arXiv:2603.29958v1 [math.OA] 31 Mar 2026

离散群上的算子系统与正扩张

Evgenios T.A. Kakariadis、Malte Leimbach、Ivan G. Todorov 和 Walter D. van Suijlekom

Abstract. 扩张问题探讨：离散群的对称含幺子集上的正半定函数，能否扩张为整个群上的正半定函数。至少自 Rudin 在20世纪60年代的研究以来，人们便已知这一问题与群 C*-代数中正元素的平方和分解问题密切相关。我们从算子系统的角度审视这两个问题，阐明它们之间的等价性：扩张性质由傅里叶–斯蒂尔杰斯代数上的某个商映射刻画，而分解性质则由嵌入群 C*-代数中的某个完全序嵌入刻画。这些性质与算子系统的对偶性相关；这类算子系统近期从非交换几何中的谱截断和傅里叶截断中涌现。我们举例说明，如何将某些延拓问题与核性、C*-包络等算子系统方法联系起来。

Contents

1. 引言 1 致谢 4 2. 算子系统预备知识 4 3. 正半定函数与傅里叶算子系统 15 4. 平方和与托普利茨矩阵 19 5. 正性域上的正半定函数 31 参考文献 43

1. Introduction

通过其他函数的平方和研究函数的正性，其渊源可追溯至 Hilbert 的工作 [27], 。他提出了一个相应的分解问题，该问题后来广为人知，称为希尔伯特第十七问题 [28]。在经典傅里叶分析的背景下，Rudin [49] 首先针对定义在阿贝尔群子集上的正半定函数，得到了肯定性结果与反例。平方和问题的研究揭示了它与调和分析之间深刻而复杂的联系，最初是在阿贝尔群的情形下 [25, 4, 10, 49] ，随后扩展到非阿贝尔情形；例如参见 [5, 6]。

尽管一般性结果是负面的，但将正性刻画为平方和表达式这一做法的失败，却催生了富有成效的半定优化层级。在交换情形中，Lasserre [35]最先对这些层级进行了研究，并

Date: 2026年3月31日。

这些层级在优化理论中产生了持久影响；而在量子信息理论领域，Navascu´es、Pironio 和 Ac´ın [42]成功提出了用于确定非局域博弈量子对易值的平方和近似。这些优化层级的核心是一种约束分解方法：对于给定的优化问题，将测试集（通常为凸集）表示为一系列子集的递增并（或其闭包），从而能够以可恭顺的方式估计代价函数。

非交换几何中的约束分解方法近来引起了独立的关注；在这里，谱三元组形式体系中的 C*-代数被算子系统取代，用以描述具有不完备信息的物理系统 [13]。具体而言，在群情形下，人们考察谱截断的态空间，由此引出这样的问题：如何将部分正半定函数扩张为全局正半定函数。本文旨在借助算子系统的形式体系，提出一种统一方法来处理一般（不一定是阿贝尔）离散群中的扩张问题和分解问题；这一方法受到非交换几何背景下主要示例的启发 [13]。

更确切地说，在后一背景下，算子系统主要以两种（互补的）方式出现：一方面，它们是借助投影 $P \in \mathcal{B}(H)$对 C*-代数$A \subseteq \mathcal{B}(H)$ 进行的压缩 PAP（例如， H 上狄拉克算子的谱投影）；另一方面，它们是 A的某些算子子系统。在连续复值函数圆上的 C*-代数 $A = \mathsf{C}(\mathbb{T})$ 的情形下，我们感兴趣的算子系统是托普利茨系统

$$\mathrm{C}(\mathbb{T})^{(N)} := \{(T_{ij})_{i,j=0}^{N-1} \in \mathrm{M}_N(\mathbb{C}) \mid T_{ij} = T_{(i+1)(j+1)} \text{ for all } i,j = 0,\dots,N-1\}$$

（加法模 N），由 $N \times N$托普利茨矩阵和傅里叶系统组成

$$\mathrm{C}(\mathbb{T})_{(N)} := \{f \in \mathbb{T} \mid \widehat{f}_n = 0 \text{ when } n \geqslant N\},$$

也就是说，这是由有限支撑序列 $(\dots, 0, a_{-N+1}, \dots\dots, a_0, \dots\dots, a_{N-1}, 0, \dots)$ 张成的 $A \cong \mathsf{C}^*(\mathbb{Z})$ 的算子子系统。利用矩阵值 Fej´er–Riesz 引理，可以证明托普利茨系统和傅里叶系统分别与对方的算子系统对偶幺正且完全序同构 [13, 20]。正如我们即将解释的，将算子系统的这种对偶性视为群 $\mathbb{Z}$ 及子集 $\{1, \dots\dots, N\} \subseteq \mathbb{Z}$的性质似乎是恰当的；因此自然会问，对于哪些离散群 Γ 及有限子集 $\Sigma \subseteq \Gamma$，类似的结果成立。

为此，对于离散群 Γ和有限子集 $\Sigma \subseteq \Gamma$，我们将 $\mathsf{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$ 记为托普利茨系统，即托普利茨矩阵的算子系统

$$(T_{st^{-1}})_{s,t\in\Sigma} \in \mathrm{M}_\Sigma \cong \mathcal{B}(\ell^2(\Sigma)),$$

以及 $\mathsf{C}^*(\Gamma)_{(\Sigma\Sigma^{-1})}$ 傅里叶系统，即群 C*-代数 $\mathsf{C}^*(\Gamma)$ 中由 $\delta_{st^{-1}}$, $s,\ t \in \Sigma$张成的算子子系统，其中 δ_s, $s \in \Gamma$ 是 $\mathsf{C}^*(\Gamma)$的典范酉生成元。托普利兹系统 $\mathsf{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$ 既可以看作是通过正交投影 $P : \ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Sigma)$对（约化）群 C*-代数进行压缩所得，也可以看作是将傅里叶–斯蒂尔杰斯代数 $\mathsf{B}(\Gamma)$ 中的函数限制到集合 $\Sigma\Sigma^{-1}$上，经限制映射 $\rho : \mathsf{B}(\Gamma) \to \mathsf{M}_\Sigma$ 所得的像。我们主要采用后一种观点。回顾群 $\mathsf{C}^*(\Gamma)$ 的对偶是傅里叶– 斯蒂尔杰斯代数 $\mathsf{B}(\Gamma)$，自然会预期托普利兹系统与傅里叶系统

当且仅当限制映射 ρ 是商映射时，二者互为对偶。我们通过考察所涉及的矩阵序结构来精确阐述这一点：托普利兹系统与傅里叶系统互为对偶，当且仅当每个具有矩阵元素的半正定托普利兹矩阵 $(T_{st^{-1}})_{s,\ t\in\Sigma}$ 都能延拓为 Γ上的正半定函数，定理 4.22。

Rudin [49] 早已利用托普利茨矩阵与平方和之间的对偶性，将部分定义的正半定函数的扩张问题与 Fej´ér–Riesz 型分解性质联系起来（详尽论述见 [52, 51, 7] ，以及 [5, 定理 7.1] ，其中有一个显式运用算子系统对偶性的例子，与我们的定理 4.22 类似）。我们通过引入平方和算子系统SOS(Σ)来刻画平方和这一概念，并证明托普利茨系统 $\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$ 是其算子系统对偶。我们推得，托普利茨系统 $\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$ 与傅里叶系统 $\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Sigma\Sigma^{-1})}$ 互为算子系统对偶，当且仅当傅里叶系统与平方和系统完全序同构（见定理 4.22）。

注意，若群 Γ 是可恭顺的，则其群 C*-代数 $\mathrm{C}^*(\Gamma)\cong\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\Gamma)$ 按照 Woronowicz [56] 的意义是一个余恭顺紧量子群（其余乘法由 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\Gamma)\ni\lambda(s)\mapsto\lambda(s)\otimes\lambda(s)\in\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\Gamma)\otimes\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\Gamma)$给出），而托普利茨系统和傅里叶系统分别是由 Peter–Weyl [36]和傅里叶截断 [47]产生的算子系统。由此，我们建立了这两类截断之间的联系。作为一个附带结果，我们证明 Toeplitz 矩阵的算子系统不是 (min,max)-核的，从而简化了 [20] 中的相关论证（另见 [21]）。尽管托普利茨系统的非核性是有限维核算子系统一般刻画的一个特例 [30], ，但事实上，托普利茨系统本身就能证明这一点 [21, 20]。

更一般地，扩展正半定（算子值）函数的问题通常针对正性域来表述，即离散群Γ 的子集 Δ ，满足 $e\in\Delta$ 和 $\Delta^{-1}=\Delta$。若算子值函数 $u\colon\ \Delta\to\mathcal{B}(H)$ 的托普利兹矩阵

$$(u(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma}\in\mathrm{M}_\Sigma(\mathcal{B}(H))\cong\mathcal{B}(\ell^2(\Sigma,H))$$

对所有满足 $\Sigma\Sigma^{-1}\subseteq\Delta$的有限子集 $\Sigma\subseteq\Gamma$均为半正定，则称其为正半定。若对每个$n\in\mathbb{N}$，每个正半定函数 $u:\ \Delta\to\mathrm{M}_n$ 都能延拓为 Γ 上的正半定函数（见 [39]），则称正性域 Δ 具有完全延拓性质。我们注意到，正性域上的正半定函数张成一个矩阵序向量空间B(Δ)，我们将其认作算子系统UOS(Δ)的矩阵序向量空间对偶。后者可以由平方和算子系统构造而成；事实上，我们证明算子系统UOS(Δ) 是一个适当的平方和算子系统图表的余极限，见定理 5.11。

与托普利茨矩阵和平方和的情形类似，我们将正性域上半正定函数的扩张性质与正性域上有界函数的扩张性质及一项分解性质联系起来，见定理 5.21。算子系统 UOS(Δ) 的余极限描述为证明或否证分解性质（等价地，扩张性质）提供了新方法；例如，我们讨论正性域

$$\Delta=\{(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)\}\subseteq\mathbb{Z}^2 \tag{1}$$

（图 8），并证明算子系统 UOS(Δ) 是由酉元 δ_0、$\delta_1 \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ 生成的两个平方和系统的余积。这使我们能够计算算子系统 UOS(Δ) 的最小 C*-覆盖，结果为 $C^*(\mathbb{F}_2)$。另一方面，由与算子系统 UOS(Δ) 相同的元素生成的傅里叶系统 $C^*(\mathbb{Z}^2)_{(\Delta)} \subseteq C^*(\mathbb{Z}^2)$ 的最小 C*-覆盖是 $C^*(\mathbb{Z}^2)$；由此我们得出，算子系统 $C^*(\mathbb{Z}^2)_{(\Delta)}$ 和 UOS(Δ) 并非完全序同构，因此（1）中的正性域 Δ 不具有完全分解性质和完全扩张性质。

$$\mathrm{B}(\Gamma) \twoheadrightarrow \mathrm{B}(\Gamma)|_{\Delta} \longrightarrow \mathrm{B}(\Delta) \longrightarrow C^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$$

$$C^*(\Gamma) \hookleftarrow C^*(\Gamma)_{(\Delta)} \longleftarrow \mathrm{UOS}(\Delta) \longleftarrow \text{平方和}(\Sigma)$$

FIGURE 1. 算子系统（第二行）及其相应的矩阵序向量空间对偶（第一行），以及本文讨论的典范完全正幺映射；其中，Γ 是一个离散群，$\Delta \subseteq \Gamma$是一个正性域，$\Sigma \subseteq \Gamma$ 是一个有限子集，且 $\Sigma\Sigma^{-1} \subseteq \Delta$。

ACKNOWLEDGMENTS

EK感谢希腊国家复苏与韧性计划 2.0框架内对本研究工作的支持。该计划由欧盟—NextGenerationEU资助（实施机构：HFRI。项目名称：非交换分析：算子系统与非局域性。HFRI项目编号：015825）。ML获得荷兰科学研究组织项目 OCENW.KLEIN.376 的资助，并得到位于波恩的马克斯·普朗克数学研究所的支持。本文基于欧洲科技合作组织（科学技术领域欧洲合作）支持的 COST行动 CaLISTA CA21109 项目成果。IT获得美国国家科学基金会项目 CCF-2115071 和 DMS-2154459 的资助。

作者谨此感谢 BIRS 在 2025年2月 举办的 BIRS研讨会“算子系统及其应用”期间提供的热情接待，本工作的部分内容正是在此期间完成的。本材料基于作者驻留于瑞典尤尔斯霍尔姆的米塔-莱夫勒研究所期间开展的研究，该研究获瑞典研究理事会资助，资助编号为 2021-06594；作者当时参加的是 2026年项目“算子代数与量子信息”。

我们感谢 Matthijs Muis 参与了有益的讨论。本项目的许多成果已收入 ML 的博士论文 [37]。

2. OPERATOR SYSTEM PRELIMINARIES

2.1. 序单位空间。 设 V 是一个复 *-向量空间，V_{h} 是由其所有厄米元素构成的实向量空间。V 中的一个凸锥 是满足 $[0,\infty)\cdot\mathcal{C}+\mathcal{C}\subseteq\mathcal{C}$的非空子集 $\mathcal{C}\subseteq V_{\mathrm{h}}$。$V$中的凸锥 $\mathcal{C}$若满足 $\mathcal{C}-\mathcal{C}=V_{\mathrm{h}}$，则称为张成的；若满足 $\mathcal{C}\cap(-\mathcal{C})=\{0\}$，则称为真的。配备真张成凸锥 $\mathcal{C}$ 的复 *-向量空间 V称为有序向量空间。我们通常

记作 $V^+ := \mathcal{C}$，并称其为（有序向量空间） V的正锥 。正锥 V^+ 通过如下定义在 V上诱导一个偏序：若 $w - v \in V^+$，则 $v \leqslant w$。

给定一个复 *向量空间 V，其上有一个真凸锥 $\mathcal{C}$，若元素 $e \in \mathcal{C}$ 满足：对每个厄米元素 $v \in V_{\mathrm{h}}$，都存在一个实数 $r > 0$ 使得 $re - v \in \mathcal{C}$，则称 $e \in \mathcal{C}$ 为序单位。注意，若 e 是一个序单位，那么对每个 $v \in V_{\mathrm{h}}$，都存在一个实数 $r > 0$ 使得

$$v = re - (re - v) \in \mathcal{C} - \mathcal{C},$$

因此，锥 $\mathcal{C}$ 是张成的。配备了真凸锥V^+ 和序单位 e_V 的 *向量空间 V称为序单位空间。

对于序单位空间 (V, V^+, e_V)，令

$$p_V(v) := \inf\{r > 0 \mid -re_V \leqslant v \leqslant re_V\}, \quad v \in V_{\mathrm{h}},$$

并注意到 p_V是 V_{h}上的半范数，称为序半范数。注意， p_V 在 V 上的任意延拓都会在 V上诱导相同的拓扑，称为序拓扑 [45]。

若序单位空间 (V, V^+, e_V)（以及它的序单位 e_V）满足对所有 $v \in V$均有

$$re_V + v \geqslant 0 \text{ for all } r > 0 \implies v \geqslant 0.$$

若 V是阿基米德序单位空间，则序半范数 p_V是范数，且正锥 V^+ 在 V中关于序拓扑 [45] 是闭的。

若 V和 W 是有序向量空间，则线性映射 $\phi\colon V \to W$ 称为自伴，如果 $\phi(v^*) = \phi(v)^*, v \in V$。此外，若 $\phi(V^+) \subseteq W^+$，则称映射 ϕ 为正映射。我们用 $\mathcal{P}(V, W)$ 表示所有正映射 $V \to W$构成的锥。若 V和 W是序单位空间，则若 $\phi(e_V) = e_W$，称 ϕ为幺正。此时， $\phi(V^+) \subseteq W^+$意味着 ϕ 是自伴的。若 V 是序单位空间，则 V 上的幺正正线性泛函称为态；所有态构成的集合 $\mathcal{S}(V)$ 是一个凸集，称为 V的态空间。

对于有序向量空间 V和 W，若正映射 $\phi\colon V \to W$ 是双射，且 $\phi^{-1}\colon W \to V$ 为正映射，则称其为序同构。若单射正映射 ϕ 满足 ϕ 是到其像上的序同构，则称其为序嵌入。

对于有序向量空间 V，令 $(V_{\mathrm{d}})^+ := \mathcal{P}(V, \mathbb{C})$ 为正线性泛函 $V \to \mathbb{C}$ 的集合，并以 V_{d} 表示其复线性张成。那么 $(V_{\mathrm{d}}(V_{\mathrm{d}})^+)$ 是一个有序向量空间；态空间 $S(V)$ 是 V^{d} 的子集，在赋予弱*-拓扑后，根据巴拿赫–阿劳格鲁定理，它是一个紧（凸）空间。

2.2. 矩阵序单位空间与算子系统。 对于向量空间 V，我们将 $\mathbf{M}_{m,n}(V)$ 记为所有元素属于 V 的 $m \times n$ 矩阵所构成的向量空间，并记作 $\mathbf{M}_n(V) = \mathbf{M}_{n,n}(V)$。如果 V 是一个 *- 向量空间，那么赋予对合 $(x_{i,j})_{i,j}^* := (x_{j,i}^*)_{i,j}$ 后，$\mathbf{M}_n(V)$ 也是一个 *- 向量空间。复 *-向量空间 V 上的一个矩阵序是由锥 $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 构成的族，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$， $(\mathbf{M}_n(V), \mathcal{C}_n)$ 都是有序向量空间；也就是说，它满足相容性，

$$\alpha\mathcal{C}_m\alpha^* \subseteq \mathcal{C}_n \text{ for all } \alpha \in \mathrm{M}_{n,m} \text{ and all } m, n \in \mathbb{N}.$$

我们通常用 $\mathrm{M}_n(V)^+$ 代替 $\mathcal{C}_n$。给定一个矩阵序向量空间$(V, (\mathrm{M}_n(V)^+)_{n\in\mathbb{N}})$，若元素 $e \in V$ 满足以下条件，则称其为矩阵序单位

$$e_n := \begin{pmatrix} e & & \\ & \ddots & \\ & & e \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(V)$$

对于有序向量空间 $(\mathrm{M}_n(V),\ \mathrm{M}_n(V)^+)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$，它是一个序单位。矩阵序单位空间 是配备了矩阵序单位的矩阵有序向量空间。若矩阵序单位 e 满足对所有 $n \in \mathbb{N}$， e_n 都是阿基米德的，则称其为阿基米德 的。算子系统 是配备了一个指定的阿基米德矩阵序单位的矩阵有序向量空间。

对于矩阵有序向量空间 X 和 Y之间的线性映射 $\phi\colon X \to Y$，我们定义其矩阵扩张 $\phi^{(n)}\colon \mathrm{M}_n(X) \to \mathrm{M}_n(Y)$ 如下:

$$\phi^{(n)}((x_{ij})_{i,j}) := (\phi(x_{ij}))_{i,j}, \quad (x_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(X).$$

若对所有 $n \in \mathbb{N}$，映射 ϕ 对应的 $\phi^{(n)}\colon \mathrm{M}_n(X) \to \mathrm{M}_n(Y)$ 都是正映射，则称 ϕ 为完全正 的。我们用$\mathcal{CP}(X,\ Y)$表示所有完全正映射 $X \to Y$ 构成的锥。我们有时使用“cp”和“ucp”分别作为“完全正”和“幺正完全正”的缩写。我们用**矩阵有序向量空间**范畴表示配备完全正映射的矩阵有序向量空间范畴，用**矩阵序单位空间** 表示配备完全正幺映射的矩阵序单位空间范畴，并用**算子系统范畴**表示配备完全正幺映射的算子系统范畴。

设 X 和 Y 是矩阵序 *-向量空间。完全正映射$\phi \in \mathcal{CP}(X,\ Y)$ 称为完全序同构，如果对每个 $n \in \mathbb{N}$， $\phi^{(n)} \in \mathcal{P}(\mathrm{M}_n(X),\ \mathrm{M}_n(Y))$都是序同构。若存在一个完全序同构 $X \to Y$，使得 X 与 Y $X \cong Y$，则称 X 与 Y完全序同构。完全正映射 ϕ 称为完全序嵌入，如果 ϕ 是映射到其像上的完全序同构。

每个含幺自伴子空间 $X \subseteq \mathcal{B}(H)$ 都是一个算子系统，其正锥定义如下:

$$\mathrm{M}_n(X)^+ := \mathrm{M}_n(X) \cap \mathcal{B}(H^n)^+,$$

并令 $e_X := \mathbf{1}_{\mathcal{B}(H)}$来定义矩阵序单位。根据 Choi–Effros 定理[12], ，每个算子系统都与某个复希尔伯特空间 H上的 $\mathcal{B}(H)$的含幺自伴子空间幺正完全序同构。特别地，若 A 是一个含幺 C*-代数，那么 A的每个包含单位元的自伴子空间都以典范方式成为一个算子系统。若 $X \subseteq A$ 是一个算子系统，且 1_A 是其矩阵序单位，那么根据 Krein 定理，每个正线性泛函 $\phi\colon X \to \mathbb{C}$都可以延拓为 A 上的正线性泛函。更一般地，根据 Arveson 延拓定理 [1]，每个完全正映射 $\Phi\colon X \to \mathcal{B}(H)$ 都可以延拓为 $A \to \mathcal{B}(H)$上的完全正映射。

对于矩阵序向量空间 X 及其序向量空间对偶 X^{d}，令

$$\mathrm{M}_n(X^{\mathrm{d}})^+ := \mathcal{CP}(X, \mathrm{M}_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

若 X 是一个算子系统，根据 [43, 定理 6.1] ，我们有如下等同关系

$$\mathrm{M}_n(X^{\mathrm{d}})^+ = \mathcal{CP}(X, \mathrm{M}_n) \cong \mathcal{P}(\mathrm{M}_n(X), \mathbb{C}) = (\mathrm{M}_n(X)^{\mathrm{d}})^+.$$

若 X 是有限维算子系统，根据 [12, 推论 4.5], ，可以（非典范地）为矩阵序向量空间 X^{d}选取一个阿基米德矩阵序单位，从而使其具有算子系统的结构。对于（矩阵）有序

向量空间 V，W，每个（完全）正映射$\phi\colon V\to W$的伴随 $\phi^{\mathrm{d}}\colon W^{\mathrm{d}}\to V_{\mathrm{d}}$都是（完全）正的。

2.3. **阿基米德化**。矩阵序单位空间可以按如下方式转化为算子系统 [44]。设 X 为一个矩阵序单位空间。令

$$N:=\bigcap_{\phi\in\mathcal{S}(X)}\ker(\phi).$$

则该识别

$$\mathrm{M}_n(X/N)\cong\mathrm{M}_n(X)/\mathrm{M}_n(N)$$

在商空间 X/N上诱导出矩阵序单位空间结构。定义

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_n^{\mathrm{arch}}:=\{&(x_{ij})_{i,j}+\mathrm{M}_n(N)\in\mathrm{M}_n(X)/\mathrm{M}_n(N)\mid\\&r(e_X)_n+(x_{ij})_{i,j}+\mathrm{M}_n(N)\in\mathrm{M}_n(X)^+ +\mathrm{M}_n(N),\ \text{for all } r>0\},\end{aligned}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$均成立。有时我们也写作

$$\mathrm{Arch}(\mathrm{M}_n(X)^+):=\mathcal{C}_n^{\mathrm{arch}}$$

若需明确指明 X。则三元组 $(X/N,(\mathcal{C}_n^{\mathrm{arch}})_{n\in\mathbb{N}},e_X+N)$是一个算子系统，称为矩阵序单位空间 X的阿基米德化；记作 $\mathsf{Arch}(X)$。从矩阵序单位空间 X 到算子系统 Y 的完全正幺映射可唯一地经由阿基米德化分解；更准确地说，以下泛性质成立：存在唯一的满射完全正单位保持映射 $q\colon X\to\mathsf{Arch}(X)$，使得对于每个完全正且保单位映射 $\phi\colon X\to Y$，若 Y 为一个算子系统，$\tilde{}$ $\tilde{}$则存在唯一的完全正且保单位映射 $\phi\colon\mathsf{Arch}(X)\to Y$，使得 $\phi\circ q=\phi$。

