伴随是不可分解元-平凡伴随在余单子上的余代数之上的普适因子分解。

注记 3.2。最初的 Francis–Gaitsgory 猜想已被 [Heu24], 否定；该猜想声称，将增强的 bar 构造限制于 ∞-范畴时，若限制在 pro-nilpotent $\mathscr{P}$-代数上，此伴随是一个等价。参见 [FG12，第 3 节。4]其中给出了原始表述。

3.2. **strict 与 ∞-范畴余幂零余代数的比较**。我们先来说明，点集层面的 operadic bar-cobar 伴随为何无法呈现由增强的 bar-cobar 伴随给出的 ∞-范畴类比。具体而言，我们希望说明以下复合伴随

$$\mathcal{P}\text{-alg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \underset{\Omega_\pi}{\overset{\mathrm{B}_\pi}{\underset{\simeq}{\rightleftarrows}}} \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-cog}\,[\mathsf{W}^{-1}] \underset{\mathbb{R}\mathrm{Id}}{\overset{\mathrm{Id}}{\rightleftarrows}} \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-cog}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \tag{11}$$

与增强的 bar-cobar 伴随一致

$$\mathbf{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\mathbf{\Omega^{enh}}}{\overset{\mathbf{B^{enh}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,. \tag{12}$$

然而，若此结论成立，那么由于伴随（11）是由一个等价与一个左 Bousfield 局部化复合而成的，这将意味着 **bar**($\mathcal{P}$)-余代数是 ∞-范畴中的反射子范畴，且包含于 $\mathcal{P}$-代数之中。然而，正如 [Che25，定理 5.31], 中所指出的，根据 [GR17，第 6 章，注记 2.67], 给出的反例，这不可能成立；其中取 $\mathcal{P}$ 为交换幺半群 $\mathcal{C}om$。

命题 3.3。 设 $\mathcal{P}$是满足假设*I*的微分分次歌剧。存在一个 ∞-范畴之间的伴随

$$\mathrm{B}\mathcal{P}\text{-cog}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \underset{\mathbf{strict}}{\overset{\mathbf{loose}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,,$$

从 *dg*B$\mathcal{P}$-余代数（模拟同构）到 **bar**($\mathcal{P}$)-余代数，其中 **bar**($\mathcal{P}$) 是B$\mathcal{P}$的底层富集 ∞-余幺半群。

证明。这个伴随源于这样一个事实：在点集层面，微分分次 B$\mathcal{P}$-余代数与链复形之间的余自由-遗忘伴随，在链复形的底层范畴上诱导出余单子 S(B$\mathcal{P}$)(–)。这个 1-余单子给出了 D($\Bbbk$) 上的 ∞-范畴余单子 S(bar($\mathcal{P}$))(–) 的呈示，因为根据注 1.25，余幂零微分分次余幺半群 B$\mathcal{P}$ 呈示了增强的 ∞-余幺半群 bar($\mathcal{P}$)。因此，根据 Eilenberg-Moore 范畴的（对偶）泛性质，存在这样一个伴随。□

上述伴随一般不是 ∞-范畴之间的等价，这使我们无法为增强的 bar-cobar 伴随给出点集模型。核心问题在于，微分分次 B$\mathcal{P}$-余代数与链复形之间的余自由-遗忘伴随，一般而言在 ∞-范畴意义下并非余单子性的。微分分次 B$\mathcal{P}$-余代数的 ∞-范畴在拟同构意义下的刻画如下：它是 ∞-范畴中 $\mathcal{P}$-代数范畴关于那些经 B_π 映为拟同构的映射所作的局部化。换言之，是关于那些诱导出（拓扑）安德烈-奎伦同调等价的 $\mathcal{P}$-代数映射所作的局部化。

3.3. **幺半群的 bar-cobar 伴随与增强的 bar-cobar 伴随。** 设 $\mathcal{P}$ 是满足假设 1 的微分分次幺半群。我们证明，点集伴随（11）与命题 3.3 中的伴随复合后，确实给出了增强的 bar-cobar 伴随（12）。另见 [Che25，第 5 节。3] 类似结论。

定理 3.4. 设 $\mathcal{P}$ 是满足假设 1 的微分分次幺半群。由关于 ∞ 的 *bar-cobar* 伴随所诱导的 ∞-范畴伴随，与关于拟同构的左 *Bousfield* 局部化以及命题 π*3.3* 中的比较伴随复合后*3.3*

$\mathcal{P}$-代数 $[Q.iso^{-1}]$ $B\mathcal{P}$-余代数 $[W^{-1}]$ $B\mathcal{P}$-余代数 $[Q.iso^{-1}]$ 余代数 $\mathrm{B}_\pi\,\Omega_\pi\,Id$ RId 松 $\simeq$ *strict* 是自然的

y^{eq} 等价于 ∞-范畴　　g 层面的增强 *bar-cobar* 伴 j 随

$$\mathbf{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\mathbf{\Omega^{enh}}}{\overset{\mathbf{B^{enh}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,.$$

证明。 微分分次歌剧 $\mathcal{P}$ 特别是带增广的，因此该增广在点集层面诱导出一个 Quillen 伴随 indec $\dashv$ triv。导出伴随

$$\mathsf{Ch}(\Bbbk)\,[\mathsf{Q.iso}^{-1}] \underset{\mathbb{L}\mathrm{indec}}{\overset{\mathrm{triv}}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}\,[\mathsf{Q.iso}^{-1}]$$

给出了伴随**indec** $\dashv$ **triv** 底层 ∞-歌剧 $\mathcal{P}$ 的伴随。此外，上述定理中的两个伴随都是伴随 **indec** $\dashv$ **triv** 通过同一个 ∞ 余代数范畴的泛因子分解。因此，由于它们满足相同的泛性质，二者必然相同。例如，参见 [Hei17]，了解单子上的代数的 Eilenberg–Moore 范畴的泛性质的 ∞-范畴版本。 □

注记3.5。 在正特征域上，定理3.4也适用于以下更一般的情形：给定一个微分分次歌剧 $\mathcal{P}$，它是 $\mathbb{S}$-射影的，GRiL23 第 3 节中的拟平面 bar-cobar 伴随14]与对$\mathrm{B}(\mathcal{P}\otimes\mathcal{E})$ 的 Bousfield 左局部化复合，如 [GRiL23命题 48]，同样适用于同一个图表；在 ∞ 范畴层面，我们还考虑相对于底层富化 ∞-歌剧 $\mathcal{P}$ 的增强 bar-cobar 伴随。

4. ∞-范畴增强 bar-cobar 伴随的对偶版本 N

在本节中，我们介绍在[FG12], 中构造的增强巴-余巴伴随的对偶版本。该构造是通过考虑给定余代数类（不一定是余幂零）的导出本原元函子经由单子上的代数所进行的泛因子分解而得到的。我们证明，这将产生一个在（丰富的）∞-幺半群上的余代数与其对偶 ∞-余幺半群上的代数之间的伴随。此外，与增强的巴-余巴伴随的情形相反，我们为这一新构造给出了点集模型。

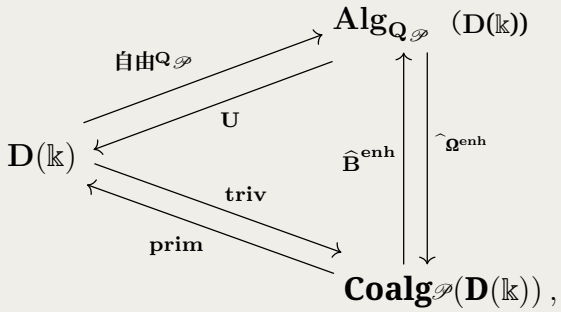
4.1. 增强巴-余巴伴随的完备版本。设 $\mathscr{P}$ 是 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 中的一个增广（丰富的）∞-幺半群。与之相关联的是一个 ∞- $\mathscr{P}$-余代数范畴，其对象是由 $\mathscr{P}$中的运算所定义的余代数（非余幂零且不带除幂）。例如，如果 $\mathscr{P}$ 是 E_1-幺半群或 E_∞-幺半群，那么 $\mathscr{P}$-余代数分别对应于$_1$-余代数或$_\infty$-余代数，其含义见 [Lur17]。关于这一定义的更多细节，请参见第 1.2.5 小节或 [PRiLY26，第 3] 节。

增广映射 $\epsilon\colon \mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{1}$ 诱导出另一个伴随

$$\mathbf{Coalg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\mathbf{triv}}{\overset{\mathbf{prim}}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}(\Bbbk)\,,$$

这次是在 ∞-范畴之间，$\mathscr{P}$-余代数与导出的 ∞-链复形范畴（底域为 $\Bbbk$）之间。函子 $\mathbf{triv}$ 赋予任意链复形一个平凡的 $\mathscr{P}$-余代数结构，而它的右伴随$\mathbf{prim}$ 则是求取 $\mathscr{P}$-余代数导出本原元的函子。其同调群应理解为余代数类型的（拓扑）coAndré-Quillen 同调群，其中（拓扑）coHochschild 同调群是 [HS21] 和 [BP23]意义下的特例。特别参见 [BP23，定义 2。10]。

伴随$\mathbf{triv} \dashv \mathbf{prim}$ 在导出的 ∞-链复形范畴上诱导出一个单子，我们将其记为 $\mathbf{Q}_{\mathscr{P}} = \mathbf{prim} \circ \mathbf{triv}$。因此，导出本原元伴随普遍地分解经过 ∞-范畴中的$\mathbf{Q}_{\mathscr{P}}$-代数，由此得到如下伴随三角形



其中，左伴随绘制在上方和右侧。特别地，这给出了一个普遍伴随

$$\mathbf{Coalg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\widehat{\mathbf{\Omega}}^{\mathbf{enh}}}{\overset{\widehat{\mathbf{B}}^{\mathbf{enh}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Alg}_{\mathbf{Q}_{\mathscr{P}}}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,,$$

它将导出原始元—平凡结构伴随分解，我们称之为完备增强巴-余巴伴随。尽管上述构造的三角形与小节3.1中构造的三角形对偶，命题3.1 并不能先验地对偶化，我们也无法立即识别单子$\mathbf{Q}_{\mathscr{P}}$。原因在于，解析一般 $\mathscr{P}$-余代数的余单纯形图由余自由 $\mathscr{P}$-余代数组成；与代数不同，这些余代数没有简单的描述。不过，借助点集模型，我们将能够给出 ∞-范畴的$\mathbf{triv} \dashv \mathbf{prim}$ 伴随及其诱导的单子，从而得到 ∞-范畴$\mathbf{Q}_{\mathscr{P}}$，并将其识别为 ∞上代数的 ∞-余幺半群$\mathbf{bar}(\mathscr{P})$意义下定义1.34的范畴。

4.2. **绝对代数与 ∞-范畴的极限塔**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个满足假设1的余幂零 dg 余幺半群。它可以写成以下余幺半群塔的余极限

$$\tau^{\leq 1}\mathcal{C} \rightarrowtail \tau^{\leq 2}\mathcal{C} \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail \tau^{\leq k}\mathcal{C} \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail \operatorname*{colim}_{k\in\mathbb{N}} \tau^{\leq k}\mathcal{C} \cong \mathcal{C}\,,$$

其中，对所有 $k \geq 1$，$\tau^{\leq k}\mathcal{C}$ 是将 $\mathcal{C}$ 在元数严格大于 k 处截断所得。该塔在任意 dg $\mathcal{C}$-代数 A 上诱导出一种元数过滤，其连续商为

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{C})(A) & \xrightarrow{\widehat{\mathrm{S}}^c(i_k)} & \widehat{\mathrm{S}}^c(\tau^{\leq k}\mathcal{C})(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_A} & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A/\mathrm{F}^k A\,, \end{array}$$

其中 $i_k\colon \tau^{\leq k}\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 是典范包含。记

$$\upsilon_A : A \longrightarrow (\widehat{A})_{\mathrm{arity}} \coloneqq \lim_{k\in\mathbb{N}} A/\mathrm{F}^k A$$

从 A 到其元数完备化的典范映射。

引理 4.1. 设 $\mathcal{C}$是一个满足假设 *I* 的余幂零微分分次余幺半群，并设 A 是一个微分分次 $\mathcal{C}$-代数。映射

$$\upsilon_A : A \twoheadrightarrow \lim_{k\in\mathbb{N}} A/\mathrm{F}^k A$$

是逐次分次满射。

证明。 证明思路与 [GL18，命题 4.24] 中完全类似。必须将 [GL18 中的权过滤替换为元数过滤，参见 4.20、4.21、4.22 和 4.23]。类似论证亦见[GRiL23，第 3 节。6]□

命题 4.2. 设 $\mathcal{C}$是一个满足假设 *I* 的余幂零微分分次余幺半群，并设 A 是一个完备微分分次 $\mathcal{C}$-代数。映射

$$\upsilon_A : A \xrightarrow{\simeq} \lim_{k\in\mathbb{N}} A/\mathrm{F}^k A$$

是一个同构，因此任意完备的 *dg* $\mathcal{C}$-代数都是元数完备的。

证明。 根据引理 4.1，只需证明 υ_A 是一个单射。关键在于以下几点：由于 $\mathcal{C}$ 满足假设 I，因此它由元数 ≥ 2余生成。这意味着

$$\mathrm{F}^k A \subset \mathrm{W}^{k-1} A\,,$$

因为元数为 $\leq k$ 的运算的权重至多为 $k-1$。这又意味着

$$\bigcap_{k\geq 1} \mathrm{F}^k A \subset \bigcap_{k\geq 1} \mathrm{W}^{k-1} A = \{0\}\,,$$

因为我们假设 A是完备的。因此，映射 υ_A 的核为零，它也是一个单射。□

因此，任意完备的 dg $\mathcal{C}$-代数 A 都可以写成一个极限

$$A \cong \lim_{k\in\mathbb{N}} A/\mathrm{F}^k A\,.$$

注意， $A/\mathrm{F}^k A$ 是该伴随中的单位

$$\mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}} \underset{(i_k)^*}{\overset{(i_k)_!}{\rightleftarrows}} \tau^{\leq k}\mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}$$

