arXiv:2603.29985v1 [math.OA] 31 Mar 2026

# 阿贝尔 C*-代数的同伦 3-型

GREGORY FAUROT 和 GIOVANNI FERRER

Abstract. 我们计算阿贝尔 C*-代数的 Morita 3-范畴中，每个含幺阿贝尔 C*-代数 $C(T)$ 处的同伦群。该范畴由阿贝尔 C*-代数、带中心映射的 C*-代数、C*-对应以及可伴随双模映射构成。我们用底层紧豪斯多夫空间 $T$ 的拓扑数据来描述这些群。我们还根据 $T$ 的这些拓扑不变量，计算第一同伦群在第二和第三同伦群上的作用。

## Contents

1. 背景 3 2. 计算 AbC*Alg 的同伦群 11 3. $\pi_2$ 和 $\pi_3$ 21上的作用 附录 A. Serre–Swan 对偶 27 参考文献 31

## Introduction

C*-代数的研究常被称为“非交换拓扑”，因为盖尔范德对偶描述了阿贝尔 C*-代数与紧豪斯多夫空间之间的对应关系。这使得拓扑性质能够在（通常是非交换的）C*-代数语境中重新表述。这种对应最显著的例子，是将拓扑 $K$ 理论引入 $C^*$ 代数的研究，由此推动了针对简单、可约 C*- 代数的 Elliott 分类计划 [3]。类似地，Serre–Swan 定理（[20, 第 267] 页）给出了阿贝尔 C*-代数与拓扑之间的另一种对应；不过在此情形下，对应的是有限生成投射 $C(T)$-模与紧豪斯多夫空间 $T$ 上的向量丛。

从范畴论的角度看，盖尔范德对偶是在 1-范畴层面上的陈述，它给出了 C*-代数范畴与拓扑范畴之间的等价。另一方面，Serre– Swan 定理可以解释为一个 2-范畴陈述。由于 C*-2-范畴 C*Alg 的 1-态射是双模，Serre–Swan 定理利用拓扑来描述从 $C(T)$ 到其自身的有限生成投射 1-态射。本文探讨盖尔范德对偶与 Serre–Swan 定理的 3-范畴类比。

*Date*: 2026年4月1日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 46 M15，18N20，46L05。1

进一步说明 C*-范畴：范畴 $\mathsf{C^*Alg}_1$，的对象是 C*-代数，态射是 $*$-同态，因此它是一个 1-范畴。C*-代数也属于一个 2-范畴 $\mathsf{C^*Alg}$，其中对象是 C*-代数，1-态射是 Hilbert C*-双模，2-态射是可伴随双模映射。此外，$\mathsf{C^*Alg}$ 实际上是一个 C*-2-范畴，其中 2-自态射集合具有 C*-代数的结构。将交换 C*-代数视为向量空间范畴 Vect 中的 $E_2$-代数后，交换 C*-代数构成了一个由 $E_2$-代数组成的 Morita 3-范畴，称为 $\mathsf{AbC^*Alg}$。这个范畴是 C*-3-范畴的一个例子，最早由第二作者在 [10] 中进行研究。

因此，我们着眼于 3-范畴 $\mathsf{AbC^*Alg}$，以寻求拓扑与交换 C*-代数之间的 3-范畴对应。为此，Grothendieck 的同伦假设（[12]）指出，同伦 $n$-型应当与（弱）$n$-群胚等价。因此，一种可能的 3-范畴方法是在 3-范畴 $\mathsf{AbC^*Alg}$ 中计算交换 C*-代数处的同伦群，从而描述其同伦 3-型。Corey Jones 提出，$\mathsf{AbC^*Alg}$ 中含幺交换 C*-代数处的第一同伦群应分解为一个短正合列，其中涉及 $H^3(T;\mathbb{Z})$ 和同胚群$(T)$。我们的第一个定理证明了这一结论；借助 Serre–Swan 定理，它还用紧豪斯多夫空间 $T$ 的拓扑不变量描述了其他同伦群。我们强调，这些并非代数拓扑中 $T$ 的传统同伦群。

**定理 A**。设 $C(T)$ 是一个交换 *C**-代数。那么，在 $\mathsf{AbC^*Alg}$ 中，$C(T)$ 处的同伦群如下：

$$\begin{aligned}\pi_0(\mathsf{AbC^*Alg}) &\cong \{\textit{Compact Hausdorff Spaces}\}/\cong,\\ \pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}, C(T)) &\cong H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z}) \rtimes \mathrm{Homeo}(T),\\ \pi_2(\mathsf{AbC^*Alg}, C(T)) &\cong \mathrm{Pic}(T),\ \textit{and}\\ \pi_3(\mathsf{AbC^*Alg}, C(T)) &\cong C(T)^\times.\end{aligned}$$

此外，若 $T$ 具有 *CW* 复形的同伦型，

$$\pi_2(\mathsf{AbC^*Alg}, C(T)) \cong H^2(T;\mathbb{Z}).$$

这里，$H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z})$ 是 $T$的第三 Čech 上同调群的挠子群，而 Pic$(T)$ 是 $T$上复线丛同构类构成的 Picard 群。

然而，同伦 3-型的分类还需要同伦群以外的更多数据。我们计算了这些附加信息中的一部分：$\pi_1$ 在高阶同伦群 $\pi_2$ 和 $\pi_3$上的作用。

定理 *B*。设 $C(T)$ 是一个交换 *C**-代数，其同伦群如定理 *A* 所述。那么，$\pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 在同伦群 $\pi_2(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 和 $\pi_3(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 上的作用如下所述：给定一个 *3*-余循环 $\omega \in H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z})$、一个同胚 $\Phi \in \mathit{Homeo}(T)$ 和一个线丛$E$，我们有

$$(\omega, \Phi) \curvearrowright E \cong (\Phi^{-1})^*(E),$$

其中$(\Phi^{-1})^*(E)$同构于沿 $\Phi^{-1}$ 的拉回丛。当 $T$ 具有 *CW* 复形的同伦型时（因此 $\mathrm{Pic}(T) \cong H^2(T;\mathbb{Z})$），此作用对应于由 $\Phi^{-1}$ 诱导的 $H^2(T;\mathbb{Z})$ 上的拉回。进一步地，如果我们有一个 3-态射

$f \in C(T)^\times$，我们有

$$(\omega, \Phi) \curvearrowright f = f \circ \Phi^{-1}.$$

这项工作的未来应用涉及量子对称性与 C*-代数之间的相互作用。C*-代数的经典对称性表现为群作用。对 C*-代数上的群作用的研究成果颇丰，例如通过构造交叉积 C*-代数（[22]），或对单纯纯无限 C*-代数上的群作用进行分类（[11]）。从范畴论观点来看，这是因为 C*-代数的 $*$-自同构构成一个 1-范畴。由于 C*-代数自然地位于 2-范畴 $\mathrm{C}^*\mathrm{Alg}$ 中，C*-代数的量子对称性可以通过张量范畴在 C*-代数上的作用来获得；这是一个前景广阔且活跃的研究领域（例如 [16, 1, 8]）。通过在一个 3-范畴中考察交换 C*-代数，我们可以构造由幺半 2-范畴给出的作用，从而获得更高阶的量子对称性。

本文安排如下。第 1 节回顾了广泛的背景知识，涉及 C*-代数和 C*-范畴。第 2 节计算 $C(T)$ 处的同伦群，并证明定理 A。定理 B 在第 3 节中证明。最后，为了计算 $\mathrm{AbC}^*\mathrm{Alg}$ 中的 $\pi_2$，我们需要知道 Serre–Swan 定理是一个幺半等价。由于我们未能找到这一事实的参考文献，因此在附录 A 中给出证明。

**致谢**。 作者谨此感谢 Corey Jones 最初提出这个问题。我们也感谢 David Penneys 和 Nick Gurski，就双模和同伦型进行了许多有益的讨论。作者的部分研究经费由美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2154389。

## 1. 背景

除非另有说明，我们均假设所有 C*-代数都是含幺的。

**定义 1.1.** 一个 C*-代数 $A$ 由以下数据组成。

- 一个（含幺）代数 $A$。我们用小写字母 $a$, $b$, .....表示 $A$ 的元素，用$1 \in A$ 表示其单位元。
- 一个（共轭线性的）对合 $\dagger\colon A \to \overline{A}$，满足 $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$ 且$a^{\dagger\dagger} = a$（注意，我们使用 $\dagger$ 表示对合，而非通常使用的 $*$，以避免与前复合混淆）。
- 在 $A$上定义的完备次乘性范数 $\|\cdot\|$。

我们要求这些数据满足 C*-恒等式：

$$\|a\| = \|a^\dagger a\|^{1/2} \qquad \forall a \in A.$$

我们还回顾 C*-代数中正元素的定义。若存在一个 $b \in A$ 使得 $b^\dagger b = a$，则元素$a \in A$ 称为正（$a \geq 0$）。我们用 $A^+$ 表示正元素的集合。

**1.1. 印迹双模**。我们用 $\langle\cdot|\cdot\rangle$表示在第二个变量上线性的（$A$-值）内积。另一方面，我们用 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$表示在第一个变量上线性的内积。

右内积 C*-模 $X$ 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的向量空间，此外还带有一个与向量空间结构相容的 C*-代数 $A$ 的右作用。此外，还存在一个取值于 $A$的内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$: $X \times X \to A$，满足以下性质：

$$\begin{aligned}\langle x|\alpha y+\beta z\rangle &= \alpha\langle x|y\rangle+\beta\langle x|z\rangle \quad (x,y,z\in X,\alpha,\beta\in\mathbb{C}),\\ \langle x|y\triangleleft a\rangle &= \langle x|y\rangle a \qquad\qquad (x,y\in X,a\in A),\\ \langle y|x\rangle &= \langle x|y\rangle^{\dagger} \qquad\qquad (x,y\in X),\\ \langle x|x\rangle &\geq 0, \qquad \text{and if } \langle x|x\rangle=0, \text{ then } x=0\end{aligned}$$

任何内积 C*-模都可以赋予以下范数:

$$\|x\|_X=\|\langle x|x\rangle\|_A^{1/2}.$$

如果内积 C*-模在此范数下完备，则称其为（右）希尔伯特 $C^*$-模 。左希尔伯特 C*-模的定义类似，只需将 $A$ 在 $X$ 上的模作用改为左模作用，并采用 $A$-值内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$。

注意，$\langle X|X\rangle \coloneqq \operatorname{span}\{\langle x|y\rangle : x,\ y\in X\}$ 是 $A$的一个双边理想。希尔伯特 $A$-模 $X$ 称为满 的，如果 $\langle X|X\rangle$ 是 $A$的稠密理想。下面关于满希尔伯特模的评注将被多次使用。

评注 1.2。 我们注意到，满性蕴含作用是忠实的。事实上，对于$X_A$ 满希尔伯特模，如果对每个 $x\in X$都有 $x\triangleleft a=0$ ,

$$\langle y|x\rangle_A a=\langle y|x\triangleleft a\rangle_A=0.$$

由于这对所有 $x,\ y\in X$都成立，且 $\langle X|X\rangle_A\subseteq A$ 是稠密的，因此有 $a=1_A a=0$。

给定两个右 Hilbert $A$-模 $X$ 和 $Y$，函数 $f\colon X\to Y$称为可伴随的，如果存在另一个函数 $f^\dagger\colon Y\to X$ 满足

$$\langle fx|y\rangle=\langle x|f^\dagger y\rangle \text{ for all } x\in X,\, y\in Y.$$

可伴随函数自动是连续的 $A$-模映射。我们将从 $X$ 到 $Y$的可伴随 $A$-模映射集合记为 $\mathcal{L}_A(X,\ Y)$，或者在 $X=Y$时简记为 $\mathcal{L}_A(X)$。

3-范畴 AbC*Alg 将以 C*-代数双模作为其 2-态射，通常称为 C*-对应。一个 $A$-$B$ 对应 是一个右 Hilbert $B$-模 $X$，连同一个 $*$-同态 $\phi\colon A\to\mathcal{L}_B(X)$。以下定义描述可逆对应。

**定义 1.3**。 一个 $A$-$B$ 对应 $X$ 称为印迹双模 ，如果:

(i) $X$ 是一个满左 Hilbert $A$-模，也是一个满右 Hilbert $B$-模。(ii) 对所有 $x,\ y\in X,\ a\in A$和 $b\in B$，我们有

$$\langle a\triangleright x|y\rangle_B=\langle x|a^\dagger\triangleright y\rangle_B \quad\text{and}\quad {}_A\langle x\triangleleft b,y\rangle={}_A\langle x,y\triangleleft b^\dagger\rangle$$

使得 $A$ 和 $B$ 相对于彼此的内积均作为可伴随算子作用。

(iii) 对所有 $x,y,z\in X$，我们有

$${}_A\langle x,y\rangle\triangleright z=x\triangleleft\langle y|z\rangle_B.$$

印迹双模在 C*-代数上诱导出一种等价关系，类似于代数中的 Morita 等价。

**定义 1.4.** 若存在一个 $A$-$B$ 印迹双模，则称两个 C*-代数 $A$ 和 $B$ 为 *Morita* 等价 。

1.2. **谱与 Dauns–Hofmann.** 现在我们介绍一些关于 C*-代数表示论的背景知识。

**定义 1.5.** C*-代数 $A$ 的表示 是一个 $*$-同态 $\lambda\colon A \to B(\mathcal{H}_\lambda)$，其中 $\mathcal{H}_\lambda$是某个希尔伯特空间。若存在酉（$u^\dagger = u^{-1}$）算子 $u\colon \mathcal{H}_\rho \to \mathcal{H}_\lambda$ 使得

$$\lambda(a) = u\rho(a)u^\dagger$$

对所有 $a \in A$均成立。

不可约表示尤为重要，因为它们构成了更大表示的基本构件。若对所有 $a \in A$ 和 $x \in X$，都有 $\lambda(a)x \in X$，则闭子空间 $X \subseteq \mathcal{H}_\lambda$ 对 $\lambda$ 不变。

**定义 1.6.** 若仅有的闭不变子空间是 $\{0\}$和 $\mathcal{H}_\lambda$，则称表示 $\lambda$ 不可约 。等价地，根据引理 A.1]， $B(\mathcal{H}_\lambda)$中与 $\lambda(A)$对易的算子只有 [18, 的标量倍数。

注 1.7。 对于 $\lambda$ 的不可约表示 $Z$，注意到 $\lambda(Z(A)) \subseteq \mathbb{C}1_{H_\lambda}$，因为 $\lambda(Z(A))$与 $\lambda(A)$可交换。因此，当我们写作 $\lambda|_{Z(A)}$时，也将默认把陪域限制为 $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}1_{\mathcal{H}_\lambda}$。

**定义 1.8**。 C*-代数 $A$ 的谱 $\hat{}A$ 定义为 $A$的不可约表示的酉等价类所组成的集合。

目前，谱只是一个集合；它不带有拓扑。$\hat{}\,A$ 上的拓扑是利用这些不可约表示的核所对应的理想来定义的。

**定义 1.9**。 $A$ 的闭双边理想 $P$ 称为本原的 ，如果 $P$ 是 $A$的某个不可约表示的核。令 $\operatorname{Prim} A$ 表示$A$的本原理想集合。

$\operatorname{Prim} A$ 上的拓扑定义如下。

**定义 1.10**。 给定一个子集 $F \subseteq \operatorname{Prim} A$，定义其闭包 $\overline{F}$ 为集合

$$\overline{F} := \{P \in \operatorname{Prim} A : \bigcap_{I \in F} I \subseteq P\}$$