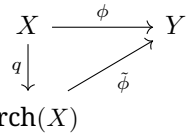

FIGURE 2. 阿基米德化的泛性质。

若子空间 N 是 $\{0\}$，则锥 $\mathcal{C}_n^{\mathrm{arch}}$是锥 $\mathrm{M}_n(X)^+$在序拓扑中的闭包。阿基米德化的泛性质蕴含如下意义下的函子性。

引理 2.1。阿基米德化是从 **MOU** 到**算子系统范畴**的一个函子。

证明。设 X 和 Y 为矩阵序单位空间，且设 $\phi\colon X\to Y$ 是**MOU**中的一个完全正且保单位映射。那么存在典范完全正幺映射 $q_X\colon X\to\mathsf{Arch}(X)$ 和$q_Y\colon Y\to\mathsf{Arch}(Y)$。根据阿基米德化的泛性质，存在唯一的映射 $\phi\colon\mathsf{Arch}(X)\to\mathsf{Arch}(Y)$，使得 $\phi\circ q_X=q_Y\circ\phi$，因为右侧是从 X 到算子系统 $\mathsf{Arch}(Y)$的一个完全正且保单位映射。□

引理 2.1 中的阿基米德化函子将记为 Arch。

2.4. **商空间**。我们描述矩阵有序向量空间中商空间的构造，进一步详情参见[32, 第 3] 节。为此，设 X 为矩阵序向量空间，且 $J \subseteq X$ 为 *- 不变子空间。此外，假设 J 是一个完全序理想，即若 $x \in \mathrm{M}_n(J)$ 且 $0 \leqslant y \leqslant x$ ，则 $y \in \mathrm{M}_n(J)$。令

$$\mathrm{M}_n(X/J)^+ := \{(x_{ij} + J)_{i,j} \mid \exists y \in \mathrm{M}_n(J) \text{ such that } x + y \in \mathrm{M}_n(X)^+\}. \tag{2}$$

容易验证，$\mathrm{M}_n(X/J)^+$ 是 *-向量空间$\mathrm{M}_n(X/J)$ 中的凸生成锥，并且 (M $_n(X/J)^+)_{n\in\mathbb{N}}$ 是相容锥族。关于真性，与证明 [45, 命题 2.41], 类似，交集M $_n(X/J)^+ \cap (-\mathrm{M}_n(X/J)^+)$ 中的任意元素都可以写成 $x + \mathrm{M}_n(J) = -y + \mathrm{M}_n(J)$, 其中$x,\ y \in \mathrm{M}_n(X)^+$。于是存在元素 $j \in \mathrm{M}_n(J)$ 使得 $j = x + y \in \mathrm{M}_n(X)^+$; 因此 $0 \leqslant x \leqslant j$ ，这意味着 $x \in \mathrm{M}_n(J)$。所以 $x + \mathrm{M}_n(J) = 0 + \mathrm{M}_n(J)$, 即交集 $\mathrm{M}_n(X/J)^+ \cap (-\mathrm{M}_n(X/J)^+)$ 是平凡的。这表明 $(X/J, (\mathrm{M}_n(X/J)^+)_{n\in\mathbb{N}})$ 仍是一个矩阵序向量空间，我们称其为 X的商空间。

注意，典范商映射 $q: X \to X/J$ 是完全正的。若 X 和 Y 是矩阵序向量空间，且 ϕ: $X \to Y$是完全正映射，则 $\ker(\phi)$ 显然是 *-不变的；此外，它是一个完全序理想，因为 $x \in \ker(\phi^{(n)}) = M_n(\ker(\phi))$且 $0 \leqslant y \leqslant x$ 推出

$$0 \leqslant \phi^{(n)}(y) \leqslant \phi^{(n)}(x) = 0.$$

若完全正映射 $\phi : X \to Y$是满射，且˜诱导映射 ϕ: $V/\ker(\phi) \to Y$是完全序同构，则称其为**矩阵序向量空间**-商映射。

转到**算子系统范畴** [32], , 设 X 为一个算子系统。若存在一个算子系统 Y 和一个酉完全正映射$\phi : X \to Y$，使得 $J = \ker(\phi)$ ，则称子空间$J \subseteq X$ 为一个核（等价地， J是一个核，当且仅当存在一族态 $\{\phi_\iota\}_{\iota\in I} \subseteq \mathcal{S}(X)$ 使得 $J = \bigcap_{\iota\in I} \ker(\phi_\iota)$）。如 (2) 中那样定义 $\mathrm{M}_n(X/J)^+$，并令 $e_{X/J} := e_X + J$，商空间 X/J 从 X 继承矩阵序单位空间的结构。算子系统 $\mathrm{Arch}(X/J)$ 称为算子系统商；它具有泛性质：每个从 X 到算子系统的酉完全正映射都唯一且典范地通过它分解。若核 $J \subseteq X$ 满足

$$\mathrm{M}_n(X/J)^+ = \mathrm{Arch}(\mathrm{M}_n(X/J)^+), \quad n \in \mathbb{N};$$

特别地，在这种情况下 $X/J = \mathrm{Arch}(X/J)$。

2.5. **张量积**。 我们从 [31] 回顾算子系统张量积理论的一些内容。设 X 和 Y 为算子系统，并用$X \otimes Y$ 表示相应的代数张量积。 $X \otimes Y$ 上的一个算子系统结构是一个族 $\tau := (\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，满足以下性质：

(T1) 三元组 $(X \otimes Y, (\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}, e_X \otimes e_Y)$ 是一个算子系统，记作 $X \otimes_\tau Y$；(T2) 对所有 $k, \ell \in \mathbb{N}$，均有 $\mathrm{M}_k(X)^+ \otimes \mathrm{M}_\ell(Y)^+ \subseteq \mathcal{C}_{k\ell}$；(T3) 对任意完全正且保单位映射 ϕ: $X \to \mathrm{M}_k$、 ψ: $Y \to \mathrm{M}_\ell$，映射 $\phi \otimes \psi$: $X \otimes_\tau Y \to \mathrm{M}_{k\ell}$是完全正且保单位的。

若算子系统结构 τ 满足以下条件，则称其具有函子性：

(T4) 对于所有算子系统 S, T以及完全正且保单位映射 ϕ: $X \to S$, ψ: $Y \to T$, 映射 $\phi \otimes \psi$ 是一个完全正且保单位映射 $X \otimes_\tau Y \to S \otimes_\tau T$。

$X \otimes Y$ 上的相容锥族非空；事实上，其中一个这样的族由以下锥构成

$$\mathcal{D}_n^{\max}(X,Y) := \{A(x\otimes y)A^* \mid x \in \mathrm{M}_k(X)^+, y \in \mathrm{M}_\ell(Y)^+, A \in \mathrm{M}_{n,k\ell}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

其阿基米德化在 $X \otimes Y$上定义了一种函子算子系统结构，称为**最大张量积**，记作 **max**。它在如下意义下是极大的：对于 $X \otimes Y$上的任意相容正锥族 $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，我们有

$$\mathcal{D}_n^{\max}(X,Y) \subseteq \mathcal{C}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

特别地，若 τ 是 $X \otimes Y$ 上的任意算子系统结构，则典范恒等映射 $X \otimes_{\max} Y \to X \otimes_\tau Y$ 是完全正的。

假设 X 和 Y 仅是矩阵序向量空间（不一定是算子系统）。锥 $\mathcal{D}_n^{\max}(X,Y)$ 仍可用相同方式定义。此外，回顾一下，双线性映射 $\phi\colon X \times Y \to Z$（其中 Z 是另一个矩阵序向量空间）称为**联合完全正**，如果

$$(\phi(x_{i,j}, y_{p,q}))_{i,j,p,q} \in \mathrm{M}_{nm}(Z)^+$$

对于任意 $(x_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{M}_n(X)^+$ 以及 $(y_{k,l})_{k,l} \in \mathbf{M}_m(Y)^+$，均有此性质。由 [31] 中的论证可知，双线性映射 $\phi\colon X \times Y \to Z$ 是联合完全正的，当且仅当其线性化 $\phi\colon X \otimes Y \to Z$ 满足以下性质

$$\tilde{\phi}^{(n)}(\mathcal{D}_n^{\max}(X,Y)) \subseteq \mathrm{M}_n(Z)^+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

当 X、Y 和 Z 是算子系统时，同一泛性质刻画了算子系统张量积 $X \otimes_{\max} Y$。

两个算子系统 X 和 Y 根据 Choi–Effros 定理，分别幺正完全序嵌入某些 C* 代数 A 和 B 中；它们的**最小张量积** 是从 $X \otimes Y$ 到空间张量积 $A \otimes_{\min} B$ 的包含所继承的算子系统结构。这个张量积与包含映射 $X \subseteq A$ 和 $Y \subseteq B$ 的选择无关。此外，它是一个函子张量积，并且在如下意义下是最小的：对于 $X \otimes Y$ 上正锥的任意相容族 $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，我们有

$$\mathcal{C}_n \subseteq \mathrm{M}_n(X \otimes_{\min} Y)^+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

若 X，Y 是有限维算子系统，则存在典范的完全序同构

$$(X \otimes_{\max} Y)^{\mathrm{d}} \cong X^{\mathrm{d}} \otimes_{\min} Y^{\mathrm{d}} \quad \text{and} \quad (X \otimes_{\min} Y)^{\mathrm{d}} \cong X^{\mathrm{d}} \otimes_{\max} Y^{\mathrm{d}}$$

（参见 [31] 及其中的参考文献）。

对于两个算子系统 X，Y 以及 $X \otimes Y$ 上的两个算子系统结构 σ，τ，若 $(X,\ Y)$ 在典范意义下是 $(\sigma,\ \tau)$-核的，则称这对结构 $(X,\ Y)$ 是 $(\sigma,\ \tau)$-核的。若对于每个算子系统 Y，这对结构 $(X,\ Y)$ 都是 $(\sigma,\ \tau)$-核的，则称算子系统 X 是 $(\sigma,\ \tau)$-核的。

2.6. C*-覆盖。算子系统 X 的 C*-覆盖是一个幺正 C*-代数 A，以及一个幺正完全序嵌入 $\iota\colon X \to A$，使得 A 由 $\iota(X)$生成。每个算子系统 X 都存在一个极大和一个极小 C*-覆盖，分别记为 $(\mathsf{C}^*_{\max}(X),\ \iota_{\max})$ 和 $(\mathsf{C}^*_{\min}(X),\ \iota_{\min})$；它们的特征是，对于任意 C*-覆盖 $(A,\ \iota)$，都存在唯一的 *-同态 $\mathsf{C}^*_{\max}(X) \to A \to \mathsf{C}^*_{\min}(X)$，使图 3 中的图表交换。极大 C*-覆盖有时称为**通用C*-覆盖**，记为 $\mathsf{C}^*_{\mathrm{u}}(X)$,

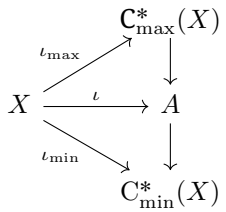

FIGURE 3. 极大与极小 C*-覆盖的泛性质。

其存在性由 [34, 命题 8]证明。极小 C*-覆盖通常称为 C*-包络，记为 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{e}}(X)$；其存在性最初通过内射包络的存在性在 [26]中得到证明；另见 [43]。后来， [16] 通过最大膨胀的存在性给出了膨胀理论证明。

2.7. 余积与合并直和。 设 X 和 Y 为算子系统，且设 V 为一个算子系统，并配有酉完全序嵌入 $X \overset{\iota_X}{\hookleftarrow} V \overset{\iota_Y}{\hookrightarrow} Y$。合并直和（ X 与 Y 在 V 之上） [33] 是唯一的算子系统 $X \oplus_V Y$，它配有完全正幺映射 $X \overset{\phi_X}{\to} X \oplus_V Y \overset{\phi_Y}{\leftarrow} Y$，并满足以下泛性质：对于任意算子系统 Z及完全正幺映射

$$X \overset{\psi_X}{\to} Z \overset{\psi_Y}{\leftarrow} Y \text{ with } \psi_X \circ \iota_X = \psi_Y \circ \iota_Y,$$

存在唯一的完全正幺映射 $\psi : X \oplus_V Y \to Z$ ，使得

$$\psi \circ \phi_X = \psi_X \quad \text{and} \quad \psi \circ \phi_Y = \psi_Y.$$

换言之，合并直和是图表 $X \overset{\iota_X}{\hookleftarrow} V \overset{\iota_Y}{\hookrightarrow} Y$在**算子系统范畴** 中的推出，参见 图 4。合并直和的存在

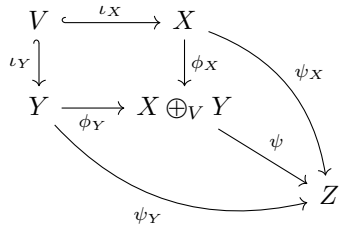

FIGURE 4. 合并直和的泛性质。

和可由 C*-代数的合并自由积的存在性推出，并通过将 $X \oplus_V Y$实现为 $\mathrm{C}^*_{\max}(X) *_{\mathrm{C}^*_{\max}(V)} \mathrm{C}^*_{\max}(Y)$ 的算子子系统得到。由合并直和的泛性质可得，酉完全正映射 ϕ_X 和 ϕ_Y 是完全序嵌入；利用 C*-代数的合并自由积的泛性质，通过图表追逐很容易验证

$$\mathrm{C}^*_{\max}(X \oplus_V Y) \cong \mathrm{C}^*_{\max}(X) *_{\mathrm{C}^*_{\max}(V)} \mathrm{C}^*_{\max}(Y),$$

参见 [33, 命题 2.6],另见 [40, 定理 4.24]。

更具体地说，如果 V 是有限维的，则有

$$X \oplus_V Y = \frac{X \oplus Y}{J} \text{ for } J = \{(\iota_X(v), -\iota_Y(v)) \mid v \in V\}.$$

事实上，在这种情况下， J 是一个到算子系统的酉完全正映射的核，而且还是完全近似的 [30, 命题 2.4], ，因此

$$\mathrm{Arch}\,(X \oplus Y/J) = X \oplus Y/J.$$

容易验证合并直和关于$X \oplus Y/J$的泛性质。若未指定算子子系统 V，我们通常假设$V \cong \mathbb{C}e_X \cong \mathbb{C}e_Y$，并且只称其为 X与 Y的合并直和或余积，记作 $X \oplus_{\mathbf{1}} Y$，参见 [30, 24, 11]。

回顾一下，若算子系统 X 在其最小 C*-包内是超刚性的，意即对 $\mathrm{C}^*_{\min}(X)$ 在希尔伯特空间 H上的每个非退化表示 π，映射 $\pi|_X\colon X \to \mathcal{B}(H)$ 的唯一酉完全正扩张就是 π 本身 [3]。若算子系统X 和 Y 在各自的最小 C*-包内都是超刚性的 [2]，则有

$$\mathrm{C}^*_{\min}(X \oplus_{\mathbf{1}} Y) \cong \mathrm{C}^*_{\min}(X) *_{\mathbf{1}} \mathrm{C}^*_{\min}(Y),$$

参见 [11, 定理 4.11]。特别是，如果 X 和 Y 在各自的最小 C*-覆盖中包含足够多的酉元（其含义见 [30]），则此结论成立；在这种情况下，同构 $\mathrm{C}^*_{\min}(X \oplus_{\mathbf{1}} Y) \cong \mathrm{C}^*_{\min}(X) *_{\mathbf{1}} \mathrm{C}^*_{\min}(Y)$ 在 [22] 中得到了证明。

2.8. 余极限。第 2.7 小节讨论的合并直和可视为范畴 OSy 中余极限的一种特殊情形（参见图4和图5中所示的合并直和与余极限的泛性质）。我们回顾这一一般的范畴论概念。设 $(A, \leqslant_A)$是一个偏序集，并考虑一组对象 X_α, $\alpha \in A$以及态射 ϕ_β, $_\alpha\colon X_\alpha \to X_\beta$，其中 $\alpha, \beta \in A$ 均满足 $\alpha \leqslant_A \beta$。若对于所有 $\alpha \leqslant_A \beta \leqslant_A \gamma$，都有 $\phi_{\gamma,\beta} \circ \phi_{\beta,\alpha} = \phi_{\gamma,\alpha}$，则称对 $((X_\alpha)_{\alpha\in A},(\phi_{\beta,\alpha})_{\alpha\leqslant_A\beta})$ 为一个图表。图表 $((X_\alpha)_{\alpha\in A},(\phi_{\beta,\alpha})_{\alpha\leqslant_A\beta})$ 在 C 中的余极限是 C 的一个对象 X，连同态射 $\phi_{\infty,\alpha}\colon X_\alpha \to X$，使得对于所有 $\alpha \leqslant_A \beta$，都有 $\phi_{\infty,\beta} \circ \phi_{\beta,\alpha} = \phi_{\infty,\alpha}$，并满足以下泛性质：对于 C 中任意对象 Y及态射$\psi_{\infty,\alpha}\colon X_\alpha \to Y$，若对于所有 $\alpha \leqslant_A \beta$都有 $\psi_{\infty,\beta} \circ \phi_{\beta,\alpha} = \psi_{\infty,\alpha}$，则存在一个态射 $\psi\colon X \to Y$，使得对于所有 $\alpha \in A$都有 $\psi \circ \phi_{\infty,\alpha} = \psi_{\infty,\alpha}$；此时记作 $\lim X_\alpha := X$。利用泛性质可以证明，若余极限存在，则其在 C 中唯一。

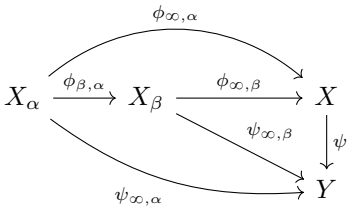

FIGURE 5. 余极限的泛性质。

如果指标集 A 是自然数集，或更一般地是有向集，那么图表通常称为归纳或有向系统，而它们的余极限（如果存在）则称为归纳或直接极限。

在由幺正 C*-代数及幺正 *-同态构成的范畴**C*代数**和**算子系统范畴**中，直接极限存在 [8, II.8.2], [40, 定理 4.11]。如 [40],所述，**算子系统范畴**中的直接极限通过在矩阵序单位空间范畴**MOU** 中取直接极限并进行阿基米德化来构造。**MOU** 中的直接极限则通过对序单位空间逐矩阵层级取直接极限来构造，其存在性也在 [40]中得到了证明。

在第 5 节中，我们将遇到算子系统范畴中的一个图表，它不是有向系统；不过，我们在 MOU 中有一个自然的候选余极限，以下引理保证它在算子系统范畴中也存在余极限。首先请注意，由于阿基米德化引理 2.1 的函子性，若 $((X_\alpha)_{\alpha\in A}, (\phi_{\beta,\ \alpha})_{\alpha\leqslant_A\beta})$ 是 MOU 中的一个图表，则 $((\mathrm{Arch}(X_\alpha))_{\alpha\in A},\ (\mathrm{Arch}(\phi_{\beta,\ \alpha}))_{\alpha\leqslant_A\beta})$ 是算子系统范畴中的一个图表。

引理 2.2。 设 $(A,\leqslant_A)$ 是一个偏序集，且 $((X_\alpha)_{\alpha\in A},(\phi_{\beta,\ \alpha})_{\alpha\leqslant_A\beta})$ 是 *MOU* 中的一个图表，并且该图表在 *MOU* 中存在余极限。那么图表 $((\mathrm{Arch}(X_\alpha))_{\alpha\in A},(\mathrm{Arch}(\phi_{\beta,\ \alpha}))_{\alpha\leqslant_A\beta})$ 在算子系统范畴中存在余极限，并且

$$\varinjlim_{\mathbf{OSy}}\mathrm{Arch}(X_\alpha)=\mathrm{Arch}\left(\varinjlim_{\mathbf{MOU}}X_\alpha\right).$$

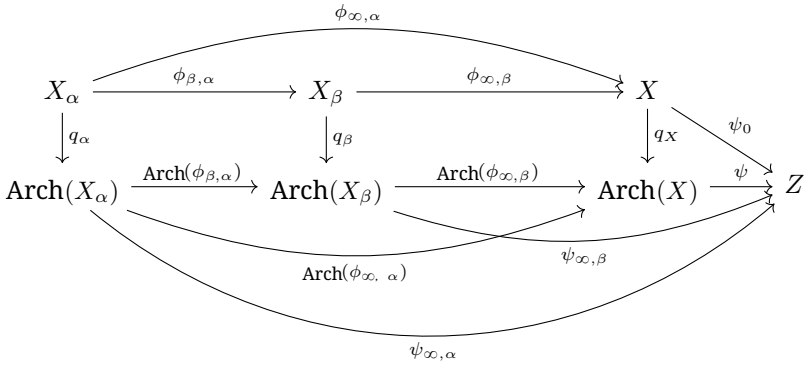

FIGURE 6. 引理 2.2 证明的图表。

证明。令 $X:=\lim X_\alpha$。假设 Z 是一个算子系统，配备⟶MOU 及完全正幺映射 $\psi_\infty,_\alpha:\mathrm{Arch}(X_\alpha)\to Z$，使得 $\psi_\infty,_\beta\circ\mathrm{Arch}(\phi_\beta,_\alpha)=\psi_\infty,_\alpha$，对所有$\alpha\leqslant_A\beta$均成立。由于 Z 特别是一个矩阵序单位空间，故存在唯一的酉完全正映射 $\psi_0\colon X\to Z$，使得 $\psi_0\circ\phi_\infty,_\alpha=\psi_\infty,_\alpha\circ q_\alpha$。根据阿基米德化的泛性质，存在唯一的酉完全正映射 $\psi:\mathrm{Arch}(X)\to Z$，使得$\psi\circ q=\psi_0$。根据阿基米德化的函子性（引理 2.1），我们得到完全正幺映射 $\mathrm{Arch}(\phi_\infty,_\alpha):\mathrm{Arch}(X_\alpha)\to\mathrm{Arch}(X)$，它们满足 $\psi\circ\mathrm{Arch}(\phi_\infty,_\alpha)=\psi_\infty,_\alpha$，对所有 $\alpha\in A$均成立。这表明 $\mathrm{Arch}(X)=\lim\longrightarrow_{\mathbf{OSy}}\mathrm{Arch}(X_\alpha)$，如所声称。□

2.9. 算子空间。 我们现在回顾一些基本的算子空间概念，更多详情请参阅 [43, 46, 9, 18]。**算子空间** 是一个复向量空间 X，配备了一族定义在 $\mathrm{M}_n(X)$, $n\in\mathbb{N}$ 上的矩阵范数 $\|\cdot\|_n$，并且它们满足相容性条件：

(1) $\|AxB\|_m\leqslant\|A\|\|x\|_n\|B\|$，对所有元素 $x\in\mathrm{M}_n(X)$ 和标量矩阵$A\in\mathrm{M}_{m,n}$ 以及 $B\in\mathrm{M}_{n,m}$;

(2) $\|x\oplus y\|_{m+n}=\max\{\|x\|_n,\|y\|_m\}$，对所有 $x\in\mathbf{M}_n(X),y\in\mathbf{M}_m(X)$。
若算子空间之间的线性映射 $\phi:X\to Y$ 满足

$$\|\phi\|_{\mathrm{cb}}:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\|x\|_n\leqslant 1}\|\phi^{(n)}(x)\|_n<\infty;$$

此时，$\|\phi\|_{\mathrm{cb}}$ 称为 ϕ 的 完全有界范数 。我们用 $\mathcal{CB}(X,Y)$ 表示所有完全有界映射 $\phi:X\to Y$ 的集合。若完全有界映射 $\phi\in\mathcal{CB}(X,Y)$ 满足 $\|\phi\|_{\mathrm{cb}}\leqslant 1$，则称其为完全压缩映射（简称 cc）；若对所有$n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbf{M}_n(X)$，都有 $\|\phi^{(n)}(x)\|_n=\|x\|_n$，则称其为完全等距映射。以 **OSp** 表示以完全压缩映射为态射的算子空间范畴。

设 $X\subseteq\mathcal{B}(H)$ 是一个闭子空间。将矩阵空间 $\mathbf{M}_n(X)$ 等距地视为 $\mathcal{B}(H^n)$ 的子空间后，X 即为一个算子空间。根据*Wittstock* 扩张定理 [55]，每个完全有界映射 $\phi:X\to\mathcal{B}(K)$ 都可扩张为完全有界映射 $\phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$，且满足 $\|\phi\|_{\mathrm{cb}}=\|\phi\|_{\mathrm{cb}}$。