由包含映射 $i_k\colon \tau^{\leq k}\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 诱导，也就是说，对于任意完备 dg $\mathcal{C}$-代数 A，我们有一个同构 $(i_k)^*(i_k)_!(A) \cong A/\mathrm{F}^k A$。

引理 4.3. 设 $k \geq 1$。存在一个范畴等价

$$\tau^{\leq k}\mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}} \cong \tau^{\leq k}\mathcal{C}^*\text{-alg}\,.$$

证明。 单子的自然包含映射

$$\iota_{\tau^{\leq k}\mathcal{C}} : \bigoplus_{n\geq 0}^{k} \tau^{\leq k}\mathcal{C}^*(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} (-)^{\otimes n} \hookrightarrow \prod_{n\geq 0}^{k} \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}_n}(\tau^{\leq k}\mathcal{C}(n), (-)^{\otimes n})\,,$$

事实上是一个同构，因为有限直和与直积相同。 □

定理 4.4。 存在一个 ∞-范畴之间的伴随

$$\mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \underset{\lim^h_{k\geq 1}(i_k)^*(-)}{\overset{(\mathbb{L}(i_k)_!(-))_{k\geq 1}}{\rightleftarrows}} \lim^h_{k\geq 1} \tau^{\leq k}\mathcal{C}^*\text{-alg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]\,,$$

其中左伴随 $(\mathbb{L}(i_k)_!(-))^{k\geq 1}$ 是全忠实的。

证明。 在引理4.3中的等价意义下，这个伴随

$$\mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}} \underset{(i_k)^*}{\overset{(i_k)_!}{\rightleftarrows}} \tau^{\leq k}\mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}$$

对所有 $n \geq 1$ 都是一个 Quillen 伴随，因为函子 $(i_n)^*$ 显然保留纤维化和拟同构。这诱导出一个 ∞-范畴的函子

$$(\mathbb{L}(i_k)_!(-))_{k\geq 1} : \mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \longrightarrow \lim_{k\geq 1} \tau^{\leq k}\mathcal{C}^*\text{-coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]\,.$$

该函子将一个完备 dg $\mathcal{C}$-代数 A 映射为集合 $(\mathsf{L}(i_k)_!(A))_{k\geq 1}$，它位于右侧的极限中。可以验证，它有一个右伴随，该伴随将一个由 $\tau^{\leq k}\mathcal{C}^*$-代数组成的集合 $(A'_k)_{k\geq 1}$ 映射为它们的（同伦）极限 $\lim^h_{k\geq 1}((i_k)^*(A'_k))_{k\geq 1}$。设 A 是一个余纤维完备 dg $\mathcal{C}$-代数，它可以写成一个（1-范畴的）极限

$$A \cong \lim_{k\in\mathbb{N}} (i_k)^*(i_k)_!(A)\,,$$

其中所有映射都是满射，所有代数都是纤维的。因此它也是一个同伦极限。此外，由于 A 是余纤维的，对象 $(i_k)_!(A)$计算出 $\mathsf{L}(i_k)_!(A)$。因此单位 o f ∞-范畴的伴随是一个弱等价，并且 $\mathsf{L}(i_k)_!$ 是全忠实的。□

注记 4.5（与 Goodwillie 塔的关系）。极限

$$\lim_{n\geq 1} \tau^{\leq n}\mathcal{C}^*\text{-alg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]$$

恰好是 ∞-范畴中 dg $\mathcal{C}^*$-代数的 Goodwillie 塔的极限，并在拟同构处局部化；这里采用 [Heu21] 的意义。详见 [Heu21，第 6 节。1] 了解更多详情。

注记 4.6。 定理 4.4 有一个更一般的版本，其中不假设假设 1 中的条件。它给出了 ∞-范畴之间的一个伴随

$$\mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \underset{\lim^h_{\omega\geq 1}(i_\omega)^*(-)}{\overset{(\mathbb{L}(i_\omega)_!(-))_{\omega\geq 1}}{\rightleftarrows}} \lim^h_{\omega\geq 1} \mathscr{R}_\omega\mathcal{C}\text{-alg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]\,,$$

其中 $\mathscr{R}_\omega$ 表示余幂零微分分次余幺半群 $\mathcal{C}$ 的余根滤过的第 ω 阶，此时左伴随函子仍是全忠实的。然而，一般而言，由 $\mathcal{C}$ 的余根滤过诱导的权过滤与由 $\mathcal{C}$ 的截断诱导的元数过滤并不相同，而且在这一极限中，我们既无法将 ∞-范畴与算子上的代数范畴等同起来，也无法将其与由拟同构取商后的微分分次 $\mathcal{C}^*$-代数的 ∞-范畴的 Goodwillie 塔进行比较。

定理 4.4 中考虑的极限

$$\lim_{k\geq 1} \tau^{\leq k}\mathcal{C}^*\text{-alg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]$$

先验地是在上述 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 的可呈示 ∞-范畴与右伴随的 ∞-范畴中取的。由于该图表是可缩的，因此它与可呈示 ∞-范畴与右伴随的 ∞-范畴中的极限一致，故也可以在 ∞- ∞-范畴中计算。

推论 4.7. 设 $\mathcal{C}$ 是满足假设 *I* 的余幂零微分分次余幺半群。*Quillen* 伴随

$$\mathsf{Ch}(\Bbbk) \underset{\mathrm{U}}{\overset{\widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{C})(-)}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}$$

介于完备微分分次 $\mathcal{C}$-代数之间，其中赋予的模型结构满足：弱等价为拟同构，纤维化为逐次数满射；而底层链复形范畴则在 ∞-范畴层面诱导出一个伴随

$$\mathbf{D}(\Bbbk) \underset{\mathrm{U}}{\overset{\widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{C})(-)}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]$$

它是单子的。

证明。该结果基本上由定理 4.4 得出。事实上，右侧是在 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 上由可呈示 ∞-范畴与右伴随构成的极限图表，其中所有函子根据引理 4.3 在 ∞-范畴意义下都是单子的。因此，根据 [Hei17，定理 1.3]，此极限在 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 上仍是单子的。由于完备微分分次 $\mathcal{C}$-代数在拟同构意义下构成一个余反射的 ∞-子范畴，余极限可在环境 ∞-范畴中计算。因此，从拟同构意义下的完备微分分次 $\mathcal{C}$-代数到 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 的遗忘函子保持 U-可裂单纯对象的几何实现；又由于它显然是保守的，根据 [Lur17，定理 4.7.0.3.] 的 Barr–Beck–Lurie 定理，它是单子的。□

推论 4.8。 设 $\mathcal{C}$ 是满足假设 *I* 的余幂零微分分次余幺半群。存在一个 ∞-范畴

$$\mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \simeq \mathbf{Alg}_{\mathcal{C}}(\mathbf{D}(\Bbbk))$$

之间的等价：完备微分分次 $\mathcal{C}$-代数（模去拟同构）与由微分分次余幺半群 $\mathcal{C}$ 诱导的 ∞-余幺半群上的代数。

证明。 由于两个 ∞-范畴在 ∞-范畴 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 上都是单子性的，根据 Barr–Beck–Lurie 定理（参见 [Lur17，推论 4.7.3.16。]），只需证明这两个单子自然地^弱等价。这一点同样显然，因为点集对偶 Schur 函子 $\mathrm{S}^c(\mathcal{C})$ 保持拟同构，因而导出第 ∞ 1.2.4 段中的 -范畴对偶 Schur 函子。□

4.3. **通过点集模型识别单子**。 设 $\mathcal{P}$ 为一个约化微分分次歌剧。由于我们希望为其底层 ∞-歌剧上的余代数 ∞-范畴给出点集模型，因此还需假设它是余纤维 的微分分次歌剧。不失一般性，可以假设 $\mathcal{P} = \Omega\mathcal{C}$ 其中 $\mathcal{C}$是某个约化余幂零微分分次余幺半群。我们进一步要求 $\mathcal{C}$ 满足假设I。我们首先将子节**4.1**中引入的单子Q与余幺半群∞上的代数 $\mathcal{C}$-范畴相识别，随后便可为完备增强 bar–cobar 伴随给出点集模型。

在上述背景下，微分分次歌剧 $\Omega\mathcal{C}$ 带有增广结构，而该增广诱导出一个 Quillen 伴随

$$\mathsf{Ch}(\Bbbk) \underset{\text{prim}}{\overset{\text{triv}}{\rightleftarrows}} \Omega\mathcal{C}\text{-coalg}$$

在点集层面上，dg $\Omega\mathcal{C}$-余代数与链复形之间存在伴随，其中 dg $\Omega\mathcal{C}$-余代数沿余自由-遗忘伴随赋予左诱导模型结构，其余纤维化由单态射给出，弱等价由拟同构给出。函子 triv 为链复形赋予平凡的 dg $\Omega\mathcal{C}$-余代数结构，其伴随函子 prim 则计算 dg $\Omega\mathcal{C}$-余代数中的本原元。

引理 4.9。 设 $\mathcal{C}$ 是满足假设 *1* 的余幂零微分分次余幺半群。导出伴随

$$\Omega\mathcal{C}\text{-coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \underset{\text{triv}}{\overset{\mathbb{R}\text{prim}}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}(\Bbbk)$$

是 ∞-范畴导出本原元-平凡伴随的一个模型

$$\mathbf{Coalg}_{\Omega\mathcal{C}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\textbf{triv}}{\overset{\textbf{prim}}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}(\Bbbk)\,,$$

它存在于底层 ∞-幺半群上的余代数与 ∞-范畴的链复形之间，其中链复形取系数于$\Bbbk$。

证明。 证明的关键要点是比较 ∞范畴中的 dg$\Omega\mathcal{C}$-余代数（按拟同构取商）与定义在底层 ∞-幺半群 $\Omega\mathcal{C}$上的余代数。 在 [PRiLY26], 中，我们证明，由于 dg 幺半群 $\Omega\mathcal{C}$ 作为幺半群是 余纤维，因此存在一个 ∞-范畴等价

$$\Omega\mathcal{C}\text{-coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \simeq \mathbf{Coalg}_{\Omega\mathcal{C}}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,.$$

在此等价之下，很容易看出，（导出）函子 triv 与函子**triv** 一致，因此这两个伴随自然等价。□

定理 4.10. 设 $\mathcal{C}$ 是满足假设 *1* 的余幂零微分分次余幺半群*I*。存在单子的自然弱等价

$$\mathbf{Q}_{\Omega\mathcal{C}} \simeq \widehat{\mathbf{S}}^{c}(\mathcal{C}) \simeq \prod_{n\geq 0} \left[\mathcal{C}(n), (-)^{\otimes n}\right]^{h\mathbb{S}_n}$$

在 *§*$\mathbf{Q}_{\Omega\mathcal{C}}$ 中引入的单子*4.1*（它分解了 $\Omega\mathcal{C}$-余代数的导出本原元-平凡伴随），与将 ∞-范畴对偶 *Schur* 函子作用于底层 ∞-余幺半群 $\mathcal{C}$所得到的单子之间。

证明。 根据定理4.9，我们可以利用伴随 **triv** $\dashv$ **prim** 来计算由伴随 triv $\dashv \mathbb{R}$prim诱导的单子。对于任意链复形 V，我们有

$$\mathbb{R}\text{prim} \circ \text{triv}(V) \simeq \text{prim} \circ \widehat{\mathrm{B}}_{\iota}\widehat{\Omega}_{\iota}(V) \simeq \widehat{\mathrm{S}}^{c}(\mathcal{C})(V)\,,$$

sin $\widehat{\ }$ce 的结构是平凡的。后一个函子将$\mathbf{S}^{c}(\mathcal{C})$连同其单子结构建模 . □

注记 4.11。 如果我们从一个余纤维 dg 歌剧 $\mathcal{P}$ 开始，一般来说，我们总可以用余纤维化幌半群 $\Omega\mathrm{B}\mathcal{P}$来替代它，因此 $\mathcal{C}$ 可以在上述定理中取为 $\mathrm{B}\mathcal{P}$ 。由于根据注记 1.25，点集幌半群巴构造呈现了 Lurie 的巴构造，我们还得到，单子$\mathbf{Q}_{\mathcal{P}}$在等价意义下可以识别为将 ∞-范畴对偶舒尔函子应用于 ∞-幌半群$\mathbf{bar}\mathcal{P}$所得到的单子。

注记 4.12。 定理 4.10的另一个推论是，余单纯对象的全化

$$\cdots \;\overleftarrow{\overleftarrow{\overleftarrow{\overleftarrow{\overleftarrow{}}}}}\; \mathbf{L}(\Omega\mathcal{C})^{\circ 3}(\mathbf{triv}(V)) \;\overleftarrow{\overleftarrow{\overleftarrow{\overleftarrow{}}}}\; \mathbf{L}(\Omega\mathcal{C})^{\circ 2}(\mathbf{triv}(V)) \;\overleftarrow{\overleftarrow{\overleftarrow{}}}\; \mathbf{L}(\Omega\mathcal{C})(\mathbf{triv}(V))$$

$\widehat{\ }$等同于 $\mathbf{S}^c(\mathcal{C})(V)$ 对任意链复形 V，其中$\mathbf{L}(\Omega\mathcal{C})$ 表示 ∞-范畴余自由$\Omega\mathcal{C}$-余代数余单子。事实上，运用与命题3.1的证明类似的论证，可以看出，该余单纯对象的全化与伴随 $\mathbf{triv} \circ \mathbf{prim}$ 所诱导的单子的取值相一致，该伴随关联于 ∞-范畴的 $\Omega\mathcal{C}$-余代数。

定理 4.13. 设 $\mathcal{C}$ 是满足假设 *1* 的余幂零微分分次余幺半群。由关于 ∞-范畴的完备 *bar-cobar* 伴随所诱导的伴随，与关于拟同构的右 *Bousfield* 局部化复合后 ι

$$\Omega\mathcal{C}\text{-coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \underset{\widehat{\mathrm{B}}_\iota}{\overset{\widehat{\Omega}_\iota}{\underset{\simeq}{\rightleftarrows}}} \mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}\,[\mathsf{W}^{-1}] \underset{\mathbb{L}\mathrm{Id}}{\overset{\mathrm{Id}}{\underset{\top}{\rightleftarrows}}} \mathcal{C}\text{-alg}^{\mathsf{comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]$$