利用 Kuratowski 闭包公理可以验证，该闭包运算在 $\operatorname{Prim} A$ 上定义了一种称为壳核拓扑的拓扑。由于两个酉等价表示具有相同的核，映射 $[\lambda] \mapsto \ker \lambda$ 是一个定义良好的映射 $\ker\colon A \to \operatorname{Prim} A$。因此，通过核映射从 $\operatorname{Prim} A$ 上的拓扑拉回，便可在谱上赋予一种拓扑。一般而言，这两种拓扑都不是豪斯多夫的。不过，由于我们关注的是含幺 C*-代数，谱和本原理想空间至少是紧的。

**命题 1.11** ([18, 引理 A.30])**.** 设 $A$ 是一个含幺 C*-代数。那么$\hat{}A$ 和$\operatorname{Prim} A$ 都是紧的。

现在我们讨论 Dauns–Hofmann 定理。由于我们只关注含幺情形，因此可以不讨论乘子代数。

**定理 1.12** ([5, 引理 8。15], Dauns–Hofmann)。 设 $A$ 是一个含幺 *C**-代数。则存在一个 $*$-同构 $\mathcal{F}\colon C(\operatorname{Prim} A) \to Z(A)$，使得

$$q_P(\mathcal{F}(f)a) = f(P)q_P(a)$$

对所有 $P \in$ 原始理想空间 $A$ 和 $a \in A$，其中 $q_P\colon \ A \to A/P$ 是商映射。

因此，我们得到如下形式的图。

**推论 1.13 (**参见引理 2.7**)**。 设 $A$ 是一个含幺 *C**-代数。那么存在如下图所示的连续满射：

$$\hat{A} \xrightarrow{\ker} \operatorname{Prim} A \xrightarrow{D\text{–}H} \widehat{Z(A)}.$$

此外，这些映射表明 $\widehat{Z\ A}()$ 是原始理想空间 $A$ˆ和 $A$ [17,引理 1。1]的斯通–切赫紧化。

1.3.**连续迹 C*-代数**。 在讨论连续迹 C*-代数之前，我们需要探讨 Morita 等价与 C*-代数的谱之间的相互作用。

**定理 1.14** ([18, 定理 3.29])。 设 $A$ 和 $B$ 是 *Morita* 等价的 *C**-ˆ ˆ代数。则 $A \cong B$。

**定理 1.15** ([18, 推论 3.33])。 假设 $X$ 是一个 $A$-$B$ 印迹双模。则 $X$ 诱导出一个同胚 $h_X$：原始理想空间 $B \to$ 原始理想空间 $A$，称为 ***Rieffel*** 同胚。映射 $h_X$ 定义如下：对任意 $P \in$ 原始理想空间 $B$,

$$h_X(P) = \overline{\operatorname{span}}\{{}_A\langle x \triangleleft b | y\rangle : x, y \in X, b \in P\}.$$

由于 imprimitivity 双模会在谱和原始理想空间之间诱导同胚，我们可以预期 Dauns–Hofmann 定理可用于理解 $Z(A)$ 和 $Z(B)$ 对 ${}_AX_B$ 的作用。以下命题将对此作出精确说明。

**命题 1.16** ([18, 命题 5.7])。 假设 $X$ 是一个 $A$-$B$ 印迹双模，且 $A$ 和 $B$ 是谱为豪斯多夫空间的含幺 *C**-代数。令$h_X$: 原始理想空间 $B \to$ 原始理想空间 $A$ 为 ***Rieffel*** 同胚，则对所有 $f \in C$(原始理想空间 $A$)和 $x \in X$,

$$\mathcal{F}(f) \triangleright x = x \triangleleft \mathcal{F}(f \circ h_X).$$

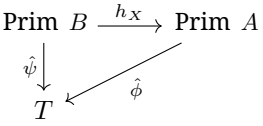
由于 Rieffel 同胚 intertwines 中心作用，我们也可以考虑该同胚为恒等映射的等变双模。

**定义 1.17.** 设 $A$和 $B$是 C*-代数，带有 $*$-同构 $\phi\colon C(T) \to$ˆ ˆ$Z(A)$ 和 $\psi\colon C(T) \to Z(B)$。此外，假设 $A$和 $B$是豪斯多夫的。我们称印迹 $A$-$B$ 双模 $X$ 为关于 $T$ 的印迹双模，如果对所有$f \in C(T)$ 和 $x \in X$,

$$\phi(f) \triangleright x = x \triangleleft \psi(f).$$

**命题 1.18** ([18, 命题 5.7])。在定义 *1.17* 的假设下，$X$ 是 $A$-$B$ 印迹双模（*imprimitivity bimodule*），定义在 $T$ 上，当且仅当下图交换：

[1]通常，这一构造应用于豪斯多夫空间 $X$，通常称为紧化 $\beta X$。然而，在此情形下，ˆ$A$已经是紧的，但不是豪斯多夫的。因此，将这一构造称为ˆ$A$的“豪斯多夫化” $\beta$ˆ$A$ 更为恰当。我们将在后面的章节 §2.1 中进一步讨论这一构造。




现在我们已准备好着手定义连续迹 C*-代数。首先需要描述不可约表示上的迹如何与 $A$中的元素相互作用。

**定义 1.19.** 设 $A$ 是一个 C*-代数，且 $a \in A^+$。我们定义函数 $\mathrm{Tr}_a\colon \hat{} A \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ 为

$$[\lambda] \mapsto \mathrm{Tr}(\lambda(a))$$

其中 Tr 是 $B(\mathcal{H}_\lambda)$ 上的（非归一化）迹。在特殊情形 $a = 1_A$ 下，我们用 $\dim_A$ 代替 $\mathrm{Tr}_{1_A}$，因为单位元的迹可确定该表示的维数。

$\hat{}$ 一般而言，这些函数在 $A$ 上不连续。不过，它们总是下半连续的。

**命题 1.20** ([6, 命题 3.5。9])。 对于任意 C*-代数 $A$，函数$\{\mathrm{Tr}_a : a \in A^+\}$ 在$\hat{}A$上是下半连续的。

连续迹 C*-代数有三种等价定义。我们将采用涉及连续迹元素和 $\mathrm{Tr}_a$ 的定义。

**定义 1.21**。 设 $A$ 是一个谱为豪斯多夫的 C*-代数。若正元素 $a \in A^+$ 满足 $\mathrm{Tr}_a$ 是 $A$上的连续 $\hat{}$ 函数，则称其为连续迹元素。

C*-代数的连续迹元素所张成的空间构成一个双边（不一定闭的）理想 $J$。该理想的闭包决定了一个代数是否具有连续迹。

**定义 1.22**。 若一个（通常不含幺的）C*-代数 $A$ 的谱为豪斯多夫，且由连续迹元素生成的理想 $J$在 $A$中稠密，则称其具有连续迹。

注记 1.23。 注意，对于含幺 C*-代数 $A$， $A$ 具有连续迹，当且仅当 $1_A$ 是连续迹元素。这是因为可逆元素的集合 $A^\times$ 是 $A$的一个开子集，因此当$J = A$时， $J$ 中存在一个可逆元素。此外，注意 $\dim_A$ 取值于 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$。因此， $1_A$ 是连续迹元素，当且仅当 $\dim_A$ 在 $A$的每个连通分支上均为常数。

连续迹 C*-代数中有一类特殊的代数，即齐次 C*-代数。

**定义 1.24**。 若 C*-代数 $A$ 的每个不可约表示的维数都是相同的自然数 $n < \infty$，则称其为齐次的。

齐性 C*-代数自动是连续迹的。当齐性 C*-代数的谱是紧的时，它自动含幺（[9, 定理 3.2]）。这些性质很重要，因为含幺连续迹 C*-代数在其谱的每个连通分支上都是齐性的（见注记 1.23）。现在我们介绍连续迹 C*-代数的 Dixmier–Douady 分类。

**定理 1.25** ([18, 定理 5.29])。 对于每个具有豪斯多夫谱 $T$ 的连续迹 C*-代数 $A$，都有一个与之关联的元素 $\delta(A) \in H^3(T;\mathbb{Z})$，称为 $A$的 *Dixmier–Douady* 类。两个谱为 $T$ 的连续迹 C*-代数当且仅当 $\delta(A) = \delta(B)$时，才在 $T$ 上 *Morita* 等价。

连续迹代数的等价类构成一个群，群运算由以下相对张量积给出。然而，构造这个张量积并不需要连续迹这一假设。关于 C*-代数的最大张量积的背景知识，请读者参阅 [21] 中的附录 T。

**定义 1.26.** 给定含幺 C*-代数 $A$ 和 $B$，以及中心 $*$-同态$\phi$: $C(T) \to Z(A)$ 和 $\psi$: $C(T) \to Z(B)$，记 $A \otimes_T B$为 C*-代数 $(A \otimes_{\max} B)/I_T$，其中 $I_T$是由如下形式的元素生成的平衡理想

$$a\phi(f) \otimes b - a \otimes \psi(f)b \qquad \text{for } a \in A, b \in B, f \in C(T).$$

连续迹 C*-代数由于其谱与 $T$的识别，隐含地具有这样的中心 $*$-同态。这使得连续迹代数的 Morita 等价类群可以定义如下:

**定义 1.27** ([18, 定理 6.3])。 给定一个紧豪斯多夫空间 $T$，定义 $T$ 的 *Brauer* 群，记作 Br($T$)，其元素为（非含幺）连续迹 C*-代数在 $T$ 上的 Morita 等价类，且其谱为 $T$。群运算由 $[A][B] = [A \otimes_T B]$ 给出。单位元是 $[C(T)]$, 和 $[A]^{-1} = [A^{\mathrm{op}}]$。

考虑非含幺连续迹 C*-代数对于 Brauer 群很重要，因为这使得 Dixmier–Douady 类能够成为一个到$H^3(T;\mathbb{Z})$上的满射。限制到含幺连续迹代数时，（含幺）Brauer 群满射到挠子群 $H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z})$（参见引理 2.12）。

**定理 1.28** ([18, 定理 6。3])。 映射 $\delta : Br(T) \to H^3(T;\mathbb{Z})$ 由$[A] \mapsto \delta(A)$ 给出，是一个群同构。

关于连续迹代数的详细论述，请参阅 [18] 。

1.4. **C*-范畴**。 现在我们介绍有关 C*-范畴的必要背景知识。

**定义 1.29**。 C*-范畴 $C$ 由以下数据组成。

- 一个范畴 $C$。对于对象 $X, Y \in C$，我们将相应的同态空间记为 $C(X \to Y)$。我们用小写字母 $f, g, \ldots$ 表示$C(X \to Y)$中的元素，并用反变的 $\circ$ 表示它们的复合。
- 在 $C$上的匕首结构 †。它由共轭线性映射组成
  †: 满足（$f \circ g)^{\dagger} = g^{\dagger} \circ f^{\dagger}$及 $f^{\dagger\dagger} = f$的
  $C$（$X \to Y$）$\to C$（$Y \to X$）。

我们要求伴随结构赋予每个自同态代数 End($X$) :=$C$（$X \to X$）C*-代数结构，并且对于 $f \in C$（$X \to Y$），$f^{\dagger} \circ f$在 End($X$) 中是正的。特别地，每个同态空间 $C$（$X \to Y$）都通过范数赋予巴拿赫空间结构

$$\|f\| := \|f^{\dagger} \circ f\|^{1/2}_{\mathrm{End}(X)} \qquad f \in C(X \to Y).$$

**定义 1.30.** C*-2-范畴 $\mathcal{C}$ 由以下数据组成。

- 一个 2-范畴 $\mathcal{C}$。对于对象 $A, B \in \mathcal{C}$，我们将相应的同态范畴记为 $\mathcal{C}(A \to B)$。对于 $X, Y \in \mathcal{C}(A \Rightarrow B)$，我们将相应的同态空间记为 $\mathcal{C}({}_AX_B \Rightarrow {}_AY_B)$。我们用小写字母 $f, g, \ldots$ 表示 $\mathcal{C}({}_AX_B \Rightarrow {}_AY_B)$ 中的元素。此外，对于这些 2-态射的复合，我们使用反变的 $\circ$；而对于与 1-态射相关的复合，我们使用协变的$\otimes$，即

$$X \in \mathcal{C}(A \to B), \quad Y \in \mathcal{C}(B \to C), \qquad X \otimes Y \in \mathcal{C}(A \to C).$$

- 每个同态范畴 $\mathcal{C}({}_AX_B \Rightarrow {}_AY_B)$ 上的 C*-范畴结构。

我们要求这些数据满足 $(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$，并且与 $\otimes$ 相关联的结合子和单位约束是酉的。

**定义 1.31** ([10])。 C*-3-范畴 $\mathfrak{C}$由以下数据组成。

- 一个代数三范畴 $\mathfrak{C}$。对于对象 $S$，$T \in \mathfrak{C}$，我们将相应的同态 2-范畴记为 $\mathfrak{C}(S \to T)$。对于 $A$，$B \in \mathfrak{C}(S \to T)$，我们将相应的同态 2-范畴记为 $\mathfrak{C}({}_SA_T \Rightarrow {}_SB_T)$。最后，对于$X$，$Y \in \mathfrak{C}({}_SA_T \Rightarrow {}_SA_T)$，我们将相应的同态范畴记为$\mathfrak{C}({}_AX_B \Rrightarrow {}_AY_B)$。我们将使用小写字母 $f$，$g$，..... 表示 $\mathfrak{C}({}_AX_B \Rrightarrow {}_AY_B)$ 的元素。此外，对于这些 3-态射的复合，我们将使用反变的 $\circ$；而对于与 2-态射和 1-态射相关的复合，我们分别使用协变的 $\otimes$和 $\boxtimes$。

- 每个 2-范畴 $\mathfrak{C}(S \to T)$ 上的 C*-2-范畴结构。

我们要求这些数据满足 $(f \boxtimes g)^\dagger = f^\dagger \boxtimes g^\dagger$，且与 $\boxtimes$ 相关联的高阶相干同构均为酉同构。

本文聚焦于 C节 [10] 中所见的以下 C*-3-范畴示例（其中记为 CHaus）。

**定义 1.32.** 存在一个 C*-3-范畴 AbC*Alg，由以下部分构成:

(0) AbC*Alg 中的对象是交换 C*-代数 $C(T)$，其中 $T$ 是一个紧豪斯多夫空间。我们通常会在记号中交替使用 $C(T)$ 和 $T$。 (1) AbC*Alg$(S \to T)$ 中的 1-态射 $A \in$ 是一个含幺（通常非交换的）C*-代数 $A$，并配备中心映射 $C(S) \xrightarrow{\phi} Z(A) \xleftarrow{\psi} C(T)$。当源与靶 $C(S)$ 和 $C(T)$ 明确时，我们通常将这些数据记作 ${}_\phi A_\psi$。 (2) AbC*Alg$({}_SA_T \Rightarrow {}_SB_T)$ 中的 2-态射 $X \in$ 是一个 C*-对应 ${}_AX_B$，它与 $C(S)$ 和 $C(T)$ 到 $A$ 和 $B$ 中的中心嵌入相容。 (3) AbC* Alg$({}_AX_B \Rrightarrow {}_AY_B)$ 中的 3-态射 $f \in$ 是一个可伴随 $A$-$B$ 双模映射 $f\colon X \to Y$。 ($\boxtimes$) AbC*Alg$(S \to T)$ 和 AbC*Alg$(T \to U)$ 之间 1- 态射的复合 ${}_\phi A_\psi \in$ 由相对最大张量积 $A \otimes_T B$ （定义 1.26）决定，该张量积是以下图表的推出:

$$\begin{array}{ccc} C(T) & \xrightarrow{\psi \otimes 1_B} & A \otimes_{\max} B \\ {\scriptstyle 1_A \otimes \mu}\downarrow & & \downarrow \\ A \otimes_{\max} B & \dashrightarrow & A \otimes_T B \end{array}$$