根据*Ruan* 定理 [48],，每个算子空间都完全等距同构于某个希尔伯特空间 H 上的子空间 $\mathcal{B}(H)$，这意味着每个算子系统都典范地（幺正完全序同构地）对应于一个算子空间。对于完全正映射 ϕ，我们有 $\phi(\mathbf{1})=\|\phi\|_{\mathrm{cb}}$。含幺线性映射是完全正的，当且仅当它是完全压缩的；它是完全序嵌入，当且仅当它是完全等距的。根据 Wittstock 分解定理 [54]，（另见 [43, 定理 8.5], ），从算子系统映射到 $\mathcal{B}(H)$（其中 H 是某个希尔伯特空间）的每个完全有界映射，都是四个完全正映射的线性组合。给定一个算子空间 X，其对偶 X^{d} 在赋予由如下约定所继承的矩阵范数后也是一个算子空间：将 $\mathbf{M}_n(X^{\mathrm{d}})\cong\mathcal{CB}(X,\mathbf{M}_n)$ 的识别视为完全等距映射 [9, 1。2.20]。此外，X^{d} 上的矩阵序向量空间结构与算子空间结构相容，其含义是，真凸锥 $\mathcal{CP}(X,\mathbf{M}_n)$ 张成 $\mathcal{CB}(X,\mathbf{M}_n)$，并且是闭的（关于完全有界范数）；这表明 X^{d} 是一个（正生成的）矩阵序算子空间；更多详情见 [29] 。

回忆一下 [9, 1.2.14]，如果 X 是一个算子空间，且 $Y\subseteq X$ 是一个闭子空间，那么商空间 X/Y 是一个算子空间，其矩阵范数定义如下：

$$\|(x_{ij}+Y)_{i,j}\|_n:=\inf\{\|x+y\|_n\mid y\in\mathrm{M}_n(Y)\}.$$

对于算子空间 X 和 Z，完全收缩映射 $\phi:X\to Z$ 称为 **OSp**-商映射~，如果它是满射，且诱导映射 $\phi:X/\ker(\phi)\to Z$ 是完全等距的（即逆映射 $\tilde{\phi}^{-1}:Z\to X/\ker(\phi)$ 是完全收缩的）。

算子空间之间的映射 $\phi:X\to Y$ 是完全有界的，当且仅当对于每个算子空间 Z [15]，$\phi\otimes\mathbf{I}^Z:X\otimes Z\to Y\otimes Z$ 都是完全有界的；另见 [46, 命题 2.1.1]。由此可得，算子系统之间的映射 $\phi:X\to Y$ 是完全正的，当且仅当对于每个算子系统 Z，$\phi\otimes\mathbf{I}^Z:X\otimes Z\to Y\otimes Z$ 都是完全正的。

2.10. 完全序嵌入与商映射。 下面的命题是定理 4.22 和定理 5.21 的核心。我们给出 (1) 与 (3) 等价性的完整证明；对于无限维情形，我们未能找到相关参考文献。请注意，这与 [23, 命题 1.8] 一致；该命题意味着，当算子系统 X 和 Y 为有限维时，(1) 与 (3) 等价。

命题 2.3. 设 X 和 Y 是算子系统，且 $\phi:X\to Y$ 是酉完全正映射。以下陈述等价：

(i) $\phi: X \to Y$ 是完全序嵌入；*(ii)* $\phi: X \to Y$ 是完全等距；*(iii)* $\phi^{\mathrm{d}}: Y^{\mathrm{d}} \to X^{\mathrm{d}}$ 是矩阵有序向量空间商映射；*(iv)* $\phi^{\mathrm{d}}: Y^{\mathrm{d}} \to X^{\mathrm{d}}$ 是 **OSp**-商映射。

证明。等价关系 [(i)⇔(ii)]众所周知，参见例如 [9, 1.3.3]。关于等价关系 [(ii)⇔(iv)]，参见 [9, 1.4.3]；我们注意到，蕴含关系 [(ii)⇒(iv)] 需要借助（矩阵值版本的）Wittstock 扩张定理，将完全有界映射$X \to \mathbf{M}_n$ 扩张为完全有界映射 $Y \to \mathbf{M}_n$（若将 X 完全等距地识别为其像 $\phi(X) \subseteq Y$）。反向蕴含则利用算子空间到其二重对偶的完全等距嵌入。

[(i)⇒(iii)]。假设 $\phi: X \to Y$是完全序嵌入。特别地，ϕ 是单射，因此 ϕ^{d} 是完全正且满射的。记

$$q: Y^{\mathrm{d}} \to Y^{\mathrm{d}}/\ker(\phi^{\mathrm{d}})$$

为典范的完全正商映射，并记

$$\widetilde{\phi^{\mathrm{d}}}: Y^{\mathrm{d}}/\ker(\phi^{\mathrm{d}}) \to X^{\mathrm{d}}$$

∼为具有性质 $\phi^{\mathrm{d}} \circ q = \phi^{\mathrm{d}}$的诱导完全正映射。为了证明命题∼(iii)，我们需要证明逆映射 $(\phi^{\mathrm{d}})^{-1}$ 是完全正的。为此，取 $x^{\mathrm{d}} \in \mathbf{M}_n(X^{\mathrm{d}})^+$。我们将 x^{d} 视为完全正映射（仍记作同一符号） $x^{\mathrm{d}}: X \to \mathbf{M}_n$。根据假设，$\phi^{-1}: \phi(X) \to X$ 是一个定义良好的酉完全正映射；因此

$$x^{\mathrm{d}} \circ \phi^{-1} \in \mathcal{CP}(\phi(X), \mathrm{M}_n).$$

由 Arveson 延拓定理，存在一个完全正映射 $y^{\mathrm{d}} \in \mathcal{CP}(Y, \mathbf{M}_n)$，它延拓了$x^{\mathrm{d}} \circ \phi^{-1}$，即

$$y^{\mathrm{d}}(\phi(x)) = x^{\mathrm{d}} \circ \phi^{-1}(\phi(x)) = x^{\mathrm{d}}(x), \quad x \in X. \tag{3}$$

将 x^{d} 和 y^{d} 分别视为 $\mathbf{M}_n(X^{\mathrm{d}})^+$ 和 $\mathbf{M}_n(Y^{\mathrm{d}})^+$的元素，等式 (3) 可写为 $(\phi^{\mathrm{d}})^{(n)}(y^{\mathrm{d}}) = x^{\mathrm{d}}$。由此可得

$$\begin{aligned}((\widetilde{\phi^{\mathrm{d}}})^{-1})^{(n)}(x^{\mathrm{d}}) &= ((\widetilde{\phi^{\mathrm{d}}})^{-1})^{(n)}\left((\phi^{\mathrm{d}})^{(n)}(y^{\mathrm{d}})\right) \\ &= ((\widetilde{\phi^{\mathrm{d}}})^{-1})^{(n)} \circ (\widetilde{\phi^{\mathrm{d}}})^{(n)} \circ q^{(n)}(y^{\mathrm{d}}) \\ &= q^{(n)}(y^{\mathrm{d}}) \in \mathrm{M}_n(Y^{\mathrm{d}}/\ker(\phi^{\mathrm{d}}))^+.\end{aligned}$$

∼这表明映射 $(\phi^{\mathrm{d}})^{-1}$ 是完全正的，如所声称的那样。

[(iii)⇒(i)]。假设 $\phi^{\mathrm{d}}: Y^{\mathrm{d}} \to X^{\mathrm{d}}$ 是一个**矩阵有序向量空间**-商映射。特别地，ϕ^{d}是满射，因此 ϕ 是一一映射，且存在逆映射 $\phi^{-1}: \phi(X) \to X$。将像 $\phi(X) \subseteq Y$的对偶空间 $\phi(X)^{\mathrm{d}}$ 认作商空间 $Y_{\mathrm{d}}/\phi(X)^{\perp} \cong Y^{\mathrm{d}}/\ker(\phi^{\mathrm{d}})$，我们可以将逆映射 ϕ 的对偶映射 $(\phi^{-1})^{\mathrm{d}}: X^{\mathrm{d}} \to \phi(X)^{\mathrm{d}}$ 视为 ϕ 的对偶映射的逆（模 $\phi(X)^{\perp}$），即

$$(\phi^{-1})^{\mathrm{d}} = (\widetilde{\phi^{\mathrm{d}}})^{-1}: X^{\mathrm{d}} \to Y^{\mathrm{d}}/\ker(\phi^{\mathrm{d}}).$$

∼注意到，根据 ϕ^* 是**矩阵有序向量空间**商映射的假设，映射 $(\phi^{\mathrm{d}})^{-1}$ 是完全正的。因此，对偶映射

$$((\widetilde{\phi^{\mathrm{d}}})^{-1})^{\mathrm{d}}: (Y^{\mathrm{d}}/\ker(\phi^{\mathrm{d}}))^{\mathrm{d}} \cong \phi(X)^{\mathrm{dd}} \to X^{\mathrm{dd}}$$

是完全正的。回顾 [32, 命题 6.2] ，算子系统可典范地幺正完全序嵌入其二重对偶中。因此，我们考虑 $((\phi^{\mathrm{d}})^{-1})^{\mathrm{d}}$ 在算子子系统 $\phi(X) \subseteq \phi(X)^{\mathrm{dd}}$ 上的限制$\sim$；我们声称，

$$(\widetilde{(\phi^{\mathrm{d}})^{-1}})^{\mathrm{d}}|_{\phi(X)} = \phi^{-1}.$$

事实上，对于 $x \in X$，将 $\phi(x)$ 视为 $\phi(X)^{\mathrm{dd}}$的一个元素，我们有

$$(\widetilde{(\phi^{\mathrm{d}})^{-1}})^{\mathrm{d}}((\phi(x))) = \phi(x) \circ \widetilde{(\phi^{\mathrm{d}})^{-1}} = \phi(x) \circ (\phi^{-1})^{\mathrm{d}} = \phi^{-1} \circ \phi(x) = x.$$

由此可知，该映射

$$\phi^{-1} = (\widetilde{(\phi^{\mathrm{d}})^{-1}})^{\mathrm{d}}|_{\phi(X)} : \phi(X) \to X$$

是完全正的，因此如所声称的， ϕ 是一个完全序嵌入。 □

注记 2.4. 我们指出，命题 2.3 中的陈述也等价于 ϕ^{d} 是矩阵序算子空间范畴中的商映射，其中态射为完全收缩的完全正映射 [29]。事实上，这由 (3) 和 (4) 一起推出，并且矩阵序算子空间中的商映射尤其是算子空间中的商映射。

3. Positive semi-definite functions and the Fourier operator system

设 Γ 为离散群， H 为希尔伯特空间。若 $\Sigma \subseteq \Gamma$ 是有限子集，且$X \subseteq \mathcal{B}(H)$ 是算子空间，我们将以 $\mathrm{M}_\Sigma(X)$ 表示由 X 上以 $\Sigma \times \Sigma$ 为指标的矩阵组成的集合，并将其视为空间 $\mathcal{B}(\ell^2(\Sigma)) \otimes_{\min} X \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(\Sigma) \otimes H)$。令 $\mathrm{M}_\Sigma := \mathrm{M}_\Sigma(\mathbb{C})$。我们用 δ_s, $s \in \Gamma$表示群 C*-代数 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$的酉生成元。

所有取值于 $\mathcal{B}(H)$ 的函数 $u : \Gamma \to \mathcal{B}(H)$ 构成集合 $\mathrm{F}(\Gamma, \mathcal{B}(H))$ ，它在运算 $u^*(s) := u(s^{-1})^*$, $s \in \Gamma$ 下是一个 *-向量空间。回顾一下，函数$u : \Gamma \to \mathcal{B}(H)$ 称为半正定，如果

$$(u(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma} \in \mathrm{M}_\Sigma(\mathcal{B}(H))^+, \text{ for all finite subsets } \Sigma \subseteq \Gamma.$$

注意，对于满足 $s \in \Gamma$ 的有限集 $\{e, s\}$ ，半正定性意味着

$$u(s)^* = u(s^{-1}) \quad \text{and} \quad u(s)^* u(s) \leqslant \|u(e)\| u(e);$$

因此， $u(e)$ 是自伴的，且 $H' := u(e)\overline{H \text{ 是 } u}$ 的约化子，其中

$$u(s) = \begin{bmatrix} u(s)|_{H'} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ for all } s \in \Gamma.$$

我们将 $\mathrm{B}(\Gamma, H)^+$ 记为所有取值于 $\mathcal{B}(H)$的半正定函数构成的锥，将 $\mathrm{B}(\Gamma, H)$ 记为 $\mathrm{B}(\Gamma, H)^+$ 在 $\mathrm{F}(\Gamma, \mathcal{B}(H))$中的线性张成。我们称 $\mathrm{B}(\Gamma, H)$为 Γ的 $\mathcal{B}(H)$值傅里叶–斯蒂尔杰斯代数 。显然，若 $H = \mathbb{C}$ ，我们就得到通常的傅里叶–斯蒂尔杰斯代数，记作 $\mathrm{B}(\Gamma)$。

以下命题是众所周知的；为方便读者，我们给出其证明。

命题 3.1. 设 Γ 是一个离散群。

(i) 若 $u \in \mathrm{B}(\Gamma, H)^+$，则存在唯一（必然如此）的完全正映射 $\phi_u : \mathrm{C}^*(\Gamma) \to \mathcal{B}(H)$ ，使得 $\phi_u(\delta_s) = u(s)$ 对所有 $s \in \Gamma$ 均成立。*(ii)* 若 $\phi : \mathrm{C}^*(\Gamma) \to \mathcal{B}(H)$ 是完全正映射，则存在唯一（必然如此）的正半定函数 $u_\phi \in \mathrm{B}(\Gamma, H)^+$ ，使得 $\phi = \phi_{u_\phi}$。

证明。 (i) 由于 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ 由 $\{\delta_s\}_{s\in\Gamma}$稠密张成， u 的任何完全正扩张 ϕ_u 都必然唯一。因此，我们只需证明完全正扩张映射 ϕ_u的存在性。我们分情况讨论。

情形 *1*。首先，假设 $u(e) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}(H)}$。根据 [53, 定理 7.1], ，存在一个希尔伯特空间 $K \supseteq H$ 和一个 *-表示 $\pi : \mathrm{C}^*(\Gamma) \to \mathcal{B}(K)$ ，使得

$$u(s) = P_H\pi(\delta_s)|_H, \text{ for all } s \in \Gamma.$$

那么，完全正映射 $\phi_u := P_H\pi(\cdot)|_H$ 就是所需的扩张。

情形 *2*。 假设 $u(e)$ 是 $\mathcal{B}(H)$中的一个可逆元。令 $u' \in \mathrm{F}(\Gamma, \mathcal{B}(H))$为由下式给出的 $\mathcal{B}(H)$值函数

$$u'(s) := u(e)^{-1/2}u(s)u(e)^{-1/2}, \text{ for all } s \in \Gamma.$$

那么，对所有有限子集 $\Sigma \subseteq \Gamma$， 令 $n := |\Sigma|$，我们有

$$(u'(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma} = (u(e)^{-1/2} \otimes \mathbf{1}_n)(u(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma}(u(e)^{-1/2} \otimes \mathbf{1}_n).$$

由于 $u(e)$ 是一个正算子，我们得到 $u' \in \mathrm{B}(\Gamma, H)^+$ ，其中 $u'(e) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}(H)}$。由情形 1 可得一个幺正完全正映射 $\phi_{u'}$ ，使得

$$\phi_{u'}(\delta_s) = u'(s), \text{ for all } s \in \Gamma.$$

因此，该映射

$$\phi_u(\cdot) := u(e)^{1/2}\phi_{u'}(\cdot)u(e)^{1/2}$$

是完全正的，并且满足

$$\phi_u(\delta_s) = u(e)^{1/2}u'(s)u(e)^{1/2} = u(s),$$

对所有 $s \in \Gamma$均成立。

情形 *3*. 假设 H 是有限维的，且 $u(e) \neq \mathbf{1}_{\mathcal{B}(H)}$。令 $H' :=\overline{u(e)H} = u(e)H$ ，并注意到 $u(e)|_{H'}$ 是正且可逆的。此外，对每个满足以下条件的 $u(s)$ ， H' 都是约化的:

$$u(s) = \begin{bmatrix} u(s)|_{H'} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ for all } s \in \Gamma.$$

因此，由以下公式给出的 $\mathcal{B}(H')$值函数 u'

$$u'(s) := u(s)|_{H'}, \text{ for all } s \in \Gamma,$$

是半正定的，其中 $u'(e)$ 在 $\mathcal{B}(H')$中可逆。由情形 2 可知，存在一个完全正映射 $\phi_{u'} : \mathrm{C}^*(\Gamma) \to \mathcal{B}(H')$ ，使得 $\phi_{u'}(\delta_s) = u'(s)$ 对所有$s \in \Gamma$均成立。令

$$\phi_u := \phi_{u'} \oplus 0_{H\ominus H'},$$

于是我们得到

$$\phi_u(\delta_s) = u'(s) \oplus 0_{H\ominus H'} = u(s),$$

对所有的 $s \in \Gamma$。

情形 *4*. 设 H 是任意希尔伯特空间，且 $u(e) \neq \mathbf{1}_{\mathcal{B}(H)}$。令

$$\mathcal{F}(H) := \{F \leqslant H \mid \dim F < \infty\}.$$

对于每个 $F \in \mathcal{F}(H)$ ，定义一个取值于 $\mathcal{B}(F)$ 的函数

$$u_F : \Gamma \to \mathcal{B}(F); \quad u_F(s) = P_F u(s)|_F.$$

根据情形 3，存在一个完全正映射

$$\phi_{u_F} : \mathrm{C}^*(\Gamma) \to \mathcal{B}(F); \quad \phi_{u_F}(\delta_s) = u_F(s).$$

由于 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ 是一个算子系统，我们有

$$\|\phi_{u_F}\|_{\mathrm{cb}} = \|\phi_{u_F}(\delta_e)\| = \|u_F(e)\| \leqslant \|u(e)\|,$$

对所有 $F \in \mathcal{F}(H)$ 均成立。我们将 F 视为 H 的子空间，从而每个 ϕ_{u_F} 都是 $\mathcal{B}(H)$ 值的。集合

$$\mathfrak{C} := \{\phi : \mathrm{C}^*(\Gamma) \to \mathcal{B}(H) \mid \phi \text{ is completely positive and } \|\phi\|_{\mathrm{cb}} \leqslant \|u(e)\|\}$$

相对于 Arveson 的 BW 拓扑（见 [1]）是紧的，也就是说，相对于逐点弱*收敛拓扑是紧的；参见 [43, 定理 7.4]。因此，存在一个子网收敛到某个 $\phi \in \mathfrak{C}$。接着，我们可以沿用 [43, 定理 7.5] 的证明，得出 ϕ 是所需的扩张。也就是说，对于 $s \in \Gamma$ 和 x, $y \in H$，令 F 为由 x, $y \in H$ 张成的有限维空间。那么对每个 $F' \supseteq F$，我们有

$$u_F(s) = P_F u(s)|_F = P_F u_{F'}(s)|_F,$$

因此

$$\langle u(s)x, y\rangle = \langle u_F(s)x, y\rangle = \langle u_{F'}(s)x, y\rangle = \langle \phi_{u_{F'}}(\delta_s)x, y\rangle.$$

由于集合 $\{F' \in \mathcal{F}\colon\ F' \supseteq F\}$ 是共尾的，我们得到

$$\langle u(s)x, y\rangle = \langle \phi(\delta_s)x, y\rangle,$$

因此，ϕ_u 就是所需的 u 的扩张。

(ii) 设 $u_\phi\colon\ \Gamma \to \mathcal{B}(H)$ 由 $u_\phi(s) := \phi(\delta_s)$ 给出。给定 $s_i \in \Gamma$, $i = 1, \ldots\ldots, k$，我们有 $(\delta_{s_i s_j^{-1}})_{i,\ j} \in \mathrm{M}_k(\mathrm{C}^*(\Gamma))^+$；因此，$(u_\phi(s_i s_j^{-1}))_{i,\ j} \in \mathrm{M}_k(\mathcal{B}(H))^+$，也就是说，$u_\phi$ 是半正定的。由于 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ 由 $\{\delta_s\}_{s\in\Gamma}$ 稠密张成，且根据 (i)，u_ϕ 的扩张 ϕ_{u_ϕ} 是唯一的，因此可得 $\phi_{u_\phi} = \phi$。□

我们注意到，命题 3.1 中关于唯一性的结论意味着这些赋值

$$u \mapsto \phi_u \quad \text{and} \quad \phi \mapsto u_\phi$$

互为逆映射。命题 3.1 给出了这些锥的典范识别

$$\mathrm{B}(\Gamma, H)^+ \cong \mathcal{CP}(\mathrm{C}^*(\Gamma), \mathcal{B}(H)) \tag{4}$$

这意味着锥族 $(\mathrm{B}(\Gamma,\ \mathbb{C}^n)^+)_{n\in\mathbb{N}}$ 是相容的；特别地，$(\mathrm{B}(\Gamma),\ (\mathrm{B}(\Gamma,\ \mathbb{C}^n)^+)_{n\in\mathbb{N}})$ 通过这种识别成为一个矩阵序向量空间。

我们在 $\mathrm{B}(\Gamma, H)$ 上定义一个范数如下

$$\|u\|_{\mathrm{B}(\Gamma,H)} := \|\phi_u\|_{\mathrm{cb}}.$$

在 $H = \mathbb{C}^n$ 的情形下，这可以视为 $\mathrm{M}_n(\mathrm{B}(\Gamma))$ 上的一个范数；事实上，带有矩阵范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{M}_n(\mathrm{B}(\Gamma))} := \|\cdot\|_{\mathrm{B}(\Gamma,\mathbb{C}^n)}$ 的傅里叶–斯蒂尔杰斯代数是 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ 的算子空间对偶，参见 [9, 第 1.2 小节20]。结合上述建立的矩阵序结构，这使得 $\mathrm{B}(\Gamma)$ 成为一个对偶矩阵有序算子空间，例如 [29] 中对此有所研究。

定义 3.2. [39] 一个非空子集 $\Delta \subseteq \Gamma$ 称为正性域，如果它是对称的，即 $\Delta^{-1} := \{s^{-1} \mid s \in \Delta\} = \Delta$，且是幺正的，即 $e \in \Delta$。

对于子集 $\Delta \subseteq \Gamma$，我们记作

$$\mathrm{S}[\Delta] := \operatorname{span}\{\delta_s \mid s \in \Delta\}.$$

若 $\Delta \subseteq \Gamma$ 是一个正性域，则向量空间 $\mathrm{S}[\Delta]$ 将配备如下对合： $\delta_s^* := \delta_{s^{-1}}$, $s \in \Delta$。

例 3.3。 若 $\Sigma \subseteq \Gamma$ 是任意子集，则子集 $\Sigma\Sigma^{-1} := \{st^{-1} \mid s,\ t \in \Sigma\}$属于 Γ，且为一个正性域。值得注意的是，并非所有正性域都具有后一种形式；参见图 8。

定义 3.4。 设 $\Delta \subseteq \Gamma$ 为一个正性域。与 Δ 相关联的傅里叶系统 $\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)}$的底层是 $*$-向量空间 $\mathrm{S}[\Delta]$，其算子系统结构由包含关系 $\mathrm{S}[\Delta] \subseteq \mathrm{C}^*(\Gamma)$导出。

根据定义，傅里叶系统 $\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)}$ 的正锥为

$$\mathrm{M}_n(\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)})^+ = \mathrm{M}_n(\mathrm{C}^*(\Gamma))^+ \cap \mathrm{M}_n(\mathrm{S}[\Delta]),$$

而矩阵序单位 $e_{\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)}}$ 是 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$的单位元 δ_e。对于正性域Δ，定义

$$\mathrm{B}(\Gamma, H)^+|_\Delta := \{u|_\Delta \mid u \in \mathrm{B}(\Gamma, H)^+\};$$

显然，$\mathrm{B}(\Gamma, H)^+|_\Delta$ 是一个锥。同样，我们记

$$\mathrm{B}(\Gamma, H)|_\Delta = \{u|_\Delta \mid u \in \mathrm{B}(\Gamma, H)\};$$