与 ∞-范畴的完备增强 *bar-cobar* 伴随自然弱等价 n

$$\mathbf{Coalg}_{\Omega\mathcal{C}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\widehat{\mathbf{\Omega}}^{\mathbf{enh}}}{\overset{\widehat{\mathbf{B}}^{\mathbf{enh}}}{\underset{\top}{\rightleftarrows}}} \mathbf{Alg}_{\mathcal{C}}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,.$$

证明。 由定理 4.10 与定理 4.8直接推出，利用了二者都是伴随的泛因子分解这一事实 $\mathbf{triv} \dashv \mathbf{prim}$，其适用于$\Omega\mathcal{C}$-余代数。 □

注记 4.14。 在正特征域上，定理 3.4 应适用于任意满足以下条件的 准平面余幂零微分分次余幺半群 $\mathcal{C}$，其中 1，应将完备微分分次 $\mathcal{C}$-代数替换为 *qp*-完备微分分次 $\mathcal{C}$-代数，含义见 [GRiL23，第 3]节。

5. ∞-范畴的包含-限制方形

本节将前文的内容整合起来，构造一个 ∞-范畴的包含-限制方形，类似于第2节构造的点集包含-限制方形。我们将所得伴随与 Heuts 在 [Heu24] 中构造的伴随进行比较。最后，我们讨论如何将这些结果推广到正特征情形。

5.1. **比较 ∞-范畴的余代数。** 我们建立不同的比较函子以及以下对象之间的等价：余幺半群上的点集余幂零（除幂）余代数、 ∞-余幺半群上的余幂零（除幂）余代数、Heu24 ∞意义下的 [Heu24，附录 A], 中不一定余幂零的（除幂）余代数，以及∞-幺半群上的余代数，其含义见 [PRiLY26，第 3]节。这些结果将在后续各节中发挥作用。

引理 5.1. 设 $\mathscr{C}$ 是一个约化的 ∞-余幺半群。存在一个伴随

$$\mathbf{Coalg}_{\mathscr{C}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \mathbf{Coalg}_{\mathscr{C}^*}(\mathbf{D}(\Bbbk))$$

介于（除幂） $\mathscr{C}$-余代数（依照 [Heu24，附录 A] 的定义）与 $\mathscr{C}^*$-余代数（依照定义*1.36*）

此外，若我们假设 $\mathscr{C}$ 是非对称的，或者 $\Bbbk$ 是特征零域，那么当 $\mathscr{C}$ 具有按元数有限维同调时，这个伴随是等价。

证明。两个 ∞-范畴都定义为沿着 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 到 $\mathbf{pro}(\mathbf{D}(\Bbbk))$ 的包含映射，将 $\mathbf{pro}(\mathbf{D}(\Bbbk))$ 中余代数的 ∞-范畴作纤维积所得，因此只需比较后者。按照 Heu24，附录 A 中的定义，$\mathbf{pro}(\mathbf{D}(\Bbbk))$ 中的除幂 $\mathscr{C}$-余代数是余单子上的余代数（沿用原文的记号），该余单子由下式给出：

$$\widehat{p\mathbf{Sym}_{\mathscr{C}}} = \lim_k p\left(\bigoplus_{n\geq 0}^{k}\left(\mathscr{C}(n)\otimes(-)^{\otimes n}\right)_{h\mathbb{S}_n}\right),$$

其中 p 表示延拓函子，它将 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 的自函子映到 $\mathbf{pro}(\mathbf{D}(\Bbbk))$ 的自函子。类似地，$\mathbf{pro}(\mathbf{D}(\Bbbk))$ 中的 $\mathscr{C}^*$-余代数是余单子上的余代数

$$\widehat{\mathbf{S}}^c_{\mathrm{pro}}(\mathscr{C}^*) = \lim_k p\left(\bigoplus_{n\geq 0}^{k}\left[\mathscr{C}^*(n),(-)^{\otimes n}\right]^{h\mathbb{S}_n}\right),$$

wher而 $[-,-]$ 表示 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 的内 $\mathbf{Hom}$。对于任意 $k\geq 1$，存在一个自函子之间的映射 rs

$$\iota_{\mathscr{C}}^{\leq k}:\bigoplus_{n\geq 0}^{k}\left(\mathscr{C}(n)\otimes(-)^{\otimes n}\right)_{h\mathbb{S}_n}\longrightarrow\bigoplus_{n\geq 0}^{k}\left[\mathscr{C}^*(n),(-)^{\otimes n}\right]^{h\mathbb{S}_n}$$

它由自然映射 $V^*\otimes W\longrightarrow[V,W]$、双对偶映射以及从余不变量到不变量的范数映射给出。它诱导出一个余单子之间的映射

$$\lim_k p(\iota_{\mathscr{C}}^{\leq k}):\widehat{p\mathbf{Sym}_{\mathscr{C}}}\longrightarrow\widehat{\mathbf{S}}^c_{\mathrm{pro}}(\mathscr{C}^*)\,.$$

而 $\mathbf{pro}(\mathbf{D}(\Bbbk))$ 中这个余单子态射诱导出所需的伴随，其纤维积正是引理中所述的那个。

此外，若 $\mathscr{C}$ 具有按元数有限维同调，则映射 $\iota_{\mathscr{C}}^{\leq k}$ 都是等价，因为 $\mathscr{C}(n)$ 的总同调有限维，且范数映射都是等价。因此，诱导出的余单子映射是等价，两个 ∞-余代数范畴也等价。□

注记 5.2. Heu24[Heu24，附录 A]与 [PRiLY26] 中所讨论的余代数定义有两个主要区别：

(1) 在一般情形下，第一个定义编码了除幂 非必余幂零类型的余代数，而第二个定义不涉及除幂。(2) 第一个定义还包含一个额外的有限性条件，而在非有限维情形下，后一个定义没有此条件。事实上，假设 $\mathscr{C}(n)$ 是无限维的。那么，在给定元数下，第一个定义中的分解落在张量积中，

$$\Delta_C(n):C\longrightarrow\mathscr{C}(n)\otimes C^{\otimes n}\,,$$

因此是纯张量的有限直和；而在第二个定义中，它们落在内 $\mathbf{Hom}$ 中，所以允许“纯张量的无限和”。

前面的预备结果使我们能够构造一个从富化 ∞-余幺半群上的余幂零除幂余代数到其线性对偶 ∞-幺半群上的余代数的“遗忘函子”或“包含函子”。然而，正如 ∞ Heu24，注记 11_2] 中所解释的，无法先验地确定这个 ∞-范畴的“包含函子”是否全忠实。这一全忠实性曾在 [GR17，猜想 2.8_4] 中被猜想成立。

引理 5.3. 设 $\mathscr{C}$ 是一个约化的 ∞-余幺半群。存在一个伴随

$$\mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathscr{C}}(\mathbf{D}(\Bbbk))\underset{\mathbf{Sub}}{\overset{\mathbf{Inc}}{\rightleftarrows}}\mathbf{Coalg}_{\mathscr{C}^*}(\mathbf{D}(\Bbbk))$$

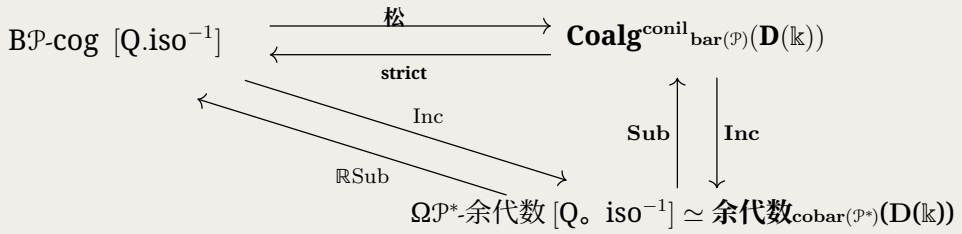
余幂零（除幂）$\mathscr{C}$-余代数与 $\mathscr{C}^*$-余代数之间。

证明。 我们将如下伴随复合：一方面，是关于 $\mathscr{C}$ 的余幂零除幂余代数之间的伴随，定义见 1.29；另一方面，是关于 $\mathscr{C}$ 的除幂余代数之间的伴随，见 [Heu24，附录 A]，，构造见 [Heu24，第 7] 节，并与引理 5.1 中的伴随复合。□

注记5.4. 左伴随函子也可以像 [Heu24，第 7], 节中那样通过归纳构造， ∞-范畴中 $\mathscr{C}^*$-余代数的类似分解可视为一个极限，这一点由 [PRiLY26，命题 316].

最后，我们将迄今构造的比较函子组合起来，得到一个交换的函子三角形，其对象分别是点集版本的余幂零除幂余代数、它们的∞-范畴对应对象，以及该类型所有余代数构成的 ∞-范畴。

命题 5.5. 设 $\mathcal{P}$ 是一个满足假设 1 的微分分次歌剧。以下是 ∞-范畴之间的伴随关系三角形



交换，其中左伴随绘制在上方和左侧。

证明。 竖直的右伴随由引理 5.3 给出，其中 $(\mathbf{bar}(\mathcal{P}))^* \simeq \mathbf{cobar}(\mathcal{P}^*)$ 因为$\mathcal{P}$ 满足假设1。顶端的水平伴随在命题 3.3 中构造。对角伴随由引理 2.10 的导出包含映射—最大余幂零子余代数 Quillen 伴随给出，该伴随建立在等价的 ∞-范畴

$$\Omega\mathcal{P}^*\text{-cog}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \simeq \mathbf{Coalg}_{\mathbf{cobar}(\mathcal{P}^*)}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,,$$

它由定理1.37给出。

如果我们将 $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数与链复形之间的余自由-遗忘伴随，分别与 $\mathbf{Inc} \dashv \mathbf{RSub}$ 伴随或 $\mathbf{Inc} \dashv \mathbf{Sub}$ 伴随复合，那么两种情况下都会得到链复形上的同一个余单子 $\mathbf{S}(\mathbf{bar}(\mathcal{P}))$。因此，由于 ∞-范畴 $\mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}{}_{\mathbf{bar}(\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk))$ 正是这个余单子上的余代数范畴，它就是产生余单子 $\mathbf{S}(\mathbf{bar}(\mathcal{P}))$ 的伴随的 ∞-范畴中的终端对象；因此，B$\mathcal{P}$-余代数与 $\mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}{}_{\mathbf{bar}(\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk))$ 之间存在本质上唯一的伴随，使此三角图交换，而它是**松** $\dashv$ **strict**的。□

5.2. **The ∞-范畴的包含-限制方形。** 我们使用定理 2.11 的点集版本的包含-限制方形，以及定理 3.4 和定理 4.13 中确立的比较，来构造一个 ∞-范畴版本的包含-限制方形。我们猜想，类似的结果应当适用于更一般的情形，例如任意紧致、刚性生成的稳定对称幺半 ∞-范畴中的富化 ∞-幺半群。

定理 5.6. 设 $\mathscr{P}$ 是一个约化的 ∞-幺半群，其各元数的同调群均有界且为有限维。以下伴随图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Alg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) & \underset{\mathbf{\Omega^{enh}}}{\overset{\mathbf{B^{enh}}}{\rightleftarrows}} & \mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathscr{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk)), \\
\uparrow \mathbf{Res} \quad \downarrow \mathbf{cAbs} & & \uparrow \mathbf{Sub} \quad \downarrow \mathbf{Inc} \\
\mathbf{Alg}_{\mathscr{P}^*}(\mathbf{D}(\Bbbk)) & \underset{\widehat{\mathbf{\Omega}}^{\mathbf{enh}}}{\overset{\widehat{\mathbf{B}}^{\mathbf{enh}}}{\rightleftarrows}} & \mathbf{Coalg}_{\mathbf{cobar}(\mathscr{P}^*)}(\mathbf{D}(\Bbbk)),
\end{array}$$

按如下意义交换：从左上到右下的左伴随自然弱等价。

证明。 两个水平方向的伴随对应于增强的 bar-cobar 伴随，它定义于小节 3.1 及其对偶版本，该版本定义于小节 4.1。右侧的竖直伴随由引理 5.3 给出，而左侧的竖直伴随由单子的典范态射诱导

$$\iota_{\mathscr{P}} : \bigoplus_{n\geq 0} \left(\mathscr{P}(n) \otimes (-)^{\otimes n}\right)_{h\mathbb{S}_n} \longrightarrow \prod_{n\geq 0} \left[\mathscr{P}^*(n), (-)^{\otimes n}\right]^{h\mathbb{S}_n}$$

以与命题 2.3完全类似的方式。我们还需检查这个伴随方块确实交换。

证明的第一部分是说明，任意约化的 ∞-幺半群 $\mathscr{P}$，只要其同调群按元数有界且有限维，就存在一个点集模型 $\mathcal{P}$，它是一个满足假设 1的微分分次幺半群，因此我们可以将定理 2.11 应用于 $\mathcal{P}$。

由于 ∞-范畴的 ∞-幺半群由在拟同构 [Hin15], 处局部化的微分分次幺半群范畴表示，因此存在该 ∞-幺半群的点集模型 $\mathcal{Q}$。现在，我们来解释为什么对于任意选择的 $\mathcal{Q}$，都可以构造另一个模型 $\mathcal{P}$，它是一个约化微分分次幺半群，并且对所有 $n \geq 0$，每个 $\mathcal{P}(n)$ 都是有界且逐次有限维的链复形。首先，我们可以对 $\mathcal{Q}$ 应用同伦传递定理，从而在 $\mathrm{H}_*(\mathcal{Q})$ 上得到一个至同伦的幺半群结构（见 [vdL04, Gra07]）。特别地，这给出了 $\mathrm{BH}_*(\mathcal{Q})$ 与 $\mathrm{B}(\mathcal{Q})$ 之间的余幂零微分分次余幺半群弱等价。因此，$\Omega\mathrm{BH}_*(\mathcal{Q})$ 与 $\Omega\mathrm{B}(\mathcal{Q})$ 拟同构，进而与$\mathcal{Q}$拟同构。此外，由于根据假设，$\mathcal{Q}(n)$ 的同调有界且有限维，每个 $\Omega\mathrm{BH}_*(\mathcal{Q})(n)$ 都是有界且逐次有限维的链复形。因此，我们可以令 $\mathcal{P} = \Omega\mathrm{BH}_*(\mathcal{Q})$，它满足假设 1，进而应用定理 2.11。

通过这种方式，应用定理 2.11，结合命题5.5 和定理3.4 以及 4.13，我们得到以下自然等价：

$$\mathbf{Inc} \circ \mathbf{B^{enh}} \simeq \mathbf{bar}_{\mathcal{P}} \simeq \mathrm{Inc} \circ \mathrm{B}_{\pi} \simeq \widehat{\mathrm{B}}_{\iota} \circ \mathbb{L}\mathrm{Id} \circ \mathbb{L}c\mathrm{Abs} \simeq \widehat{\mathbf{B}}^{\mathbf{enh}} \circ \mathbf{cAbs}\,,$$

使图表交换，其中我们利用了命题2.3 中的 Quillen 伴随是其 ∞-范畴对应物的点集模型这一事实，并直接使用推论4.8。 □

注记 5.7。 由上可知，由定理 ∞-范畴巴-余巴伴随2.16具有如下 ∞-范畴描述

$$\mathbf{bar}_{\mathcal{P}} \simeq \mathbf{Inc} \circ \mathbf{B^{enh}} \quad \text{and} \quad \mathbf{cobar}_{\mathcal{P}} \simeq \mathbf{Res} \circ \widehat{\mathbf{\Omega}}^{\mathbf{enh}}\,,$$

and，反之，这两个复合映射都具有显式的点集模型，如定理2.16 .