($\otimes$) 类似地，2-态射层级上的复合 ${}_AX_B$，${}_BY_C$ 由相对最大张量积 ${}_AX \otimes_B Y_C$ 给出。

(∘) 3-态射层级上的复合 $f$，$g$ 仅由函数复合 $g \circ f$ 给出。(†) 可伴双模映射 $f$ 的伴随 ${}_AX_B \to {}_AY_B$，即为其伴随映射 $f^\dagger\colon {}_AY_B \to {}_AX_B$。

将 AbC*Alg 提升为 C*-3-范畴所需的约束数据，是由相对最大张量积的泛性质所导出的映射诱导的。感兴趣的读者可参阅 [10]，了解其余细节。

注记 1.33。我们注意到，若 $X\colon A \Rightarrow B$ 是 AbC*Alg 中的可逆二态射，那么根据 [7] 中的引理 2.4，$X$ 实际上是一个 $A$-$B$ imprimitivity 双模（其逆元也是如此）。

现在我们给出 3-范畴中同伦群的定义。

**定义 1.34**。设 $\mathfrak{C}$ 为一个 3-范畴，$T$ 为 $\mathfrak{C}$ 中的一个对象。

(i) $\pi_0(\mathfrak{C})$ 定义为 $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ 关于由 1-、2-和 3-态射所诱导的等价关系取商后的集合。(ii) $\pi_1(\mathfrak{C}, T)$ 是由可逆 1-态射 $T \to T$ 按照由 2-和 3-态射所诱导的等价关系取商后构成的群。(iii) $\pi_2(\mathfrak{C}, T)$ 是由可逆 2-态射 $\mathrm{id}_T \Rightarrow \mathrm{id}_T$ 按照 3-同构取商后构成的群。(iv) $\pi_3(\mathfrak{C}, T)$ 是可逆 3-态射 $\mathrm{id}_{\mathrm{id}_T} \Rrightarrow \mathrm{id}^{\mathrm{id}_T}$ 构成的群。

我们将把 $\pi_1$ 对 $\pi_2$ 和 $\pi_3$ 的作用的定义留到第 3 节。

1.5. **阿贝尔 C*-代数的对偶性**。这里我们回顾交换 C*-代数与拓扑之间重要的范畴等价。

**定理 1.35**（盖尔范德对偶）。存在一个范畴等价

$$\mathsf{CHaus}^{op} \to \mathsf{AbC^*Alg_1}$$

从紧豪斯多夫空间及连续映射所成范畴的对偶范畴，到含幺、阿贝尔 C*-代数及含幺 $*$-同态所成的范畴。

此等价通过以下方式给出：将紧豪斯多夫空间 $T$ 映到 C*-代数 $C(T)$，并将连续映射 $\Phi\colon T \to S$ 映到由与 $\Phi$ 前复合给出的 $*$-同态 $\Phi^*\colon C(S) \to C(T)$。在本文中，我们用 $\Phi^*$ 表示此等价所给出的 $*$-同态。反过来，给定一个含幺 $*$-同态 $\phi\colon C(T) \to C(S)$，我们用 $\phi\colon S \to T$ 表示它在此等价下的原像。

Serre–Swan 定理将交换 C*-代数上的模与其底层拓扑空间上的向量丛联系起来。下面简要回顾复向量丛的定义。

**定义 1.36.** 紧豪斯多夫空间 $T$ 上的复向量丛是一个拓扑空间 $E$（全空间），连同一个连续满射 $p\colon E \to T$，使得对所有 $t \in T$，纤维 $p^{-1}(\{t\})$ 都是向量空间。此外，要求向量丛 $E$ 按以下意义局部平凡：对于每个 $t \in T$，存在一个包含 $t$ 的开集 $U \subseteq T$，使得 $p^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{C}^k$（其中 $k$）。此同构在 $U$ 上必须是恒等映射（保持 $p$），并且限制在 $p^{-1}(U)$ 的纤维上时是线性同构。

由于我们希望从向量丛得到希尔伯特 C*-模，而不是仅仅得到 $C(T)$-模，因此向量丛需要配备厄米度量。

**定义 1.37.** $E$ 上的厄米度量 是一个连续函数 $\langle\cdot|\cdot\rangle_E\colon E\otimes E\to\mathbb{C}$，它在每个纤维 $\overline{p^{-1}}(\{t\})\times p^{-1}(\{t\})$上限制为一个内积。

通过考察向量丛的连续截面，可以得到一个模。

**定义 1.38.** 向量丛 $E$ 在 $T$ 上的（整体）连续截面 是一个连续函数 $f\colon T\to E$，满足 $p\circ f=\mathrm{id}_T$。所有连续截面的集合记作 $\Gamma(E)$。显然，利用各纤维上的向量空间结构，通过逐点乘法可将其视为 $C(T)$上的一个模。

现在，我们已经具备陈述交换 C*-代数的 Serre–Swan 定理所需的全部背景知识。

**定理 1.39** ([20])。 存在一个 *C**-范畴的等价

$$\mathsf{Hilb}_{\mathsf{fd}}(T)\to\mathsf{Hilb}_{\mathsf{fgp}}C(T)$$

从 $T$ 上有限秩拓扑厄米向量丛的范畴到有限生成投射 *Hilbert* $C(T)$-模的范畴。

该等价可通过将向量丛 $E$ 发送到其连续整体截面空间 $\Gamma(E)$ 来体现。 $C(T)$-值内积定义为

$$\langle f|g\rangle_{C(T)}(t)=\langle f(t)|g(t)\rangle_E$$

对于厄米度量 $\langle\cdot|\cdot\rangle_E$。向量丛映射 $\tau\colon E\to F$ 被发送到映射 $\Gamma(\tau)\colon\Gamma(E)\to\Gamma(F)$，其定义为 $\Gamma(\tau)(f)=\tau\circ f$，对所有 $f\in\Gamma(E)$ 均成立。

专家们都知道，Swan 定理实际上是幺半范畴之间的幺半等价（向量丛采用通常的张量积，模采用相对张量积）。这一事实将在第 2.2 小节中用到。由于我们未能找到相关参考文献，现于附录 A 给出证明。

当 $T$ 具有 CW 复形的同伦型时，我们也会关注这种情形，因为线丛的同构类由 $H^2(T;\mathbb{Z})$ 中的一个余循环确定。我们用 $\mathrm{Pic}(T)$ 表示 $T$ 上（复）线丛的同构类群。

**命题 1.40** ([14, 命题 3.10])。 当 $T$ 具有 *CW* 复形的同伦型时，复线丛 $E$ 的同构类由其第一陈类 $c_1(E)$ 在 $H^2(T;\mathbb{Z})$中决定。映射 $E\mapsto c_1(E)$ 是从 $\mathrm{Pic}(T)\to H^2(T;\mathbb{Z})$的群同构。

## 2. 计算 AbC Computing the homotopy groups ofAlg 的同伦群

本节中，我们将计算 AbC*Alg 中的同伦群。使用 $*$-同构而非可逆双模，有些论证会更容易理解。以下引理说明，在 AbC*Alg 中可以用适当的 $*$-同构代替 2-态射。

**引理 2.1.** 设 ${}_\phi A_\psi$ 和 ${}_\mu B_\nu$ 是从 $C(T)\to C(S)$出发的 1-态射。假设存在一个 $*$-同构 $\tau\colon A\to B$，使得 $\tau\circ\phi=\mu$ 和 $\tau\circ\psi=\nu$成立。则 $\tau$在2-同构 $A\Rightarrow B$ 中定义了 AbC*Alg。

证明。 考虑双模 ${}_AB_B$，其带有通常的 $B$-作用 ($b_1 \triangleleft b_2 = b_1 b_2$) 和取值于$B$的内积 ($\langle b_1 | b_2 \rangle = b_1^\dagger b_2$)，以及由 $A$ 给出的左作用

$$a \triangleright b = \tau(a) b.$$

容易验证， ${}_AB_B$ 是一个 $A$-$B$ 印迹双模，其内积取值于 $A$

$$\langle b_1, b_2 \rangle = \tau^{-1}(b_1 b_2^\dagger).$$

要证明 ${}_AB_B$ 是 AbC*Alg 中的一个 2-态射（因而是一个 2-等价），注意到对于 $f \in C(T)$和 $b \in B$，我们有

$$\phi(f) \triangleright b = (\tau \circ \phi)(f) b = \mu(f) b = b \triangleleft \mu(f).$$

类似地，我们看到 $S$ 上的连续函数左作用和右作用一致，因此 ${}_AB_B$ 是 AbC*Alg 中的一个 2-等价。□

注记 2.2. 一般而言，我们不能用 $*$-同构来代替 2-等价。例如， $M_2(\mathbb{C})$和 $\mathbb{C}$ 并非同构的 C*-代数，但它们 Morita 等价，因此在 AbC*Alg 中给出等价的 1-态射（假设中心映射的选取恰当）。

我们的首要目标是构造 $\pi_1$(AbC*Alg $C(T)$)。这可以分为两部分：描述中心 $*$-同态$\phi$, $\psi$: $C(T) \to Z(A)$的结构，以及 $A$的 C*-代数结构。在接下来的小节中，我们将致力于理解中心 $*$-同态。与此同时，我们还将得到对 $\pi_0$(AbC*Alg)的刻画。

### 2.1. 关于 $\pi_0$ 和 $\pi_1$的结果。

证明中心 $*$-同态实际上是 $*$-同构，要利用 imprimitivity 双模上作用的忠实性。

**引理 2.3**。 若 ${}_\phi A_\psi$ 是一个1-同构 $C(T) \to C(S)$，则 $\phi$: $C(T) \to Z(A)$和 $\psi$: $C(S) \to Z(A)$ 都是 $*$- 同构。特别地， $T \cong S$。

证明。 先考虑 $T = S$ 且存在一个 1-态射 ${}_\eta C_\kappa$，它通过 2-同构 ${}_C X_{C(T)}$ 与 ${}_{\mathrm{id}} C(T)_{\mathrm{id}}$ 等价的情形。根据注 1.33， ${}_C X_{C(T)}$ 是一个 imprimitivity 双模。由于 ${}_C X_{C(T)}$ 作为左希尔伯特模是满的，根据注 1.2， $C$ 的左作用是忠实的。

我们首先证明 $\eta$ 是到 $Z(C)$上的 $*$-同构。先证明单射性。设 $f \in C(T)$ 满足 $\eta(f) = 0$。对于 $x \in X$，我们有 $x \triangleleft f = \eta(f) \triangleright x = 0$，因为 ${}_C X_{C(T)}$是一个 2-态射。由于 $C(T)$ 的右作用是忠实的，我们得出 $f = 0$，因此 $\eta$ 是单射。为证明满射性，设 $c \in Z(C)$。于是我们可以找到一个函数 $g \in C(\mathrm{Prim}(C))$，使得 $\mathcal{F}(g) = c$，其中 $\mathcal{F}$: $C(\mathrm{Prim}(C)) \to Z(C)$ 是由 Dauns–Hofmann 定理（定理 1.12）给出的同构。由于 ${}_C X_{C(T)}$ 是一个印迹双模，它诱导出一个 Rieffel 同胚 $h_X$: $T \to \mathrm{Prim}(C)$。于是，对所有 $x \in X$,

$$c \triangleright x = \mathcal{F}(g) \triangleright x = x \triangleleft (g \circ h_X) = \eta(g \circ h_X) \triangleright x$$

由命题 1.16 得出，其中我们将 Dauns–Hofmann 同构 $\mathcal{F}$ 视为 $C(T)$ 上的恒等映射。由于左侧的 $C$ 作用是忠实的，我们得出 $c = \eta(g \circ h_X)$，因此 $\eta$是一个从 $C(T)$ 到 $Z(C)$ 的同构。类似的论证表明，$\kappa$: $C(T)$ 到 $Z(C)$ 也是一个同构。

对于一般情形，设 ${}_{\mu}B_{\nu}$ 是 ${}_{\phi}A_{\psi}$的逆元。将上述论证应用于 1-态射 ${}_{\eta}C_{\kappa} = {}_{\phi}(A \otimes_S B)_{\nu}$，可证明 $\phi \otimes 1_B$ 是到 $Z(A \otimes_S B)$ 上的一个 $*$-同构。然而，

$$\phi(C(T)) \otimes_S 1_B \subseteq Z(A) \otimes_S 1_B \subseteq Z(A \otimes_S B)$$

由此我们得出，$\phi$ 是一个 $*$同构 $C(T) \to Z(A)$，因为

$$Z(A) \cong Z(A) \otimes_S C(S) \cong Z(A) \otimes_S 1_B \subseteq Z(A \otimes_S B)$$

同样，将此论证应用于${}_{\mu}(B \otimes_T A)_{\psi}$ 可证明，$\psi\colon C(S) \to Z(A)$是一个 $*$同构。由此可见，$\psi^{-1} \circ \phi\colon C(T) \to C(S)$是一个 $*$同构，由盖尔范德对偶可得 $T \cong S$。□

$\pi_0$ 的刻画可由前述引理立即得出。

**定理 2.4.** AbC*Alg 中对象的等价类集合由下式给出

$$\pi_0(\mathsf{AbC^*Alg}) = \pi_0(\mathsf{CHaus}) = \{compact\ Hausdorff\ spaces\}/homeomorphism.$$

现在我们继续分析 $*$-同构，这些同构作用于元素$\pi_1$(AbC*Alg $C(T)$)。我们将经常使用下面这个关于 1-态射中心的引理。它还揭示了 $\pi_1$(AbC*Alg $C(T)$) 的半直积分解。

**命题 2.5.** 设 $T$ 为紧豪斯多夫空间，${}_{\phi}A_{\psi}$ 为 $C(T)$的一个1-自同构。则 ${}_{\phi}A_{\psi} \cong {}_{\phi}Z(A)_{\psi} \otimes_T {}_{\psi}A_{\psi} \cong {}_{\psi^{-1}\circ\phi}C(T)_{\mathrm{id}} \otimes_T {}_{\psi}A_{\psi}$。当 $A = C(T)$时，我们有 ${}_{\phi}C(T)_{\psi} \cong {}_{\psi^{-1}\circ\phi}C(T)_{\mathrm{id}}$。

证明。容易验证，${}_{\phi}A_{\psi}$ 与 ${}_{\phi}Z(A)_{\psi} \otimes_T {}_{\psi}A_{\psi}$ 通过映射 $a \mapsto 1 \otimes_T a$作为 C*-代数同构。显然，这个 $*$-同构保持中心映射 $\phi$ 和 $\psi$。因此，根据引理 2.1，它们是 AbC*Alg 中等价的 1-态射。现在考虑 $*$-同构 $\psi\colon {}_{\psi^{-1}\circ\phi}C(T)_{\mathrm{id}} \to {}_{\phi}Z(A)_{\psi}$，可见这是另一个保持中心映射 $\psi$（分别为 $\phi$）以及 id（分别为 $\psi^{-1} \circ \phi$）的 C*-代数同构。再次由引理 2.1 可知，它们是 AbC*Alg 中等价的 1-态射。当 $A = C(T)$ 时，特殊情形立即成立。□