注意到，由于识别式（4），$\mathrm{B}(\Gamma, H)|_\Delta = \operatorname{span}(\mathrm{B}(\Gamma, H)^+|_\Delta)$，并且我们定义

$$\mathrm{B}(\Gamma)|_\Delta := \mathrm{B}(\Gamma, \mathbb{C})|_\Delta.$$

我们将命题 3.1 推广到正性域，这一推广将在后文中用到。

命题 3.5。 设 Γ 为一个离散群， $\Delta \subseteq \Gamma$ 为一个正性域， H为一个希尔伯特空间。

(i) 若 $u \in \mathrm{B}(\Gamma, H)^+|_\Delta$，则存在唯一的（必然唯一的）完全正映射 $\phi_u : \mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)} \to \mathcal{B}(H)$，使得 $\phi_u(\delta_s) = u(s)$，对所有 $s \in \Delta$均成立。*(ii)* 若 ϕ: $\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)} \to \mathcal{B}(H)$ 是一个完全正映射，则存在唯一的（必然唯一的）函数 $u_\phi \in \mathrm{B}(\Gamma, H)^+|_\Delta$，使得 $\phi = \phi_{u_\phi}$。

证明。 (i) 设 $u \in \mathrm{B}(\Gamma, H)^+|_\Delta$且令 $\tilde{u} \in \mathrm{B}(\Gamma, H)^+$满足 $\tilde{u}|_\Delta = u$。由命题 3.1 (i)，存在唯一的完全正映射 $\phi_{\tilde{u}} : \mathrm{C}^*(\Gamma) \to \mathcal{B}(H)$，使得对所有 $s \in \Gamma$，均有 $\phi_{\tilde{u}}(\delta_s) = \tilde{u}(s)$。将 $\phi_{\tilde{u}}$ 限制到傅里叶系统 $\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)}$，即可得到所需的完全正映射 ϕ_u。若 $\tilde{u}_1$， $\tilde{u}_2 \in \mathrm{B}(\Gamma, H)^+$ 是 u 的扩张，则对所有 $s \in \Delta$，均有 $\phi_{\tilde{u}_1}(\delta_s) = \phi_{\tilde{u}_2}(\delta_s)$，这意味着$\phi_u$唯一。

(ii) 设 $\phi : \mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)} \to \mathcal{B}(H)$ 是一个完全正映射。根据 Arveson 延拓定理，我们可以将 ϕ 延拓为一个完全正映射 ϕ: $\mathrm{C}^*(\Gamma) \to \mathcal{B}(H)$。利用命题 3.1 (ii)，可得一个正半定函数 $u_{\tilde{\phi}} : \Gamma \to \mathcal{B}(H)$，使得对所有 $s \in \Gamma$，都有 $u_{\tilde{\phi}}(s) = \phi(\delta_s)$。将$u_{\tilde{\phi}}$限制到 Δ，即可得到所需的函数 u_ϕ: $\Delta \to \mathcal{B}(H)$。若 $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{CP}(\mathrm{C}^*(\Gamma), \mathcal{B}(H))$ 是 ϕ的延拓，则对所有 $s \in \Delta$，都有$u_{\tilde{\phi}_1}(s) = u_{\tilde{\phi}_2}(s)$，这意味着 u_ϕ是唯一的。□

与 (4) 类似，命题 3.5 给出了这些锥的典范识别

$$\mathrm{B}(\Gamma, H)^+|_\Delta \cong \mathcal{CP}(\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)}, \mathcal{B}(H)),$$

从而得到以下推论。

推论 3.6。 这一对 $(\mathrm{B}(\Gamma)|_\Delta, (\mathrm{B}(\Gamma, \mathbb{C}^n)^+|_\Delta)_{n\in\mathbb{N}})$ 构成一个矩阵序向量空间。

我们进一步注意到，这一识别

$$\mathrm{B}(\Gamma)|_\Delta \cong \operatorname{span}(\mathcal{CP}(\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)}, \mathcal{B}(H))) = \mathcal{CB}(\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)}, \mathcal{B}(H))$$

使 $\mathrm{B}(\Gamma)|_\Delta$ 成为一个（矩阵序）算子空间。

4. Sums of squares and Toeplitz matrices

本节考察与有限子集 $\Sigma \subseteq \Gamma$相关联的托普利茨矩阵，并明确识别相应托普利茨算子系统的对偶，从而得到正扩张性质的一种算子系统刻画。全文中， Γ 将是一个离散群， $\Sigma \subseteq \Gamma$ 是一个有限子集。我们首先定义由 $\delta_{st^{-1}}$ 中的酉元在 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ 中张成的算子系统，对于， $t \in \Sigma$，其正矩阵锥由那些可分解为平方和的元素组成，而非从 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$继承的（可能不同的）正矩阵锥。所得算子系统记为 $\mathrm{SOS}(\Sigma)$ ，可以将其视为由 $\{\delta_{st^{-1}} \mid s, \ t \in \Sigma\}$生成的 *-向量空间上的算子系统结构，并在其中强制满足 Fej´er–Riesz 型性质。

4.1. 平方和算子系统与 Fej´er–Riesz 性质。

以下集合将构成算子系统 $\mathrm{SOS}(\Sigma)$的正矩阵锥。回顾我们的记号

$$\mathrm{S}[\Sigma] := \operatorname{span}\{\delta_s \mid s \in \Sigma\} \quad \text{and} \quad \mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}] := \operatorname{span}\{\delta_{st^{-1}} \mid s, t \in \Sigma\},$$

以及 $\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}]$ 是 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ 的 *-向量子空间这一事实。

定义 4.1. 设 Γ 是一个离散群， $\Sigma \subseteq \Gamma$ 是一个有限子集。对于 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$\mathcal{Q}_n(\Sigma) := \left\{ \sum_{i=1}^r y_i y_i^* \mid r \in \mathbb{N}, y_i = \sum_{s\in\Sigma} A_s^i \otimes \delta_s, A_s^i \in \mathrm{M}_n \right\}.$$

根据定义，我们有 $\mathcal{Q}_n(\Sigma) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}])_{\mathrm{h}}$。

引理 4.2. 设 Γ 是一个离散群， $\Sigma \subseteq \Gamma$ 是一个有限子集。以下恒等式成立：

$$\mathcal{Q}_n(\Sigma) = \left\{ yy^* \mid y = \sum_{s\in\Sigma} A_s \otimes \delta_s, A_s \in \mathrm{M}_{n,k}, k \in \mathbb{N} \right\} \tag{5}$$

$$= \left\{ \sum_{s,t\in\Sigma} A_{s,t} \otimes \delta_{st^{-1}} \mid (A_{s,t})_{s,t\in\Sigma} \in (\mathrm{M}_\Sigma(\mathrm{M}_n))^+ \right\}. \tag{6}$$

证明。设 $y_i = \sum_{s\in\Sigma} A_s^i \otimes \delta_s \in \mathbf{M}_n \otimes \mathrm{S}[\Sigma]$, $i = 1, \dots, r$; 则 $\sum_{i=1}^r y_i y_i^* = yy^*$, 其中

$$y = (y_1, \dots, y_r) \in \mathrm{M}_{1,r}(\mathrm{M}_n \otimes \mathrm{S}[\Sigma]) \cong \mathrm{M}_{n,nr} \otimes \mathrm{S}[\Sigma],$$

这表明 $\mathcal{Q}_n(\Sigma)$ 包含于 (5) 右侧。

为证明 (5) 右侧包含于 (6) 中所示的集合，令$yy^* \in \mathcal{Q}_n(\Sigma)$ 满足 $y = \sum_{s\in\Sigma} A_s \otimes \delta_s$, 对于 $A_s \in \mathbf{M}_{n,\ k}$ 满足 $k \in \mathbb{N}$, 如 (5) 所示。于是

$$yy^* = \sum_{s,t\in\Sigma} A_s A_t^* \otimes \delta_{st^{-1}} \quad \text{and} \quad (A_s A_t^*)_{s,t\in\Sigma} \in (\mathrm{M}_\Sigma(\mathrm{M}_n))^+,$$

如所需。

为证明 (6) 中所示的集合包含于 $\mathcal{Q}_n(\Sigma)$, 考虑形如 $x = \sum_{s,\ t\in\Sigma} A_{s,\ t} \otimes \delta_{st^{-1}}$ 且满足 $A := (A_{s,\ t})_{s,\ t\in\Sigma} \in (\mathbf{M}_\Sigma(\mathbf{M}_n))^+$ 的元素。于是存在矩阵 $B = (B_{s,\ t})_{s,\ t\in\Sigma} \in \mathbf{M}_\Sigma(\mathbf{M}_n)$, 使得

$$A = BB^* = \left(\sum_{r\in\Sigma} B_{s,r} (B^*)_{r,t} \right)_{s,t\in\Sigma}.$$

注意，对于所有 r, $t \in \Sigma$, 都有 $(B^*)_{r,\ t} = B_{t,\ r}^* \in \mathbf{M}_n$。由此可得

$$\begin{aligned} x &= \sum_{s,t\in\Sigma} A_{s,t} \otimes \delta_{st^{-1}} = \sum_{s,t\in\Sigma} \sum_{r\in\Sigma} B_{s,r} (B^*)_{r,t} \otimes \delta_{st^{-1}} \\ &= \sum_{r\in\Sigma} \left(\sum_{s\in\Sigma} B_{s,r} \otimes \delta_s \right) \left(\sum_{t\in\Sigma} B_{t,r} \otimes \delta_t \right)^* \in \mathcal{Q}_n(\Sigma). \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 4.3。设 Γ 是一个离散群, $\Sigma \subseteq \Gamma$ 是一个有限子集。以下陈述成立:

(i) $\mathcal{Q}_n(\Sigma) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathrm{C}^*(\Gamma))^+$, $n \in \mathbb{N}$. *(ii)* $(\mathcal{Q}_n(\Sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 *-向量空间 $\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}]$ 上的一个相容的真凸锥族。*(iii)* 若 $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 *-向量空间$\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}]$ 上的一个相容凸锥族，使得

$$\left\{ (\delta_{s_i s_j^{-1}})_{i,j=1}^n \mid s_1, \dots, s_n \in \Sigma \right\} \subseteq \mathcal{C}_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

则 $\mathcal{Q}_n(\Sigma) \subseteq \mathcal{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$。

(iv) 元素 δ_e 是族 $(\mathcal{Q}_n(\Sigma))_{n\in\mathbb{N}}$的一个矩阵序单位。

特别地，三元组 $(\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}], (\mathcal{Q}_n(\Sigma))_{n\in\mathbb{N}}, \delta_e)$ 是一个矩阵序单位空间，且其到 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ 中的典范包含是完全正且保单位的。

证明。 （i）由平方和是正的这一事实可得，而（ii）则由（6）得出。

（iii）我们首先注意到

$$\left(\delta_{s_i s_j^{-1}} \right)_{i,j=1}^n = \left(\sum_{i=1}^n E_i \otimes \delta_{s_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n E_i \otimes \delta_{s_i} \right)^* \in \mathcal{Q}_n(\Sigma),$$

其中 E_i 是 $\mathbf{M}_{n,1}$ 中的矩阵单位，以及 $s_1, \dots, s_n \in \Sigma$; 因此，矩阵 $(\delta_{s_i s_j^{-1}})_{i,j=1}^n$ 是 $\mathcal{Q}_n(\Sigma)$ 的一个元素。接下来，假设 $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个相容

满足 (7) 的凸真锥相容族，并令 $A\coloneqq (A_{i,j})_{i,j}\in \mathbf{M}_k(\mathbf{M}_n)^+$。我们有 $A\otimes(\delta_{s_is_j^{-1}})_{i,j=1}^k\in\mathcal{C}_{k^2n}$；同样根据相容性，

$$\sum_{i,j=1}^{k} A_{i,j}\otimes\delta_{s_is_j^{-1}}\in\mathcal{C}_n,$$

由引理 4.2 可知，$\mathcal{C}_n\supseteq\mathcal{Q}_n(\Sigma)$。

(iv) 令 $s\in\Sigma$ 和 $A\in\mathbf{M}_n$，并设

$$x:=x(s,A):=A\otimes\delta_s+A^*\otimes\delta_{s^{-1}}; \tag{8}$$

显然，$x\in\mathbf{M}_n(\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}])_{\mathrm{h}}$。将 $A=V|A|$ 作极分解，并设$A_1:=V|A|^{\frac{1}{2}}$, $A_2:=|A|^{\frac{1}{2}}$。于是

$$\begin{aligned}
&2\|A\|\cdot(\mathbf{1}_n\otimes\delta_e)-x\\
&\geqslant (V|A|V^*+|A|)\otimes\delta_e-(V|A|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}\otimes\delta_s+|A|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}V^*\otimes\delta_{s^{-1}})\\
&=(A_1A_1^*+A_2A_2^*)\otimes\delta_e-A_1A_2^*\otimes\delta_s-A_2A_1^*\otimes\delta_{s^{-1}}\\
&=(A_1\otimes\delta_s-A_2\otimes\delta_e)\,(A_1\otimes\delta_s-A_2\otimes\delta_e)^*\in\mathcal{Q}_n(\Sigma).
\end{aligned}$$

注意，一般的厄米元素 $y\in\mathbf{M}_n(\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}])_{\mathrm{h}}$ 可写成 $y=\sum_{s\in\Sigma}x(s,\ A_s)$，其中 $x(s,A_s)$ 如式 (8) 所示。令 $r:=2\sum_{s\in\Sigma}\|A_s\|$，于是得到$r\cdot(\mathbf{1}_n\otimes\delta_e)-y\in\mathcal{Q}_n(\Sigma)$。这表明 $(\delta_e)_n$ 是有序向量空间 $(\mathbf{M}_n(\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}]),\ \mathcal{Q}_n(\Sigma))$的序单位。□

假设 Σ 是有限的，这使我们能够证明 δ_e 实际上是矩阵序向量空间 $(\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}]$ 中的$(\mathcal{Q}_n(\Sigma))_{n\in\mathbb{N}}$)Archimedean 矩阵序单位；我们将在下一个命题中证明这一点，其证明是引理 [49, 1.3]中证明所用论证的非交换矩阵版本。

命题 4.4。矩阵序单位空间 $(\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}],(\mathcal{Q}_n(\Sigma))_{n\in\mathbb{N}},\delta_e)$ 是一个算子系统。

证明。我们证明，锥 $\mathcal{Q}_n(\Sigma)$在 $\mathbf{M}_n(\mathbf{C}^*(\Gamma))$ 中是范数闭的。令 $d=|\Sigma\Sigma^{-1}|$。我们断言，每个 $x\in\mathcal{Q}_n(\Sigma)$ 都是 $\mathbf{M}_n\otimes\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}]$ 中至多 n^2d 个平方项之和。为此，令 $x=\sum_{i=1}^r y_iy_i^*\in\mathcal{Q}_n(\Sigma)$ 并假设 $r>n^2d$。由于

$$\mathcal{Q}_n(\Sigma)-\mathcal{Q}_n(\Sigma)\subseteq\mathrm{M}_n(\mathrm{S}[\Sigma^{-1}\Sigma])_{\mathrm{h}},$$

我们有

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{Q}_n(\Sigma)-\mathcal{Q}_n(\Sigma))\leqslant\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}_n(\mathrm{S}[\Sigma^{-1}\Sigma]))_{\mathrm{h}}=n^2d;$$

因此存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$，使得 $\sum_{i=1}^r\alpha_iy_iy_i^*=0$。我们可以假设，对于所有 $i=1,\ldots,r-1$，都有$\alpha_i\leqslant\alpha_{i+1}$。由此可得

$$x=\sum_{i=1}^{r-1}(1-\frac{\alpha_i}{\alpha_r})y_iy_i^*,$$

这就完成了该断言的证明。

现在，令 $x^k=\sum_{i=1}^{n^2d}y_i^k(y_i^k)^*\in\mathcal{Q}_n(\Sigma)$, $k\in\mathbb{N}$，其中

$$\lim_{k\to\infty}x^k=x\in\mathrm{M}_n\otimes\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}].$$

对于每个 $i = 1, \dots, n^2 d$，我们有

$$\|y_i^k\|^2 \leqslant \|x^k\| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x^k\| < \infty.$$

因此，序列 $(y_i^k)_k$ 有界；又由于 $\dim(\mathrm{M}_n \otimes \mathrm{S}[\Sigma^{-1}\Sigma]) < \infty$，我们可以选取收敛子列 $(y_i^{k_j})_j$，并令 $\lim_j y_i^{k_j} =: y_i$。由此可得

$$x = \lim_{k\to\infty} x^k = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n^2 d} y_i^k (y_i^k)^* = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n^2 d} y_i^{k_j} (y_i^{k_j})^* = \sum_{i=1}^{n^2 d} y_i y_i^*.$$

这表明 $x \in \mathcal{Q}_n(\Sigma)$，因此 $\mathcal{Q}_n(\Sigma)$ 在 $\mathrm{M}_n(\mathrm{C}^*(\Gamma))$ 中是范数闭的。

要证明 δ_e 是阿基米德矩阵序单位，回顾 [45] 可知，序拓扑是局部凸拓扑；由于 $\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}]$ 是有限维的，因此该拓扑等价于范数拓扑。因此，锥 $\mathcal{Q}_n(\Sigma)$ 在序拓扑下是闭的，并且根据 [45, 定理 2.30，注 3.4]，，这意味着 $(\delta_e)_n$ 是 $\mathrm{M}_n(\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}])$ 的阿基米德序单位。□

注记 4.5. 引理 4.3 和命题 4.4 表明，$V := (\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}], \mathcal{Q}_1(\Sigma), \delta_e)$是一个阿基米德序单位空间。由相容锥族 $(\mathcal{Q}_n(\Sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ 的极小性（引理 4.3），平方和(Σ) 是 V 上的极大算子系统结构 $\mathrm{OMAX}(V)$，其含义见 [44]。

定义 4.6. 我们称算子系统 $(\mathrm{S}[\Sigma\Sigma^{-1}], (\mathcal{Q}_n(\Sigma))_{n\in\mathbb{N}}, \delta_e)$ 为平方和系统，并记为平方和(Σ)。

给定两个离散群 Γ_1, Γ_2 和有限子集 $\Sigma_1 \subseteq \Gamma_1, \Sigma_2 \subseteq \Gamma_2$，我们作典范识别

$$\begin{aligned} \mathrm{S}[\Sigma_1\Sigma_1^{-1} \times \Sigma_2\Sigma_2^{-1}] &\cong \mathrm{S}[\Sigma_1\Sigma_1^{-1}] \otimes \mathrm{S}[\Sigma_2\Sigma_2^{-1}] \\ \delta_{(s_1 t_1^{-1}, s_2 t_2^{-1})} &\leftrightarrow \delta_{s_1 t_1^{-1}} \otimes \delta_{s_2 t_2^{-1}}, \end{aligned} \tag{9}$$

作为有限维 *-向量空间。

命题 4.7. 设 Γ_1, Γ_2 为离散群，$\Sigma_1 \subseteq \Gamma_1, \Sigma_2 \subseteq \Gamma_2$ 为有限子集。则 平方和$(\Sigma_1 \times \Sigma_2) \cong$ 平方和$(\Sigma_1) \otimes_{\max}$ 平方和(Σ_2)。

证明。 容易验证，通过识别式 (9)，锥 $\mathcal{Q}_1(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$ 对应于该锥

$$\mathcal{D}_1^{\max} := \left\{ \sum_{i=1}^{r} A_i \otimes B_i \mid A_i \in \mathcal{Q}_1(\Sigma_1), B_i \in \mathcal{Q}_1(\Sigma_2), r \in \mathbb{N} \right\}.$$

由此可得

$$V_1 \otimes V_2 := (\mathrm{S}[\Sigma_1\Sigma_1^{-1}] \otimes \mathrm{S}[\Sigma_2\Sigma_2^{-1}], \mathcal{D}_1^{\max}, \delta_{e_1} \otimes \delta_{e_2})$$

是一个阿基米德序单位空间。由 [31, 命题 5.13] 可得

$$\mathrm{OMAX}(V_1 \otimes V_2) = \mathrm{OMAX}(V_1) \otimes_{\max} \mathrm{OMAX}(V_2),$$

结合注 4.5，证明即告完成。 □

若 $\Sigma \subseteq \Gamma$ 是有限子集，则称元素 $x \in \mathrm{M}_n(\mathrm{C}^*(\Gamma))$ 支撑于 Σ，如果 $y = \sum_{s\in\Sigma} B_s \otimes \delta_s$，其中 $B_s \in \mathrm{M}_n$，$s \in \Sigma$。若元素 $x \in \mathrm{M}_n(\mathrm{C}^*(\Gamma))$ 延展于 Σ，则称其延展于 Σ，如果 $x = \sum_{s,\ t\in\Sigma} A_{s,\ t} \otimes \delta_{st^{-1}}$，其中 $A_{s,\ t} \in \mathrm{M}_n, s,\ t \in \Sigma$。

定义 4.8。设 Γ 是一个离散群，$\Sigma \subseteq \Gamma$ 是一个有限集。若对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个延展于 Σ 的元素 $x \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}^*(\Gamma))^+$，都存在 $r \in \mathbb{N}$ 和元素 $y_i \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}^*(\Gamma))$，$i \in [r]$，支撑于 Σ，使得 $x = \sum_{i=1}^r y_i y_i^*$，则称 Σ 具有 完全 ***Fej´er–Riesz*** 性质 。

注记 4.9。回顾引理 4.3，$\mathcal{Q}_n(\Sigma) \subseteq \mathbf{M}_n(\mathbf{C}^*(\Gamma))^+$；换言之，典范包含映射 $\iota : \mathbf{SOS}(\Sigma) \to \mathbf{C}^*(\Gamma)$ 是完全正且保单位的。因此，根据 $\mathbf{SOS}(\Sigma)$ 的算子系统结构的定义，以下各项等价：

(i) Σ 具有完全 Fej´er–Riesz 性质；(ii) 典范映射 $\iota : \mathbf{SOS}(\Sigma) \to \mathbf{C}^*(\Gamma)$ 是完全序嵌入；(iii) 对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathbf{M}_n(\mathbf{C}^*(\Gamma))^+ \cap \mathbf{M}_n(\mathbf{S}[\Sigma\Sigma^{-1}]) \subseteq \mathcal{Q}_n(\Sigma)$ 。

例 4.10。根据圆上的算子值 Fej´er–Riesz 引理，子集$\Sigma_N := \{0, \ldots\ldots, N\} \subseteq \mathbb{Z}$ 具有完全 Fej´er–Riesz 性质。在这种情况下，每个正矩阵 $x \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}^*(\mathbb{Z})_{(\Sigma_N \Sigma_N^{-1})})^+$ 实际上都是一个单独的 平方，也就是说，对某个 $y \in \mathbf{M}_n(\mathbf{S}[\Sigma])$，有 $x = yy^*$ 。

正如下例所示，（完全）Fej´er–Riesz 性质取决于考察子集所在的群。群$\mathbb{Z}$中的区间具有完全 Fej´er–Riesz 性质（例 4.10），而它们在商映射 $\mathbb{Z} \to C_m$ 到循环群上的一一对应像，当 m足够大时，却不具有这一性质。

例 4.11。与例 4.10 相比，子集 Σ_N 在有限循环群 C_m中考察时，对于 $m > 2N+1$不具有（完全）Fej´er-Riesz 性质。事实上，考虑算子系统 $\mathbf{C}^*(C_m)_{(\{-N,\ldots,N\})}$，它对应于子集 $\Sigma = \{0, \ldots, N\} \subseteq C_m$。通过有限傅里叶变换，该算子系统可以与 $\mathbf{C}(C_m)$ 的算子子系统相识别，该子系统由如下形式的函数组成

$$f = \left(C_m \ni l \mapsto \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{2\pi i l k} \right). \tag{10}$$

如果（完全）Fej´er-Riesz 性质成立，那么这将意味着所有这类在 $\mathbf{C}(C_m)$ 中作为函数为正的函-$\widehat{}$数 f 都允许进行分解 $f = \sum_{i=1}^r \widehat{g}_i * \widehat{g}_i^*$，其中 $\widehat{g} \in \mathbf{C}^*(C_m)_{(\{0,\ldots,N\})}$。但这将意味着函数

$$\theta \mapsto \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{i=1}^{r} (\widehat{g}_i * \widehat{g}_i^*)(k) e^{ik\theta} = \sum_{i=1}^{r} \left| \sum_{k=0}^{N} \widehat{g}_i(k) e^{ik\theta} \right|^2, \quad (\theta \in [0, 2\pi))$$