5.3. **与 Heuts 所构造的伴随进行比较。** 我们将定理 5.6 给出的复合伴随，与 [Heu24], 中讨论的伴随进行比较，下面先回顾后者。此比较也有助于我们在第 6 节中将我们的结果与 前引文献 中得到的结果进行比较。Heuts 更一般地考虑了可呈示的对称幺半稳定范畴中的幺半群和余幺半群 ∞-范畴 $\mathbf{C}$。我们只讨论 $\mathbf{C} = \mathbf{D}(\Bbbk)$这一特殊情形。

T定理 5.8. 设 $\mathcal{P}$是满足假设1的微分分次歌剧。由 ∞-范畴 5

$$\mathcal{P}\text{-alg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \underset{\mathbf{cobar}_{\mathcal{P}}}{\overset{\mathbf{bar}_{\mathcal{P}}}{\rightleftarrows}} \Omega\mathcal{P}^{*}\text{-coalg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right]$$

在 ∞-范畴的微分分次 $\mathcal{P}$-代数（在拟同构处局部化）与 ∞-范畴的微分分次$\Omega\mathcal{P}^{*}$-余代数（在拟同构处局部化）之间，与 [Heu24中定理 21] 针对 ∞的底层 $\mathcal{P}$-幺半群（定义为以下复合）所考虑的伴随一致

$$\mathbf{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\mathbf{\Omega}^{\mathbf{enh}}}{\overset{\mathbf{B}^{\mathbf{enh}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\mathbf{Sub}}{\overset{\mathbf{Inc}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}_{\mathbf{bar}(\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,.$$

证明。 由于 $\mathcal{P}$ 满足假设1，我们可以使用引理 5.1 得到 [Heu24]中所考虑的目标余代数范畴与我们的范畴之间的等价：

$$\mathbf{Coalg}_{\mathbf{bar}(\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \simeq \mathbf{Coalg}_{\mathbf{cobar}(\mathcal{P}^{*})}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,.$$

然后，利用定理 3.4 和命题5.5，根据相应定义即可基本得到该结果。 □

5.4. **关于正特征情形。** Heu [Heu24] 中的构造在任意可呈示稳定对称幺半 ∞-范畴 $\mathbf{C}$中均有效。设 $\mathscr{P}$ 是一个 ∞-歌剧，且其系于$\mathbf{C}$中。在此情形下，伴随

$$\mathbf{Alg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{C}) \underset{\mathbf{\Omega}^{\mathbf{enh}}}{\overset{\mathbf{B}^{\mathbf{enh}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{pd},\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathscr{P})}(\mathbf{C}) \underset{\mathbf{Sub}}{\overset{\mathbf{Inc}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{pd}}_{\mathbf{bar}(\mathscr{P})}(\mathbf{C})\,.$$

在 ∞-范畴中，$\mathbf{bar}(\mathscr{P})$-余代数现在先验地带有除幂运算。这些运算使得引理5.1 中的伴随不再是等价。

记号 5.9。本小节中我们添加上标 $\mathbf{pd}$ ， 以便追踪除幂运算。

在这种设定下，我们期望上述伴随能够纳入如下形式的、更一般的包含-限制方形中

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Alg}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) & \underset{\mathbf{\Omega}^{\mathbf{enh}}}{\overset{\mathbf{B}^{\mathbf{enh}}}{\rightleftarrows}} & \mathbf{Coalg}^{\mathbf{pd},\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathscr{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk)), \\
\mathbf{Res} \uparrow \quad \downarrow \mathbf{cAbs} & & \mathbf{Sub} \uparrow \quad \downarrow \mathbf{Inc} \\
\mathbf{Alg}_{\mathscr{P}^{*}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) & \underset{\widehat{\mathbf{\Omega}}^{\mathbf{enh}}}{\overset{\widehat{\mathbf{B}}^{\mathbf{enh}}}{\rightleftarrows}} & \mathbf{Coalg}^{\mathbf{pd}}_{\mathbf{cobar}(\mathscr{P}^{*})}(\mathbf{D}(\Bbbk))\,,
\end{array} \tag{13}$$

其中从 $\mathscr{P}$ 上的经典代数出发，而除幂则出现在方形中所有其他 ∞-范畴里。此外，如果从 $\mathscr{P}$ 上的除幂代数出发，则应有另一个形如以下的包含-限制方形

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Alg}^{\mathbf{pd}}_{\mathscr{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) & \underset{\mathbf{\Omega^{enh}}}{\overset{\mathbf{B^{enh}}}{\rightleftarrows}} & \mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathscr{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk)), \\
\uparrow \mathbf{Res} \quad \downarrow \mathbf{cAbs} & & \uparrow \mathbf{Sub} \quad \downarrow \mathbf{Inc} \\
\mathbf{Alg}^{\mathbf{pd}}_{\mathscr{P}^*}(\mathbf{D}(\Bbbk)) & \underset{\widehat{\mathbf{\Omega}}^{\mathbf{enh}}}{\overset{\widehat{\mathbf{B}}^{\mathbf{enh}}}{\rightleftarrows}} & \mathbf{Coalg}_{\mathbf{cobar}(\mathscr{P}^*)}(\mathbf{D}(\Bbbk)),
\end{array}
\tag{14}
$$

定义所有这些 ∞-范畴并构造此类伴随，超出了本文的范围。我们只简单说明，如何在点集模型的层面观察到这两种变体。

在正特征下，可以选择从 [GRiL23] 中定义的准平面余幂零微分分次余幺半群 $\mathcal{C}$ 出发，构造一个点集包含-限制方形，如定理 2.11 中那样。于是，上述定理中的底部水平伴随将由 [GRiL23 第 6] 节定义良好地构成一个 Quillen 伴随。这个 Quillen 伴随应当诱导出底部水平伴随 (14)，因为根据 [PRiLY26 定理 C] 的严格化结果，微分分次 $\Omega\mathcal{C}$-余代数在拟同构意义下刻画了（不一定余幂零的）无除幂余代数的 ∞-范畴。对于定理 2.11 中顶部的水平伴随，其上的代数属于微分分次歌剧 $\mathcal{C}^*$，由于 $\mathcal{C}$ 作为微分分次对称序列是射影的，因此它现在作为微分分次对称序列是单射的。因此，微分分次 $\mathcal{C}^*$-代数刻画了歌剧上除幂代数的一个 ∞-范畴；关于这类代数及其性质，参见 [BCN21] 。然而，微分分次 $\mathcal{C}^*$-代数先验上只有半模型结构，而且目前尚不清楚如何在点集层面构造 (14) 中顶部的水平伴随。

另一种变体是从一个余纤维微分分次歌剧开始构造定理 2.11 中的包含-限制方形，起 $\mathcal{P}$。那么，微分分次 $\mathcal{P}$-代数在拟同构意义下将编码一个∞-范畴，其中的经典代数是定义在其底层 ∞-歌剧上的，因为任何余纤维化幌半群作为微分分次对称序列都是投射的。在这一背景下，(13)的顶部水平伴随应当以类似于第 [GRiL23节中 4] 第3节所采用的方式，与其中构造的 Quillen 伴随相关联。然而，在这种情况下，$\Omega\mathcal{P}^*$ 将作为微分分次对称序列是单射的，因此原则上将编码一个 ∞-范畴，其中包含（不一定余幂零的）除幂余代数。然而，在这种情况下，我们没有 [PRiLY26] 意义下的严格化结果，因为这个微分分次歌剧作为歌剧并非余纤维化的。因此，目前看来，为(13)中的底部水平伴随构造点集模型仍然遥不可及。

注记 5.10。 然而 [BCN21，定理 4。42]表明，经过与线性对偶函子复合后，可以得到巴构造线性对偶的点集模型，作为 $\Omega\mathcal{P}^*$-代数；在同伦层面上，它们是除幂代数。

6. 导出 Koszul 等价与良好完备化

在本节中，我们定义点集层面上的同伦（余）完备性，并给出 [Heu24，定理 2 中等价的显式点集描述。1]随后，我们讨论 Heuts 关于幺半群具有良好完备化的概念（即平凡代数是同伦完备的），并定义其对偶概念：具有良好余完备化的余纤维化幺半群。最后，我们

将此前的所有构造结合起来，得到若干个方向各异的全忠实函子。我们还给出一些反例，反驳若干听起来顺理成章、但实际上“好得令人难以置信”的陈述。

6.1. 点集层面的同伦（余）完备（余）代数。设 $\mathcal{P}$ 是一个满足假设 1 的 dg 幺半群。我们回顾同伦完备 dg $\mathcal{P}$-代数的定义，这一概念已在 [HH13、CPRNW24、RiL25]中研究过。我们引入同伦余完备 dg $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数的对偶定义。我们证明，这两个定义实际上是点集层面对 [Heu24]所引入的幂零完备代数和余幂零完备余代数概念的描述。几乎显而易见的是，∞-范畴的巴-余巴伴随 $\mathrm{bar}_{\mathcal{P}} \dashv \mathrm{cobar}_{\mathcal{P}}$ 限制到这两个 ∞-子范畴之间的一个等价，从而重新证明了 [Heu24，定理 2.1] ，其中环境稳定 ∞-范畴为 $\mathrm{D}(\Bbbk)$。

6.1.1. 同伦完备性。考虑限制伴随

$$\mathcal{P}\text{-alg} \underset{\mathrm{Res}}{\overset{c\mathrm{Abs}}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}^*\text{-alg}^{\mathsf{comp}}$$

根据定理，2.10这是一个 Quillen 伴随。这里我们考虑的模型结构中，两侧的弱等价均由拟同构给出。

定义 6.1 （同伦完备 dg $\mathcal{P}$-代数）。 设 A 是一个 dg $\mathcal{P}$-代数。若伴随的导出单位同伦完备

$$\mathbb{L}\eta_A : A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res} \circ \mathbb{L}c\mathrm{Abs}(A)$$

是一个拟同构。

注记 6.2。 这一概念背后的想法是，未导出伴随单位 $\mathrm{Res} \circ c\mathrm{Abs}$会将一个 $\mathcal{P}$-代数普遍地转化为完备的 $\mathcal{P}^*$-代数，或称“绝对”代数。当 $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$时，在有限生成情形下，这一完备性概念与增广交换代数的 I-进完备化一致；事实上，在一般情形下，它的表现比 I-进完备化更好。更多细节参见 [RiL25，第 3.4 节。1] 回到上述定义，只有当一个 dg $\mathcal{P}$-代数的导出伴随单位是一个等价时，才自然地称它在此意义下是同伦完备的。

注 6.3. 借助我们的点集模型，我们可以在点集层面将同伦完备这一条件表达得极为明确。若 A 是一个 $\mathcal{P}$-代数，那么 $\Omega\mathrm{B}A \to A$ 是拟同构的标准证明会用到这样一个事实：忽略微分后，我们可以写作

$$\Omega\mathrm{B}A = \bigoplus_{n>0} (\mathcal{P} \circ \mathrm{B}\mathcal{P})(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} A^{\otimes n}.$$

现在，链复形 $(\mathcal{P}\circ\mathrm{B}\mathcal{P})(n)$ 对 $n > 1$ 是无环的。因此，存在显然的滤过，使得 $\Omega\mathrm{B}A \to A$ 是一个滤过拟同构；由于这些滤过有下界且穷尽，这便得到了所需结果。现在，A 的同伦完备性条件是，自然嵌入

$$\Omega\mathrm{B}A = \bigoplus_{k>0} \mathcal{P}(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1}\times\cdots\times\mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} (\mathrm{B}\mathcal{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{B}\mathcal{P}(i_k)) \otimes_{\mathbb{S}_n} A^{\otimes n}$$

into

$$\widehat{\Omega}\mathrm{B}A = \prod_{k>0} \mathcal{P}(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1}\times\cdots\times\mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} (\mathrm{B}\mathcal{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{B}\mathcal{P}(i_k)) \otimes_{\mathbb{S}_n} A^{\otimes n}$$

是一个拟同构。对于之前考虑的同一滤过，它仍然是一个滤过拟同构；但该滤过不再穷尽目标，因此滤过拟同构未必是拟同构。在某些有利情形下，可以通过引入进一步的滤过来证明同伦完备性，如 [CPRNW24，第 5]节。

注 6.4. 根据定义，导出完备绝对化函子 $\mathbb{L}c\mathrm{Abs}$ 限制为一个全忠实函子

$$\mathbb{L}c\mathrm{Abs} : \mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{ho.comp}}\,[\mathsf{Q.iso}^{-1}] \hookrightarrow \mathcal{P}^{*}\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{comp}}\,[\mathsf{Q.iso}^{-1}]$$