当 $A = C(T)$ 时，我们看到中心的 $*$-同态可以移到 1-态射的一侧。这使我们能够构造一个从同胚群$(T)$到 $\pi_1$(AbC*Alg $C(T)$)的映射。下面的命题描述这些态射如何复合，并证明它们构成一个子群。

命题 *2.6*（同胚映射的算术）。设 $T$ 是一个紧 *Haus- dorff* 空间，且 $\phi$ 和 $\psi$ 是 $C(T)$的自同构。那么，*1*-自同构${}_{\phi}C(T)_{\mathrm{id}} \otimes_T {}_{\psi}C(T)_{\mathrm{id}}$和 ${}_{\psi\phi}C(T)_{\mathrm{id}}$ 是等价的。此外，${}_{\phi}C(T)_{\mathrm{id}}$和${}_{\psi}C(T)_{\mathrm{id}}$ 等价，当且仅当 $\phi = \psi$。因此，由 $\Phi \mapsto {}_{\Phi^*}C(T)_{\mathrm{id}}$ 给出的映射 $\Pi$: 同胚群 $(T) \to \pi_1(AbC^*Alg\ C(T))$ 是一个单射群同态。

证明。定义一个 $*$-同构 $\rho\colon {}_{\phi}C(T)_{\mathrm{id}} \otimes_T {}_{\psi}C(T)_{\mathrm{id}} \to {}_{\psi\circ\phi}C(T)_{\mathrm{id}}$，其定义如下：

$$f \otimes_T g \mapsto \psi(f)g.$$

注意，这与中心映射相容，即 $\rho\circ(\phi\otimes_T 1) = \psi\circ\phi$ 且 $\rho\circ(1\otimes_T \mathrm{id}) = \mathrm{id}$。因此，根据引理 2.1，这些是 AbC*Alg 中等价的 1-态射。

现在，假设 ${}_{\phi}C(T)_{\mathrm{id}}$ 和 ${}_{\psi}C(T)_{\mathrm{id}}$ 等价；也就是说，存在一个 $C(T)$-$C(T)$ 印迹双模 $X$，满足以下性质

$$\textbf{(a):}\ \phi(f)\triangleright x = x\triangleleft\psi(f)\ \text{and}\ \textbf{(b):}\ \mathrm{id}(f)\triangleright x = x\triangleleft\mathrm{id}(f)$$

对所有 $x\in X$ 和 $f\in C(T)$ 都成立。特别地，

$$\phi(f)\triangleright x \overset{\textbf{(a)}}{=} x\triangleleft\psi(f) \overset{\textbf{(b)}}{=} \psi(f)\triangleright x.$$

由于这对所有 $x\in X$ 都成立，且 $X$ 是满的，因此可得 $\phi(f)=\psi(f)$，由此我们得出 $\phi=\psi$。

为证明 $\Pi$ 是从 Homeo(T) 到 $\pi_1$(AbC*Alg $C(T)$) 的群同态，令 $\Phi$ 和 $\Psi$ 属于 Homeo(T)。那么

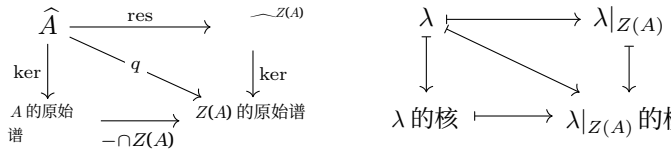
$$\begin{aligned}\Pi(\Phi)\otimes_T\Pi(\Psi) &= {}_{\Phi^*}C(T)_{\mathrm{id}}\otimes_T{}_{\Psi^*}C(T)_{\mathrm{id}}\\ &\cong {}_{\Psi^*\circ\Phi^*}C(T)_{\mathrm{id}}\\ &= {}_{(\Phi\circ\Psi)^*}C(T)_{\mathrm{id}}\\ &= \Pi(\Phi\circ\Psi).\end{aligned}$$

我们得出 $\Pi$ 是单射群同态。 □

在充分掌握中心 $*$-同态之后，我们现在构造谱之间的对应关系。由于我们有从 $C(T)$ 到 $\hat{}Z(A)$ 的映射，而非从 $T$ 到 $A$ 的映射，因此需要从形式上理解 $\hat{}A$ 与 $Z(A)$ 之间的联系。下述结果众所周知，但我们需要在当前情形下对限制映射作出明确描述。

**引理 2.7.** 设 $\lambda\in\hat{}A$。那么，$*$-同态 $\lambda|_{Z(A)}:\ Z(A)\to\mathbb{C}$ 属于 $\widehat{\ }$ $\hat{}\widehat{Z(A)}$，而由res: $A\to Z(A)$ 给出的映射 $\lambda\mapsto\lambda|_{Z(A)}$ 是连续满射。$\hat{}$当且仅当 $A$ 是豪斯多夫空间时，该映射才是单射。

证明。 根据 [17]中的引理 1.1， $\lambda|_{Z(A)}$ 属于 $Z(A)$。此外，映射 ker($\lambda$) $\mapsto$ker($\lambda|_{Z(A)}$) 是从 Prim $A$ 到 Prim $Z(A)$ 的连续映射，且像稠密。由于$A$ 含幺，根据命题 1.11，Prim $A$ 是紧空间，因此该映射实际上是满射。$\hat{}$ 因此， $\lambda\mapsto$ ker($\lambda|_{Z(A)}$) 是一个将 $A$ 映到 Prim $Z(A)$ 的连续满射 $q$。由于 $Z(A)$ 是阿贝尔的，ker : $\widehat{Z\ A}$( ) $\to$Prim $Z(A)$ 是一个同胚，因此 ker$^{-1}\circ q$: $\hat{}A\to\widehat{Z\ A}$( ) 是连续满射，尤其是 (ker$^{-1}\circ q$)($\lambda$) $=\lambda|_{Z(A)}$。上述论证总结在以下图表中。




如果限制映射是单射，那么它就是从一个紧空间到豪斯多夫空间的连续双射，因此是一个同胚，由此可得 $A$ 是豪斯多夫的。反过来，如果 $A$ 是豪斯多夫的，那么 ker: $A\to$Prim $A$ 必定是单射，因为 $A$ 上的拓扑是从 Prim $A$上的拓扑拉回的。$\hat{}$但是，ker: $A\to$Prim $A$ 是一个同胚，因此 Prim $A$ 是豪斯多夫的。因此，由于 Prim $A$ 也是紧的，根据 [17]的定理 2.2，映射 $-\cap Z(A)$ 是一个同胚。由此可得 res 是一个同胚，特别地，它是单射的。□

一个 1-态射与其逆元复合后将与 $C(T)$ Morita 等价，因此关于这一复合的结构可以说很多。特别是，相对张量积 $A \otimes_T A^{-1}$ 的谱将与 $T$同胚。ˆ 我们希望利用这一事实构造 $A$ 与 $T$之间的同胚。作为第一步，下面的评注将 $A$ 的谱与 $A \otimes_T A^{-1}$的谱联系起来。

注 2.8. 设 ${}_{\phi}A_{\psi}$ 和 ${}_{\mu}B_{\nu}$ 是 $C(T)$ 的两个 1-自同构。注意，满足 $\lambda|_{Z(A)} \circ \psi = \rho|_{Z(B)} \circ \mu$ 的数对 $(\lambda, \rho) \subset A \times B$ 位于 $A \otimes_T B$ 的谱中。事实上，通过将 $(\lambda, \rho) \mapsto \lambda \otimes \rho$ 映射过去，我们可以得到 $A \times B$ 到 $A \otimes_{\max} B$ 的谱中的一个包含（根据 [18, 定理 B.45],，此映射是到 $A \otimes_{\min} B$ 的谱中其像上的同胚，且 $A \otimes_{\max} B$ 满射到 $A \otimes_{\min} B$ ）。由此可见，满足 $\lambda|_{Z(A)} \circ \psi = \rho|_{Z(B)} \circ \mu$ 的表示 $\lambda \otimes \rho$ 恰好是这类在平衡理想 $I_T$ 上限制为 0 的表示，因此属于 $A \otimes_T B$ 的谱。

确立了上述关系之后，我们现在可以着手构造所需的同胚 $A \to T$。作为中间步骤，我们将证明谱是豪斯多夫的，这随后将使我们能够应用引理 2.7。

ˆ**引理 2.9**。 假设 ${}_{\phi}A_{\psi}$ 是一个 1-自同构。那么谱 $A$ 是豪斯多夫的。

证明。由引理 2.7，只需证明限制映射 $[\lambda] \mapsto [\lambda|_{Z(A)}]$ 是单射。令 ${}_{\mu}B_{\nu}$ 为 $({}_{\phi}A_{\psi})^{-1}$，于是 ${}_{\phi}(A \otimes_T B)_{\nu}$ 与 $\mathrm{id}_{C(T)\text{-}\mathrm{id}}$ Morita 等价。ˆ 为证明其为单射，我们考虑 $A$ 中的两个表示 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ ，并假设 $\mathrm{res}(\lambda_1) = \mathrm{res}(\lambda_2)$；也就是说， $\lambda_1|_{Z(A)}$ 与 $\lambda_2|_{Z(A)}$ 酉等价。由于 $Z(A)$ 是交换 C*-代数，当且仅当它们作为映射取值于 $\mathbb{C}$ 时有 $\lambda_1|_{Z(A)} = \lambda_2|_{Z(A)}$，上述结论才成立。由引理 2.3， $Z(B) \cong C(T)$，因此我们可以选择 $\rho \in \widehat{B}$ ，使得由引理 2.7 有$\rho|_{Z(B)} = \lambda_1|_{Z(A)} \circ (\psi \circ \mu^{-1}) \in \widehat{Z(B)}$。由注 2.8，对于 $i = 1$，我们可知 $\lambda_i \otimes \rho$ 是 $A \otimes_T B$ 的一个$\widehat{\phantom{xx}}$元素。此外，我们断言 $\lambda_1 \otimes_T \rho$ 和$\lambda_2 \otimes_T \rho$ 是酉等价的不可约表示。因为，由于 ${}_{\phi}(A \otimes_T B)_{\nu}$ 与 $C(T)$ Morita 等价，${}_{\phi}(A \otimes_T B)_{\nu}$ 的谱与$T$ 同胚，特别地，根据定理 1.14，它是豪斯多夫的。于是由引理 2.7，限制映射是一个同胚。由于 $\lambda_i \otimes_T \rho$ 的限制相等，因此它们酉等价。然而，这就意味着 $\lambda_1 \otimes_T \rho(1_B)$ 与 $\lambda_2 \otimes_T \rho(1_B)$ 酉等价，进而由ˆ [18, 引理 B.47]可得 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 酉等价。我们得出 $[\lambda_1] = [\lambda_2]$ 属于 $A$，因此限制映射是单射。□

ˆ 我们现在从中心的 $*$-同构构造同胚 $A \to T$。

**命题 2.10.** 若 ${}_{\phi}A_{\psi}$ 是 $C(T)$的一个 *1*-自同构，则ˆ$A \cong T$。特别是ˆˆ ˆ ˆ ˆ， $\phi$, $\psi$: $A \to T$由 $\phi(\lambda) = \lambda|_{Z(A)} \circ \phi$和 $\psi(\lambda) = \lambda|_{Z(A)} \circ \psi$给出的映射是同胚。

ˆˆ$\widehat{\phantom{xx}}$证明。 根据引理 2.9， $A$ 是豪斯多夫的，因此由引理 2.7 可知 $A \cong Z(A)$。另一方面，ˆ$\widehat{\phantom{xx}}$根据引理 2.3， $Z(A) \cong C(T)$，所以我们得出 $A \cong Z(A) \cong T$。为了更明确地描述这些同构，回想一下，从 $\widehat{A} \to \widehat{Z(A)}$ 出发的映射是通过将 $\lambda \mapsto \lambda|_{Z(A)}$ 映至.....给出的。此外，我们将 $Z(A)$ 识别为 $C(T)$ 的方式

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由 $\phi$ 给出，因此识别 $Z(A) \to C(T) = T$ 的方式由 $\rho \mapsto \rho \circ \phi$ 给出。$\hat{}$ 复合这些映射得到映射 $\lambda \mapsto \lambda|_{Z(A)} \circ \phi$，即映射 $\phi$。通过类似的论证，$\hat{}$ $\psi$ 也是一个同胚。□

既已证明每个态射 ${}_{\phi}A_{\psi}$ in $\pi_1$(AbC*Alg $C(T)$) 的谱都是 $\hat{}A \cong T$，现在可以证明 C*-代数 $A$ 具有连续迹。

**定理 2.11**。若 ${}_{\phi}A_{\psi}$ 是 $C(T)$ 的 1-自同构，则 $A$ 是 $T$ 上的连续迹代数。

$\hat{}$证明。由命题 2.10 可知 $A \cong T$。于是，若 ${}_{\mu}B_{\nu}$ 是 ${}_{\phi}A_{\psi}$ 的逆元，我们特别知道 $A \otimes_T B$ 与 $C(T)$ Morita 等价。因此，根据 [18] 的命题 5.15，$A \otimes_T B$ 是连续迹 C*-代数。现在，定义集合

$$\Delta := \{\lambda \otimes \rho : (\lambda, \rho) \in \hat{A} \times \hat{B}, \lambda \circ \psi = \rho \circ \mu\}.$$

于是，映射 $\mathrm{Tr}_{1_A \otimes 1_B}$ 在 $\widehat{A \otimes_T B}$ 上限制为 $\Delta$ 上的连续函数。定义 $\gamma$: $\hat{}A \to \hat{}B$，使得 $\gamma = \hat{}\mu^{-1} \circ \hat{}\psi$。注意，$\lambda \mapsto (\lambda \otimes \gamma(\lambda))$ 是 $\hat{}A \cong \Delta$ 的同胚。由于 $A \otimes_T B$ 含幺，由注记 1.23 可知，这意味着 $1_A \otimes_T 1_B$ 是一个连续迹$\widehat{\ }$元素。因此，$\dim_{A \otimes_T B}$ 在 $A \otimes_T B$ 上连续，并且其取值在 $\mathbb{N}$ 中均为有限值。重要的是，由于 $\dim_{A \otimes_T B} = \dim_A \cdot \dim_B$，我们得出 $\dim_A$ 和 $\dim_B$ 的取值均为有限值。因此，

$$\dim_A(\lambda) = \frac{\dim_A(\lambda)\dim_B(\gamma(\lambda))}{\dim_B(\gamma(\lambda))} = \underbrace{\dim_{A \otimes_T B}(\lambda \otimes_T \gamma(\lambda))}_{\text{continuous}} \underbrace{\dim_B(\gamma(\lambda))^{-1}}_{\text{upper semicontinuous}}$$

其中 $[\lambda] \mapsto \dim_B(\gamma(\lambda))^{-1}$ 的上半连续性源于这样一个事实：根据定理 1.20，$\dim_B$ 是下半连续且非零的。因此，$\dim_A$ 是两个正的上半连续函数的乘积，故为上半连续函数。然而，它总是下半连续的（同样根据定理 1.20），所以我们得出结论：$\dim_A$ 是连续的。这意味着 $1_A$ 是 $A$ 的连续迹元素，因此根据注记 1.23，$A$ 具有连续迹。□

现在我们希望构造一个从 $H^3_{\mathrm{tor}}(T; \mathbb{Z})$ 到 $\pi_1$(AbC*Alg $T$) 的群同态。构造该映射时必须格外谨慎，因为我们的 1-态射是利用含幺 C*-代数构造的。