在整个圆群 $\mathbb{T}$上为正。这不可能成立，因为可能存在一些在傅里叶意义下支集包含于 $\{-N, \ldots, N\}$ 中的 $\mathbf{C}(C_m)$ 函数，它们作为定义在 C_m上的函数为正，而相应的三角多项式作为定义在 $\mathbb{T}$上的函数却并非正；图 7 给出了一个例子。

我们注意到，有限循环群的群 C*-代数中的傅里叶系统已在 [41], 中得到研究，其中一个值得注意的观察是：其对偶算子系统的最小 C*-覆盖不一定是交换的。

例 4.12. 根据 [49, 50], 对于 $N \geqslant 2$，集合 $\{0, \ldots, N\}^2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ 不具有完整的 Fej´er–Riesz 性质。

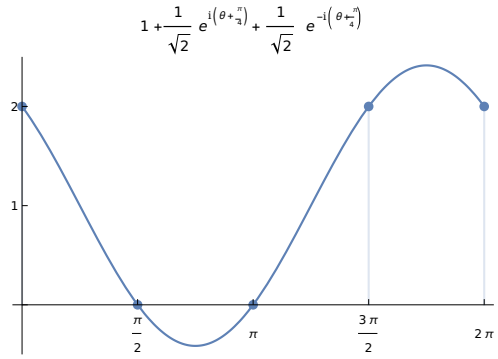

FIGURE 7. 由傅里叶系数 $f_1 = re^{i\pi/4}, \widehat{f}_0 = 1, \widehat{f}_{-1} = re^{-i\pi/4}$ 和适当的 $r = \sqrt{2}^{-1}$ 定义的函数：如式 (10) 所给出的，定义在 C_4 上的函数f 是正的，但相应的三角多项式 $1+2r\cos(\theta+\pi/4)$ 在 $\mathbb{T}$ 上并非正。因此，f是傅里叶系统 $\mathrm{C}^*(C_4)_{(\{-1,\ 0,\ 1\})}$的一个正元素，但不具有满足 $\widehat{g}_i \in \mathrm{S}[\{\delta_0,\ \delta_1\}] \subseteq \mathrm{C}^*(C_4)$ 的分解 $\widehat{f} = \sum_{i=1}^{r} \widehat{g}_i * \widehat{g}_i^*$。

4.2. **托普利茨系统**。 现在我们研究与离散群 Γ 的有限子集 Σ 相关联的托普利茨矩阵算子系统。

定义 4.13。 设 Γ为一个离散群，$\Sigma \subseteq \Gamma$ 为一个有限集，且 H 为一个希尔伯特空间。

(i) 一个 $\mathcal{B}(H)$值托普利茨矩阵 是一个算子 $T = (T_{s,t})_{s,t\in\Sigma} \in \mathcal{B}(\ell^2(\Sigma)\otimes H)$，满足 $T_{s,t} \in \mathcal{B}(H)$，对所有 $s,t \in \Sigma$均成立，且 $T_{s_1,t_1} = T_{s_2,t_2}$ 只要 $s_1 t_1^{-1} = s_2 t_2^{-1}$。
(ii) 若一个 $\mathcal{B}(H)$值托普利茨矩阵 $T = (T_{s,t})_{s,t\in\Sigma}$ 满足 $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\Sigma)\otimes H)^+$，则称其为半正定 。

托普利茨系统 $\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$ 定义为由所有（$\mathbb{C}$值）托普利茨矩阵构成的算子系统；根据定义，$\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$ 是矩阵指标取自 Σ 的 C*代数 M_Σ 的算子子系统。此外，$\mathcal{B}(H)$值托普利茨矩阵构成的算子系统是 $\mathcal{B}(\ell^2(\Sigma, H))$ 的算子子系统 $\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)} \otimes_{\min} \mathcal{B}(H)$。 $\mathcal{B}(H)$值托普利茨矩阵 T 与函数 $u : \Sigma\Sigma^{-1} \to \mathcal{B}(H)$ 之间存在一一对应关系，对应方式为 $T_{s,t} = u(st^{-1})$, $s,t \in \Sigma$。因此，我们可以定义限制映射

$$\rho : \mathrm{B}(\Gamma) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}, u \mapsto (u(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma}.$$

根据 $\mathrm{B}(\Gamma)$ 和 $\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$ 上正矩阵锥的定义，映射 ρ是完全正的。

我们对托普利茨系统（以及记号 $\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$）感兴趣，是因为它出现在非交换几何中的谱截断 [13, 38, 36] 中，并且在 [20]中得到了分析。容易验证

$$\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)} = P_\Sigma \mathrm{C}_\mathrm{r}^*(\Gamma) P_\Sigma,$$

其中 P_Σ： $\ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Sigma)$ 是典范正交投影。

4.3. **平方和与托普利茨系统之间的对偶性**。接下来我们证明，托普利茨算子系统与平方和锥结构相容。

命题 4.14. 设 Γ 为离散群， $\Sigma \subseteq \Gamma$ 为有限集， H 为希尔伯特空间。

> *(i)* 若 $T = (T_{s,t})_{s,t\in\Sigma} \in \mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)} \otimes_{\min} \mathcal{B}(H)$ 是一个半正定的 $\mathcal{B}(H)$ 值托普利兹矩阵，则映射 ϕ_T ：平方和$(\Sigma) \to \mathcal{B}(H)$，定义为$\phi_T(\delta_{st^{-1}}) = T_{s,t}$，$s, t \in \Sigma$，是完全正映射。*(ii)* 若 ϕ ：平方和$(\Sigma) \to \mathcal{B}(H)$ 是完全正映射，则存在唯一的半正定 $\mathcal{B}(H)$ 值托普利兹矩阵 T_ϕ ，使得 $\phi = \phi_{T_\phi}$。

证明。 (i) 设 $T = (T_{s,t})_{s,t\in\Sigma} \in \mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)} \otimes_{\min} \mathcal{B}(H)$ 为一个半正定的$\mathcal{B}(H)$ 值托普利兹矩阵。根据引理 4.3 (iii) 的证明，只需验证对于任意 $s_1, \ldots, s_n \in \Sigma$，由 $\mathcal{B}(H)$ 中元素构成的分块算子矩阵 $\phi_T^{(n)}((\delta_{s_i s_j^{-1}})_{i,j=1}^n)$ 为正。直接计算可得

$$\phi_T^{(n)}((\delta_{s_i s_j^{-1}})_{i,j=1}^n) = (\phi_T(\delta_{s_i s_j^{-1}}))_{i,j=1}^n = (T_{s_i,s_j})_{i,j=1}^n. \tag{11}$$

若 s_i 两两不同，则 $(T_{s_i,\ s_j})_{i,\ j=1}^n$ 是正半定矩阵 T 的主子式，因此为半正定。设 $s_1 = s_2$ 与 $s_2, \ldots, s_n$ 互不相同；那么我们可以写成

$$(T_{s_i,s_j})_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} T_{s_2,s_2} & R \\ C & (T_{s_i,s_j})_{i,j=2}^n \end{bmatrix}$$

其中 R 和 C 分别是 $(T_{s_i,\ s_j})_{i,\ j=2}^n$ 的第一行和第一列。矩阵 $(T_{s_i,\ s_j})_{i,\ j=2}^n$ 是 T 的主子式，因此为半正定；于是 $(T_{s_i,\ s_j})_{i,\ j=1}^n$ 也是半正定的（例如参见 [19, 注 5.1。1]）。归纳可得，对于任意一组 $s_1, \ldots, s_n \in \Sigma$，$(T_{s_i,\ s_j})_{i,\ j=1}^n$ 都是半正定的。

（ii）设 $\phi \in \mathcal{CP}$(平方和(Σ), $\mathcal{B}(H)$)。在（11）中用 ϕ 替换 ϕ_T，用 T_ϕ 替换 T，并对所有 $s_i \in \Sigma$ 反向推导，可知 T_ϕ 是半正定的。

唯一性条款源于赋值 $T \mapsto \phi_T$ 和$\phi \mapsto T_\phi$ 互为逆映射这一事实。□

推论 4.15. 设 Γ 是一个离散群， $\Sigma \subseteq \Gamma$ 是一个有限子集。映射

$$\varphi : \mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)} \to \mathrm{SOS}(\Sigma)^{\mathrm{d}}, \quad T \mapsto \phi_T,$$

是一个完全序同构，因此其对偶映射

$$\varphi^{\mathrm{d}} : \mathrm{SOS}(\Sigma) \to (\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)})^{\mathrm{d}}$$

是一个完全序同构。此外，

$$\varphi(\mathbf{1}) = \left(\delta_{st^{-1}} \mapsto \begin{cases} 1, \textit{if } s = t \\ 0, \textit{otherwise} \end{cases}\right) \quad \textit{and} \quad \varphi^{\mathrm{d}}(\delta_e) = \left(T \mapsto \frac{1}{|\Sigma|}\mathrm{Tr}(T)\right).$$

证明。 映射 φ 是完全序同构这一事实，以及在单位矩阵处取值的 φ 的计算，均可直接由命题 4.14 得出。由于平方和(Σ)是有限维的，它与其二次对偶相同，因此 φ^{d} 也是完全序同构。为说明 $\varphi^{\mathrm{d}}(\delta_e)$ 是托普利茨系统上的归一化迹，注意到 $\varphi^{\mathrm{d}}(\delta_{st^{-1}})(T) = \phi_T(\delta_{st^{-1}}) = T_{s,\ t}$，结论便随之成立。□

4.4. 算子扩张性质。 考虑典范单射酉完全正映射

$$\iota : \mathrm{SOS}(\Sigma) \to \mathrm{C}^*(\Gamma),$$

以及典范满射完全正映射

$$\rho : \mathrm{B}(\Gamma) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}.$$

根据推论 4.15，限制映射 ρ 是包含映射 ι的对偶映射，因此是完全压缩的。这里我们将考察该映射何时是**矩阵有序向量空间-/OSp-**商映射。

定义 4.16。 设 Γ 是一个离散群。若有限集 $\Sigma \subseteq \Gamma$ 满足以下条件，则称其具有正算子扩张性质： 对每个希尔伯特空间 H，

> 条件（PE）： 对于每个正半定的 $\mathcal{B}(H)$值托普利兹矩阵$T = (T_{s,t})_{s,\ t\in\Sigma} \in \mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)} \otimes_{\min} \mathcal{B}(H)$，都存在一个正半定函数 $u \in \mathrm{B}(\Gamma, H)^+$ 使得$T_{s,\ t} = u(st^{-1})$，对所有 $s,\ t \in \Sigma$均成立。

类似地，若条件（PE）对每个有限维希尔伯特空间 H都成立，我们就称 Σ具有完全正扩张性质 。

注4.17。 注意，如果有限集 $\Sigma \subseteq \Gamma$ 具有正算子扩张性质，那么它显然具有完全正扩张性质。反过来，假设 Σ 具有完全正扩张性质，并设 H 是一个希尔伯特空间。设 $\mathcal{F}(H)$ 为 $\mathcal{B}(H)$中所有有限秩投影构成的集合，并按包含关系排序；显然，$\mathcal{F}(H)$是一个有向集。假设 $T = (T_{s,t})_{s,t\in\Sigma}$ 是一个 $\mathcal{B}(H)$值半正定托普利兹矩阵。那么，对每个 $P \in \mathcal{F}(H)$，我们有

$$(I \otimes P)T(I \otimes P) \in \left(\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)} \otimes_{\min} \mathcal{B}(PH)\right)^+.$$

根据假设，存在一个正半定函数 $u_P \in \mathrm{B}(\Gamma, PH)^+$，使得

$$PT_{s,t}P = u_P(st^{-1}),\ \text{for all } s,t \in \Sigma.$$

由于 $PH \subseteq H$，我们可以将 u_P视为 $\mathrm{B}(\Gamma, H)^+$中的元素。由 (4)，我们进一步考虑 $u_P \in \mathcal{CP}(C^*(\Gamma), \mathcal{B}(H))$，并在后一个空间上赋予 Arveson 的 BW 拓扑（见 [1]），即逐点弱*收敛拓扑。根据 [1]，BW 拓扑在有界集上是紧的；因此，网 $(u_P)_{P\in\mathcal{F}(H)}$ 有一个 BW 聚点，记作 $u \in \mathrm{B}(\Gamma, H)^+$。若 $s,t \in \Sigma$，则 $u(st^{-1})$ 是$((I\otimes P)T_{s,t}(I\otimes P))_{P\in\mathcal{F}(H)}$的弱*聚点，因而与 $T_{s,t}$一致，换言之， u扩张了T。

命题 4.18。 设 Γ 是一个离散群， $\Sigma \subseteq \Gamma$ 是一个有限集。当且仅当限制映射

$$\rho : \mathrm{B}(\Gamma) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}, u \mapsto (u(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma},$$

是一个 **矩阵有序向量空间**-商映射。

证明。 回顾第2.4小节， ρ 是一个矩阵有序向量空间的商空间映射，当且仅当诱导映射

$$\tilde{\rho} : \mathrm{B}(\Gamma)/\ker(\rho) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$$

是完全序同构。

假设 Σ 具有正算子，因此具有完全正扩张性质。那么对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个半正定托普利兹矩阵

$$T = (T_{s,t})_{s,t\in\Sigma} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)})^+,$$

存在一个正半定函数 $u : \Gamma \to \mathbf{M}_n$，使得 $T_{s,\ t} = u(st^{-1})$，对所有 $s,\ t \in \Sigma$；换言之，我们有

$$(\tilde{\rho}^{-1})^{(n)}(T) = u|_{\Sigma\Sigma^{-1}} \in \mathrm{B}(\Gamma, \mathbb{C}^n)^+|_{\Sigma\Sigma^{-1}} = \mathrm{M}_n(\mathrm{B}(\Gamma)/\ker(\rho))^+,$$

这表明完全正映射 $\tilde{\rho}$是一个完全序同构。

反过来，如果 ρ 是一个**矩阵有序向量空间**商映射，那么给定一个半正定托普利兹矩阵

$$T = (T_{s,t})_{s,t\in\Sigma} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)})^+,$$

原像 $u := (\tilde{\rho}^{-1})^{(n)}(T)$ 是

$$\mathrm{M}_n(\mathrm{B}(\Gamma)/\ker(\rho))^+ = \mathrm{B}(\Gamma, \mathbb{C}^n)^+|_{\Sigma\Sigma^{-1}}.$$

也就是说，u是正半定函数 $v : \Gamma \to \mathbf{M}_n$ 到$\Sigma\Sigma^{-1}$的限制，因此对于所有 $s,\ t \in \Sigma$，都有$v(st^{-1}) = u(st^{-1}) = T_{s,\ t}$。于是，$\Sigma$ 具有完全正扩张性质。由注 4.17 可知，Σ具有正算子扩张性质。□

定义 4.19。设 Γ 为离散群。如果对于每个希尔伯特空间 H，以下条件成立，则称有限集 $\Sigma \subseteq \Gamma$ 具有有界算子扩张性质：

> 条件（BE）：对于每个托普利兹矩阵$T = (T_{s,\ t})_{s,\ t\in\Sigma} \in \mathbf{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)} \otimes_{\min} \mathcal{B}(H)$，存在一个函数 $u \in \mathrm{B}(\Gamma,\ H)$，使得$T_{s,\ t} = u(st^{-1})$，对所有 $s,\ t \in \Sigma$，以及 $\|T\| = \|\phi_u\|_{\mathrm{cb}}$。

类似地，如果对每个有限维希尔伯特空间 H，条件 (BE) 都成立，我们就说 Σ 具有 完全有界扩张性质 。

注 4.17 的类似结论同样适用：

注 4.20。若有限集 $\Sigma \subseteq \Gamma$ 具有有界算子扩张性质，则显然也具有完全有界扩张性质。反过来，类似于注 4.17 的 BW 论证表明，完全有界扩张性质蕴含有界算子扩张性质。

命题 4.21。设 Γ 是离散群，$\Sigma \subseteq \Gamma$ 是有限集。当且仅当限制映射

$$\rho : \mathrm{B}(\Gamma) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}, u \mapsto (u(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma},$$

是一个**OSp**-商映射。

证明。回顾一下，ρ 是一个**OSp**-商映射，当且仅当诱导的完全收缩映射

$$\tilde{\rho} : \mathrm{B}(\Gamma)/\ker(\rho) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$$

是完全等距的。

假设 Σ 具有有界算子扩张性质，因此也具有完全有界扩张性质。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $T \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)})$，令 $u \in \mathrm{B}(\Gamma,\ \mathbb{C}^n)$ 为 $\mathbf{M}_n$ 值傅里叶–斯蒂尔杰斯代数中的一个元素，并将其视为函数 $\Gamma \to \mathbf{M}_n$，使得

$$T = (u(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma} = \rho^{(n)}(u) \quad \text{and} \quad \|T\| = \|\phi_u\|_{\mathrm{cb}}.$$

于是我们有

$$\|T\| = \|\rho^{(n)}(u)\| \leqslant \|u + \ker \rho^{(n)}\| \leqslant \|u\| = \|\phi_u\|_{\mathrm{cb}} = \|T\|,$$

这表明 $\tilde{\rho}^{(n)}$ 是等距的，正如所要求的。

反过来，假设 $\tilde{\rho}$ 是完全等距的，并固定 $n \in \mathbb{N}$。由满射性和该假设可知，存在一个 $u \in \mathrm{B}(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ 使得

$$T = \rho^{(n)}(u) \quad \text{and} \quad \|T\| = \|u + \ker \rho^{(n)}\|.$$

对于 $m \in \mathbb{N}$，选取 $v_m \in \ker \rho^{(n)}$ 使得

$$\|T\| \leqslant \|u + v_m\| < \|T\| + \frac{1}{m}.$$

我们看到

$$\|v_m\| \leqslant \|u\| + \|u + v_m\| \leqslant \|u\| + \|T\| + 1.$$

因此，序列 $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 一致有界，故其诱导的完全有界映射序列 $(\phi_{v_m})_{m\in\mathbb{N}}$ 关于完全有界范数也是有界的。由于集合

$$\mathcal{CB}_{\|u\|+\|T\|+1}(\mathrm{C}^*(\Gamma), \mathrm{M}_n) := \{\phi \in \mathrm{B}(\mathrm{C}^*(\Gamma), \mathrm{M}_n) \mid \|\phi\|_{\mathrm{cb}} \leqslant \|u\| + \|T\| + 1\}$$

在 BW 拓扑下是紧的，因此我们可以取 v_ϕ induced 为 $(\phi_{v_m})_{m\in\mathbb{N}}$ 的某个子网的 BW 极限 ϕ （并相应地重新标记网 (v_m)）。我们看到

$$\limsup_m \|\phi_{u+v_m}\|_{\mathrm{cb}} = \limsup_m \|u + v_m\| = \|T\|.$$

由于这些映射的取值在 M_n 中，因此在这个有界集合上，BW 收敛与逐点范数收敛一致，故

$$\phi(\delta_{st^{-1}}) = \lim_m \phi_{v_m}(\delta_{st^{-1}}),$$

对所有 $s, t \in \Sigma$ 都成立。根据 ρ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\rho^{(n)}(v_\phi) &= (v_\phi(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma} = (\phi(\delta_{st^{-1}}))_{s,t\in\Sigma} \\ &= \lim_m (\phi_{v_m}(\delta_{st^{-1}}))_{s,t\in\Sigma} = \lim_m \rho^{(n)}(v_m) = 0,\end{aligned}$$

其中，上述极限是在逐项拓扑下取的，因此由于 Σ 有限，它也是在 $\mathrm{M}_\Sigma(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ 的范数拓扑下取的。因此 $v_\phi \in \ker \rho^{(n)}$，由此得到

$$T = \rho^{(n)}(u) = \rho^{(n)}(u + v_\phi) \quad \text{and} \quad \|T\| = \|u + \ker \rho^{(n)}\| \leqslant \|u + v_\phi\|.$$

另一方面，对于 $k \in \mathbb{N}$、$x \in \mathrm{M}_k(\mathrm{C}^*(\Gamma))$ 以及 $\xi, \eta \in \mathbb{C}^{kn}$，我们有

$$\begin{aligned}|\langle \phi^{(k)}_{u+v_\phi}(x)\xi, \eta\rangle| &= \lim_m |\langle \phi^{(k)}_{u+v_m}(x)\xi, \eta\rangle| \\ &\leqslant \limsup_m \|\phi_{u+v_m}\|_{\mathrm{cb}} \cdot \|x\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\| \\ &= \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|.\end{aligned}$$

由此我们得到

$$\|u + v_\phi\| = \|\phi_{u+v_\phi}\|_{\mathrm{cb}} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\phi^{(k)}_{u+v_\phi}\| \leqslant \|T\|,$$

这表明 Σ 具有完全有界扩张性质。由注 4.20 可知， Σ具有有界算子扩张性质。□

4.5. **完全 Fej´er–Riesz 性质的刻画**。接下来我们证明，正/有界算子扩张性质等价于完全 Fej´er–Riesz 性质。图 1 展示了与下一个结果的证明相关的算子系统、有矩阵序的向量空间及其典范映射。

定理 4.22. 设 Γ 是一个离散群，$\Sigma \subseteq \Gamma$ 是一个有限子集。以下陈述等价：

(i) 集合 Σ 具有正算子扩张性质。*(ii)* 集合 Σ 具有有界算子扩张性质。*(iii)* 集合 Σ 具有完全 *Fej´er–Riesz* 性质。*(iv)* 托普利茨系统 $\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$ 与傅里叶系统$\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Sigma\Sigma^{-1})}$ 的对偶算子系统完全序同构。

证明。 由推论 4.15，典范包含映射的对偶映射

$$\iota : \mathrm{SOS}(\Sigma) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)$$

是限制映射

$$\rho : \mathrm{B}(\Gamma) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}, u \mapsto (u(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma},$$

其中，$\mathrm{B}(\Gamma)$ 和 $\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$ 同时具有矩阵序向量空间结构，以及分别作为 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ 和平方和(Σ) 的算子空间对偶的结构。回顾命题 4.18 和命题 4.21，集合 Σ 具有有界/正算子扩张性质，当且仅当限制映射 ρ 是一个 **矩阵有序向量空间-/算子空间-**商映射。由命题 2.3，这两个陈述都等价于映射 ι 是完全序嵌入，也就是说，Σ 具有 Fej´er–Riesz 性质。这证明了等价关系 [(i)⇔(ii)⇔(iii)]。

[(iii)⇔(iv)]。首先注意，由于有限维性，傅里叶系统的对偶 $\mathrm{C}^*(\Gamma)^{\mathrm{d}}_{(\Sigma\Sigma^{-1})}$ 是一个算子系统；由 Fej´er–Riesz 性质，我们有 $\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Sigma\Sigma^{-1})} \cong$平方和$(\Sigma)$，这由推论 4.15 推出所需结论。反过来，若算子系统 $\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)}$ 与 $\mathrm{C}^*(\Gamma)^{\mathrm{d}}_{(\Sigma\Sigma^{-1})}$ 完全序同构，则我们得到完全序同构

$$\mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Sigma\Sigma^{-1})} \cong \mathrm{C}^*(\Gamma)^{\mathrm{dd}}_{(\Sigma\Sigma^{-1})} \cong (\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)})^{\mathrm{d}} \cong \mathrm{SOS}(\Sigma),$$

因此，单射完全正映射

$$\iota : \mathrm{SOS}(\Sigma) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Sigma\Sigma^{-1})} \subseteq \mathrm{C}^*(\Gamma)$$

必定是完全序嵌入，从而证明蕴含关系 [(iv)⇒(iii)]。 □

根据定理 4.22，对于满足其等价条件的子集，我们只需提及算子扩张性质。

4.6. (极小，极大)**-核性**。本节最后，我们将其应用于张量积。回顾空间实现

$$\mathrm{C}^*(\Gamma)^{(\Sigma)} = P_\Sigma \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\Gamma) P_\Sigma \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma)),$$