在同伦完备的 dg $\mathcal{P}$-代数的 ∞-子范畴（以拟同构为准）与完备 dg $\mathcal{P}^{*}$-代数的 ∞-范畴（以拟同构为准）之间。

设 $\mathscr{P}$ 是一个富化的 ∞-幺半群。根据 [Heu24 第 10], 节， $\mathscr{P}$-代数 X 称为幂零完备的，如果典范映射

$$X \longrightarrow \lim_{k} \mathbf{t}_k X\,,$$

是一个等价，其中 $\mathbf{t}_k X$ 表示对 X 中元数大于 n的运算进行截断。函子 $\mathbf{t}_n(-)$ 是通过考察富化 ∞-幺半群 $\mathscr{P}$的逐次元数截断得到的。

命题 6.5。设 $\mathcal{P}$ 是满足假设ι的微分分次幺半群。设 A 是一个微分分次 $\mathcal{P}$-代数。当且仅当它是幂零完备的，它才是同伦完备的。

证明。 这一结果直接由定理 5.8 得出，因为这两个定义实际上是 ∞-范畴 bar-cobar 伴随 $\mathbf{bar}_{\mathcal{P}} \dashv \mathbf{cobar}_{\mathcal{P}}$ 的单位的两种不同描述。事实上，一方面，文献 [Heu24，命题 10_4] 中证明了幂零完备化映射是该伴随的单位。另一方面，设 A 是一个 dg $\mathcal{P}$-代数。如果导出单位

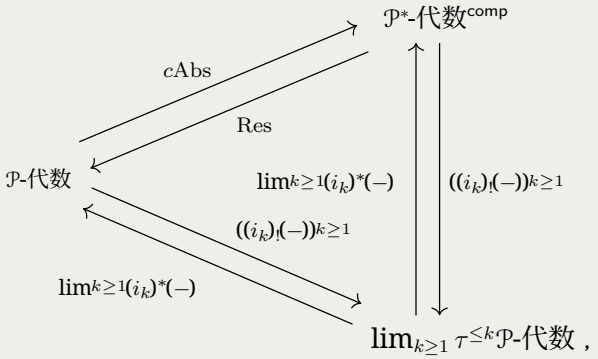
$$\mathbb{L}\eta_A : A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res} \circ \mathbb{L}c\mathrm{Abs}(A)$$

是拟同构，则称其同伦完备。利用典范余纤维化分解 $\Omega_{\pi}\mathrm{B}_{\pi}(A)$ of A，我们计算得出，这个导出单位由映射表示

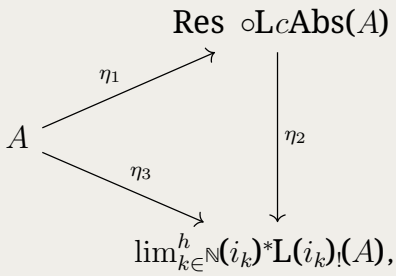
$$A \longrightarrow \mathrm{Res} \circ \widehat{\Omega}_{\iota} \circ \mathrm{Inc} \circ \mathrm{B}_{\pi}(A)\,,$$

而且，这也表示 ∞-范畴幺半群的 bar-cobar 伴随的（导出）单位$\mathbf{bar}_{\mathcal{P}} \dashv \mathbf{cobar}_{\mathcal{P}}$。因此，这两个概念一致。 □

注记 6.6（与幂零完备性的显式比较）。实际上，还有一种更具启发性的方式来理解命题 6.5。根据小节4.2的结果，我们得到一个交换的 Quillen 伴随三角



其中左伴随绘制在顶部和右侧，右侧的竖直伴随是在小节 4.2中构造的那个。转而考察导出函子，第一个 Quillen 伴随三角给出了如下的伴随单位交换三角



对每个微分分次 $\mathcal{P}$-代数 A。映射 $\eta_1 \colon A \longrightarrow \mathrm{Res} \circ \mathrm{L}c\mathrm{Abs}(A)$ 是从 A 到其同伦完备化的映射。映射 $\eta_3 \colon A \longrightarrow \lim^{h}_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{N}(i_k)^* \mathrm{L}(i_k)_! (A)$ 是从A 到其幂零完备化的映射的一个模型。最后，映射 η_2 由在对象 $\mathrm{L}c\mathrm{Abs}(A)$ 处将 Res 应用于定理 4.4 中伴随的单位而得，因此它是一个自然等价，这同样由定理 4.4 得出。所以， A同伦完备当且仅当它幂零完备。

6.1.2. 同伦余完备性。 设 $\mathcal{P}$是一个满足假设 1 的微分分次幺半群。考虑包含映射伴随

$$\mathrm{B}\mathcal{P}\text{-coalg} \underset{\text{Sub}}{\overset{\text{Inc}}{\rightleftarrows}} \Omega\mathcal{P}^*\text{-coalg}$$

根据引理 2.10，这是一个 Quillen 伴随。这里我们考虑两侧的弱等价均由拟同构给出的模型结构。

定义 6.7 (同伦余完备 dg $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数)。 设 C 是一个 dg $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数。若伴随的导出余单位同伦余完备

$$\mathbb{R}\epsilon_C : \mathrm{Inc} \circ \mathbb{R}\mathrm{Sub}(C) \xrightarrow{\sim} C$$

是拟同构。

这个定义的想法是，dg $\mathrm{B}\mathcal{P}$-余代数本质上是余幂零的（因此是余完备的），因为根据定义，其中的任意元素都只能有有限次迭代分解。同伦余完备性是导出层面上的类似概念。

注记 6.8。根据定义，导出的最大余幂零子余代数 RSub 限制为一个全忠实函子

$$\mathbb{R}\mathrm{Sub} : \Omega\mathcal{P}^*\text{-coalg}^{\mathsf{ho.cocomp}}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \hookrightarrow \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-coalg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right]$$

介于由拟同构取商的同伦余完备 dg $\Omega\mathcal{P}$-余代数的 ∞-子范畴与由拟同构取商的 dg $\mathrm{B}\mathcal{P}$-余代数的 ∞-范畴之间。

设 $\mathscr{C}$是一个带富化的 ∞-余幺半群。按照 [Heu24，第 10], 节，一个（不一定余幂零的）$\mathscr{C}$-余代数 Y若典范映射 余幂零完备 则称为

$$\lim_k \mathbf{t}_k C \longrightarrow C\,,$$

是一个等价，其中$\mathbf{t}_n C$ 是对 C 中元数大于 n 的运算进行截断，并通过考察富化的 ∞-余幺半群 $\mathscr{C}$的连续元数截断得到。

命题 6.9。 设 $\mathcal{P}$ 是满足假设 1的微分分次歌剧。设 C 是一个微分分次 $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数。当且仅当它是余幂零完备时，它是同伦余完备的。

证明。 证明与命题6.5完全对偶。 □

注记 6.10（更宽松版本的共幂零完备性）。同伦余完备的微分分次 $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数全忠实地嵌入到余幂零余代数的*strict* 版本中，该版本由以拟同构为等价关系的微分分次余代数的余幺半群 $\mathrm{B}\mathcal{P}$ 上的模型范畴所编码。也可以定义这一概念的一个更宽松版本，要求 ∞-范畴伴随的余单位

$$\mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathrm{B}\mathcal{P}}(\mathbf{D}(\Bbbk)) \underset{\mathbf{Sub}}{\overset{\mathbf{Inc}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}_{\Omega\mathcal{P}^*}(\mathbf{D}(\Bbbk))$$

成为等价。由于 dg$\mathrm{B}\mathcal{P}$-余代数在拟同构意义下无法将底层 ∞-余幺半群 $\mathrm{B}\mathcal{P}$ 上的余幂零余代数矫正为严格余代数，因此一般而言，这给出了一种不同的共幂零完备性概念。反例 6.27给出了一个例子，说明这一概念与前文给出的共幂零完备性定义并不一致。

6.2. 由 ∞范畴化巴-余巴伴随诱导的等价。 [Heu24], 定理 2.1 的一项主要结果确立了幂零完备$\mathscr{P}$代数与 conilcomplete bar($\mathscr{P}$)-余代数之间的 ∞范畴等价。Heuts 证明了 Francis–Gaitsgory 在 [FG12], 中提出的原始猜想不成立，因此该定理被视为对这一猜想的替代。在我们的框架中， ∞范畴化巴-余巴伴随几乎不言自明地限制为同伦完备 $\mathcal{P}$代数与同伦余完备 $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数之间的等价（根据假设 1，这些余代数可以视为非余幂零的 bar($\mathscr{P}$)-余代数）；由此，我们从迄今引入的点集描述 [Heu24，定理 2.11] 中，在 $\mathsf{C} = \mathsf{D}(\Bbbk)$ 的情形下重新得到这一结果。

定理 6.11。 设 $\mathcal{P}$是满足假设1的微分分次幺半群。该伴随

$$\mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \underset{\mathbf{cobar}_{\mathcal{P}}}{\overset{\mathbf{bar}_{\mathcal{P}}}{\rightleftarrows}} \Omega\mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]$$

限制后给出 ∞-范畴之间的一个等价

$$\mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{ho.comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \simeq \Omega\mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{coalg}^{\mathsf{ho.cocomp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]\,,$$

介于同伦完备的微分分次 $\mathcal{P}$-代数的 ∞-子范畴与同伦余完备的微分分次$\Omega\mathcal{P}^*$-余代数的 ∞-子范畴之间。

证明。 正如命题 6.5和6.9的证明中已解释的那样，∞-范畴中的巴-余巴伴随的单位和余单位很容易识别为定义同伦完备性和同伦余完备性的映射，因此结论成立。 □

6.3。 **具有良好（余）完备化的算子**。 本小节回顾具有良好完备化的算子的定义，该定义由 [Heu24第 13]节引入。

定义 6.12 （具有良好完备化的算子）。 设 $\mathcal{P}$ 是一个微分分次幺半群。如果对于任意链复形 V，由 V 配备平凡代数结构所给出的微分分次 $\mathcal{P}$-代数都是同伦完备的，则称其具有良好完备化。

定理6.3 中给出的同伦完备代数的点集描述在这里可以进一步明确。令 V为一个平凡的 $\mathcal{P}$-代数。对映射$\Omega\mathrm{B}V \to \widehat{V}$ $\widehat{\ }$取完备化，得到$\Omega\mathrm{B}V \to \widehat{V} = V$（因为平凡代数特别地是完备的），这意味着 $\mathcal{P}$ 具有良好完备化，当且仅当从

$$\widehat{\Omega}\mathrm{B}V = \prod_{k>0} \mathcal{P}(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=d} \mathrm{Ind}^{\mathbb{S}_d}_{\mathbb{S}_{i_1}\times\cdots\times\mathbb{S}_{i_k}} (\mathrm{B}\mathcal{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{B}\mathcal{P}(i_k)) \otimes_{\mathbb{S}_d} V^{\otimes d}$$

到直和项

$$\mathcal{P}(1) \otimes \mathrm{B}\mathcal{P}(1) \otimes V = V$$

对于任意链复形 V，都是拟同构。

具有良好完备化的幺半群的主要例子，是按照以下定义的 ***Koszul*** 幺半群。

定义 6.13。 设 $\mathcal{P}$是满足假设 1 的微分分次歌剧。若 $\mathcal{P}$满足以下条件，则称其为 $H_*(\mathcal{P}) = 0$ 对于 $* \neq 0$ 成立，并且 $H_*(\mathrm{B}\mathcal{P}(n)) = 0$ 对于 $* \neq n-1$ 成立。

注 6.14。这里给出的定义有些限制性：它涵盖了 $\mathcal{A}ss$、$\mathcal{C}om$ 和 $\mathcal{L}ie$ 的标准例子，但不包括例如 $\mathcal{P}ois_n$，后者通常被认为是 Koszul 幺半群。

以下定理证明于 [Heu24，第 13 节。2], 此外， [GR17定理 2.9.4] 中也以一种略有不同的方法证明了该定理。

定理 6.15 (Gaitsgory–Rozenblyum, Heuts)。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 ***Koszul*** 幺半群。那么 $\mathcal{P}$ 具有良好完备化。

证明。 为方便读者，我们将 Heuts 的证明转换到我们的语境中。Koszul 性意味着 $\mathcal{P} \simeq H_*(\mathcal{P})$ 和 $\mathrm{B}\mathcal{P} \simeq H_*(\mathrm{B}\mathcal{P})$，因此在下文中，我们可以并且将用它们的同调替换 $\mathcal{P}$ 和 $\mathrm{B}\mathcal{P}$，并假设二者都集中在单一度数上。考虑 Koszul 复形

$$K(d) := \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{P}(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=d} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1}\times\cdots\times\mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_d} (\mathrm{B}\mathcal{P}(i_1)\otimes\cdots\otimes\mathrm{B}\mathcal{P}(i_k))$$

及其 Koszul 微分。它具有一个按 $\mathcal{P}$ 的元数给出的降滤过，其分次项为

$$\mathrm{Gr}_F^p K(d) = \mathcal{P}(p) \otimes_{\mathbb{S}_p} \bigoplus_{i_1+\cdots+i_p=d} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1}\times\cdots\times\mathbb{S}_{i_p}}^{\mathbb{S}_d} (\mathrm{B}\mathcal{P}(i_1)\otimes\cdots\otimes\mathrm{B}\mathcal{P}(i_p)).$$

根据 Koszul 性，$\mathrm{Gr}_F^p K(d)$ 集中在度数 $d-p$。由此可知，对每个 p，复形 $F^pK(d)$ 和 $K(d)/F^pK(d)$ 只是 $K(d)$ 的“粗”截断。若 $d>1$，Koszul 复形 $K(d)$ 是无环的，因此其粗截断的同调集中在单一度数上。特别地，$H_*(K(d)/F^pK(d))$ 集中在度数 $d-p$。

但现在 $\Omega\mathrm{B}V = \bigoplus_d K(d) \otimes_{\mathbb{S}_d} V^{\otimes d}$，且

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}\mathrm{B}V &= \varprojlim_p \bigoplus_d K(d)/F^pK(d) \otimes_{\mathbb{S}_d} V^{\otimes d} \\ &= K(1)\otimes V \oplus \varprojlim_p \bigoplus_{d>1} K(d)/F^pK(d) \otimes_{\mathbb{S}_d} V^{\otimes d}.\end{aligned}$$