**引理 2.12.** 若 ${}_{\phi}A_{\phi}$ 是 $C(T)$ 的可逆 1-态射，则其 *Dixmier– Douady* 类 $\delta(A)$ 属于 $H^3_{\mathrm{tor}}(T; \mathbb{Z})$。反过来，给定任意 $\delta \in H^3_{\mathrm{tor}}(T; \mathbb{Z})$，存在一个 $C(T)$ 的 1-态射 ${}_{\psi}B_{\psi}$，使得 $\delta(B) = \delta$。

证明。我们先证明，Dixmier–Douady 不变量是 $H^3(T; \mathbb{Z})$ 中的一个挠元。给定一个紧豪斯多夫空间 $T$，我们可以将 $T$ 写成若干连通分支 $T_i$ 的不交并 $T = \sqcup_{i=1}^n T_i$（这些连通分支的数量有限，因为 $T$ 是紧的）。因此，由于定理 2.11 表明 ${}_{\phi}A_{\phi}$ 中的 C*-代数 $A$ 是定义在 $T$ 上的含幺连续迹代数，我们可以将 $A$ 写成直和

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} \phi(\chi_{T_i})A.$$

注意，$A_i := \phi(\chi_{T_i})A$ 是以 $T_i$ 为底空间的连续迹 C*-代数。由于 $T_i$是连通的，函数 $\dim_{A_i}$ 必为常数，因此 $A_i$ 是一个齐性 C*-代数。因此，根据 [2], 的定理 IV.1.7.23, Dixmier–Douady 类 $\delta(A_i)$

必为 $H^3(T_i;\mathbb{Z})$ 中的一个挠元。由于上同调保持直和，$\delta(A) = \sum_{i=1}^{n} \delta(A_i)$ 也必为 $H^3(T;\mathbb{Z})$ 中的一个挠元。

反过来，给定一个挠元 $\delta \in H^3(T;\mathbb{Z})$，根据 [13, 推论 1.5 和 1.7]（参见 [2, 定理 IV.1.7.24]），存在一个齐性 C*-代数 $B$，其谱可识别为 $T$，且其 Dixmier–Douady 类为 $\delta(B) = \delta$。ˆ 通过 Dauns–Hofmann 定理（定理 1.12），这一将 $T$识别为 $B$的对应关系给出了一个 $*$-同构 $\psi\colon C(T) \to Z(B)$。此外，根据 [9]的定理 3.2，$B$ 是一个含幺 C*-代数。因此，${}_{\psi}B_{\psi}$ 定义了一个可逆的 1-态射$C(T) \to C(T)$，满足 $\delta(B) = \delta$。□

ˆ 由于 Dixmier–Douady 分类假定只有一个识别，而我们的 1-态射有两个这样的识别，因此我们需要确保具有相同中心映射的态射确实构成 $\pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 的一个子群。证明的第一部分对于证明我们在定理 2.14 中构造的分裂正合列的正合性也很重要。

**引理 2.13.** 形如 ${}_{\phi}A_{\phi}$ 的1-态射的等价类集合是 $\pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}\ T)$的一个子群。

证明. 我们首先证明，这种形式的等价类只包含满足两个 $*$-同态 $C(T)$ 和 $\to Z(B)$ 相等的元素。设 ${}_{\phi}A_{\phi}$ 和 ${}_{\mu}B_{\nu}$ 通过一个印迹双模 ${}_{A}X_{B}$ 等价。由于这在 AbC* Alg 中定义了一个 2-等价，$X$ 满足以下性质

$$\textbf{(a):}\ \phi(f)\triangleright x = x \triangleleft \mu(f) \text{ and } \textbf{(b):}\ \phi(f)\triangleright x = x \triangleleft \nu(f)$$

对所有 $x \in X$ 和 $f \in C(T)$ 均成立。因此，特别地，

$$x \triangleleft \mu(f) \overset{\textbf{(a)}}{=} \phi(f)\triangleright x \overset{\textbf{(b)}}{=} x \triangleleft \nu(f).$$

由于 $X$ 作为 Hilbert $B$-模是满的，且上述结论对所有 $x \in X$ 和 $f \in C(T)$ 均成立，根据注 1.2，我们得出 $\nu = \mu$。因此，这些等价类的任一代表元都具有一对相同的中心 $*$-同态。

现在，为证明这是一个子群，首先注意到该集合包含单位元 ${}_{\mathrm{id}}C(T)_{\mathrm{id}}$。考虑 $C(T)$ 的两个 1-自同构 ${}_{\phi}A_{\phi}$ 和 ${}_{\psi}B_{\psi}$。那么它们的复合为 ${}_{\phi}(A \otimes_T B)_{\psi}$；当且仅当来自 $C(T)$ 和 $\to Z(A \otimes_T B)$ 的左映射与右映射相等时，它才属于所声称的子群。然而，对于$f \in C(T)$，我们有

$$\phi(f) \otimes_T 1_B = 1_A \otimes_T \psi(f).$$

因此，复合可以更正式地写为

$${}_{\phi\otimes 1_B}(A \otimes_T B)_{1_A\otimes\psi} = {}_{\phi\otimes 1_B}(A \otimes_T B)_{\phi\otimes 1_B}.$$

我们得出结论，该集合构成 $\pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}\ T)$ 的一个子群。 □

现在我们已经具备了将 $\pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 分解为半直积所需的全部背景知识。

**定理 2.14.** 存在一个分裂正合列

$$0 \longrightarrow H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{(i)}} \pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}, T) \underset{\text{(iii)}}{\overset{\text{(ii)}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Homeo}(T) \longrightarrow 0.$$

特别地，$\pi_1$(阿贝尔 C**代数 $T$)$= H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z}) \rtimes$ 同胚群$(T)$。

证明。 我们将上述分裂短正合列描述如下：

(i) 给定一个 Dixmier–Douady 类 $\delta \in H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z})$，由引理 2.12 可知，存在相应的含幺连续迹 C*-代数 $A^\delta$，以及一个 $*$-同构 $\psi\colon C(T) \to Z(A^\delta)$。注意，$\mathrm{id}_{A^\delta_{\mathrm{id}}} \in \pi_1(\mathbf{AbC^*Alg}\ T)$ 的 Dixmier–Douady 类为 $0 \in H^3_{\mathrm{tor}}(T;Z)$，因为 $A^\delta \otimes_T (A^\delta)^{\mathrm{op}}$；因此，在 $\mathbf{AbC^*Alg}$ 中，$A^\delta \otimes_T (A^\delta)^{\mathrm{op}}$ 等价于 $\mathrm{id}_{C(T)_{\mathrm{id}}}$，其中我们将 $(A^\delta)^{\mathrm{op}}$ 视为一个 1-态射，其中心 $*$-同态与 $A^\delta$ 相同。注意，任意两个具有相同 Dixmier–Douady 类的连续迹 C*-代数在 $C(T)$ 上 Morita 等价，因此上述映射不依赖于 $A^\delta$ 的选择。此外，由于 C*-代数 $A^\delta$ 具有相同的一对中心映射 $C(T) \to Z(A)$，这些态射的 1-复合与 Brauer 群中的复合一致。因此，这定义了一个真正的群同态 $H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z}) \to \pi_1(\mathbf{AbC^*Alg}\ T)$，根据定理 1.28，该同态是单射。

(ii) 定义 $\Lambda\colon \pi_1(\mathbf{AbC^*Alg}\ T) \to$ 同胚群$(T)$，使得 $\Lambda({}_\phi A_\psi) = \widehat{\psi^{-1}\circ\phi}$（回顾一下，$\phi\colon C(T) \to Z(A)$ 是一个同构）。我们要验证这是定义在 $\pi_1$ 上的良定义函数；因此，假设 ${}_\phi A_\psi$ 和 ${}_{\phi'}A'_{\psi'}$ 通过 $X\colon A \Rightarrow A'$ 2-同构。回顾一下，这个印迹双模 $X$ 对所有 $f \in C(T)$ 和 $x \in X$ 都满足：

$$\textbf{(a):}\ \phi(f)\triangleright x = x \triangleleft \phi'(f) \text{ and } \textbf{(b):}\ \psi(f)\triangleright x = x \triangleleft \psi'(f).$$

由此可知，对所有 $f \in C(T)$ 和 $x \in X$，我们可以证明：

$$\psi((\psi'^{-1}\circ\phi')(f))\triangleright x \overset{\textbf{(b)}}{=} x \triangleleft \psi'((\psi'^{-1}\circ\phi')(f)) = x \triangleleft \phi'(f) \overset{\textbf{(a)}}{=} \phi(f)\triangleright x.$$

因此，由于 $X$是一个满双模，我们得出，对于所有 $f \in C(T)$，$(\psi\circ\psi'^{-1}\circ\phi')(f) = \phi(f)$。特别地，这意味着 $\phi^{-1}\circ\psi = \phi'^{-1}\circ\psi'$，所以以上映射在 $\pi_1$上定义良好。

为证明这是一个群同态，给定 $\pi_1(\mathbf{AbC^*Alg}\ T)$ 中的两个 1-态射${}_\phi A_\psi$ 和 ${}_\mu B_\nu$，1-态射 ${}_\phi A \otimes_T B_\nu$关联的中心同态为 $\phi \otimes_T 1_B$ 和 $1_A \otimes_T \nu$。若考虑一个元素$f \in C(T)$，则有

$$\begin{aligned}(1_A \otimes_T \nu)^{-1}(\phi \otimes_T 1_B)(f) &= (1_A \otimes_T \nu)^{-1}(\phi(f) \otimes_T 1_B)\\ &= (1_A \otimes_T \nu)^{-1}(\psi(\psi^{-1}\phi(f)) \otimes_T 1_B)\\ &= (1_A \otimes_T \nu)^{-1}(1_A \otimes_T \mu(\psi^{-1}\phi(f))\\ &= \nu^{-1}\mu\psi^{-1}\phi(f).\end{aligned}$$

因此我们看到，$\widehat{\Lambda(A \otimes_T B)} = \widehat{\nu^{-1}\mu\psi^{-1}\phi} = \widehat{(\psi^{-1}\phi)} \circ \widehat{(\nu^{-1}\mu)} = \Lambda(A)\circ\Lambda(b)$，所以 $\Lambda$是一个群同态。此外，我们看到它是满射，因为对于任意 $\Phi \in \mathrm{Homeo}(T)$，都有 $\Lambda({}_{\Phi^*}C(T)_{\mathrm{id}}) = \Phi$。最后，我们证明该序列在 $\pi_1$处正合。根据引理 2.13，$H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z})$ 可识别为形如 ${}_\phi A_\phi$ 的态射，它包含于 $\Lambda$的核中。由于 $\ker(\Lambda)$ 中的任意态射都具有形式${}_\phi A_\phi$，且它只有一个中心 $*$-同态，因此它在 $\pi_1(\mathbf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 中的等价类完全由其 Dixmier–Douady 类决定。因此，$H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z})$ 满射到 $\ker(\Lambda)$。

(iii) 将 (iii) 定义为函数 $\Phi \mapsto {}_{\Phi^*}C(T)_{\mathrm{id}}$；根据命题 2.6，它是一个群同态。正如在定义映射 (ii) 时所指出的，我们有

$\Lambda(_{\Phi^*}C(T)_{\mathrm{id}}) = \Phi$ 对任意 $\Phi \in$ 同胚群$(T)$ 都成立，因此我们得出 (iii) 是一个分裂。□

注2.15. 前一个短正合列通常并非平凡，即 $\pi_1$(AbC*Alg $T$) 不是直和 $H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z}) \oplus$ Homeo$(T)$。事实上，令 $S := \Sigma\mathbb{RP}^2$ 为实射影平面的悬挂。注意 $H^3(S;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$，因此对于 $T := S \sqcup S$，我们有 $H^3(T;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$，也可以将其写作 $\{a,b|ab = ba, a^2 = b^2 = 1\}$。令 $A$ 为定义在 $S$ 上的含幺连续迹 C*-代数，满足 $\delta(A) = a$，其中谱的识别对应于 $\phi$: $C(S) \to Z(A)$。构造 $C(T)$ 的一个 1-自同构，如下所示

$$_{\phi\oplus\mathrm{id}}A \oplus C(S)_{\phi\oplus\mathrm{id}}$$

首先，注意我们有 $\delta(A \oplus C(S)) = a$。现在，令 $\psi$ 为 $C(T) = C(S) \oplus C(S)$ 的交换自同构，由 $\psi(f, g) = (g, f)$ 给出。于是

$$\begin{aligned}
&(_{\psi}C(T)_{\mathrm{id}}) \otimes_T (_{\phi\oplus\mathrm{id}}A \oplus C(S)_{\phi\oplus\mathrm{id}}) \otimes_T (_{\psi}C(T)_{\mathrm{id}})^{-1} \\
\cong &(_{\psi}C(T)_{\mathrm{id}}) \otimes_T (_{\phi\oplus\mathrm{id}}A \oplus C(S)_{\phi\oplus\mathrm{id}}) \otimes_T (_{\psi^{-1}}C(T)_{\mathrm{id}}) \\
\cong &_{(\phi\oplus\mathrm{id})\circ\psi}A \oplus C(S)_{(\phi\oplus\mathrm{id})\circ\psi}
\end{aligned}$$

经由同构 $\sigma((f_1, f_2) \otimes_T (a, h) \otimes_T (g_1, g_2)) = (\phi(f_1)a\phi(g_2) f_2hg_1)$。这与中心 $*$-同态相容；事实上，给定 $(f, g) \in C(T) = C(S) \oplus C(S)$，我们有

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ (\psi \otimes_T 1_{A\oplus C(S)} \otimes_T 1_{C(T)}))(f,g) &= \sigma((g,f) \otimes_T 1_{A\oplus C(S)} \otimes_T 1_{C(T)}) \\
&= (\phi(g), f) \\
&= ((\phi \oplus \mathrm{id}) \circ \psi)(f,g)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ (1_{C(T)} \otimes_T 1_{A\oplus C(S)} \otimes_T \mathrm{id}))(f,g) &= \sigma(1_{C(T)} \otimes_T 1_{A\oplus C(S)} \otimes_T (f,g)) \\
&= (\phi(g), f) \\
&= ((\phi \oplus \mathrm{id}) \circ \psi)(f,g).
\end{aligned}$$

因此，根据引理 2.1，$\sigma$ 在 AbC*Alg 中定义了一个 2-等价。现在注意，对于$f, g \in C(S)$，我们有

$$(\phi \oplus \mathrm{id})(f,g) = \phi(f) \oplus g$$

and

$$(\phi \oplus \mathrm{id}) \circ \psi(f,g) = \phi(g) \oplus f.$$

因此，具有平凡 Dixmier–Douady 类的那部分 C*-代数 – $C(S)$ – 现在位于 $S \sqcup S$ 中 $S$的第一个副本之上，而不是第二个副本。具有非平凡 Dixmier–Douady 类的那部分 – $A$ – 现在位于$S$的第二个副本之上。因此我们有

$$\delta(_{(\phi\oplus\mathrm{id})\circ\psi}A \oplus C(S)_{(\phi\oplus\mathrm{id})\circ\psi}) = b$$

它不是 $a = \delta(_{\phi\oplus\mathrm{id}}A \oplus C(S)_{\phi\oplus\mathrm{id}})$。因此，这两个 1-自同构不可能等价；也就是说，我们的半直积通常不是直和。

2.2. **关于 $\pi_2$ 和 $\pi_3$的结果**。 完成对 $\pi_1$ 的分析后，我们接下来描述 $\pi_2$ 和 $\pi_3$。首先介绍一些关于线丛的重要事实。以下结果在非酉情形下广为人知。为了完整起见，我们将这些结果改写为适用于酉情形；在酉情形下，同一个对象可能具有不同的酉结构。我们回顾 Picard 群的如下定义。