其中 $P_\Sigma : \ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Sigma)$ 是典范正交投影。因此，如果Γ_1 和 Γ_2 是离散群，且 $\Sigma_i \subseteq \Gamma_i$ 是有限子集，$i = 1, 2$，那么

$$\mathrm{C}^*(\Gamma_1 \times \Gamma_2)^{(\Sigma_1\times\Sigma_2)} \cong \mathrm{C}^*(\Gamma_1)^{(\Sigma_1)} \otimes_{\min} \mathrm{C}^*(\Gamma_2)^{(\Sigma_2)},$$

其中我们用到了 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ 与 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\Gamma_1) \otimes_{\min} \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\Gamma_2)$是典范地 *同构的。

推论 4.23. 设 Γ_1 和 Γ_2 为离散群，并假设 Γ_1 或 Γ_2 是可恭顺的。对于 $i=1,2$ 设 $\Sigma_i \subseteq \Gamma_i$ 为具有完全正 Σ_i-扩张性质的有限子集。则下列陈述等价：

(i) 子集 $\Sigma_1\times\Sigma_2 \subseteq \Gamma_1\times\Gamma_2$ 具有算子扩张性质；*(ii)* 托普利茨系统 $(\mathrm{C}^*(\Gamma_1)^{(\Sigma_1)}, \mathrm{C}^*(\Gamma_2)^{(\Sigma_2)})$ 是 (min、max)-核的。

证明。 由泛性质和可 amenable 假设，我们有一个典范的 *-同构

$$\mathrm{C}^*(\Gamma_1\times\Gamma_2) \cong \mathrm{C}^*(\Gamma_1)\otimes_{\max}\mathrm{C}^*(\Gamma_2) \cong \mathrm{C}^*(\Gamma_1)\otimes_{\min}\mathrm{C}^*(\Gamma_2).$$

其限制诱导出一个完全序同构

$$\mathrm{C}^*(\Gamma_1\times\Gamma_2)_{((\Sigma_1\times\Sigma_2)(\Sigma_1\times\Sigma_2)^{-1})} \cong \mathrm{C}^*(\Gamma_1)_{(\Sigma_1\Sigma_1^{-1})}\otimes_{\min}\mathrm{C}^*(\Gamma_2)_{(\Sigma_2\Sigma_2^{-1})}. \tag{12}$$

[(i)⇒(ii)]。假设 $\Sigma_1\times\Sigma_2$ 具有算子扩张性质，因而特别具有完全正扩张性质。那么，由定理 4.22，生成元上的恒等映射

$$\iota : \mathrm{SOS}(\Sigma_1\times\Sigma_2) \to \mathrm{C}^*(\Gamma_1\times\Gamma_2)$$

是一个完全序嵌入。根据假设， Σ_i 具有算子扩张性质，因而也具有完全正扩张性质；由定理 4.22 可知， Σ_i 具有完全 Fej´er–Riesz 性质，即 $\mathrm{C}^*(\Gamma_i)_{(\Sigma_i\Sigma_i^{-1})}$ 与平方和 $\mathrm{SOS}(\Sigma_i)$ 完全序同构，其中 $i=1,2$。由命题 4.7 和 (12)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{SOS}(\Sigma_1)\otimes_{\max}\mathrm{SOS}(\Sigma_2) &\cong \mathrm{SOS}(\Sigma_1\times\Sigma_2)\\ &\cong \mathrm{C}^*(\Gamma_1\times\Gamma_2)_{((\Sigma_1\times\Sigma_2)(\Sigma_1\times\Sigma_2)^{-1})}\\ &\cong \mathrm{C}^*(\Gamma_1)_{(\Sigma_1\Sigma_1^{-1})}\otimes_{\min}\mathrm{C}^*(\Gamma_2)_{(\Sigma_2\Sigma_2^{-1})}\\ &\cong \mathrm{SOS}(\Sigma_1)\otimes_{\min}\mathrm{SOS}(\Sigma_2),\end{aligned}$$

也就是说，我们有一对 (平方和(Σ_1)，平方和(Σ_2)) 是 (最小，最大)-核的。托普利茨系统与平方和系统的对偶性（命题 4.14），加上对于有限维算子系统 X 和 Y（见 [23]），$(X\otimes_{\min}Y)^{\mathrm{d}} \cong X^{\mathrm{d}}\otimes_{\max}Y_{\mathrm{d}}$ 与 $(X\otimes_{\max}Y)^{\mathrm{d}} \cong X^{\mathrm{d}}\otimes_{\min}Y_{\mathrm{d}}$这一事实，蕴含了托普利茨系统对 $(\mathrm{C}^*(\Gamma_1)^{(\Sigma_1)}, \mathrm{C}^*(\Gamma_2)^{(\Sigma_2)})$的 (最小，最大)-核性。

[(ii)⇒(i)]。假设

$$\mathrm{C}^*(\Gamma_1)^{(\Sigma_1)}\otimes_{\max}\mathrm{C}^*(\Gamma_2)^{(\Sigma_2)} \cong \mathrm{C}^*(\Gamma_1)^{(\Sigma_1)}\otimes_{\min}\mathrm{C}^*(\Gamma_2)^{(\Sigma_2)}.$$

由于 Σ_1 和 Σ_2 具有完全 Fejér–Riesz 性质，且最小算子系统张量积是单射的，因此生成元上的张量积恒等映射

$$\iota_1\otimes\iota_2 : \mathrm{SOS}(\Sigma_1)\otimes_{\min}\mathrm{SOS}(\Sigma_2) \to \mathrm{C}^*(\Gamma_1)\otimes_{\min}\mathrm{C}^*(\Gamma_2)$$

是一个完全序嵌入。根据推论 4.15，假设这对$(\mathrm{C}^*(\Gamma_1)^{(\Sigma_1)}, \mathrm{C}^*(\Gamma_2)^{(\Sigma_2)})$ 是 (min, max)- 核的，并结合有限维算子系统上最小与最大算子系统张量积的对偶性，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{SOS}(\Sigma_1\times\Sigma_2) &\cong \mathrm{SOS}(\Sigma_1)\otimes_{\max}\mathrm{SOS}(\Sigma_2)\\ &\cong \mathrm{SOS}(\Sigma_1)\otimes_{\min}\mathrm{SOS}(\Sigma_2)\\ &\cong \mathrm{C}^*(\Gamma_1)_{(\Sigma_1\Sigma_1-1)}\otimes_{\min}\mathrm{C}^*(\Gamma_2)_{(\Sigma_2\Sigma_2^{-1})}\\ &\cong \mathrm{C}^*(\Gamma_1\times\Gamma_2)_{((\Sigma_1\times\Sigma_2)(\Sigma_1\times\Sigma_2)^{-1})}.\end{aligned}$$

根据定理 4.22，集合 $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ 具有完全 Fej´er–Riesz 性质，因此具有算子扩张性质。□

Rudin [49] and（据 [50]所述）Calder´on–Pepinsky [10]独立证明了定理 4.22 的一个标量值版本。他们根据 Hilbert 的一个结果 [27],推断出，存在一个关于两个变量、各自次数为 3 的半正定三角多项式，它不能表示为平方和。等价地，子集 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}^2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ 不具有（标量值）扩张性质。 [50] 将这一结果推广到子集 $\{0,\ 1,\ 2\}^2 \subsetneq \mathbb{Z}^2$，由此得到 [20, 定理 6.5]的以下特例。

推论 4.24。 令 $n \geqslant 3$ 和 $\mathrm{T}_n \subseteq \mathrm{M}_n$ 为托普利茨矩阵构成的算子系统。那么

$$\mathrm{T}_n \otimes_{\min} \mathrm{T}_n \neq \mathrm{T}_n \otimes_{\max} \mathrm{T}_n.$$

证明。 根据 [49, 50], for $\Sigma_n = \{0,\dots,n-1\}^2 \subseteq \mathbb{Z}^2$，锥 $\mathcal{Q}_1(\Sigma_n)$ 严格包含于锥 C*$(\mathbb{Z}^2)^+ \cap$S$[\Sigma_n\Sigma_n^{-1}]$，也就是说，集合 Σ_n 不具有 Fej´er– Riesz 性质。结论由定理 4.22 和推论 4.23 得出。□

5. Positive semi-definite functions on a positivity domain

本节讨论定义在正性域上的正半定算子值函数，并探讨这些函数何时可以扩张为定义在整个群上的正半定函数。因此，我们不再假设给定函数的定义域具有 $\Sigma\Sigma^{-1}$ for 某个有限集的形式，从而也允许无限定义域。我们的分析路径与上一节类似：首先确定正半定函数构成的矩阵序向量空间的算子系统预对偶；该算子系统可以由平方和算子系统取余极限构造而成。对于由 $\mathbb{Z}^2$ 中的五个点组成的正性域（如图 8 所示），这使我们能够将相应的算子系统表示为余积，从而得以研究其极大和极小 C*-覆盖，并据此推断，在该正性域上必定存在不能扩张为定义在整个群 $\mathbb{Z}^2$ 上的正半定算子值函数。

5.1. 算子系统 UOS(Δ) 与完全分解性质。

设 Γ 为离散群， $\Delta \subseteq \Gamma$ 为正性域，即满足 $\Delta^{-1} = \Delta$ 和 $e \in \Delta$的子集。我们首先定义正矩阵锥，以便在 *-向量空间上定义算子系统结构

$$\mathrm{S}[\Delta] := \operatorname{span}\{\delta_s \mid s \in \Delta\}; \quad \delta_s^* := \delta_{s^{-1}}.$$

对于 *-向量空间 V 及其子集 $\mathcal{P} \subseteq V_{\mathrm{h}}$，我们用 cone$(\mathcal{P})$ 表示由 $\mathcal{P}$生成的锥；因此，cone$(\mathcal{P}) := [0,\ \infty) \cdot \mathcal{P} + \mathcal{P}$。对于 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\mathcal{U}_n(\Delta) := \operatorname{cone}\Big(\bigcup \big\{\mathcal{Q}_n(\Sigma) \mid \Sigma \subseteq \Gamma, \Sigma\Sigma^{-1} \subseteq \Delta, |\Sigma| < \infty\big\}\Big) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathrm{S}[\Delta])_{\mathrm{h}}.$$

注意，由于对于任意 $\Sigma \subseteq \Gamma$， $\mathcal{Q}_n(\Sigma)$ 都是一个锥，因此要构成 $\mathcal{U}_n(\Delta)$ ，只需取锥 $\mathcal{Q}_n(\Sigma)$ 的并集的凸包。由于由一族锥生成的锥就是它们的和，我们有

$$\mathcal{U}_n(\Delta) = \sum \big\{\mathcal{Q}_n(\Sigma) \mid \Sigma \subseteq \Gamma, \Sigma\Sigma^{-1} \subseteq \Delta, |\Sigma| < \infty\big\}.$$

注记 5.1. 不难验证，$(\mathcal{U}_n(\Delta))_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个凸真锥的相容族，且各自分别包含于 $\mathbf{M}_n(\mathbf{C}^*(\Gamma))^+$，$n \in \mathbb{N}$ 中。由引理 4.3 可知，事实上，$(\mathcal{U}_n(\Delta))_{n\in\mathbb{N}}$ 是满足其第 n 层包含以下集合的最小此类族

$$\left\{(\delta_{st^{-1}})_{s,t\in\Sigma} \mid \Sigma \subseteq \Gamma, \Sigma\Sigma^{-1} \subseteq \Delta, |\Sigma| < \infty\right\}.$$

元素 δ_e 是族 $(\mathcal{U}_n(\Delta))_{n\in\mathbb{N}}$的矩阵序单位。特别地，三元组 $(\mathbf{S}[\Delta], (\mathcal{U}_n(\Delta))_{n\in\mathbb{N}}, \delta_e)$ 是一个矩阵序单位空间，且到 $\mathbf{C}^*(\Gamma)$中的典范包含是完全正且保单位的。

我们将矩阵序单位空间 $(\mathbf{S}[\Delta], (\mathcal{U}_n(\Delta))_{n\in\mathbb{N}}, \delta_e)$ 记为 $\mathbf{UOS}_0(\Delta)$，并将其阿基米德化记为 $\mathbf{UOS}(\Delta) := \mathbf{Arch}(\mathbf{UOS}_0(\Delta))$。因此，$\mathbf{UOS}(\Delta)$ 是一个算子系统；其记号表明，它的矩阵锥由平方和锥的并生成。在下一个命题中，我们指出，当 Δ 有限时，在额外的技术性假设下，矩阵序算子空间 $\mathbf{UOS}_0(\Delta)$ 实际上已经是一个算子系统（无需进行阿基米德化）。

命题 5.2. 设 Γ 是一个离散群，$\Delta \subseteq \Gamma$ 是一个有限正性域，并且 $\{\Sigma_i\}_{i=1}^n$ 是 Γ 的一个子集族，使得 $\bigcup_{i=1}^n \Sigma_i\Sigma_i^{-1} = \Delta$。假设对于每个满足 $\Sigma\Sigma^{-1} \subseteq \Delta$ 的有限集 $\Sigma \subseteq \Gamma$，都存在 $i \in \{1,\ldots,n\}$，使得 $\mathcal{Q}_k(\Sigma) \subseteq \mathcal{Q}_k(\Sigma_i)$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。那么 $\mathrm{UOS}_0(\Delta) = \mathrm{UOS}(\Delta)$。

证明. 关于族 $\{\Sigma_i\}_{i=1}^n$ 的假设保证了我们有

$$\mathcal{U}_k(\Delta) = \mathrm{cone}\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{Q}_k(\Sigma_i)\right),$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。由于根据命题 4.4，每个锥 $\mathcal{Q}_k(\Sigma_i)$ 都是闭的，因此 $\mathcal{U}_k(\Delta)$ 也是闭的；由此 $\mathbf{UOS}_0(\Delta)$ 是一个算子系统，并且我们有 $\mathbf{UOS}_0(\Delta)$ =$\mathbf{UOS}(\Delta)$。□

注5.3. 注意，命题 5.2 中的假设尤其保证了每个 Σ_i 都是极大的，即对于任意 $\gamma \in \Gamma\backslash\Sigma$，都有 $(\Sigma_i \cup \gamma)(\Sigma_i \cup \gamma)^{-1} \nsubseteq \Delta$。

在转向分析形如 $\mathbf{UOS}(\Delta)$ 的算子系统之前，我们先给出一个启发性例子；尽管专家们可能早已熟知这个例子，我们仍提供充分的算子代数细节，以展示它与平方和算子系统之间的差异。

例 5.4. 考虑正性域

$$\Delta := \{(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)\} \subseteq \mathbb{Z}^2,$$

如图 8 所示。为方便记号，设

$$\Sigma_{\mathrm{h}} := \{(0,0),(1,0)\},\ \mathrm{SOS}_{\mathrm{h}} := \mathrm{SOS}(\Sigma_{\mathrm{h}}),$$
$$\Sigma_{\mathrm{v}} := \{(0,0),(0,1)\},\ \mathrm{SOS}_{\mathrm{v}} := \mathrm{SOS}(\Sigma_{\mathrm{v}}).$$

我们的目标是证明

$$\mathrm{UOS}(\Delta) = \mathrm{SOS}_{\mathrm{h}} \oplus_{\mathbf{1}} \mathrm{SOS}_{\mathrm{v}}.$$

我们首先证明，若 $\Sigma \subseteq \Gamma$ 且满足 $|\Sigma| < \infty$ 和 $\Sigma - \Sigma \subseteq \Delta$，则 $|\Sigma| \leqslant 2$。事实上，若存在互不相同的 s_1，s_2，$s_3 \in \Sigma$，且它们两两之差均属于 Δ，那么这些差必定是 Δ 中的互不相同元素，而不属于 $(0,\ 0)$。令 $e_1 := (1,\ 0)$，$e_2 :=$

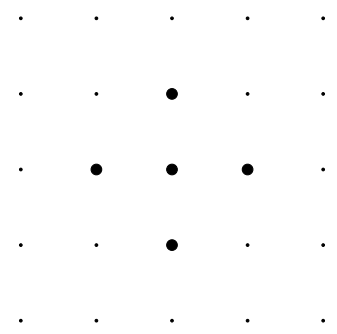

FIGURE 8. 正性域 $\{(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)\}\subseteq\mathbb{Z}^2$。

$(0,\ 1)\in\mathbb{Z}^2$。不失一般性，设 $s_1=s_2+e_1$。若 $s_1=s_3+e_2$，或若 $s_1=s_3-e_2$，则得到

$$e_1\pm e_2=(s_1-s_2)+(s_3-s_1)\in\Sigma-\Sigma\subseteq\Delta,$$

这就产生了矛盾。若 $s_2=s_3+e_2$，或者若 $s_2=s_3-e_2$，则可得

$$e_1\mp e_2=(s_1-s_2)+(s_2-s_3)\in\Sigma-\Sigma\subseteq\Delta,$$

这再次产生矛盾。因此，$\Sigma=\{s\}$，或者 $\Sigma=\{s_1,s_2\}$。

若 $\Sigma=\{s_1,s_2\}$，差值 $s_1-s_2\in\{\pm e_1,\pm e_2\}$ 意味着，要么存在某个 $s\in\mathbb{Z}^2$使得 $\Sigma\subseteq\Sigma_{\mathrm{h}}+s$，要么存在某个 $s\in\mathbb{Z}^2$使得 $\Sigma\subseteq\Sigma_{\mathrm{v}}+s$。这些包含关系对$\Sigma=\{s\}$显然成立。因此

$$\mathcal{Q}_n(\Sigma)\subseteq\mathcal{Q}_n(\Sigma_{\mathrm{h}})\cup\mathcal{Q}_n(\Sigma_{\mathrm{v}}),\quad n\in\mathbb{N},$$

对每个满足 $|\Sigma|<\infty$ 和 $\Sigma-\Sigma\subseteq\Delta$的 $\Sigma\subseteq\Gamma$。我们声称

$$\mathcal{U}_n(\Delta)=\mathcal{Q}_n(\Sigma_{\mathrm{h}})+\mathcal{Q}_n(\Sigma_{\mathrm{v}}),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

事实上，对于 $\Sigma=\Sigma_{\mathrm{h}}+s$ 和 $A,\ B\in\mathbf{M}_{n,\ k}$ 我们有

$$\begin{aligned}(A\otimes\delta_s+B\otimes\delta_{e_1+s})(A\otimes\delta_s+B\otimes\delta_{e_1+s})^*&=\\&=(A\otimes\delta_e+B\otimes\delta_{e_1})(I\otimes\delta_s)(I\otimes\delta_s)^*(A\otimes\delta_e+B\otimes\delta_{e_1})^*,\\&=(A\otimes\delta_e+B\otimes\delta_{e_1})(A\otimes\delta_e+B\otimes\delta_{e_1})^*,\end{aligned}$$

而引理 4.2 得出 $\mathcal{Q}_n(\Sigma)=\mathcal{Q}_n(\Sigma_{\mathrm{h}})$。同样，若 $\Sigma=\Sigma_{\mathrm{v}}+s$，则我们得到$\mathcal{Q}_n(\Sigma)=\mathcal{Q}_n(\Sigma_{\mathrm{v}})$。

根据下文的命题 5.2，我们有 $\mathsf{UOS}(\Delta)=\mathsf{UOS}_0(\Delta)$；或者，我们也可以注意到，每个 $\mathcal{U}_n(\Delta)=\mathcal{Q}_n(\Sigma_{\mathrm{h}})+\mathcal{Q}_n(\Sigma_{\mathrm{v}})$ 都是闭锥，因此 δ_e 是 $\mathsf{UOS}_0(\Delta)$的一个阿基米德矩阵序单位。我们进一步声称，典范酉完全正包含映射

$$\phi_{\mathrm{h}}:\mathrm{SOS}_{\mathrm{h}}\to\mathrm{UOS}(\Delta)\quad\text{and}\quad\phi_{\mathrm{v}}:\mathrm{SOS}_{\mathrm{v}}\to\mathrm{UOS}(\Delta)$$

是完全序嵌入。事实上，我们有

$$\mathrm{M}_n(\mathrm{S}[\{(-1,0),(0,0),(1,0)\}])\cap\mathcal{U}_n(\Delta)=\mathcal{Q}_n(\Sigma_{\mathrm{h}}),$$

因此 ϕ_{h} 是完全序嵌入；类似的论证也适用于 ϕ_{v}。

现在我们证明，算子系统 $\mathsf{UOS}(\Delta)$是两个傅里叶系统 $\mathsf{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}\subseteq\mathsf{C}^*(\mathbb{Z})$ 的直和，并且它们在单位元上 amalgamate，即

$$\mathrm{UOS}(\Delta)=\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}\oplus_{\mathbf{1}}\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})};\tag{14}$$

事实上，我们有

$$\mathrm{UOS}(\Delta) = \mathrm{SOS_h} \oplus_{\mathbf{1}} \mathrm{SOS_v},$$

我们通过验证 UOS(Δ) 满足合并直和的泛性质来证明这一点。为此，假设 X 是一个算子系统，并设

$$\psi_{\mathrm{h}} : \mathrm{SOS_h} \to X \quad \text{and} \quad \psi_{\mathrm{v}} : \mathrm{SOS_v} \to X$$

是完全正且保单位映射。定义映射 $\psi : \mathrm{UOS}(\Delta) \to X$，如下:

$$\psi(\delta_{(0,0)}) := e_X, \quad \psi(\delta_{(\pm 1,0)}) := \psi_{\mathrm{h}}(\delta_{\pm 1}) \quad \text{and} \quad \psi(\delta_{(0,\pm 1)}) := \psi_{\mathrm{v}}(\delta_{\pm 1}).$$

显然，ψ 是满足 $\psi \circ \phi_{\mathrm{v}} = \psi_{\mathrm{v}}$ 和 $\psi \circ \phi_{\mathrm{h}} = \psi_{\mathrm{h}}$ 的唯一映射。若 $x \in \mathcal{U}_n(\Delta)$，根据 (13)，存在 $x_{\mathrm{h}} \in \mathcal{Q}_n(\Sigma_{\mathrm{h}})$、$x_{\mathrm{v}} \in \mathcal{Q}_n(\Sigma_{\mathrm{v}})$，使得 $x = x_{\mathrm{h}} + x_{\mathrm{v}}$。于是

$$\psi^{(n)}(x) = \psi_{\mathrm{h}}^{(n)}(x_{\mathrm{h}}) + \psi_{\mathrm{v}}^{(n)}(x_{\mathrm{v}}) \in \mathrm{M}_n(X)^+,$$

因此 ψ 是完全正且保单位的；这就完成了 UOS(Δ) 满足余积泛性质的证明。根据算子值 Fej´er–Riesz 引理，我们有

$$\mathrm{SOS_h} \cong \mathrm{SOS_v} \cong \mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})},$$

这表明 (14) 成立。

将算子系统 UOS(Δ) 实现为式 (14) 中的余积，使我们能够计算其极大和极小 C*-覆盖。回顾一下，压缩算子的泛幺正 C*-代数 $\mathsf{C}_{\mathrm{u}}^*(\mathsf{con})$ 定义为由单位元$\mathbf{1}$ 和一个压缩算子 $x \neq \mathbf{1}$ 生成的泛幺正 C*-代数，并满足：对于任意压缩算子$y \in \mathcal{B}(H)$，存在典范幺正 *-同态

$$\Phi\colon \mathrm{C}^*(\mathbf{1}, x) \to \mathrm{C}^*(\mathbf{1}_{\mathcal{B}(H)}, y), \quad x \mapsto y.$$

由 [21] 中的命题 5.1 可得

$$\mathrm{C}^*_{\max}\left(\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}\right) = \mathrm{C}^*_{\mathrm{u}}(\mathrm{con}), \tag{15}$$

在相差一个典范 *-同构的意义下。

m 个压缩算子的泛 C*-代数 $\mathsf{C}_{\mathrm{u}}^*(\mathsf{con}_1, \ldots, \mathsf{con}_m)$ 以类似方式定义。根据泛性质，我们得到一个典范 *-同构，它将该代数与 $\mathsf{C}_{\mathrm{u}}^*(\mathsf{con})$ 自身在单位元上作的 m 重自由积联系起来。

现在我们可以计算例 5.4 中正性域 Δ 对应的算子系统 UOS(Δ) 的极大和极小 C*-覆盖。

命题 5.5. 设

$$\Delta = \{(0,0), (0,\pm 1), (\pm 1, 0)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$$