由于对于$d>1$，$K(d)/F^pK(d)$和$K(d)/F^{p-1}K(d)$的同调分别集中在不同次数，因此它们之间的映射是零伦的，进而上述余滤系统中的所有映射都是零伦的。所以逆极限为零，且$\mathcal{P}$有良好的完备化。□

看来文献中还没有不具有良好完备化的微分分次歌剧实例。我们在此记录一个。

反例 6.16。考虑余幺半群 $\mathcal{C}_0$，其底层对称序列为 $\mathcal{C}_0(n) = \Bbbk.c_n$，对于所有 $n \geq 1$都集中在次数 0，带有平凡的 $\mathbb{S}_n$作用和零微分，并且所有余合成都恒为零。那么微分分次歌剧 $\mathcal{P} = \Omega\mathcal{C}_0$（它只是由对称序列 $s^{-1}\mathcal{C}_0$生成的自由微分分次歌剧）不具有良好的完备化。

来解释一下原因。考虑 $V = \Bbbk.v$，一个定义在 $\Bbbk$ 上的一维向量空间，将其视为集中在次数 0 的平凡 dg $\Omega\mathcal{C}_0$-代数。我们使用相对于 Koszul

扭曲态射 $\iota\colon \mathcal{C}_0 \longrightarrow \Omega\mathcal{C}_0$，得到 V 的余纤维化分解。利用这一分解，我们推导出：V 是同伦完备的 dg $\Omega\mathcal{C}_0$-代数，当且仅当映射

$$\iota_V : \bigoplus_{k\geq 1} \Omega\mathcal{C}_0(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} (\mathcal{C}_0 \circ V)^{\otimes k} \longrightarrow \prod_{k\geq 1} \Omega\mathcal{C}_0(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} (\mathcal{C}_0 \circ V)^{\otimes k}$$

是一个拟同构。然而，事实并非如此。事实上，在右侧，形式幂级数

$$\alpha = \sum_{k\geq 1} s^{-1} c_k \circ (c_1, \dots, c_1)(v, \dots, v)\,,$$

是一个次数为 -1 的闭元，它不属于微分的像，也不可能属于包含映射 ι_V 的像。因此，映射 ι_V 不是拟同构。

6.3.1. 具有良好余完备化的歌剧。 现在，我们为余纤维 dg 歌剧定义具有良好余完备化的概念。请注意，在等价意义下，我们总能选择形如 $\Omega\mathcal{C}$ 的 dg 歌剧，其中 $\mathcal{C}$ 是某个余幂零 dg 余幺半群。此外，给定假设 I，我们总能选择形如$\Omega\mathcal{P}^*$ 的对象，其中 $\mathcal{P}$ 是满足假设 I 的某个 dg 歌剧。

定义 6.17 （具有良好余完备化的歌剧）。 设 $\Omega\mathcal{P}^*$ 是一个余纤维 dg 歌剧。如果对于任意链复形 V，由 V 配备平凡余代数结构所给出的 dg $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数都是同伦余完备的，则称其具有良好余完备化。

我们希望了解 $\Omega\mathcal{P}^*$ 何时具有良好余完备化，也就是说，平凡的微分分次 $\Omega\mathcal{P}^*$ 是同伦余完备的。这相当于理解典范映射

$$\mathrm{B}_\pi \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}^*)(V) \rightarrowtail \widehat{\mathrm{B}}_\iota \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}^*)(V)$$

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }$对任意链复形 V是否为拟同构。复形 $\mathrm{B}_\iota\mathrm{S}^c(\mathcal{P}^*)(V)$涉及余自由构造，而这很难计算，因此我们先将这个问题化简为一个更易处理的问题。

引理 6.18. 微分分次幺半群$\Omega\mathcal{P}^*$ 具有良好余完备化，当且仅当典范包含映射 n

$$\mathrm{B}_\pi \mathrm{S}(\mathcal{P}^*)(V) \rightarrowtail \mathrm{B}_\pi \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}^*)(V)$$

对所有链复形 V都是拟同构。

证明。 考虑以下交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}_\pi \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}^*)(V) & \rightarrowtail & \widehat{\mathrm{B}}_\iota \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}^*)(V) \\ \uparrow & \nearrow_{\simeq} & \downarrow \simeq \\ \mathrm{B}_\pi \mathrm{S}(\mathcal{P}^*)(V) & \xrightarrow{\simeq} & V \end{array}$$

在链复形中。右侧的竖直箭头和底部的水平箭头是拟同构，因此对角映射也是拟同构。因此，根据三取二性质，左侧的竖直包含映射是拟同构，当且仅当顶部的水平箭头是拟同构。□

注 6.19. 还可以用另一种方式表述，即典范映射

$$\mathrm{B}_\pi \widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}^*)(V) \longrightarrow V$$

是拟同构。

我们所见到的第一个相当显而易见的具有良好余完备化的余纤维微分分次歌剧例子，是截断余算子的余 bar 构造。

命题 6.20. 设 $\mathcal{P}$ 是满足假设 ι的微分分次歌剧。那么，微分分次歌剧 $\Omega(\tau^{\leq k}\mathcal{P}^*)$对所有 $k \geq 1$都具有良好余完备化。

证明。 在这种情况下，这个映射

$$\mathrm{B}_\pi \mathrm{S}(\tau^{\leq k}\mathcal{P})(V) \rightarrowtail \mathrm{B}_\pi \widehat{\mathrm{S}}^c(\tau^{\leq k}\mathcal{P}^*)(V)$$

实际上对任意 $k \geq 1$都是同构，因此我们可以由引理6.18得出结论。 □

这种性质似乎远比具有良好完备化的幺半群少见；事实上，基本的余纤维微分分次歌剧都不具有良好余完备化。

反例 6.21。令 $\Omega\mathcal{C}om^*$ 为编码 $\mathcal{L}_\infty$-(余)代数的微分分次歌剧。那么， $\mathcal{P}$ 不具有良好余完备化。事实上，设 V 是一个集中在次数 0 的可数无限维向量空间。那么我们有

$$\widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{C}om^*)(V) \cong \Bbbk[\![x_1, x_2, x_3, \ldots]\!]\,,$$

也就是说，这是一个以可数无穷多个变量为元的形式幂级数环所构成的交换代数。接下来可以证明，映射

$$\mathrm{B}_\pi\left(\Bbbk[\![x_1, x_2, x_3, \ldots]\!]\right) \longrightarrow V$$

不是拟同构。原因在于，尽管以有限个变量为元的形式幂级数环在基域上是光滑的，但以无限个变量为元的形式幂级数则不再如此。更多详情参见 [GR17，注记 2.6。7] 关于这个反例的更多细节。请注意，Heuts 在 [Heu24，引理 12_3] 中也将无限多个变量的形式幂级数环用作原始 Francis–Gaitsgory 猜想的反例，因为它们是 I-进完备化，但本身并非 I-进完备的。

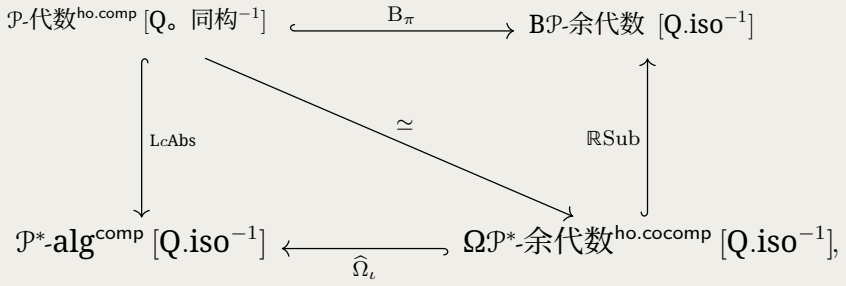
这两种现象之间的关系如下：如果微分分次歌剧 $\Omega\mathcal{C}om^*$ 具有良好完备化，那么根据命题6.28，我们将得到一个 ∞-范畴之间的等价

$$\mathcal{C}om^*\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{comp}}\left[\mathrm{Q}.\mathrm{iso}^{-1}\right] \simeq \mathcal{C}om\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{ho.comp}}\left[\mathrm{Q}.\mathrm{iso}^{-1}\right],$$

即在拟同构意义下，（完备的）微分分次绝对交换代数与同伦完备微分分次交换代数之间的等价。限制到度0 （离散对象）时，这个等价将给出 1-范畴之间的等价：绝对交换代数与 I-进完备交换代数之间的等价。然而，这种等价不可能存在，因为由无限多个变量生成的自由绝对交换代数 $\Bbbk[\![x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots]\!]$ 并非 I-进完备。另请参见注记2.5 以及 [RiL25，第 3 节。4] 了解更多详情。

6.4. **导出包含与等价**。本小节将梳理迄今为止我们所考虑的不同 ∞-范畴之间的各种全忠实函子，并解释为什么其中大多数通常并非 ∞-范畴之间的等价。我们还将说明，在此背景下，假设一个幺半群具有良好（余）完备化所带来的一些后果。

命题 6.22。 设 $\mathcal{P}$ 为满足假设 ι 的微分分次歌剧。以下是 ∞范畴的全忠实函子



其中左上角和右下角通过$\mathbf{bar}_{\mathcal{C}} \dashv \mathbf{cobar}_{\mathcal{C}}$伴随等价。

证明。 这些函子即定理 2.11中的函子，而左上角与右下角∞-范畴等价这一事实由定理 6.11给出。根据定义，两个竖直函子分别是同伦完备 $\mathcal{C}^*$-代数和同伦余完备 $\Omega\mathcal{C}$-余代数的全忠实函子。

我们来证明，将函子 B_π限制在同伦完备的 $\mathcal{P}$-代数上时，它是全忠实的。当其值落在 dg B$\mathcal{P}$-余代数的 ∞-范畴中（模去转移弱等价）时，它是全忠实的（事实上是一个等价）；而 dg B$\mathcal{P}$-余代数的 ∞-范畴（模去拟同构）是前者的一个局部化。因此，只需证明：若 A 是一个同伦完备的 $\mathcal{P}$-代数，则 $\mathrm{B}_\pi A$ 相对于拟同构是一个局部对象。映射空间之间存在弱等价

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}_{\mathrm{B}\mathcal{P}\text{-coalg }[\mathsf{W}.\mathsf{eq}^{-1}]}(-, \mathrm{B}_\pi(A)) &\simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{P}\text{-alg }[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]}(\Omega_\pi(-), A)\\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{P}\text{-alg }[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]}(\Omega_\pi(-), \mathrm{Res}\, \mathbb{L}c\mathrm{Abs}A)\\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{P}^*\text{-alg}^{\mathrm{comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]}(\widehat{\Omega}_\iota(\mathrm{Inc}(-)), \mathbb{L}c\mathrm{Abs}A)\,,\end{aligned}$$

而且，这个最后的映射空间显然将拟同构映射为映射$\widehat{\ }$空间之间的弱等价，因为 Ω_ι 和 Inc 都保持拟同构。因此，$\mathrm{B}_\pi A$ 确实关于拟同构是局部的，并且函子 B_π 是全忠实的。关于 Ω_ι 的证明完全类似。□

反例 6.23。全忠实函子

$$\mathrm{B}_\pi : \mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{ho.comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \longrightarrow \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-}\mathsf{coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]$$

一般而言并非 ∞-范畴之间的等价。事实上，如果它是等价，那么函子

$$\mathrm{Inc} : \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-}\mathsf{coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \longrightarrow \Omega\mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{coalg}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]$$

也必然是全忠实的。现在，取 $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$，并考虑一个集中在次数 0 的无限维向量空间 V，赋予其平凡的 B$\mathcal{P}$-余代数结构。导出余单位

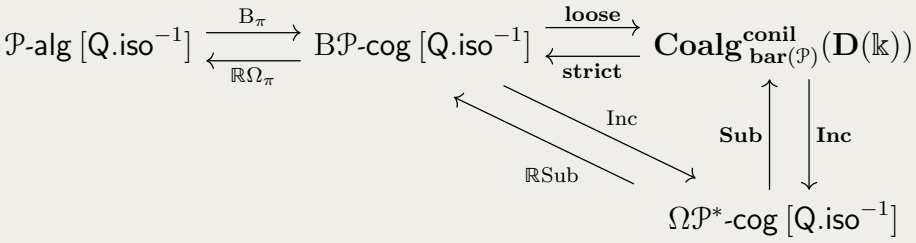
$$\mathbb{R}\mathrm{Sub}\,\mathrm{Inc}(V) \longrightarrow V$$

可计算为映射

$$\mathrm{B}_\pi\left(\Bbbk[\![V]\!]\right) \longrightarrow V$$

如反例 6.21中所述，它不是拟同构。

6.4.1. 具有良好完备化的拟 *operad* 的情形。 结合定理2.11 与命题5.5 中的交换三角形以及定理3.4，我们得到如下伴随图表



再一次，左伴随写在上方。我们用自己的记号陈述以下关键结果。

命题 6.24 ([Heu24，命题 11。1])。 设 $\mathcal{P}$ 是满足假设 1的微分分次歌剧。假设 $\mathcal{P}$ 具有良好完备化，并设 A 是一个微分分次 $\mathcal{P}$-代数。那么比较映射

$$\mathbf{\Omega}^{\mathbf{enh}}\mathbf{B}^{\mathbf{enh}}(A) \longrightarrow \mathbf{cobar}_{\mathcal{P}}\mathbf{bar}_{\mathcal{P}}(A)$$

是 ∞-范畴中 $\mathcal{P}$-代数的一个等价。

Coro引理 6.25. 设 $\mathcal{P}$ 是一个满足假设$\imath$且具有良好完备化的微分分次歌剧。函 r

$$\mathbf{loose} : \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-}\mathsf{cog}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \longrightarrow \mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk))$$