**定义 2.16.** 对于紧豪斯多夫空间 $T$，Picard 群 Pic($T$) 由 $T$ 上复线丛的（同构类）构成，其乘法由纤维张量积 $\otimes$给出。

由于我们考虑可逆二态射 ${}_{\mathrm{id}}C(T)_{\mathrm{id}} \Rightarrow {}_{\mathrm{id}}C(T)_{\mathrm{id}}$，我们的双模将只配备一个 $C(T)$ 的作用。不过，它们是 $C(T)$ 上的印迹双模，因此具有两个取值于 $C(T)$ 的内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 和 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$。先验地，这些内积可能截然不同，但下面的引理证明它们彼此决定。

**引理 2.17.** 设 $E \to T$ 是 $T$ 上的线丛，带有两个厄米度量 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 和 $\langle\cdot|\cdot\rangle$，它们使截面空间 $\Gamma(E)$ 具有 $C(T)$-$C(T)$ 印迹双模的结构，即，

$$ {}_{C(T)}\langle f, g\rangle h = f\langle g|h\rangle_{C(T)} \qquad \forall f, g, h \in \Gamma(E). $$

那么 $\langle\cdot,\cdot\rangle = \overline{\langle\cdot|\cdot\rangle}$。

证明。 首先，如果 $E = T\times\mathbb{C}$ 是平凡线丛，我们可以使用常值截面$1 \in \Gamma(E)$来计算。对于任意 $f,\ g \in \Gamma(E)$,

$$ {}_{C(T)}\langle f, g\rangle = {}_{C(T)}\langle f, g\rangle 1 = f\langle g|1\rangle_{C(T)} = \langle g|f\rangle_{C(T)} = \overline{\langle f|g\rangle}_{C(T)}. $$

一般线丛 $E \xrightarrow{p} T$ 的情形可由一个简单的单位分解论证得到。具体而言，取单位分解 $\{\underline{\sigma_i\colon}\ T \to \mathbb{C}\}_i$ 在 $T$ 上，使得每个$K_i \coloneqq \operatorname{supp}\sigma_i \subseteq T$ 都是紧的且可局部平凡化，即 $p^{-1}(K_i) \cong K_i \times \mathbb{C}$ 作为丛。在每个 $K_i$上应用前面的论证，我们得到

$$ {}_{C(T)}\langle f, g\rangle = \sum_i {}_{C(T)}\langle \sigma_i f, g\rangle = \sum_i \overline{\langle \sigma_i f|g\rangle}_{C(T)} = \overline{\langle f|g\rangle}_{C(T)}. $$

对所有 $f,\ g \in \Gamma(E)$ 都成立。由于 $\Gamma(E)$ 上的内积相差一个复共轭，因此厄米度量 ${}_L\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 与 $\langle\cdot|\cdot\rangle_R$ 也相差一个复共轭。□

这意味着，我们用来构造 imprimitivity 双模的线丛实际上只有一种厄米度量可选。然而，Pic($T$) 的 Picard 群并不涉及厄米度量。下一个引理表明，厄米度量的选择本质上是多余的。

**引理 2.18.** 设 $E \to T$ 是一个线丛，带有两种厄米结构 $\langle\cdot|\cdot\rangle_1$ 和$\langle\cdot|\cdot\rangle_2$。那么，存在一个酉同构，将右希尔伯特 $C^*$-模$(\Gamma(E)\ \langle\cdot|\cdot\rangle_1)$ 映到$(\Gamma(E)\ \langle\cdot|\cdot\rangle_2)$。

证明。 由 [15], 的定理 2.5，存在一个等距映射 $f\colon (E, \langle\cdot|\cdot\rangle_1) \to (E, \langle\cdot|\cdot\rangle_2)$。也就是说， $f$是一个丛映射，使得 $\langle f(e_1)|f(e_2)\rangle_2 = \langle e_1, e_2\rangle_1$。此外，由于 $f$也是一个丛同构（来自 [15]），我们有 $f^\dagger = f^{-1}$，其含义是

$$ \langle f(e_1)|e_2\rangle_2 = \langle e_1|f^{-1}(e_2)\rangle_1. $$

由引理 A.2， $\Gamma$是一个 †-函子，因此 $\Gamma(f):(\Gamma(E)\ \langle\cdot|\cdot\rangle_1)\to(\Gamma(E)\ \langle\cdot|\cdot\rangle_2)$ 是一个酉同构。□

既然已经证明，在 $E$ 上产生印刻双模 $\Gamma(E)$ 的一对厄米度量不会影响 $\Gamma(E)$ 的同构类，那么根据单子范畴版本的 Serre–Swan 定理， $\pi_2$ 刻画为 Pic($T$) 便随之成立。我们将在下面的推论中给出这一等价的精确表述，但证明请读者参阅附录 A。

**推论 2.19** (Serre–Swan)。 在 $T$ 上的厄米线丛的单子 †-范畴与 ***Hilbert*** $C(T)$-双模的单子 †-范畴之间存在一个单子 †-等价 $E\mapsto\Gamma(E)$ 。

现在我们可以证明， $\pi_2$(AbC*Alg $C(T)$) 与 Pic($T$) 同构。

**定理 2.20**。 对于 $T\in$ AbC*Alg， $\pi_2(\text{AbC*Alg}\ T)\cong\mathrm{Pic}(T)$。此外，当 $T$ 具有 ***CW*** 复形的同伦型时， $\pi_2(\text{AbC*Alg}\ T)\cong H^2(T;\ \mathbb{Z})$。

证明。 根据 [19], 第 291 页的命题， $C(T)$-$C(T)$ 印迹双模是有限生成且射影的。因此，利用引理 2.17 和推论 2.19，我们看到， $C(T)$ 上印迹双模的酉同构类与 $T$ 上厄米线丛的酉同构类一一对应。由于紧空间 $T$ 上的每个复线丛都具有厄米度量（[14, 命题 1.2]），引理 2.18 证明，后者与 $T$ 上线丛的同构类相对应，即 $\pi_2$(AbC*Alg $T$) $\cong$Pic($T$)。由于推论 2.19 中的对应是幺半群的，这些对应作为群确实是同构的。

最后，当 $T$ 具有 CW 复形的同伦型时，根据[14], 的命题 3.10，将线丛 $E$ 映射到其第一陈类 $c_1(E)$ 的映射，是从 Pic($T$) 到 $H^2(T;\mathbb{Z})$ 的同构。□

证明 $\pi_3$(AbC*Alg $C(T)$) $=C(T)^\times$ 很直接，尤其是因为我们已经将 AbC* Alg 的结构“封顶”，而且在我们的 3-态射上唯一的等价关系就是相等。

**定理 2.21**。对于 $T\in$ AbC*Alg， $\pi_3(\text{AbC*Alg}\ T)\cong C(T)^\times$。

证明。 回想一下，$\mathrm{id}_{\mathrm{id}_T}=C(T)$ 是其自身上的 Hilbert C*-双模。由于 $C(T)$ 是阿贝尔且含幺的，

$$\mathrm{End}({}_{C(T)}C(T)_{C(T)})\cong Z(C(T))=C(T).$$

因此，可逆映射由 $\pi_3$(AbC*Alg $C(T)$)$\cong C(T)^\times$ 给出。 □

## 3. Actions on $\pi_2$ and $\pi_3$

计算出三个同伦群 $\pi_1,\pi_2$ 和 $\pi_3$ 后，我们现在可以计算用于分类该同伦 3-型的一些附加数据。我们给出如下定义： $\pi_1$(AbC*Alg $C(T)$) 对 $\pi_2$(AbC*Alg $C(T)$) 和 $\pi_3$(AbC*Alg $C(T)$) 的作用。

**定义 3.1**。 我们如下定义 $\pi_1$ 在 $\pi_2$ 和 $\pi_3$ 上的作用：令 ${}_\phi A_\psi$ 属于 $\pi_1$(AbC*Alg $C(T)$)，并选取一个 2-同构 $Y\colon A\otimes_T$恒等态射$C(T)_{\mathrm{id}}\otimes_T A^{-1}\Rightarrow$恒等态射$C(T)_{\mathrm{id}}$。对于 $X\in\pi_2$(AbC*Alg $C(T)$)，我们将 $A\curvearrowright X$定义为双模

$$Y^{-1}\otimes(\mathrm{id}_A\otimes_T X\otimes_T\mathrm{id}_{A^{-1}})\otimes Y.$$

由于 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 都仅在等价意义下定义，因此此作用是良定义的。对于$f \in \pi_3$(AbC$^*$ Alg $C(T)$)，我们使用以下 3-态射定义 $A \curvearrowright f$

$$\tilde{f} \coloneqq \mathrm{id}_{Y^{-1}} \otimes (1_A \otimes_T f \otimes_T 1_{A^{-1}}) \otimes \mathrm{id}_Y$$

作为 $A \curvearrowright \mathrm{id}_{C(T)}$ 的 3-自同构。然而，一般来说， $A \curvearrowright \mathrm{id}_{C(T)}$ 不等于 $\mathrm{id}_{C(T)}$，而只是同构。因此，我们选取一个 3-同构 $g\colon A \curvearrowright \mathrm{id}_{C(T)} \Rightarrow \mathrm{id}_{C(T)}$，并定义 $A \curvearrowright f \coloneqq g \circ \tilde{f} \circ g^{-1}$。同样，这一定义是良定的，因为所有内容都只在等价意义下成立。

注 3.2. 回想一下，$A \otimes_T {}_{\mathrm{id}}C(T)_{\mathrm{id}} \otimes_T A^{-1}$ 与 $*$-同构于 ${}_{\mathrm{id}}C(T)_{\mathrm{id}}$，且该同构与作用相容，因此根据引理 2.1，我们可以由此同构构造一个可逆双模 $Y$。在此情形下，与 $Y$ 和 $Y^{-1}$ 作 2-复合，便得到一个 $C(T)$-$C(T)$ 双模 $\mathrm{id}_A \otimes_T X \otimes_T \mathrm{id}_{A^{-1}}$，其作用由

$*$-同构。

**3.1. 上同调作用。** 由于 $H^3_{\mathrm{tor}}(T; \mathbb{Z})$ 是阿贝尔群，直觉上我们应该能够交换作用定义中的 1-态射。以下引理将这一点表述得更加精确。

引理 *3.3*。设 $A \coloneqq {}_\phi A_\phi \in \pi_1$(*AbC$^*$Alg $C(T)$*)。那么由$X \mapsto Y^{-1} \otimes$ (*id*$_A \otimes_T X \otimes_T$ *id*$_{A^{\mathrm{op}}}$) $\otimes Y$和 $f \mapsto$ *id*$_{Y^{-1}} \otimes$(*id*$_A \otimes_T f \otimes_T$ *id*$_{A^{\mathrm{op}}}$) $\otimes$ *id*$_Y$定义的函子，自然酉同构于恒等函子（对于 $X \in \pi_2$(*AbC$^*$Alg $C(T)$*) 和 $f \in \pi_3$(*AbC$^*$Alg $C(T)$*)）。

证明。 我们有 $A \otimes_T$ 恒等$C(T)_{\mathrm{id}} \otimes_T A^{\mathrm{op}}$ 通过映射与 $A \otimes_T A^{\mathrm{op}}$ $*$-同构

$$a \otimes_T f \otimes_T b \mapsto a\phi(f) \otimes_T b.$$

这个 $*$-同构保持中心 $*$-同态，因此诱导出一个 2-等价

$$Z\colon A \otimes_T {}_{\mathrm{id}}C(T)_{\mathrm{id}} \otimes_T A^{\mathrm{op}} \Rightarrow A \otimes_T A^{\mathrm{op}}$$

根据引理 2.1。由注 3.2 可得， $Z^{-1} \otimes$ (id$_A \otimes_T X \otimes_T$ id$_{A^{\mathrm{op}}}$) $\otimes Z$作为一个 $A \otimes_T A^{\mathrm{op}}$ 双模，通过以下作用与 $\mathrm{id}_A \otimes_T X \otimes_T \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}}$ 同构

$$(a \otimes_T b) \triangleright (c \otimes_T x \otimes_T d) = ac \otimes_T x \otimes_T db$$

and

$$(c \otimes_T x \otimes_T d) \triangleleft (a \otimes_T b) = ca \otimes_T x \otimes_T bd,$$

并且还配备了内积

$$\langle a \otimes_T x \otimes_T b | c \otimes_T y \otimes_T d \rangle = a^\dagger c \phi(\langle x|y \rangle) \otimes_T db^\dagger$$

and

$$\langle a \otimes_T x \otimes_T b, c \otimes_T y \otimes_T d \rangle = ac^\dagger \phi(\langle x, y \rangle) \otimes_T d^\dagger b.$$

注意，第三个张量因子中的乘法是反向的，因为这些元素属于 $A^{\mathrm{op}}$。我们首先断言， $Z^{-1} \otimes$ (id$_A \otimes_T X \otimes_T$ id$_{A^{\mathrm{op}}}$) $\otimes Z$ 自然地与 $A \otimes_T A^{\mathrm{op}}$ 双模 $X \otimes_T \mathrm{id}_A \otimes_T \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}}$ 3-同构，其中作用和内积的定义类似。这里唯一微妙之处在于，由 $\tau(a \otimes_T x \otimes_T b) = x \otimes_T a \otimes_T b$ 给出的张量置换映射 $\tau$ 是良定义的。该映射的良定义性在很大程度上依赖于这样一个事实： ${}_\phi A_\phi$ 具有相同的中心同态。具体而言，给定 $f \in C(T)$，我们有

$$\begin{array}{ccc} a\otimes_T x\otimes_T \phi(f)b & \xmapsto{\tau} & x\otimes_T a\otimes_T \phi(f)b \\ \| & & \| \\ a\phi(f)\otimes_T x\otimes_T b & \xmapsto{\tau} & x\otimes_T a\phi(f)\otimes_T b \\ \| & & \| \\ a\otimes_T (f\rhd x)\otimes_T b & \xmapsto{\tau} & (f\rhd x)\otimes_T a\otimes_T b \end{array}$$

此外，由于 $\mathrm{id}_A\otimes_T X\otimes_T \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}}$ 中简单张量的内积及其在 $\tau$ 下的像产生 $A\otimes_T A^{\mathrm{op}}$ 中相同的元素，我们看到 $\tau$ 在简单张量张成的空间上是等距的，因此由连续性可延拓到整个 $\mathrm{id}_A\otimes_T X\otimes_T \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}}$。此外，我们看到 $\tau$ 是可伴随的，且 $\tau^\dagger=\tau^{-1}$，因为

$$\begin{aligned} \langle \tau(a\otimes_T x\otimes_T b)|y\otimes_T c\otimes_T d\rangle &= \langle x\otimes_T a\otimes_T b|y\otimes_T c\otimes_T d\rangle \\ &= a^\dagger c\langle x|y\rangle\otimes_T db^\dagger \\ &= \langle a\otimes_T x\otimes_T b|c\otimes_T y\otimes_T d\rangle \\ &= \langle a\otimes_T x\otimes_T b|\tau^{-1}(y\otimes_T c\otimes_T d)\rangle \end{aligned}$$

显然，$\tau$ 是自然的；对于任意 3-态射 $g\colon X\to X'$，下图显然交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{id}_A\otimes_T X\otimes_T \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow{1_A\otimes_T g\otimes_T 1_{A^{\mathrm{op}}}} & \mathrm{id}_A\otimes_T X'\otimes_T \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}} \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau'} \\ X\otimes_T \mathrm{id}_A\otimes_T \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow[g\otimes_T 1_A\otimes_T 1_{A^{\mathrm{op}}}]{} & X'\otimes_T \mathrm{id}_A\otimes_T \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}} \end{array}$$