（见图 *8*）。以下恒等式成立:

$$\mathrm{C}^*_{\max}(\mathrm{UOS}(\Delta)) \cong \mathrm{C}^*_{\mathrm{u}}(\mathrm{con}_1, \mathrm{con}_2), \tag{16}$$

and

$$\mathrm{C}^*_{\min}(\mathrm{UOS}(\Delta)) \cong \mathrm{C}^*(\mathbb{F}_2). \tag{17}$$

证明。回想一下，根据 (14),

$$\mathrm{UOS}(\Delta) = \mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})} \oplus_{\mathbf{1}} \mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}.$$

极大 C*-覆盖（16）的恒等式由余积与傅里叶系统 $\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}$ 的泛 C*-代数的合并自由积的相容性得出。也就是说，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{C}^*_{\max}(\mathrm{UOS}(\Delta)) &= \mathrm{C}^*_{\max}\left(\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})} \oplus_{\mathbf{1}} \mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}\right)\\ &= \mathrm{C}^*_{\max}\left(\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}\right) *_{\mathbf{1}} \mathrm{C}^*_{\max}\left(\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}\right)\\ &= \mathrm{C}^*_{\mathrm{u}}(\mathrm{con}) *_{\mathbf{1}} \mathrm{C}^*_{\mathrm{u}}(\mathrm{con}),\end{aligned}$$

其中，最后一行的等式应用了（15），第二行的等式应用了 [11, 命题 4.2]。由于两个压缩算子的泛幺正 C*-代数等于 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{u}}(\mathrm{con}) *_{\mathbf{1}} \mathrm{C}^*_{\mathrm{u}}(\mathrm{con})$，我们得到（16）。

对于涉及极小 C*-覆盖（17）的恒等式，注意到，由于傅里叶系统

$$\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})} = \mathrm{span}\{\delta_1^*, \delta_0, \delta_1\} \subseteq \mathrm{C}^*(\mathbb{Z})$$

包含 $\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})$ 的酉生成元，我们有 $\mathrm{C}^*_{\min}(\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}) = \mathrm{C}^*(\mathbb{Z})$[30, 命题 5.6]。如 [22, 定理 5.2], 中所述，若 $X \subseteq A$、$Y \subseteq B$ 是分别包含 C*-代数 A、B 的酉生成元的算子系统，则余积 $X \oplus_{\mathbf{1}} Y$ 包含 $A *_{\mathbf{1}} B$ 的酉生成元，因此根据 [30, 命题 5.6], ，我们有 $\mathrm{C}^*_{\min}(X) = A$、$\mathrm{C}^*_{\min}(Y) = B$ 和

$$\mathrm{C}^*_{\min}(X \oplus_{\mathbf{1}} Y) = A *_{\mathbf{1}} B.$$

在我们的情形下，这给出

$$\begin{aligned}\mathrm{C}^*_{\min}(\mathrm{UOS}(\Delta)) &\cong \mathrm{C}^*_{\min}\left(\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})} \oplus_{\mathbf{1}} \mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}\right)\\ &\cong \mathrm{C}^*_{\min}\left(\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}\right) *_{\mathbf{1}} \mathrm{C}^*_{\min}\left(\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}\right)\\ &\cong \mathrm{C}^*(\mathbb{Z}) *_{\mathbf{1}} \mathrm{C}^*(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{C}^*(\mathbb{F}_2),\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

注 5.6。我们指出，[22, 定理 5.2] 可以推广到在其最小 C*-覆盖中超刚性的算子系统，参见 [17, 定理 1], [14,定理 5.3.21], [11, 定理 4.11]。注意，包含其所在 C*-代数的酉生成元的算子系统在其中是超刚性的 [11, 命题 4.8]。特别地，如图 8 所示，Δ 对应的傅里叶系统 $\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})_{(\{-1,0,1\})}$ 和 $\mathrm{C}^*(\mathbb{Z}^2)_{(\Delta)}$分别在 $\mathrm{C}^*(\mathbb{Z})$ 和 $\mathrm{C}^*(\mathbb{Z}^2)$中超刚性；由命题 5.5 可知，算子系统 $\mathrm{UOS}(\Delta)$在 $\mathrm{C}^*(\mathbb{F}_2)$中超刚性。

在给出下一个定义之前，回顾典范映射

$$\iota_0 : \mathrm{UOS}_0(\Delta) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)}, \quad \delta_s \mapsto \delta_s,$$

根据矩阵序单位空间 $\mathrm{UOS}_0(\Delta)$ 的正锥 $\mathcal{U}_n(\Delta)$ 的定义，该映射是完全正且保单位的。在图9的图表中，我们还纳入了来自阿基米德化的商映射 $q : \mathrm{UOS}_0(\Delta) \to \mathrm{UOS}(\Delta)$，以及映射 ι: $\mathrm{UOS}(\Delta) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)_{(\Delta)}$；后者由阿基米德化的泛性质典范地诱导而来。

我们将满足 $\Sigma\Sigma^{-1} \subseteq \Delta$的有限子集族记为 $\mathcal{S}(\Delta)$ $\Sigma \subseteq \Gamma$。

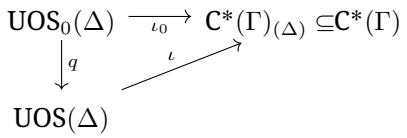

FIGURE 9. 典范映射 ι_0 和 $\iota_\circ$

定义5.7. 设 Γ 为一个离散群， $\Delta \subseteq \Gamma$ 为一个正性域。我们称 Δ具有:

(i) 若对每个 $n \in \mathbb{N}$以及每个具有有限支撑、且支撑包含于 Δ中的元素 $x \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}^*(\Gamma))^+$ ，都存在 $r \in \mathbb{N}$、有限子集 $\Sigma_i \in \mathcal{S}(\Delta)$ 以及元素 $y_i \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}^*(\Gamma))$, $i \in [r]$，它们支撑于 Σ_i，使得

$$x = \sum_{i=1}^{r} y_i y_i^*; \tag{18}$$

(ii) 完全分解性质，如果对于每个 $n \in \mathbb{N}$、每个在 Δ 内具有有限支撑的元素 $z \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}^*(\Gamma))^+$ ，以及每个 $\epsilon > 0$，元素 $z + \epsilon\delta_e \otimes \mathbf{1}_n$ 都可以分解为形式 (18)。

备注 5.8. 根据算子系统 UOS(Δ) 的定义，若正性域 $\Delta \subseteq \Gamma$ 的典范映射 ι : UOS$(\Delta) \to$C*(Γ) 是完全序嵌入，则它具有完全分解性质。

推论5.9。 如图 *8* 所示，正性域 $\Delta = \{(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ 不具有完全分解性质。

证明。由于 C*$(\mathbb{Z}^2)$ 是由 C*$(\mathbb{Z}^2)_{(\Delta)}$的酉生成元生成的 C*-代数，由 [30, 命题 5.6] 可知 $\mathbf{C}^*_{\min}$(C*$(\mathbb{Z}^2)_{(\Delta)}$) =C*$(\mathbb{Z}^2)$。若典范同构 ι : UOS$(\Delta) \to$C*$(\mathbb{Z}^2)_{(\Delta)}$ 是完全序同构，则有

$$\mathrm{C}^*(\mathbb{F}_2) = \mathrm{C}^*_{\min}(\mathrm{UOS}(\Delta)) \cong \mathrm{C}^*_{\min}(\mathrm{C}^*(\mathbb{Z}^2)_{(\Delta)}) = \mathrm{C}^*(\mathbb{Z}^2),$$

矛盾。 □

5.2. **算子系统**UOS(Δ) **作为余极限**。在本小节中，我们将 UOS(Δ) 表示为平方和算子系统的余极限（见定理 5.11）。我们先介绍平方和算子系统的一些有用观察。注意，若 $\Sigma \subseteq \Gamma$ 且 $\gamma \in \Gamma$，则 $(\Sigma\gamma)(\Sigma\gamma)^{-1} = \Sigma\Sigma^{-1}$，因此恒等映射

$$\iota : \mathrm{SOS}(\Sigma\gamma) \to \mathrm{SOS}(\Sigma)$$

是良定义的。

引理 5.10。设 Γ 是一个离散群， $\Sigma \subseteq \Gamma$ 是一个有限集，且 $\gamma \in \Gamma$。

(i) 恒等映射

$$\iota : \mathrm{SOS}(\Sigma\gamma) \to \mathrm{SOS}(\Sigma)$$

是幺正且完全正的，因此是完全序同构。

（*ii*）如果 $\Sigma' \subseteq \Sigma$，那么恒等映射

$$\iota : \mathrm{SOS}(\Sigma') \to \mathrm{SOS}(\Sigma)$$

是幺正且完全正的。

(iii) 若对某些 s、$t \in \Sigma$ 有 $\gamma = st^{-1}$，则恒等映射

$$\iota : \mathrm{SOS}(\{e, \gamma\}) \to \mathrm{SOS}(\Sigma)$$

是幺正且完全正的。

证明。 (i) 对于 n，$k \in \mathbb{N}$ 令 $A_s \in \mathbf{M}_{n,\ k}$、$s \in \Sigma$。我们直接计算

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{s\in\Sigma} A_s \otimes \delta_{s\gamma}\right)\left(\sum_{s\in\Sigma} A_s \otimes \delta_{s\gamma}\right)^* \\
&= \left(\sum_{s\in\Sigma} A_s \otimes \delta_s\right)(I \otimes \delta_\gamma)(I \otimes \delta_\gamma)^*\left(\sum_{s\in\Sigma} A_s \otimes \delta_s\right)^* \\
&= \left(\sum_{s\in\Sigma} A_s \otimes \delta_s\right)\left(\sum_{s\in\Sigma} A_s \otimes \delta_s\right)^*.
\end{aligned}$$

这表明 $Q_n(\Sigma\gamma) = Q_n(\Sigma)$，因此该幺正映射是完全正的。对 $\Sigma\gamma$ 和 γ^{-1} 反向应用，可得逆映射是完全正的，证毕。

(ii) 这直接由锥 $\mathcal{Q}_n(\Sigma)$ 的定义得到。(iii) 结合 (i) 和 (ii) 即得，因为 $\{e,\ \gamma\} = \{t,\ s\}t^{-1}$ 以及 $\{t,\ s\} \subseteq \Sigma$。□

现在我们旨在将算子系统 $\mathrm{UOS}(\Delta)$ 描述为算子系统范畴**OSy**中的一个余极限。我们引入一些将在下述定理 5.11 中使用的记号。设 Γ 为一个离散群，$\Delta \subseteq \Gamma$ 为一个正性域。对于 Σ_1，$\Sigma_2 \in \mathcal{S}(\Delta)$，如果满足以下条件，我们记作$\Sigma_1 \leqslant_\Delta \Sigma_2$：

(i) $\Sigma_1\Sigma_1^{-1} \subseteq \Sigma_2\Sigma_2^{-1}$，以及

(ii) 典范包含映射

$$\iota_{2,1} : \mathrm{SOS}(\Sigma_1) \to \mathrm{SOS}(\Sigma_2),\quad \delta_{st^{-1}} \mapsto \delta_{st^{-1}}$$

是幺正且完全正的。

我们称 $\leqslant_\Delta$ 为 $\mathcal{S}(\Delta)$ 上的 Δ-偏序。如果 $\Sigma_1 \leqslant_\Delta \Sigma_2$ 且 $\Sigma_2 \leqslant_\Delta \Sigma_1$，我们记作 $\Sigma_1 \sim_\Delta \Sigma_2$。

定理 5.11。 设 Γ 为一个离散群，$\Delta \subseteq \Gamma$ 为一个正性域。那么，图表 $((\text{平方和}(\Sigma))_{\Sigma\in\mathcal{S}(\Delta)}, (\iota_{2,\ 1})_{\Sigma_1\leqslant_\Delta\Sigma_2})$ 在算子系统范畴中的余极限存在，并且与 $\mathrm{UOS}(\Delta)$ 重合。

证明。 我们通过先在矩阵序单位空间范畴中处理，再进行阿基米德化，来验证余极限的泛性质。为此，设 X 是一个算子系统，并假设对于每个 $\Sigma \in \mathcal{S}(\Delta)$，都存在一个酉完全正映射 $\psi_\Sigma : \mathrm{SOS}(\Sigma) \to X$，使得

$$\psi_{\Sigma_2} \circ \iota_{2,1} = \psi_{\Sigma_1},$$

¨ ¨当 $\Sigma_1 \leqslant_\Delta \Sigma_2$ 时。定义映射 $\psi : \mathrm{UOS}_0(\Delta) \to X$，令 $\psi(\delta_\gamma) := \psi_\Sigma(\delta_\gamma)$，对所有 $\gamma \in \Delta$ 以及满足 $\gamma \in \Sigma\Sigma^{-1}$ 的任意 $\Sigma \in \mathcal{S}(\Delta)$。

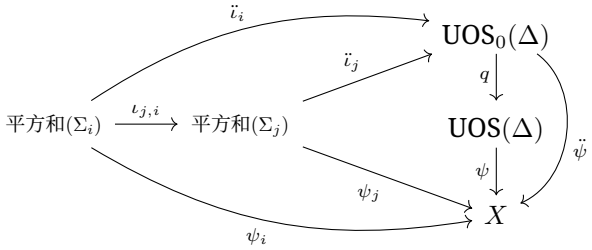

FIGURE 10. 平方和系统图的余极限的泛性质。

¨我们首先证明 ψ 是一个良定义映射。为此，对于 $\gamma \in \Gamma$，置 $\Sigma_\gamma = \{e,\ \gamma\}$。对于任何包含 γ 的 Σ，根据引理 5.10 的 (iii) 项，有 $\{e,\ \gamma\} \leqslant_\Delta \Sigma$。若 ι：平方和$(\{e,\ \gamma\}) \to$ 平方和(Σ) 是酉完全正包含映射，则有

$$\psi_{\Sigma_\gamma}(\delta_\gamma) = \psi_\Sigma \circ \iota(\delta_\gamma) = \psi_\Sigma(\delta_\gamma).$$

¨因此，$\psi(\delta_\gamma)$ 不依赖于包含 γ 的 Σ的选择。此外，ψ 映射由映射 ψ_Σ的保单位性可知是幺正的。

接下来我们证明映射 ¨

ψ 是完全正的。若 $x \in \mathrm{M}_n(\mathrm{UOS}_0(\Delta))^+ = \mathcal{U}_n(\Delta)$ 是$\mathrm{UOS}_0(\Delta)$上的一个正矩阵，则有 $x = \sum_{i=1}^k x_i$，其中 $x_i \in \mathrm{M}_n(\mathrm{SOS}(\Sigma_i))^+ = \mathcal{Q}_n(\Sigma_i)$，对某些 $\Sigma_i \in \mathcal{S}(\Delta)$、$i = 1$、.....、$k$ 成立。由 ψ_{Σ_i}的完全正性可得 $\ddot{\psi}^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i^{(n)}(x_i) \in \mathrm{M}_n(X)^+$，这正是所需的结论。

因此，矩阵序单位空间$\mathrm{UOS}_0(\Delta)$ 具有矩阵序单位空间范畴中余极限的泛性质。由于取余极限与阿基米德化可交换（见引理 2.2），我们得到$\mathrm{UOS}(\Delta)$是我们图表 $((\mathrm{SOS}(\Sigma))_{\Sigma\in\mathcal{S}(\Delta)}$、$(\iota_{2,\ 1})_{\Sigma_1\leqslant_\Delta\Sigma_2})$ 在算子系统范畴中的余极限

$$\mathrm{UOS}(\Delta) = \mathrm{Arch}\left(\mathrm{UOS}_0(\Delta)\right) = \mathrm{Arch}\left(\varinjlim_{\mathbf{MOU}} \mathrm{SOS}(\Sigma)\right) = \varinjlim_{\mathbf{OSy}} \mathrm{SOS}(\Sigma),$$

证明至此完成。 □

为了仅用群 Γ 的子集来描述定理 5.11 中的图表，最好能仅用群论术语来表述 Δ- 偏序。我们在下面的问题中对这一点进行表述。

问题 5.12。设 Γ 是一个离散群，$\Sigma_1,\ \Sigma_2 \subseteq \Gamma$ 是有限子集，且$\Sigma_1\Sigma_1^{-1} \subseteq \Sigma_2\Sigma_2^{-1}$。典范映射何时

$$\mathrm{SOS}(\Sigma_1) \to \mathrm{SOS}(\Sigma_2),\ \ \delta_{st^{-1}} \mapsto \delta_{st^{-1}},$$

是完全正的?

接下来，我们说明正性域的笛卡尔积如何与最大张量积相容。

定理 5.13。设 Γ、Γ' 是离散群，$\Delta \subseteq \Gamma$、$\Delta' \subseteq \Gamma'$ 是正性域。则有 $\mathrm{UOS}(\Delta \times \Delta') \cong \mathrm{UOS}(\Delta) \otimes_{\max} \mathrm{UOS}(\Delta')$。

下面的证明分为三个步骤：首先，我们验证两个平方和系统图的笛卡尔积是一个图表，其中所有映射

都是联合完全正的。其次，我们证明余极限的笛卡尔积是该图表的余极限，这里考虑的仍是联合完全正映射。这可由如下构造得出：将锥 $\mathbf{M}_n(\mathsf{UOS}_0(\Delta))_+$ 构造为它们所包含的平方和锥所生成的锥。第三，我们利用最大张量积的泛性质，得出最大张量积 $\mathsf{UOS}(\Delta)\otimes_{\max}\mathsf{UOS}(\Delta')$ 满足相应的平方和系统最大张量积图表的余极限泛性质；请回想，最大张量积的泛性质 [31, 定理 5.8] 给出了一个规范识别：从最大张量积出发的完全正映射，与从两个算子系统的笛卡尔积出发的联合完全正映射相对应。

证明。步骤 *1*。 如上，记 $\mathcal{S}(\Delta)$ 为满足 $\Sigma\Sigma^{-1}\subseteq\Delta$的有限子集 $\Sigma\subseteq\Gamma$ 族，并对 $\mathcal{S}(\Delta')$作类似定义。分别赋予 $\mathcal{S}(\Delta)$和 $\mathcal{S}(\Delta')$ 以 $\leqslant_\Delta$序和 $\leqslant_{\Delta'}$序，由此得到图表

$$\big((\mathrm{SOS}(\Sigma))_{\Sigma\in\mathcal{S}(\Delta)},(\alpha_{2,1})_{\Sigma_1\leqslant_\Delta\Sigma_2}\big)\quad\text{and}\quad\big((\mathrm{SOS}(\Sigma'))_{\Sigma'\in\mathcal{S}(\Delta')},(\beta_{2,1})_{\Sigma_1'\leqslant_{\Delta'}\Sigma_2'}\big),$$

如定理 5.11 中所示。由最大张量积的函子性，我们得到一个图表

$$\big((\mathrm{SOS}(\Sigma)\otimes_{\max}\mathrm{SOS}(\Sigma'))_{\Sigma\in\mathcal{S}(\Delta),\Sigma'\in\mathcal{S}(\Delta')},(\alpha_{2,1}\otimes\beta_{2,1})_{\Sigma_1\leqslant_\Delta\Sigma_2,\Sigma_1'\leqslant_{\Delta'}\Sigma_2'}\big)\cdot\tag{19}$$

设 X 为一个算子系统，并假设对于所有 $\Sigma\in\mathcal{S}(\Delta)$ 和 $\Sigma'\in\mathcal{S}(\Delta')$，存在完全正幺映射 $\psi_{\Sigma,\,\Sigma'}$: 平方和$(\Sigma)\otimes_{\max}$ 平方和$(\Sigma')\to X$，使得

$$\psi_{\Sigma_2,\Sigma_2'}\circ(\alpha_{2,1}\otimes\beta_{2,1})=\psi_{\Sigma_1,\Sigma_1'},\tag{20}$$

对于所有 $\Sigma_1,\ \Sigma_2\in\mathcal{S}(\Delta)$和 $\Sigma_1',\ \Sigma_2'\in\mathcal{S}(\Delta')$，其中 $\Sigma_1\leqslant_\Delta\Sigma_2$和 $\Sigma_1'\leqslant_{\Delta'}\Sigma_2'$。由最大张量积的泛性质 [31, 定理 5.8], ，对于所有$\Sigma\in\mathcal{S}(\Delta)$ 和 $\Sigma'\in\mathcal{S}(\Delta')$，映射

$$\phi_{\Sigma,\Sigma'}:\mathrm{SOS}(\Sigma)\times\mathrm{SOS}(\Sigma')\to X;\ \ (\delta_{st^{-1}},\delta_{s't'^{-1}})\mapsto\psi_{\Sigma,\Sigma'}(\delta_{st'^{-1}}\otimes\delta_{s't'^{-1}}),$$

是联合完全正的。注意，(20) 意味着

$$\phi_{\Sigma_2,\Sigma_2'}\circ(\alpha_{2,1}\times\beta_{2,1})=\phi_{\Sigma_1,\Sigma_1'},\tag{21}$$

对所有满足 $\Sigma_1\leqslant_\Delta\Sigma_2$ 和 $\Sigma_1'\leqslant_{\Delta'}\Sigma_2'$的 $\Sigma_1,\Sigma_2\in\mathcal{S}(\Delta)$ 及 $\Sigma_1',\Sigma_2'\in\mathcal{S}(\Delta')$ 均成立。此外，从 $\mathsf{SOS}(\Sigma)\times\mathsf{SOS}(\Sigma')$ 到矩阵序向量空间 $\mathsf{UOS}_0(\Delta)\times\mathsf{UOS}_0(\Delta')$ 的笛卡尔积的典范包含映射是联合完全正的。步骤 *2*。 对于 $\gamma\in\Delta$ 和 $\gamma'\in\Delta'$，令 $\Sigma\in\mathcal{S}(\Delta)$ 和 $\Sigma'\in\mathcal{S}(\Delta')$ 满足 $\gamma\in\Sigma\Sigma^{-1}$和 $\gamma'\in\Sigma'\Sigma'^{-1}$。定义

$$\ddot{\phi}(\delta_\gamma,\delta_{\gamma'}):=\phi_{\Sigma,\Sigma'}(\delta_{st^{-1}},\delta_{s't'^{-1}}),$$

其中 $s,t\in\Sigma$、 $s',t'\in\Sigma'$ 是满足 $st^{-1}=\gamma$ 和 $s't'^{-1}=\gamma'$的任意元素。¨由引理 5.10 的 (iii) 项及 (21)，可知映射 ϕ 在 $\mathsf{UOS}_0(\Delta)\times\mathsf{UOS}_0(\Delta')$上定义良好。我们还固定以下记号

$$q:\mathrm{UOS}_0(\Delta)\to\mathrm{UOS}(\Delta)\ \ \text{and}\ \ q':\mathrm{UOS}_0(\Delta')\to\mathrm{UOS}(\Delta')$$

对于典范商映射，以及

$$\iota_\Sigma:\mathrm{SOS}(\Sigma)\to\mathrm{UOS}_0(\Delta)\ \ \text{and}\ \ \iota_\Sigma':\mathrm{SOS}(\Sigma')\to\mathrm{UOS}_0(\Delta')$$

对于典范包含映射。

由于矩阵序向量空间 $\mathsf{UOS}_0(\Delta)$ 和 $\mathsf{UOS}_0(\Delta')$ 的矩阵锥由算子系统 $\mathsf{SOS}(\Sigma)$和 $\mathsf{SOS}(\Sigma')$ 的矩阵锥生成，因此对于 $\Sigma\in\mathcal{S}(\Delta)$ 和 $\Sigma'\in\mathcal{S}(\Delta')$，以及 ..... 的联合完全正性