通过歌剧 $\boldsymbol{bar}$ 构造B_π，在同伦完备的 $\mathcal{P}$-代数的本质像上是全忠实的。

证明。 设 A 是一个同伦完备的 $\mathcal{P}$-代数。根据定义，映射

$$A \longrightarrow \mathbf{cobar}_{\mathcal{P}}\mathbf{bar}_{\mathcal{P}}(A) \simeq \mathbb{R}\Omega_\pi\, \mathbb{R}\mathrm{Sub}\,\mathrm{Inc}\,\mathrm{B}_\pi(A)$$

是一个等价。因此，根据命题6.24，映射

$$A \longrightarrow \mathbf{\Omega}^{\mathbf{enh}}\mathbf{B}^{\mathbf{enh}}(A) \simeq \mathbb{R}\Omega_\pi\, \mathbf{strict}\, \mathbf{loose}\, \mathrm{B}_\pi(A)$$

也是一个等价。因此，由于 B_π 在所有同伦完备的 $\mathcal{P}$-代数上都是全忠实的，我们推得，**松** 在通过函子 B_π得到的同伦完备$\mathcal{P}$-代数在 $\mathrm{B}\mathcal{P}$-代数中的本质像上也必须是全忠实的。□

例 6.26. 设 $\mathcal{P}$ 是一个连通的微分分次歌剧。那么，存在 ∞-范畴之间的等价

$$\mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}_{\geq 1}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \simeq \mathrm{B}\mathcal{P}\text{-}\mathsf{cog}_{\geq 1}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \simeq \mathbf{Coalg}_{\,\mathbf{bar}(\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk)))^{\mathbf{conil}}_{\geq 1}$$

在 $\mathcal{P}$-代数（次数为 ≥ 1）与 $\mathrm{B}\mathcal{P}$-余代数（次数为 ≥ 1）以及富化 ∞余幺半群 $\mathrm{B}\mathcal{P}$ 上的余幂零余代数（次数为 ≥ 1）之间。特别地，在这些子范畴上，余幂零 $\mathrm{B}\mathcal{P}$-余代数的整直化成立。这可以解释为推论 6.25 的一个例子。事实上，由于 $\mathcal{P}$ 是连通的，任何 $\mathcal{P}$-代数（次数为 ≥ 1）都是同伦完备的。一个例子是 Quillen 在有理同伦研究中所讨论的次数为 ≥ 1 的微分分次李代数[Qui69]。

反例 6.27。 正如 [Che25，定理 5.31]，中已经指出，**松** $\dashv$ **strict** 这一伴随一般而言并非等价。下面再对反例 6.16作另一种解读，以作说明。

设 $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$。由于 $\mathcal{C}om$ 根据定理 6.15 具有良好完备化，因此由 [Heu24，注记 11.2]，可知，函子 Inc 在富化的 ∞-余幺半群 $\mathrm{B}\mathcal{P}$ 上的平凡余代数范畴中是全忠实的。进而，这意味着函子 Sub 在任意平凡 $\Omega\mathcal{C}om^*$-余代数范畴中也是全忠实的。然而，正如我们在反例 6.16 中所见，幺半群 $\Omega\mathcal{C}om^*$ 不具有良好的余完备化，因为次数 0 的无限维平凡 $\Omega\mathcal{C}om^*$-余代数并不同伦余完备。进而，这意味着 RSub 在无限维平凡 $\Omega\mathcal{C}om^*$-余代数范畴中并非全忠实。最后，这也意味着函子 strict 限制在无限维平凡余代数范畴时也不是全忠实的。因此，这个伴随不可能是等价。

6.4.2. 具有良好余完备化的幺半群情形。 我们证明，当编码余代数的余纤维化幺半群具有良好余完备化时，Koszul 对偶另一侧的同伦完备代数与绝对代数相一致。

命题 6.28。 设 $\mathcal{P}$ 是一个满足假设 $\imath$ 的微分分次幺半群。如果微分分次幺半群 $\Omega\mathcal{P}^*$ 具有良好余完备化，当且仅当存在等价

$$\mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{ho.comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \simeq \mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{comp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}] \simeq \Omega\mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{coalg}^{\mathsf{ho.cocomp}}\,[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}]\,.$$

证明。 伴随 $\Omega_\iota \dashv \mathrm{LB}_\iota$ 在 ∞-范畴层面诱导等价，当且仅当对于任意完备 dg $\mathcal{P}^*$-代数 B，其像 $\mathrm{B}_\iota(V)$ 都是同伦余完备的。事实上，这是因为我们已经知道 B_ι 是全忠实的。

首先，我们注意到，$\Omega\mathcal{P}^*$ 具有良好余完备化，当且仅当对于任意链复形 V，典范映射

$$\mathrm{B}_\pi\widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}^*)(V) \longrightarrow \widehat{\mathrm{B}}_\iota\widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}^*)(V)$$

$\widehat{\ }$是一个拟同构。也就是说，当且仅当自由 dg $\mathcal{P}^*$-代数在 V 上的像经 B_ι 作用后是同伦余完备的。因此，若这些等价成立，则 $\Omega\mathcal{P}^*$ 具有良好余完备化。

现在，为了证明任何 dg $\mathcal{P}^*$-代数经此函子所得的像都是同伦余完备的，我们利用完备 dg ∞-代数在拟同构下构成的范畴具有$\mathcal{P}^*$单子性，即其上的单子结构由 $\mathbf{D}(\Bbbk)$ 给出（推论 4.7），因此任意代数 B 都可以写成一个U-分裂的自由 dg $\mathcal{P}^*$-代数单纯形图的几何实现。

$\widehat{\ }$此几何实现经 B_ι 作用后的像仍然是同伦余完备的，因为我们有

$$\mathbb{R}\mathrm{Sub}\circ\widehat{\mathrm{B}}_\iota \simeq \mathrm{B}_\pi\circ\mathrm{Res}\,,$$

其中，Res 保持 U-分裂单纯形图的几何实现，因为它与遗忘函子相交换；而 B_π 保持所有余极限，因为它是一个左伴随。因此，任意 dg $\mathcal{P}^*$-代数 B 经完备 bar 函子作用后的像仍然是同伦余完备的，且这些等价成立。□

注记 6.29（具有良好有限余完备性的算子）。 如反例 6.21所示，基本的余纤维化幌半群例子并不具备良好余完备化。不过，我们可以引入具有 $\Omega\mathcal{P}^*$ 良好有限余完备性的微分分次歌剧这一概念，也就是说，使得映射

$$\mathrm{B}_\pi\mathrm{S}(\mathcal{P})(V) \rightarrowtail \mathrm{B}_\pi\widehat{\mathrm{S}}^c(\mathcal{P}^*)(V)$$

对于所有完美链复形 V 都是拟同构。原则上，$\Omega\mathcal{P}^*$ 具有有限的良好余完备化这一事实应当能导出 ∞-范畴之间的等价

$$\mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{comp}}_{\mathsf{f.g}}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \simeq \mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{ho.comp}}_{\mathsf{f.g}}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right]$$

：有限生成的完备微分分次 $\mathcal{P}^*$-代数（模拟同构）与有限生成的同伦完备微分分次 $\mathcal{P}^*$-代数（模拟同构）之间的等价。注意，像 $\Omega\mathcal{C}om^*$ 这样的例子具有良好有限余完备化，但不具有良好余完备化。

6.4.3. 截断算子及其巴构造上的余幂零余代数的点集模型。最后，我们讨论按元数截断的微分分次幺半群及其 Bar构造，并证明在此情形下，余幂零余代数的严格化总是成立。

Pr命题 6.30。 设 $\mathcal{P}$ 是满足假设 1的微分分次歌剧。对于任意 $k \geq 1$，函子 r

$$\mathbf{loose} : \mathrm{B}(\tau^{\leq k}\mathcal{P})\text{-}\mathsf{cog}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \longrightarrow \mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathbf{bar}(\tau^{\leq k}\mathcal{P})}(\mathbf{D}(\Bbbk))$$

是 ∞-范畴之间的等价，其中 $\tau^{\leq k}\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{P}$ 在元数 k处的截断。

证明。 这基本上源于这样一个事实：对于任意 $k \geq 1$，相对于扭曲态射 π: $\mathrm{B}(\tau^{\leq k}\mathcal{P})$ $\longrightarrow$ $\tau^{\leq k}\mathcal{P}$的点集 cobar 构造 Ω_π保留所有拟同构。因此，点集 bar-cobar 伴随诱导出一个 ∞-范畴之间的等价

$$\tau^{\leq k}\mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \simeq \mathrm{B}(\tau^{\leq k}\mathcal{P})\text{-}\mathsf{cog}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right],$$

结合 [Heu24，命题 13.13。],即可得到所需结果。 □

注记 6.31。 在这些假设下，命题 6.28 也适用，因此我们还得到

$$\mathrm{B}(\tau^{\leq k}\mathcal{P})\text{-}\mathsf{cog}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \simeq \tau^{\leq k}\mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{alg}^{\mathsf{comp}}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right] \simeq \Omega\mathcal{P}^*\text{-}\mathsf{coalg}^{\mathsf{ho.cocomp}}\left[\mathsf{Q}.\mathsf{iso}^{-1}\right],$$

因此，除 dg $\Omega\mathcal{P}^*$-余代数（按准同构取等价）之外，所考虑的所有 ∞-范畴实际上都等价。

7. E_n-代数的巴-余巴伴随的点集模型，仿照 Lurie E

本节旨在为 Lurie的Bar–Cobar伴随构造点集模型。该伴随作用于增广的 $\mathbb{E}_1$-代数与余增广的 $\mathbb{E}_1$-余代数之间，并将其推广到 $\mathbb{E}_n$ 情形；Ayala–Francis 的推广也一并涵盖。上述两种情形中的链复形均取自任意特征的域。这两个函子都可视为定理 2.16 中的 $\mathcal{P}$-范畴 bar-cobar 伴随，其中 $\mathbb{E}_n$ 取为 $\mathbb{E}_n$ 幺半群的点集模型。

7.1. **Lurie的Bar–Cobar伴随及其推广**。 在 [Lur17第 4 节中。3], Lurie在任意具有基点的单体 ∞-范畴$\mathbf{D}$中构造了一个泛伴随；该范畴允许单纯对象的几何实现以及余单纯对象的全化：

$$\mathbf{Alg}^{\mathbf{aug}}_{\mathbb{E}_1}(\mathbf{D}) \underset{\mathbf{cobar}}{\overset{\mathbf{bar}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{coaug}}_{\mathbb{E}_1}(\mathbf{D})\,.$$

这一伴随背后的思路如下：给定一个增广幺半群，可以规范地构造一个单纯对象，其几何实现恰好就是 Bar函子。对偶地，给定一个余增广余幺半群，可以规范地构造一个余单纯对象，其全化恰好就是余巴函子。关于1.2.2 小节中这类构造在∞-幺半群和 ∞-余幺半群情形下的示例。

后来，Ayala和Francis在 [AF19]中构造了这一伴随的一种推广。我们沿用 [AF21第 3 节2]的阐述。现在假设$\mathbf{D}$ 具有所有筛滤极限和余极限，且幺半结构对这两者都满足分配律。那么，对于任意 $n \geq 1$，存在一个巴-余巴伴随

$$\mathbf{Alg}^{\mathbf{aug}}_{\mathbb{E}_n}(\mathbf{D}) \underset{\mathbf{cobar}^{(n)}}{\overset{\mathbf{bar}^{(n)}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{coaug}}_{\mathbb{E}_n}(\mathbf{D})\,.$$

在$\mathbf{D}$ 中的增广 E_n-代数与$\mathbf{D}$中的余增广 E_n-余代数之间。

7.2. **两个巴构造之间的同伦相干比较**。 乍看之下，人们或许会认为上述伴随与小节 3.1中构造的伴随相同，该构造见 [FG12]，针对$\mathbb{E}_n$ 幺半群的特殊情形。然而事实并非如此，因为这些伴随右侧的两个余代数范畴并不相同。事实上，在增强的 bar-cobar 伴随中，考虑的是余幂零余增广$\mathbb{E}_n$-余代数，而这里考虑的是所有余增广$\mathbb{E}_n$-余代数。

接下来的问题是，如何比较这两个伴随以及它们所诱导的 Koszul 对偶概念。从底层对象的层面来看，在 $\mathbf{D}$ 中，两个巴构造除相差一个移位外完全一致，参见 [BB25，第 4 节。1]然而，我们需要对这两个函子作全面比较，将它们视为同伦相干的余代数；Heuts 和 Land 最近在 $\mathbf{D}$ 为谱的 ∞- 范畴 $\mathbf{Sp}$ 时得出了这一结果。

定理 7.1 ([HL26])。 对于任意 $n \geq 1$，都存在一个本质唯一的 ∞-幺半群之间的等价

$$(\mathrm{B}\mathbb{E}_n^{\mathrm{nu}})^{\vee} \xrightarrow{\simeq} s^{-n}\mathbb{E}_n^{\mathrm{nu}}$$

使得下方的 ∞-范畴交换图表可交换

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Alg}_{\mathbb{E}_n^{\mathrm{nu}}}(\mathbf{Sp}) & \xrightarrow{\quad\mathbf{bar}^{(n)}\quad} & \mathbf{Coalg}_{\mathbb{E}_n^{\mathrm{nu}}}(\mathbf{Sp}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{B}^{\mathbf{enh}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Sigma^n} \\
\mathbf{Coalg}^{\mathbf{conil}}_{\mathrm{B}\mathbb{E}_n^{\mathrm{nu}}}(\mathbf{Sp}) & \xrightarrow{\mathbf{inc}} & \mathbf{Coalg}_{(\mathrm{B}\mathbb{E}_n^{\mathrm{nu}})^{\vee}}(\mathbf{Sp}) \simeq \mathbf{Coalg}_{s^{-n}\mathbb{E}_n^{\mathrm{nu}}}(\mathbf{Sp})\,,
\end{array}$$

其中函子 **inc** 是从 ∞-余幺半群 $\mathrm{B}\mathbb{E}_n^{\mathrm{nu}}$上的余幂零余代数到其斯潘尼尔-怀特海德对偶 ∞-幺半群 $(\mathrm{B}\mathbb{E}_n^{\mathrm{nu}})^\vee$上的所有余代数的包含映射。