现在，选取一个 2-等价 $Y'\colon A\otimes_T A^{\mathrm{op}}\Rightarrow_{\mathrm{id}} C(T)_{\mathrm{id}}$，并令 $Y:=Z\otimes Y'$。于是我们得到以下对象之间的自然同构：

$$\begin{aligned} Y^{-1}\otimes(\mathrm{id}_A\otimes_T X\otimes_T \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}})\otimes Y &\cong (Y')^{-1}\otimes Z^{-1}\otimes(\mathrm{id}_A\otimes_T X\otimes_T \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}})\otimes Z\otimes Y' \\ &\cong (Y')^{-1}\otimes(X\otimes_T \mathrm{id}_A\otimes_T \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}})\otimes Y' \\ &\cong X\otimes_T ((Y')^{-1}\otimes Y') \\ &\cong X\otimes_T C(T) \\ &\cong X \end{aligned}$$

这些同构都是自然的，因为 1-复合是自然的，而且构造这些同构时所用的唯一映射（除 $\tau$ 外）是单位约束、结合子和交换子，它们也都是自然的。此外，$\tau$ 是酉同构，并且 AbC*Alg 中的所有相干数据都是酉的，因此这个自然同构实际上是酉的。□

由于这些 1-态射可能是可编织的，$H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z})$ 中的态射所给出的作用自动是平凡的。

**推论 3.4.** 设 ${}_\phi A_\phi$ 属于 $\pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$。则 ${}_\phi A_\phi$ 在 $\pi_2(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 和 $\pi_3(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 上的作用都是平凡的。

3.2. **同胚群作用**。本小节将描述 Homeo(*T*) 中由 1-态射给出的作用。由于中心 $*$-同构各不相同，这些态射无法像我们处理 $H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z})$ 中的态射那样进行编织。下面的引理描述可逆双模 $X$ 在此作用下的像。

**引理 3.5**。 对于一个1-态射 $A := {}_{\phi}C(T)_{\mathrm{id}} \in \pi_1(\mathsf{AbC}^*\mathsf{Alg}\ C(T))$ 以及 $X \in \pi_2(\mathsf{AbC}^*\mathsf{Alg}\ C(T))$，我们断言$\mathrm{id}_A \otimes_T X \otimes_T \mathrm{id}_{A^{-1}}$同构于双模$\phi(X)$，后者具有相同的底层向量空间 $X$，其作用 $\blacktriangleright$和内积$(\cdot|\cdot)$定义如下：

$$f \blacktriangleright x = \phi(f) \triangleright x$$
$$(x|y) = \phi^{-1}(\langle x|y\rangle)$$

其中，$\triangleright$ 和 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 是 $X$上的原作用和内积。

证明。 首先，回忆 $A^{-1} = {}_{\phi^{-1}}C(T)_{\mathrm{id}}$。此外，记住，$\mathrm{id}_A$ 是$C(T)$，作为一个带有通常内积和作用的 $C(T)$-$C(T)$。现在，注意到

$$A \otimes_T C(T) \otimes_T A^{-1} \cong C(T)$$

通过该同构

$$\sigma\colon f \otimes g \otimes h \mapsto \phi^{-1}(fg)h.$$

此外，该同构保持从 $C(T)$到中心 $*$-同态。事实上，给定 $f \in C(T)$，

$$\sigma(\phi \otimes_T 1_{C(T)} \otimes_T 1_{A^{-1}})(f) = \sigma(\phi(f) \otimes_T 1_{C(T)} \otimes_T 1_{A^{-1}}) = f$$

and

$$\sigma(1_A \otimes_T 1_{C(T)} \otimes_T \mathrm{id})(f) = \sigma(1_A \otimes_T 1_{C(T)} \otimes_T f) = f,$$

因此，$\sigma$ 是从 $A \otimes_T C(T) \otimes_T A^{-1}$ 到 ${}_{\mathrm{id}}C(T)_{\mathrm{id}}$ 的 $*$-同构，并且保持中心映射。因此，根据引理 2.1，相应的印迹双模 $Y$ 将是 $\mathsf{AbC}^*\mathsf{Alg}$ 中的一个 2-同构。由注 3.2，我们有

$$\begin{aligned} A \curvearrowright X &= Y^{-1} \otimes (\mathrm{id}_A \otimes_T X \otimes_T \mathrm{id}_{A^{-1}}) \otimes Y \\ &\cong \mathrm{id}_A \otimes_T X \otimes_T \mathrm{id}_{A^{-1}} \end{aligned}$$

其中，所得双模 $\mathrm{id}_A \otimes_T X \otimes_T \mathrm{id}_{A^{-1}}$是一个 $C(T)$-$C(T)$ 双模，其作用由 $\sigma$ 定义。此外，显然存在一个向量空间同构 $\Sigma\colon \mathrm{id}_A \otimes_T X \otimes_T \mathrm{id}_{A^{-1}} \to X$，由 $\Sigma(f \otimes_T x \otimes_T g) = f\phi(g) \triangleright x$ 给出。因此，我们定义 $\phi(X)$ 的底层向量空间为 $X$，该空间由此同构给出。我们使用映射 $\sigma$ 和 $\Sigma$，如下确定 $\phi(X)$ 上的 $C(T)$-作用：

$$\begin{aligned} f \blacktriangleright x &= \Sigma(\sigma^{-1}(f) \triangleright \Sigma^{-1}(x)) \\ &= \Sigma((1_A \otimes_T \phi(f) \otimes_T 1_{A^{-1}}) \triangleright (1_A \otimes_T x \otimes_T 1_{A^{-1}})) \\ &= \Sigma(1_A \otimes_T (\phi(f) \triangleright x) \otimes_T 1_{A^{-1}}) \\ &= \phi(f) \triangleright x \end{aligned}$$

我们以类似的方式定义内积：

$$\begin{aligned} (x|y) &= \sigma(\langle \Sigma^{-1}(x) | \Sigma^{-1}(y)\rangle) \\ &= \sigma(\langle 1_A \otimes_T x \otimes_T 1_{A^{-1}} | 1_A \otimes_T y \otimes_T 1_{A^{-1}}\rangle) \\ &= \sigma(\langle 1_A | 1_A\rangle \otimes_T \langle x|y\rangle \otimes_T \langle 1_{A^{-1}} | 1_{A^{-1}}\rangle) \\ &= \phi^{-1}(\langle x|y\rangle) \end{aligned}$$

根据这些定义，$\Sigma\colon (A \curvearrowright X) \to \phi(X)$ 显然是 $\mathsf{AbC}^*\mathsf{Alg}$ 中的一个 3-同构。□

在分别计算了 $H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z})$ 和同胚群$(T)$ 中的 1-态射如何作用于 $\pi_2(\mathsf{AbC}^*\mathsf{Alg}\ C(T))$ 后，我们现在可以描述一般 1-态射如何作用。

**推论 3.6**。 设 ${}_\phi A_\psi$ 属于 $\pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 且 $X$ 属于 $\pi_2(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$。那么 $A \curvearrowright X$ 就是双模 $\psi^{-1}\phi(X)$，它由同一个底层向量空间$X$ 构成，其作用和内积如下：

$$f \blacktriangleright x = (\psi^{-1} \circ \phi) \triangleright x$$
$$(x|y) = (\phi^{-1} \circ \psi)(\langle x|y\rangle).$$

证明。 根据命题 2.5， ${}_\phi A_\psi$ 在第一同伦群 $\pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 中等价于 ${}_{\psi^{-1}\phi}C(T)_{\mathrm{id}} \otimes_T {}_\psi A_\psi$。根据我们此前的研究，我们有

$${}_\phi A_\psi \curvearrowright X \cong {}_{\psi^{-1}\phi}C(T)_{\mathrm{id}} \curvearrowright ({}_\psi A_\psi \curvearrowright X) \cong {}_{\psi^{-1}\phi}C(T)_{\mathrm{id}} \curvearrowright X \cong \psi^{-1}\phi(X)$$

正如所需。 □

我们还希望用线丛来描述 $\pi_2$ 上的作用，尤其是用 $H^2(T;\mathbb{Z})$ 中的第一陈类来描述。下面的定理阐明了这种关系。

**定理 *3.7***。设 $(\omega, \Phi) \in H^3_{\mathrm{tor}}(T;\mathbb{Z}) \rtimes \mathit{Homeo}(T)$，且 $E$ 是 $T$ 上的一个线丛。那么 $(\omega, \Phi) \curvearrowright E$ 就是拉回丛 $(\Phi^{-1})^*(E)$。此外，当 $T$ 具有 *CW* 复形的同伦型时，$(\omega, \Phi)$ 对 $H^2(T;\mathbb{Z})$ 的作用对应于沿 $\Phi^{-1}$ 的拉回。

证明。 根据前面的定理，我们知道 $(\omega, \Phi) \curvearrowright \Gamma(E) \cong \Phi^*(\Gamma(E))$，其中 $C(T)$-作用经过 $\Phi^*$ 扭曲（即通过与 $\Phi$ 进行前复合）。定义拉回丛 $(\Phi^{-1})^*(E)$，使其全空间为

$$(\Phi^{-1})^*(E) := \{(t, e) \in T \times E : \Phi^{-1}(t) = p(e)\} \subseteq T \times E$$

其投影映射为 $p_\Phi(t,\ e) = t = (\Phi \circ p)(e)$。我们看到，与$\Phi^{-1}$ 进行前复合通过将连续截面 $g \in \Gamma(E)$ 发送到 $(g \circ \Phi^{-1})(t) = (t,\ (g \circ \Phi^{-1})(t))$，定义了从 $\Phi^*(\Gamma(E))$ 到 $\Gamma((\Phi^{-1})^*(E))$ 的群同构。为验证这一点，注意这确实在 $\Gamma((\Phi^{-1})^*E)$ 中产生了一个截面；因为，如果 $g \in \Gamma(E)$，我们有

$$(\Phi \circ p) \circ (g \circ \Phi^{-1}) = \Phi \circ \mathrm{id}_T \circ \Phi^{-1} = \mathrm{id}_T .$$

此外，该映射的逆元将 $h \in \Gamma((\Phi^{-1})^*(E))$ 发送到 $h \circ \Phi$ （略微滥用记号，将 $E$ 识别为 $\mathrm{id}^*(E)$）。注意，$(\Phi^{-1})^*\colon \Phi^*(\Gamma(E)) \to \Gamma(\Phi^{-1})^*(E))$ 也交织了 $C(T)$-模作用；对于任意 $f \in C(T)$，我们有

$$(\Phi^{-1})^*(f \blacktriangleright g) = (\Phi^{-1})^*((f \circ \Phi)g) = f(g \circ \Phi^{-1}) = f \triangleright (\Phi^{-1})^*(g).$$

由此可得，$(\Phi^{-1})^*$ 是 $C(T)$-模的一个同构，因此 $(\omega,\ \Phi) \curvearrowright E \cong (\Phi^{-1})^*(E)$。

此外，当 $T$ 具有 CW 复形的同伦型时，我们知道线丛由其第一陈类 $c_1(E) \in H^2(T;\mathbb{Z})$分类。因此，我们有 $(\omega,\ \Phi) \curvearrowright c_1(E) = (\Phi^{-1})^* c_1(E)$，即第一陈类的拉回（因为线丛的拉回对应于陈类的拉回）。□

现在，我们可以分析 $\mathrm{Homeo}(T)$ 中 1-态射在第三同伦群 $\pi_3(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 上的作用。由于我们可以具体描述恒等双模 $\mathrm{id}_{C(T)}$ 在此作用下的像，因此我们实质上是在追踪一个态射在 $\pi_3$ 中如何经由这些同构作用。

**定理 3.8.** 设 $f \in \pi_3(\mathsf{AbC^*Alg}\ T)$ 且 $A := {}_\phi C(T)_{\mathrm{id}} \in \pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}\ T)$。则$A \curvearrowright f = \phi^{-1}(f)$。

证明。根据定义，我们有 $A \curvearrowright f = \mathrm{id}_{Y^{-1}} \otimes (1_A \otimes_T f \otimes_T 1_{A^{-1}}) \otimes \mathrm{id}_Y$。然而，由于我们可以选择 $Y$ 由一个同构 $\sigma$ 实现，正如引理 3.5 的证明中那样，因此可以通过复合 $\Sigma \circ (1_A \otimes_T f \otimes_T 1_{A^{-1}}) \circ \Sigma^{-1}$（其中 $\Sigma$ 也来自引理 3.5 的证明），确定 $A \curvearrowright f$ 如何作用于我们的代表元 $\phi(\mathrm{id}_{C(T)})$。于是我们得到

$$\begin{aligned}(\Sigma \circ (1_A \otimes_T f \otimes_T 1_{A^{-1}}) \circ \Sigma^{-1})(g) &= \Sigma(1_A \otimes_T f \otimes_T 1_{A^{-1}})(1_A \otimes_T g \otimes_T 1_{A^{-1}}) \\ &= \Sigma(1_A \otimes_T fg \otimes_T 1_{A^{-1}}) \\ &= fg.\end{aligned}$$

因此，$A \curvearrowright f$ 通过乘以 $f$ 作用于 $\phi(\mathrm{id}_{C(T)})$。然而，$\phi(\mathrm{id}_{C(T)})$ 并不显式地等于 $\mathrm{id}_{C(T)}$，而 $\pi_3$ 中的元素正是作用于这个 2-态射上的。因此，我们需要使用一个适当的同构 $\phi(\mathrm{id}_{C(T)}) \Rrightarrow \mathrm{id}_{C(T)}$。现在，考虑映射 $\eta\colon \phi(\mathrm{id}_{C(T)}) \to \mathrm{id}_{C(T)}$，其定义如下：

$$\eta(g) = \phi^{-1}(g).$$

显然，此映射是可逆的，其中 $\eta^\dagger = \eta^{-1}$，因为

$$\langle \eta(g) | h \rangle = \phi^{-1}(\overline{g})h = \phi^{-1}(\overline{g}\phi(h)) = (g|\phi(h)) = (g|\eta^{-1}(h)).$$

因此，这是一个从 $\phi(\mathrm{id}_{C(T)})$ 到 $\mathrm{id}_{C(T)}$ 的 3-等价。为了了解 $A \curvearrowright f$ 如何作用于 $\mathrm{id}_{C(T)}$，我们计算（对于 $g \in \mathrm{id}_{C(T)}$）：

$$\begin{aligned}(\eta \circ (A \curvearrowright f) \circ \eta^{-1})(g) &= (\eta \circ (A \curvearrowright f))(\phi(g)) \\ &= \eta(f\phi(g)) \\ &= \phi^{-1}(f)g.\end{aligned}$$

因此，我们看到 $A \curvearrowright f$ 在 $\pi_3$ 中等于 $\phi^{-1}(f)$。 □

与 $\pi_2$ 的情形一样，我们也可以描述一般可逆 1-态射对 $\pi_3$ 的作用。

**推论 3.9.** 给定 ${}_\phi A_\psi \in \pi_1(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$ 和 $f \in \pi_3(\mathsf{AbC^*Alg}\ C(T))$，有 ${}_\phi A_\psi \curvearrowright f = (\psi^{-1} \circ \phi)(f)$。