¨映射 $\phi_{\Sigma,\ \Sigma'}$，映射 ϕ 按构造即为联合完全正。事实上，设 $x \in \mathrm{M}_n(\mathrm{UOS}_0(\Delta))^+ = \mathcal{U}_n(\Delta)$ 是 $\mathrm{UOS}_0(\Delta)$ 上的正矩阵；那么我们有 $x = \sum_{j=1}^k x_j$，其中 $x_j \in \mathrm{M}_n(\mathrm{SOS}(\Sigma_j))^+ = \mathcal{Q}_n(\Sigma_j)$，对某个 $\Sigma_j \in \mathcal{S}(\Delta), j = 1,\ldots,k$ 成立。类似地，对于 $y \in \mathrm{M}_n(\mathrm{UOS}_0(\Delta'))^+ = \mathcal{U}_n(\Delta')$ 这个 $\mathrm{UOS}_0(\Delta')$ 上的正矩阵，我们有 $y = \sum_{j'=1}^m y_{j'}$，其中 $y_{j'} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{SOS}(\Sigma'_{j'}))^+ = \mathcal{Q}_n(\Sigma'_{j'})$，对某个.$\Sigma'_{j'} \in \mathcal{S}(\Delta'), j' = 1,\ldots,m$ 成立。应用 ϕ，得到

$$\ddot{\phi}^{(n)}(x,y) = \sum_{j=1}^k \sum_{j'=1}^m \ddot{\phi}^{(n)}(x_j, y_{j'}) = \sum_{j=1}^k \sum_{j'=1}^m \phi^{(n)}_{\Sigma_j,\Sigma'_{j'}}(x_j, y_{j'}),$$

因为每个 $\phi_{\Sigma_j,\Sigma'_{j'}}$ 都是联合完全正的，所以它是 $\mathrm{M}_n(X)$ 中正元素的和，因此 $\ddot{\phi}^{(n)}(x,y)$ 是正的。

由此可得 ϕ 在阿基米德化的笛卡尔积上诱导出唯一的联合完全正映射

$$\phi : \mathrm{UOS}(\Delta) \times \mathrm{UOS}(\Delta') \to X$$

¨满足 $\phi \circ (q_1 \times q_2) = \phi$，并且

$$\phi \circ (q \times q') \circ (\iota_\Sigma \times \iota'_\Sigma) = \phi_{\Sigma,\Sigma'}.$$

事实上，固定 $x \in \mathrm{UOS}_0(\Delta)^+$，可知映射 $\phi_x : \mathrm{UOS}_0(\Delta') \to X$，由.$\phi_x(y) = \phi(x,y)$ 给出，是完全正的，因此诱导出一个典范的完全˜正映射 $\phi_x : \mathrm{UOS}(\Delta') \to X$。令 $\theta : \mathrm{UOS}_0(\Delta) \times \mathrm{UOS}(\Delta') \to X$ 为满足 $\theta(x,y) = \phi_x(y), x \in \mathrm{UOS}_0(\Delta)^+, y \in \mathrm{UOS}(\Delta')$ 的（良好定义的）映射。根据构造，θ 是联合完全正的。对于 $y \in \mathrm{UOS}(\Delta')^+$，令 $\theta_y : \mathrm{UOS}_0(\Delta) \to X$ 为由 $\theta_y(x) = \theta(x,y)$ 给出的映射；和之前一样，后一个映射导出一个典范的完全正映射 $\theta_y : \mathrm{UOS}(\Delta) \to X$。最后，令 $\phi(x, y) = \theta_y(x), x \in \mathrm{UOS}(\Delta), y \in \mathrm{UOS}(\Delta')$。

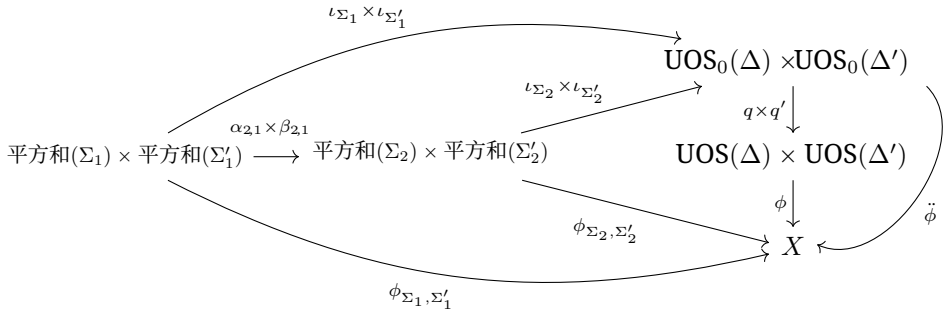

FIGURE 11. 两个平方和系统图的笛卡尔积之余极限的泛性质。此图中标示的所有映射都是联合完全正的。

步骤 *3*。 现在，我们再次应用最大张量积的泛性质，来证明该映射

$$\psi : \mathrm{UOS}(\Delta) \otimes_{\max} \mathrm{UOS}(\Delta') \to X; \quad p \otimes q \mapsto \phi(p,q),$$

是完全正的，并满足图表 (19) 的余极限的泛性质。总之，我们刚刚证明了下方所示的第一个完全序同构。第二个完全序同构由命题 4.7 得出，第三个则由定理 5.11 得出：

$$\begin{aligned}\mathrm{UOS}(\Delta)\otimes_{\max}\mathrm{UOS}(\Delta') &\cong \varinjlim_{\Sigma\Subset\mathcal{S}(\Delta),\Sigma'\Subset\mathcal{S}(\Delta')} \mathrm{SOS}(\Sigma)\otimes_{\max}\mathrm{SOS}(\Sigma')\\ &\cong \varinjlim_{\Sigma\Subset\mathcal{S}(\Delta),\Sigma'\Subset\mathcal{S}(\Delta')} \mathrm{SOS}(\Sigma\times\Sigma') \cong \mathrm{UOS}(\Delta\times\Delta')\end{aligned}$$

证明至此结束。 □

5.3. **正性域的算子扩张性质**。现在我们证明，完全分解性质等价于一个众所周知的、针对部分定义的正半定函数的扩张性质。

定义 5.14。设 Γ 是一个离散群， $\Delta\subseteq\Gamma$ 是一个正性域，H 是一个希尔伯特空间。若函数 $u:\Delta\to\mathcal{B}(H)$ 满足：对任意满足 $\Sigma\Sigma^{-1}\subseteq\Delta$ 的有限子集 $\Sigma\subseteq\Gamma$，均有 $(u(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma}\in\mathbf{M}_\Sigma(\mathcal{B}(H))^+\subseteq\mathcal{B}(\ell^2(\Sigma)\otimes H)$，则称其为正半定。

我们用 $\mathrm{B}(\Delta,H)^+$ 表示 Δ 上所有取值于 $\mathcal{B}(H)$ 的正半定函数所成的锥，用 $\mathrm{B}(\Delta,H)$ 表示其线性张成。我们称 $\mathrm{B}(\Delta,H)$ 为 Δ（即正性域）上的 $\mathcal{B}(H)$-值傅里叶–斯蒂尔切斯空间，而将 $\mathrm{B}(\Delta):=\mathrm{B}(\Delta,\mathbb{C})$ 称为 Δ 的傅里叶–斯蒂尔切斯空间。

命题 5.15。设 Γ 为一个离散群， $\Delta\subseteq\Gamma$ 为一个正性域。

(i) 若 $u\in\mathrm{B}(\Delta,H)^+$ 是定义在 Δ 上的正半定函数，则存在唯一的完全正映射 $\phi_u:\mathrm{UOS}_0(\Delta)\to\mathcal{B}(H)$，使得对所有 $s\in\Delta$，都有 $\phi_u(\delta_s)=u(s)$。 *(ii)* 若 $\phi:\mathrm{UOS}_0(\Delta)\to\mathcal{B}(H)$ 是一个完全正映射，则存在唯一的正半定函数 $u_\phi:\Delta\to\mathcal{B}(H)$，使得对所有 $s\in\Delta$，都有 $u_\phi(s)=\phi(\delta_s)$。

证明。 (i) 令 $u\in\mathrm{B}(\Delta,H)^+$。根据注 5.1 以及将 $\mathbf{M}_n(\mathrm{UOS}_0(\Delta))^+=\mathcal{U}_n(\Delta)$ 表征为包含该集合的最小相容正矩阵锥族，

$$\{(\delta_{st^{-1}})_{s,t\in\Sigma}\mid\Sigma\subseteq\Gamma,\Sigma\Sigma^{-1}\subseteq\Delta,|\Sigma|<\infty\}$$

由注 5.1 以及与（11）中相同的计算，诱导映射 $\phi_u:\mathrm{UOS}_0(\Delta)\to\mathcal{B}(H)$ 是完全正的。

(ii) 反过来，若 $\phi:\mathrm{UOS}_0(\Delta)\to\mathcal{B}(H)$ 是完全正映射，取一个满足 $\Sigma\Sigma^{-1}\subseteq\Delta$的有限子集 $\Sigma\subseteq\Gamma$。则有

$$(u_\phi(st^{-1}))_{s,t\in\Sigma}=(\phi(\delta_{st^{-1}}))_{s,t\in\Sigma}=\phi^{(|\Sigma|)}((\delta_{st^{-1}})_{s,t\in\Sigma})\in\mathcal{B}(H)^+,$$

因此 $u_\phi\in\mathrm{B}(\Delta,\ H)^+$。

唯一性陈述成立，因为赋值 $u\mapsto\phi_u$ 和 $\phi\mapsto u_\phi$ 互为逆。□

由于算子系统 X 的矩阵序向量空间对偶按定义配备了正矩阵锥 $\mathbf{M}_n(X^{\mathrm{d}})^+:=\mathcal{CP}(X,\ \mathbf{M}_n)$，因此可立即得到以下结论：

推论 5.16。 **</style}有序对 B**(Δ), $(\mathrm{B}(\Delta, \mathbb{C}^n)^+)_n)$ 是算子系统 $\mathrm{UOS}(\Delta)$的矩阵序向量空间对偶。

该识别

$\mathrm{B}(\Delta, H)$ 张量$(\mathrm{B}(\Delta, H)^+) \cong$ 张量$(\mathcal{CP}($算子系统$(\Delta), \mathcal{B}(H))) = \mathcal{CB}($算子系统$(\Delta), \mathcal{B}(H))$ 赋予傅里叶–斯蒂尔切斯空间 $\mathrm{B}(\Delta)$ （带矩阵序）的算子空间结构。

定义 5.17。 设 Γ 为一个离散群。若正性域 $\Delta \subseteq \Gamma$ 具有正算子扩张性质（作为正性域），则意味着对于每个希尔伯特空间 H，以下条件成立:

> 条件 (PEPD)：对于每个正半定函数 u:$\Delta \to \mathcal{B}(H)$，存在一个正半定函数 $\tilde{u}$: $\Gamma \to \mathcal{B}(H)$ ，使得 $\tilde{u}|_\Delta = u$。

类似地，如果条件 (PEPD) 对每个有限维希尔伯特空间 H都成立，我们就称 Δ 具有完全正扩张性质（作为正性域）。

定义 5.18。 设 Γ 为一个离散群。如果对每个希尔伯特空间 H，以下条件都成立，则称正性域 $\Delta \subseteq \Gamma$ 具有有界算子扩张性质（作为正性域）：

> 条件 (BEPD)：对于每个正半定函数 u:$\Delta \to \mathcal{B}(H)$，都存在一个正半定函数 $\tilde{u}$: $\Gamma \to \mathcal{B}(H)$ ，使得 $\tilde{u}|_\Delta = u$ 且$\|\tilde{u}\|_{\mathrm{B}(\Gamma,\ H)} = \|u\|_{\mathrm{B}(\Delta,\ H)}$。

类似地，如果条件 (BEPD) 对每个有限维希尔伯特空间 H都成立，我们就称 Σ具有完全有界扩张性质。

注 5.19。 注 4.17 和注 4.20 的类似结论同样适用，这表明正算子扩张性质与完全正扩张性质，以及有界算子扩张性质与完全有界扩张性质（均作为正性域）分别等价。

注记 5.20。 由命题 5.15，典范酉完全正包含映射 ι: $\mathrm{UOS}(\Delta) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)$ 诱导出其对偶映射，即典范满射完全正限制映射 $\rho : \mathrm{B}(\Gamma) \to \mathrm{B}(\Delta)$ 。与命题 4.18 和命题 4.21 类似，正性域 Δ 具有完全正／完全有界扩张性质（作为正性域）当且仅当限制映射 $\rho : \mathrm{B}(\Gamma) \to \mathrm{B}(\Delta)$ 是一个**矩阵有序向量空间-/OSp-**商映射。

定理 5.21。 设 Γ 是一个离散群， $\Delta \subseteq \Gamma$ 是一个正性域。以下各项等价:

> *(i)* 正性域 Δ 具有正算子扩张性质（作为正性域）。*(ii)* 正性域 Δ 具有有界算子扩张性质（作为正性域）。*(iii)* 正性域 Δ 具有完全分解性质。

证明。 与定理 4.22 的证明类似，注意到典范映射 $\iota : \mathrm{UOS}(\Delta) \to \mathrm{C}^*(\Gamma)$ 的对偶映射是限制映射 $\rho : \mathrm{B}(\Gamma) \to \mathrm{B}(\Delta)$，其中 $\mathrm{B}(\Gamma)$ 和 $\mathrm{B}(\Delta)$ 分别同时是 $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ 和 $\mathrm{UOS}(\Delta)$ 的矩阵序向量空间对偶与算子空间对偶。回顾注 5.19 和注记 5.20，正性域 Δ 具有正/有界算子扩张性质（作为正性域）当且仅当限制映射 ρ 是矩阵有序向量空间/算子空间的商映射。根据命题 2.3，(i) 和 (iii) 均等价于

映射 ι 是完全序嵌入这一陈述；鉴于注 5.8，这也就是 (iii)。□

设 Γ 是一个离散群，$\Sigma \subseteq \Gamma$ 是一个有限子集。由定义可知，如果 Σ 具有算子扩张／Fej´er–Riesz 性质，那么 $\Sigma\Sigma^{-1}$ 作为正性域具有算子扩张／分解性质，见图 1。下面的例子说明，反过来一般并不成立。

例 5.22. 考虑整数的子集 $\Sigma := \{0,\ 1,\ 3\} \subseteq \mathbb{Z}$，并令$\Delta := \Sigma - \Sigma = \{-3,\ \ldots\ldots,\ 3\}$。再令 $\Sigma' := \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$，并注意到 $\Sigma' - \Sigma' = \Delta$。根据 [25, 定理 4.8], ，$\mathbb{Z}$ 的子集具有扩张性质，当且仅当它是一个等差数列。因此，上述 $\Delta = \Sigma - \Sigma$ 具有算子扩张性质（将算子值 Fej´er–Riesz 引理应用于 Σ' 即可），而 Σ 则不具有该性质。

References

[1] W. B. Arveson。《C*-代数的子代数》。 *Acta Math.*，123(1):141–224，1969年。[2] W. B. Arveson。非交换 Choquet 边界。 *J. Am. Math. Soc.*，21(4):1065–1084，2008年。[3] W. B. Arveson。非交换 Choquet 边界 II：超刚性。 *Isr. J. Math.*，184(1):349–385，2011年。[4] M. Bakonyi 和 G. Nævdal。具有

$\mathbb{Z}^2$ *Journal* 扩张

of the London Mathematical Society 62 3 904 916, 2000
性质的有限子集。，( ): – 。[5] M. Bakonyi 和 D. Timotin。自由群上正定函数的扩张。

J. Funct. , ( ):

Anal. 246 1 31 49, 2007
– 。[6] M. Bakonyi 和 D. Timotin。可和群上正定函数的扩张。*Canad. Math. Bull.*，54(1):3–11，2011年。[7] M. Bakonyi 和 H. J. Woerdeman。

Matrix completions moments and sums of Hermitian , *squares* 2011

Princeton Ser. Appl. Math.。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，。[8] B. Blackadar。 *Operator Algebras*， *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*第122卷。Springer，柏林，海德堡，2006年。[9] D. P. Blecher 和 C. Le Merdy。

Operator Algebras and Their Modules – an Operator Space , 第 *Approach* 30 *Lond. Math. Soc. Monogr. New Ser.*
卷，牛津大学出版社，牛津，2004 年。[10] A. P. Calder´on 和 R. Pepinsky。关于正实周期函数的傅里叶系数的相位，《X 射线晶体分析中的计算方法与相位问题》。*Department of Physics Pennsylvania State College*，第339–349页，1952年。[11] A. Chatzinikolaou。算子 A-系统的余积。 *Oper. Matrices*，17(2):435–468，2023年。[12] M.-D. Choi 和 E. G. Effros。内射性与算子空间。 *J. Funct. Anal.*，24(2):156–209，1977年。[13] A. Connes 和 W. D. van Suijlekom。非交换几何中的谱截断与算子系统。 *Commun. Math. Phys.*，383(3):2021–2067，2021年。[14] K. R. Davidson、A. H. Fuller 和 E. T. A. Kakariadis。 *Semicrossed Products of Operator Algebras by Semigroups* 1168 *Mem. Am. Math. Soc.* ，美国数学会（AMS），普罗维登斯，罗得岛州，2017年。[15] J. de Canni`ère 和 U. Haagerup。某些单李群及其离散子群的傅里叶代数乘子。 *Am. J. Math.*，107:455–500，1985年。[16] M. A. Dritschel 和 S. A. McCullough。算子代数及算子空间表示族的边界表示。 *J. Oper. Theory*，53(1):159–167，2005年。[17] B. L. Duncan。多变量动力系统的泛自由积与半交叉积的 C*-包络。 *Indiana Univ. Math. J.*，57(4):1781–1788，2008年。[18] E. G. Effros 和 Z.-J. Ruan。 *Theory of Operator Spaces*， *AMS Chelsea Publ.*第386卷。美国数学会（AMS），普罗维登斯，罗得岛州；2000年 Clarendon Press 版的重印本，以《算子空间》为书名出版，2020年。

[19] G. K. Eleftherakis、E. T. A. Kakariadis 和 I. G. Todorov。算子空间的对称化。arXiv:2503.15192，2025年。[20] D. Farenick。托普利茨矩阵的算子系统。 *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*，8(32):999–1023，2021年。[21] D. Farenick、A. S. Kavruk、V. I. Paulsen 和 I. G. Todorov。离散群的算子系统。 *Commun. Math. Phys.*，329(1):207–238，2014年。[22] D. Farenick、A. S. Kavruk、V. I. Paulsen 和 I. G. Todorov。弱期望性质的刻画。 *New York J. Math.*，24a:107–135，2018年。[23] D. Farenick 和 V. I. Paulsen。矩阵代数的算子系统商及其张量积。 *Math. Scand.*，111(2):210–243，2012年。[24] T. Fritz。C*-代数含幺直和上的算子系统结构。

Rocky Mt. J. , ( ): – 。[25]

Math. 44 3 913 936, 2014
J.-P. Gabardo。任意

$\mathbb{Z}^n$ *Trans.* 有限子集上的三

Amer. Math. Soc. 350 11 4473 4498, 1998
角矩问题。, ( ): – 。[26] M. Hamana。算子系统的内射包络。 *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* 15 3 773 785, 1979 , ( ): – 。[27]

D. Hilbert。关于将定型表示为平方和。

Math. , ( ): –350,

Ann. 32 3 342
1888年。[28] D. Hilbert。《数学问题》 *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 253 297, 1900 , 第 — 页。

[29] A. Humeniuk、M. Kennedy 和 N. Manor。非交换凸集的扩张性质及算子系统的对偶性。 *J. Funct. Anal.*，289(11):41，2025年。[30] A. S. Kavruk。算子系统中与核性相关的性质。 *J. Oper. Theory*，71(1):95–156，2014年。[31] A. S. Kavruk、V. I. Paulsen、I. G. Todorov 和 M. Tomforde。算子系统的张量积。 *J. Funct. Anal.*，261(2):267–299，2011年。[32] A. S. Kavruk、V. I. Paulsen、I. G. Todorov 和 M. Tomforde。算子系统范畴中的商空间、精确性与核性。 *Adv. Math.*，235:321–360，2013年。[33] D. Kerr 和 H. Li。算子度量空间的 Gromov–Hausdorff 收敛。

J. Oper. , ( ): – 。[34]

Theory 62 1 83 109, 2009
E. Kirchberg 和 S. Wassermann。由算子系统生成的 C*-代数。

J. Funct. , ( ): –351,

Anal. 155 2 324
1998年。[35] J. B. Lasserre。全局优化与矩理论。

´ *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* , ( ): – 。[36]

Math. 331 11 929 934, 2000
M. Leimbach。紧量子群 Peter–Weyl 截断的收敛。 *Journal of Noncommutative Geometry* 2025 , （在线优先发表）。[37] M. Leimbach。 *Operator System Perspectives at Truncated Noncommutative Geometry*。博士论文，奈梅亨拉德堡德大学，2025年。[38] M. Leimbach 和 W. D. van Suijlekom。环面谱截断的 Gromov–Hausdorff 收敛。 *Adv. Math.*，439:109496，2024年。[39] R. H. Levene、Y.-F. Lin 和 I. G. Todorov。Schur 乘子的正扩张。 *J.* ,

Operator Theory 78 1 45 69, 2017
( ): — 。[40] L. Mawhinney 和 I. G. Todorov。算子系统及相关范畴中的归纳极限。 *Diss. Math.*，536:1–57，2018年。[41] M. Muis。 *The Geometry of Circulant Matrices. Gromov–Hausdorff Convergence and Duality*。学士论文，奈梅亨拉德堡德大学，2025年。[42] M. Navascu´es、S. Pironio 和 A. Ac´ın。刻画量子关联集合的半正定规划收敛层级。 *New J. Phys.*，10(7):073013，2008年。[43] V. I. Paulsen。

Completely Bounded Maps and Operator Algebras 78 *Cambridge* , *Studies in Advanced Mathematics* 2002

Completely Bounded Maps and Operator Algebras 78 *Cambridge* 卷。剑桥大学出 *Studies in Advanced Mathematics* 2002
版社，剑桥，。[44] V. I. Paulsen、I. G. Todorov 和 M. Tomforde。有序空间上的算子系统结构。 *Proceedings of the London Mathematical Society*，102(1):25–49，2011年。[45] V. I. Paulsen 和 M. Tomforde。带序单位的向量空间。 *Indiana Univ. Math. J.*，58(3):1319–1360，2009年。[46] G. Pisier。

Introduction to Operator Space Theory 294 *Lond. Math. Soc. Lect. Note* , 剑桥大学出版 *Ser.* 2003
社第 卷，剑桥，。[47] M. A. Rieffel。紧量子群及有限生成群的傅里叶截断收敛。 *J. Geom. Phys.*，192:104921，2023年。

[48] Z.-J. Ruan. C*-代数的子空间。 *J. Funct. Anal.*, 76(1):217–230, 1988. [49] W. Rudin. 正定函数的扩张问题。 *Ill. J. Math.*, 7 539, 1963 3 532( ): – .[50] L. A. Sakhnovich. 多变量非退化厄米正函数的有效构造。 *Funct. Anal. Appl.*, 14(4):290–294, 1980. [51] Z. Sasv´ari. *Positive Definite and Definitizable Functions*, 第2卷, *Math. Top.* Akademie Verlag, 柏林, 1994. [52] Z. Sasv´ari. 正定函数的扩张问题：简短历史综述。载于 M. Langer、A. Luger 和 H. Woracek 编, *Operator Theory and Indefinite Inner Product Spaces: Presented on the Occasion of the Retirement of Heinz Langer in the Colloquium on Operator Theory, Vienna, March 2004*, 《算子理论：进展与应用》, 第365–379页。Birkh¨ auser, 巴塞尔, 2006.[53] B. Sz.-Nagy、C. Foias、H. Bercovici 和 L. K´ *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space* 2010 erchy。Springer, 纽约, NY, 。[54] G. Wittstock. 算子值 Hahn-Banach 定理。 *J. Funct. Anal.*, 40:127–150, 1981. [55] G. Wittstock. 关于矩阵序与凸性。《泛函分析：综述与最新成果 III》, 帕德博恩会议论文集, 德国, 1983, 北荷兰数学研究第90卷, 第175-188页, 1984. [56] S. L. Woronowicz. 紧矩阵伪群。 *Commun. Math. Phys.*, 111 665, 1987 4 613( ): – .

Department of Mathematics, National and Kapodistrian University of Athens, Athens, 1578 84, Greece*Email address*: evkakariadis@math.uoa.gr

Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany. *Email address*: leimbach@mpim-bonn.mpg.de

School of Mathematical Sciences, University of Delaware, 501 Ewing Hall, Newark, DE 19716, USA*Email address*: todorov@udel.edu

Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics, Radboud UniversityNijmegen, Heyendaalseweg 135, 65254 AJ Nijmegen, The Netherlands.*Email address*: waltervs@math.ru.nl