注记 7.2。注意，增广 E_n-代数与非单位版本 $\mathrm{E}_n^{\mathrm{nu}}$ 的代数在规范意义下等价；余增广余代数也同样如此。

注记 7.3。 原始结果见 [HL26]，其中使用了 ∞-余幺半群以及 [Heu24附录 A]中给出的关于其上非余幂零余代数的定义。为方便读者，我们使用引理 5.1 将其略微改写为一种等价形式。

注记7.4。 通过与 Eilenberg-MacLane 谱$\mathrm{H}\Bbbk$作 smash 积，定理7.1在将谱的 ∞-范畴替换为 ∞-范畴$\mathbf{D}(\Bbbk)$时同样成立。

7.3. 面向所有人的点集模型。 我们在任意特征的域上链复形的基 ∞-范畴中，为 Lurie 的巴-余巴伴随构造具体的点集模型。我们还为特征零域上非单位 E_n-代数与非余单位 E_n-余代数之间的 Ayala–Francis 巴-余巴伴随构造点集模型，其中 $n \geq 2$。

定理 7.5. 设 $\Bbbk$ 是任意特征的域，$\mathcal{A}ss$ 是结合算子。该伴随

$$\mathcal{A}ss\text{-alg}\left[\mathsf{Q}.\mathrm{iso}^{-1}\right] \underset{\mathbf{cobar}_{\mathcal{A}ss}}{\overset{\mathbf{bar}_{\mathcal{A}ss}}{\rightleftarrows}} \Omega\mathcal{A}ss^*\text{-coalg}\left[\mathsf{Q}.\mathrm{iso}^{-1}\right]$$

自然弱等价于以下复合伴随

$$\mathbf{Alg}^{\mathbf{aug}}_{\mathbb{E}_1}(\mathbf{D}) \underset{\mathbf{cobar}}{\overset{\mathbf{bar}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{coaug}}_{\mathbb{E}_1}(\mathbf{D}) \underset{\Sigma^{-1}}{\overset{\Sigma}{\underset{\simeq}{\rightleftarrows}}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{coaug}}_{s^{-1}\mathbb{E}_1}(\mathbf{D})$$

也就是说，它在相差一个移位的意义下等同于 *Lurie*的*Bar–Cobar*伴随。

证明。 回顾一下，这种伴随在 ∞-范畴层面的存在性已在定理 2.16中得到证明，其中这些函子由以下复合给出

$$\mathbf{bar}_{\mathcal{A}ss} = \mathrm{Inc} \circ \mathrm{B}_\pi \quad \text{and} \quad \mathbf{cobar}_{\mathcal{A}ss} = \mathrm{Res} \circ \widehat{\Omega}_\iota$$

定理 2.11中的交换方块。

首先，我们必须检查这些 ∞-范畴各自呈现了相应的 ∞-范畴，即增广 $\mathbb{E}_1$-代数和余增广 $\mathbb{E}_1$-余代数。在拟同构处局部化的微分分次结合代数呈现其增广 $\mathbb{E}_1$-代数这一事实，源于标准的整直化论证，参见 [Lur17，第4.1节。8]。注意，微分分次歌剧 $\Omega\mathcal{A}ss^*$ 编码了（移位的）$\mathcal{A}_\infty$-(余)代数，因此移位正是在此处出现。在拟同构处局部化的微分分次 $\Omega\mathcal{A}ss^*$-余代数呈现（移位的）余增广 $\mathbb{E}_1$-余代数这一事实，可由定理 1.37推出；该定理是 [PRiLY的主要结果。

因此，我们只需比较这些伴随，因为它们的源和目标等价。为此，只需证明这些左伴随弱等价。这可直接由定理 7.1 结合定理 3.4 和命题5.5得出。 □

定理 7.6. 设 $n \geq 2$和 $\Bbbk$ 为特征零域。令 $\mathcal{P}ois_n$ 表示n-泊松代数的幺半群。该伴随

$$\mathcal{P}ois_n\text{-alg}\left[\mathsf{Q}.\mathrm{iso}^{-1}\right] \underset{\mathbf{cobar}_{\mathcal{P}ois_n}}{\overset{\mathbf{bar}_{\mathcal{P}ois_n}}{\rightleftarrows}} \Omega\mathcal{P}ois_n^*\text{-coalg}\left[\mathsf{Q}.\mathrm{iso}^{-1}\right]$$

自然地弱等价于以下复合伴随

$$\mathbf{Alg}^{\mathbf{aug}}_{\mathbb{E}_n}(\mathbf{D}) \underset{\mathbf{cobar}^{(n)}}{\overset{\mathbf{bar}^{(n)}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{coaug}}_{\mathbb{E}_n}(\mathbf{D}) \underset{\Sigma^{-n}}{\overset{\Sigma^n}{\rightleftarrows}} \mathbf{Coalg}^{\mathbf{coaug}}_{s^{-n}\mathbb{E}_n}(\mathbf{D})$$

也就是说，差一个迭代移位后，它就是 *Ayala–Francis* 的巴-余巴伴随。

参考文献

[Ada56] J. Frank Adams. 关于余 bar 构造。Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 42:409–412, 1956.[AF19] David Ayala 和 John Francis. 庞加莱/科祖尔对偶。Commun. Math. Phys., 365(3):847–933, 2019.[AF21] David Ayala 和 John Francis. 零点流形。J. Inst. Math. Jussieu, 20(3):785–858, 2021.[Ane14] Mathieu Anel. 运算子上的余代数及代表函数，2014.[Ara26] Kensuke Arakawa. 关于 Brantner 的方法与 Chu–Haugseng 的方法在带富化 ∞-幺半群上的等价性, arxiv.2603.23019, 2026.[Bas99] M. Basterra. 交换 S-代数的安德烈–奎伦上同调。J. Pure Appl. Algebra, 144(2):111–143, 1999.[BB25] Max Blans 和 Thomas Blom. Goodwillie 微积分中的链式法则。预印本，arXiv:2410.20504[math.AT] (2025), 2025.[BCN21] Lukas Brantner、Ricardo Campos 和 Joost Nuiten. PD 歌剧与分划李代数的显式构造，arxiv.2104.03870；即将在 Memoirs of the AMS 发表，2021.[BF04] Clemens Berger 和 Benoit Fresse. 上链上的组合歌剧作用。Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 137(1):135–174, 2004.[BGG78] Joseph Bernstein、Israel Gelfand 和 Sergei Gelfand. P^n 上的代数向量丛与线性代数问题。Funktsional. Anal. i Prilozhen., 12(3):66–67, 1978.[BGS96] Alexander Beilinson、Victor Ginzburg 和 Wolfgang Soergel. 表示论中的科祖尔对偶模式。J. Amer. Math. Soc., 9(2):473–527, 1996.[BM03] Clemens Berger 和 Ieke Moerdijk. 幺半群的公理化同伦论。Comment. Math. Helv., 78(4):805–831, 2003.[BM05] Maria Basterra 和 Michael A. Mandell. 环谱的同调与上同调。Math. Z., 249(4):903–944, 2005.[BP23] Haldun Özgör Bayindir 和 Maximilien Péroux. 拓扑余 Hochschild 同调的斯潘尼尔–怀特黑德对偶。J. Lond. Math. Soc., II. Ser., 107(5):1780–1822, 2023.[Bra17] D. Lukas Brantner. 谱李代数的 Lubin-Tate 理论，博士论文（Ph.D.）—哈佛大学。编辑版本见 https://people.maths.ox.ac.uk/brantner/brantnerthesis.pdf，2017.[CE56] Henri Cartan 和 Samuel Eilenberg. 同调代数，第19卷，Princeton Math. Ser. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1956.[CH20] Hongyi Chu 和 Rune Haugseng. 富化 ∞-幺半群。Adv. Math., 361:85, 2020. 编号 106913.[Che25] Dennis Chen. 博士论文：关于余幺半群与余连通余代数 https://escholarship.org/content/qt87m8c4h7/qt87m8c4h7.pdf，2025.[CPRNW24] Ricardo Campos、Dan Petersen、Daniel Robert-Nicoud 和 Felix Wierstra. 李、结合与交换拟同构。Acta Math., 233(2):195–238, 2024.[DCH16] Gabriel C. Drummond-Cole 和 Joseph Hirsh. 余代数的模型结构。Proc. Am. Math. Soc., 144(4):1467–1481, 2016.[EM66] Samuel Eilenberg 和 John C. Moore. 同调与纤维化。I. 余代数、余张量积及其导出函子。Comment. Math. Helv., 40:199–236, 1966.[FG12] John Francis 和 Dennis Gaitsgory. 手征科祖尔对偶。Sel. Math., New Ser., 18(1):27–87, 2012.[GJ94] E. Getzler 和 J. D. S. Jones. 二重环路空间的幺半群、同伦代数与迭代积分。hep-th/9403055, 1994.[GK94] Victor Ginzburg 和 Mikhail Kapranov. 幺半群的科祖尔对偶。Duke Math. J., 76(1):203–272, 1994.[GL18] Brice Le Grignou 和 Damien Lejay. 线性余代数的同伦论，2018.[GR17] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum. 导出代数几何研究。第二卷：变形、李理论与形式几何，Math. Surv. Monogr. 第221卷。Providence, RI：American Mathematical Society (AMS)，2017。

[Gra07] Johan Granåker. 强同伦 properad。Int. Math. Res. Not. IMRN, (14):Art. ID rnm044, 26, 2007.[GRiL23] Brice Le Grignou 和 Victor Roca i Lucio. 正特征下的同伦拟运算微积分，arxiv.2310.13095, 2023.[Hau19] Rune Haugseng. 带富化 ∞-幺半群上的代数。预印本，arXiv:1909.10042 [math.AT(2019), 2019.[Hau22] Rune Haugseng. 通过对称序列构造 ∞-幺半群。Math. Z., 301(1):115–171, 2022.[Hei17] Hadrian Heine. 高阶代数结构的单子性定理，arXiv:1712.00555, 2017.[Heu21] Gijs Heuts. 高阶范畴的 Goodwillie 逼近，Mem. Am. Math. Soc. 第1333卷。Providence, RI：American Mathematical Society (AMS)，2021.[Heu24] Gijs Heuts. 科祖尔对偶与 Francis–Gaitsgory 猜想，2024.[HH13] John E. Harper 和 Kathryn Hess. 结构化环谱的同伦完备化与拓扑 Quillen 同调。Geom. Topol., 17(3):1325–1416, 2013.[Hin97] Vladimir Hinich. 同伦代数的同调代数。Commun. Algebra, 25(10):3291–3323, 1997.[Hin01] Vladimir Hinich. 作为形式栈的微分分次余代数。J. Pure Appl. Algebra, 162(2-3):209–250, 2001.[Hin15] Vladimir Hinich. 代数与模的严格化。Doc. Math., 20:879–926, 2015.[HL26] Gijs Heuts 和 Markus Land. E_n 幺半群与 E_n-代数的科祖尔对偶，准备中，2026.[HMS74] Dale Husemoller、John C. Moore 和 James Stasheff. 微分同调代数与齐性空间。J. Pure Appl. Algebra, 5:113–185, 1974.[HS21] Kathryn Hess 和 Brooke Shipley. 余 Hochschild 同调的不变性。J. Pure Appl. Algebra, 225(2):26, 2021. 编号 106505.[Lur17] Jacob Lurie. 高阶代数，https://www.math.ias.edu/ lurie/papers/HA.pdf，2017.[LV12] Jean-Louis Loday 和 Bruno Vallette. 代数拟运算，Grundlehren Math. Wiss. 第346卷。Berlin：Springer，2012.[Man03] Michael A. Mandell. 拓扑 André–Quillen 上同调与安德烈–奎伦上同调。Adv. Math., 177(2):227–279, 2003.[May75] J. Peter May. 分类空间与纤维化。Mem. Amer. Math. Soc., 1:xiii+98, 1975.[Pér22] Maximilien Péroux. 模型范畴的 Dwyer-Kan 局部化中的余代数。Proc. Am. Math. Soc., 150(10):4173–4190, 2022.[Pri70] Stewart B. Priddy. Koszul 分解。Trans. Am. Math. Soc., 152:39–60, 1970.[PRiLY26] Dan Petersen、Victor Roca i Lucio 和 Sinan Yalin. 同伦相干余代数的点集模型，arxiv.2601.03101, 2026.[PS18] Dmitri Pavlov 和 Jakob Scholbach. 带色对称拟运算的容许性与严格化。J. Topol., 11(3):559–601, 2018.[Qui69] Daniel Quillen. 有理同伦论。Ann. of Math. (2), 90:205–295, 1969.[RiL22] Victor Roca i Lucio. 曲绝对同伦李代数的积分理论，博士论文，arxiv.2207.11115, 2022.[RiL24] Victor Roca i Lucio. 曲拟运算微积分。Bull. Soc. Math. Fr., 152(1):45–147, 2024.[RiL25] Victor Roca i Lucio. 绝对代数、反模与对偶方块。J. Pure Appl. Algebra, 229(7):53, 2025. 编号 107998.[RZ18] Manuel Rivera 和 Mahmoud Zeinalian. 立方严格化、余 bar 构造与基点环路空间。Algebr. Geom. Topol., 18(7):3789–3820, 2018.[Shi23] Yuqing Shi. 不稳定周期同伦论，博士论文（Ph.D.）—乌得勒支大学。可在此处获取版本，2023.[Sta63] James Dillon Stasheff. H-空间的同伦结合性。II. Trans. Amer. Math. Soc., 108:293–312, 1963.[Sul77] Dennis Sullivan. 拓扑中的无穷小计算。Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 47:269–331, 1977.[Val20] Bruno Vallette. 同伦代数的同伦论。Ann. Inst. Fourier, 70(2):683–738, 2020.[vdL04] Pepijn van der Laan. 幺半群、Hopf 代数与带色科祖尔对偶。博士论文，乌得勒支大学，2004。

Dan Petersen，斯德哥尔摩大学电子邮件
地址： dan.petersen@math.su.se

Victor Roca i Lucio，巴黎西岱大学和索邦大学，法国国家科学研究中心，IMJ-PRG，F-75013 巴黎，法国
电子邮件地址：rocalucio@imj-prg.fr

Sinan Yalin，昂热大学电子邮件地址：
sinan.yalin@univ-angers.fr