证明. 与推论 3.6 的证明一样，我们利用命题 2.5 将 ${}_\phi A_\psi \cong {}_{\psi^{-1}\circ\phi} C(T)_{\mathrm{id}} \otimes_T {}_\psi A_\psi$ 写为。因此，

$$\begin{aligned}{}_\phi A_\psi \curvearrowright f &= ({}_{\psi^{-1}\circ\phi} C(T)_{\mathrm{id}} \otimes_T {}_\psi A_\psi) \curvearrowright f \\ &= {}_{\psi^{-1}\circ\phi} C(T)_{\mathrm{id}} \curvearrowright f \\ &= (\phi^{-1} \circ \psi)(f)\end{aligned}$$ □

为了根据拓扑数据给出刻画，下面的推论可由推论 3.9 立即得出。

**推论 3.10.** 给定 $(\omega, \Phi) \in H^3_{\mathrm{tor}}(T; \mathbb{Z}) \rtimes$ 同胚群$(T)$ 和 $f \in \pi_3(\mathsf{AbC^*Alg}\ T)$，我们有 $(\omega, \Phi) \curvearrowright f = f \circ \Phi^{-1}$。

## AppendixA. Serre–Swan duality

Swan 定理 [20, p.267] 给出了如下构造： $\Gamma$ 将一个向量丛 $E$映射到其截面空间 $\Gamma(E)$，这是适当范畴之间的等价。每个范畴都带有一个幺半群乘积——分别是向量丛的张量积和模的相对张量积——因此我们将证明，Swan 定理所保证的等价实际上是一个幺半 †等价。专家们早已知道这一结果； [4] 的第 7.5 节给出了微分流形上 Serre–Swan 定理光滑版本中这一幺半等价的证明。我们对 Swan 定理的证明，本质上是对 [4] 中证明的修改。

回到向量丛，注意秩为 $n$ 的平凡丛 $T\times\mathbb{C}^n\to T$ 给出一个自由的 $n$ 维 $C(T)$-模

$$\Gamma(T\times\mathbb{C}^n)=C(T)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n.$$

当然，每个自由的 $C(T)$-模都以这种方式得到，而且自由模之间的每个映射$C(T)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n\to C(T)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^m$都由一个映射 $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$唯一确定，而该映射又会诱导出相应的丛映射 $T\times\mathbb{C}^n\to T\times\mathbb{C}^m$。一般而言，每个有限秩向量丛都可以嵌入以下某个平凡丛中：

**引理 A.1.** 设 $E$ 是 $T$ 上的一个向量丛。那么存在一个丛 $E^\perp$ ，使得 $E\oplus E^\perp$ 是 $T$ 上的平凡丛。

因此， $\Gamma(E)$ 是一个有限生成投射 $C(T)$-模。Swan 定理的核心内容是，每个有限生成投射模都以这种方式得到，因此 $T$ 上的有限秩向量丛范畴与 $C(T)$ 上的有限生成投射模范畴等价。

不过，在本文中，我们关注的是 $C(T)$ 上的希尔伯特 C*-模。在截面空间$\Gamma(E)$上取一个 $C(T)$-值内积的数据，与在 $E$ 上取一个厄米度量的数据完全相同，这是众所周知的。更具体地说，$\Gamma$: $\mathrm{Hilb}_{\mathrm{fd}}(T)\to\mathrm{Hilb}^{\mathrm{fgp}}(C(T))$ 是一个范畴等价，其中 $\mathrm{Hilb}_{\mathrm{fd}}(T)$ 是 $T$ 上有限维向量丛构成的范畴，而 $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{fgp}}(C(T))$ 是有限生成投射 $C(T)$- 模构成的范畴。这里我们指出， $\Gamma$ 是一个
†-函子，下面的引理将对其作精确描述。证明直接来自 $\Gamma(E)$ 上 $C(T)$-值内积的定义。

**引理 A.2.** 设 $E$ 和 $F$ 是带有厄米度量 $\langle\cdot|\cdot\rangle_E$ 和$\langle\cdot|\cdot\rangle_F$ 的向量丛。若 $\sigma\colon\ E\to F$ 是一个可伴随丛映射，即存在丛映射 $\sigma^\dagger\colon\ F\to E$，使得 $\langle\sigma(e)|f\rangle_F=\langle e|\sigma^\dagger(f)\rangle_E$，则 $\Gamma(\sigma)^\dagger=\Gamma(\sigma^\dagger)$。

然而， $\mathrm{Hilb}_{\mathrm{fd}}(T)$ 和 $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{fgp}}(C(T))$ 都分别具有幺半群结构 $\otimes$和$\otimes_{C(T)}$。接下来需要证明这个等价是幺半群的；也就是说，我们将给出一个酉

$$\eta\colon C(T)_{C(T)}\to\Gamma(T\times\mathbb{C})$$

以及对于每一对向量丛 $E$ 和 $F$，给出一个酉

$$\mu_{E,F}\colon\Gamma(E)\otimes_{C(T)}\Gamma(F)\to\Gamma(E\otimes F)$$

满足以下相容性条件：

- 对于任意丛 $E$，$F$ 和 $G$，以下结合图交换：

$$
\begin{array}{ccc}
(\Gamma(E)\otimes_{C(T)}\Gamma(F))\otimes_{C(T)}\Gamma(G) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(E)\otimes_{C(T)}(\Gamma(F)\otimes_{C(T)}\Gamma(G)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mu_{E,F}\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\mu_{F,G}} \\
\Gamma(E\otimes F)\otimes_{C(T)}\Gamma(G) & & \Gamma(E)\otimes_{C(T)}\Gamma(F\otimes G) \\
\downarrow{\scriptstyle \mu_{E\otimes F,G}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{E,F\otimes G}} \\
\Gamma((E\otimes F)\otimes G) & \xrightarrow[\Gamma(\alpha)]{} & \Gamma(E\otimes(F\otimes G))
\end{array}
\tag{1}
$$

- 对于任意丛 $E$，以下两个幺元性图表均交换（分别对应左、右单位约束）：

$$
\begin{array}{ccc}
C(T)\otimes_{C(T)}\Gamma(E) & \xrightarrow{\eta\otimes\mathrm{id}} & \Gamma((T\times\mathbb{C}))\otimes_{C(T)}\Gamma(E) \\
\downarrow{\scriptstyle \lambda_{\Gamma(E)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{(T\times\mathbb{C}),E}} \\
\Gamma(E) & \xleftarrow[\Gamma(\lambda_E)]{} & \Gamma((T\times\mathbb{C})\otimes E)
\end{array}
\tag{2}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\Gamma(E)\otimes_{C(T)}C(T) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta} & \Gamma(E)\otimes_{C(T)}\Gamma((T\times\mathbb{C})) \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_{\Gamma(E)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{E,(T\times\mathbb{C})}} \\
\Gamma(E) & \xleftarrow[\Gamma(\rho_E)]{} & \Gamma(E\otimes(T\times\mathbb{C}))
\end{array}
\tag{3}
$$

**定义 A.3.** 设 $E$ 和 $F$ 是紧豪斯多夫空间 $T$ 上的向量丛。定义线性函数 $\mu_{E,F}\colon \Gamma(E)\otimes_{C(T)}\Gamma(F)\to\Gamma(E\otimes F)$，其定义为（对于$f\in\Gamma(E)$ $g\in\Gamma(F)$）

$$\mu_{E,F}(f\otimes_{C(T)}g)=f\otimes g.$$

此外，定义 $\eta\colon C(T)\to\Gamma(T\times\mathbb{C})$，对于 $h\in C(T)$，其定义为

$$\eta(h)(t)=(t,h(t)).$$

几乎可以说，$\eta$ 是一个 $C(T)$-模的酉同构。要看出$\mu_{E,F}$ 是酉的，则要微妙得多。我们将把这一证明分成多个部分。

**命题 A.4.** 若 $E$ 和 $F$ 是配备了厄米度量$\langle\cdot|\cdot\rangle_E$ 和 $\langle\cdot|\cdot\rangle_F$的平凡丛，则 $\mu_{E,F}$ 是酉同构。

证明。选取分别使其对应丛平凡化的 $E$ 和 $F$ 的（正交）整体截面 $\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ 与 $\{g_1,g_2,\dots,g_m\}$。它们分别构成 $\Gamma(E)$ 和 $\Gamma(F)$ 的基。现在，注意到集合

$$\{f_i\otimes_{C(T)}g_j\}_{(i,j)=(1,1)}^{(n,m)}$$

在 $\Gamma(E)\otimes_{C(T)}\Gamma(F)$ 中具有稠密的 $C(T)$-张成。然而，注意到

$$\{f_i\otimes g_j\}_{(i,j)=(1,1)}^{(n,m)}$$

是一组 $E\otimes F$ 的（正交）整体截面，它使这个丛平凡化。由于 $\mu_{E,\ F}$ 将第一组映射到第二组，我们可知 $\mu_{E,\ F}$ 必为满射。它

显然，$\mu_{E,\ F}$ 有一个集合论意义上的逆元。为了证明 $\mu^{\dagger}_{E,\ F} = \mu^{-1}_{E\ F,}$ ，对于所有的 $1 \leq i,\ k \leq n$ 和 $1 \leq j,\ l \leq m$，我们有，

$$\begin{aligned}
\langle \mu_{E,F}(f_i \otimes_T g_j) | f_k \otimes g_l \rangle(t) &= \langle (f_i \otimes g_j)(t) | (f_k \otimes g_l)(t) \rangle_{E \otimes F} \\
&= \langle f_i(t) | f_k(t) \rangle_E \langle g_j(t) | g_l(t) \rangle_F \\
&= \langle g_j(t) | \langle f_i(t) | f_k(t) \rangle_E g_l(t) \rangle_F \\
&= \langle g_j(t) | (\langle f_i | f_k \rangle \triangleright g_l)(t) \rangle_F \\
&= \langle g_j | \langle f_i | f_k \rangle \triangleright g_l \rangle(t) \\
&= \langle f_i \otimes_T g_j | \mu^{-1}_{E,F}(f_k \otimes g_l) \rangle(t)
\end{aligned}$$

这表明 $\mu_{E,\ F}$ 是可伴随的，尤其是酉的。 □

**引理 A.5.** 设 $E$ 和 $F$ 是 $T$上的向量丛。定义映射

$$i \colon E \to E \oplus F \qquad i(v) = (v, 0)$$

*and*

$$\rho \colon E \oplus F \to E \qquad \rho(v, w) = v.$$

于是 $\Gamma(\rho) \circ \Gamma(i) = \mathrm{id}_{\Gamma(E)}$。此外，若 $E$和 $F$具有厄米度量 $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$和 $\langle \cdot | \cdot \rangle_F$，则 $\Gamma(\rho)$ 和 $\Gamma(i)$ 是可伴随的，且当 $E \oplus F$ 配备厄米度量 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{E \oplus F} = \langle \cdot | \cdot \rangle_E + \langle \cdot | \cdot \rangle_F$时，$\Gamma(\rho)^{\dagger} = \Gamma(i)$ 。

证明。 显然，$\Gamma(\rho) \circ \Gamma(i) = \mathrm{id}_{\Gamma(E)}$，因为 $\rho \circ i = \mathrm{id}$，且 $\Gamma$ 具有函子性。也容易看出 $\rho^{\dagger} = i$，因为

$$\langle \rho(f_1, g) | f_2 \rangle_E = \langle f_1 | f_2 \rangle_E = \langle (f_1, g) | (f_2, 0) \rangle_{E \oplus F} = \langle (f_1, g) | i(f_2) \rangle_{E \oplus F}.$$

由于根据引理 A.2，$\Gamma$ 是一个 †-函子，因此我们得出 $\Gamma(\rho)^{\dagger} = \Gamma(i)$。 □

**引理 A.6.** 若 $E$ 和 $F$ 是任意配备厄米度量的向量丛，则 $\mu_{E,\ F}$ 是酉同构。

证明。 利用引理 A.1，显然 $E \otimes F$是平凡丛 $(E \oplus E^{\perp}) \otimes (F \oplus F^{\perp})$ 的直和项。考虑如下图表

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma((E \oplus E^{\perp}) \otimes (F \oplus F^{\perp})) & \xleftarrow{\mu} & \Gamma(E \oplus E^{\perp}) \otimes_{C(T)} \Gamma(F \oplus F^{\perp}) \\
{\scriptstyle \Gamma(i)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(i) \otimes \Gamma(i)} \\
\Gamma(E \otimes F) & \xleftarrow[\mu_{E,F}]{} & \Gamma(E) \otimes_{C(T)} \Gamma(F),
\end{array} \tag{4}$$

其中 $\mu$是命题 A.4 中关于 $(E \oplus E^{\perp})$ 和 $(F \oplus F^{\perp})$ 的酉同构。注意，根据引理 A.5，$\Gamma(i)$ 是单射。此外，

$$(\Gamma(\rho) \otimes_{C(T)} \Gamma(\rho)) \circ (\Gamma(i) \otimes_{C(T)} \Gamma(i)) = \Gamma(\mathrm{id}) \otimes_{C(T)} \Gamma(\mathrm{id})$$

因此 $\Gamma(i) \otimes \Gamma(i)\mu_{E,F}$ 必须是单射。类似地，我们有

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma((E \oplus E^{\perp}) \otimes (F \oplus F^{\perp})) & \xleftarrow{\mu} & \Gamma(E \oplus E^{\perp}) \otimes_{C(T)} \Gamma(F \oplus F^{\perp}) \\
{\scriptstyle \Gamma(\rho)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma(\rho) \otimes \Gamma(\rho)} \\
\Gamma(E \otimes F) & \xleftarrow[\mu_{E,F}]{} & \Gamma(E) \otimes_{C(T)} \Gamma(F),
\end{array} \tag{5}$$

因此 $\Gamma(\rho)$ 和 $\Gamma(\rho)\otimes\Gamma(\rho)$ 都是满射。这就保证了 $\mu_{E,F}$ 也是满射。接下来需要证明的是，$\mu_{E,F}$ 是可伴随的（且是酉的），但这可由我们先前的工作得出。注意，图表 (4) 表明

$$\Gamma(i)\circ\mu_{E,F}=\mu\circ(\Gamma(i)\otimes_{C(T)}\Gamma(i)),$$

这意味着

$$\mu_{E,F}=\Gamma(\rho)\circ\Gamma(i)\circ\mu_{E,F}=\Gamma(\rho)\circ\mu\circ(\Gamma(i)\otimes_{C(T)}\Gamma(i))$$

因此，$\mu_{E,\ F}$ 是可伴随映射的复合，故其本身也是可伴随的（注意，可以选择 $E\oplus E^{\perp}$、$F\oplus F^{\perp}$ 和 $(E\oplus E^{\perp})\otimes(F\oplus F^{\perp})$ 上的厄米度量，使其与命题 A.4 相容，从而 $\mu$ 是酉的）。为验证 $\mu_{E,\ F}$ 是酉的，我们有

$$\begin{aligned}\mu_{E,F}^{\dagger}&=(\Gamma(i)\otimes_{C(T)}\Gamma(i))^{\dagger}\circ\mu^{\dagger}\circ\Gamma(\rho)^{\dagger}\\&=(\Gamma(i)^{\dagger}\otimes_{C(T)}\Gamma(i)^{\dagger})\circ\mu^{\dagger}\circ\Gamma(\rho)^{\dagger}\\&=(\Gamma(\rho)\otimes_{C(T)}\Gamma(\rho))\circ\mu^{-1}\circ\Gamma(i).\end{aligned}$$

但是，图表 (5) 表明

$$\mu_{E,F}^{-1}\circ\Gamma(\rho)=(\Gamma(\rho)\otimes_{C(T)}\Gamma(\rho))\circ\mu^{-1},$$

因此，在前面复合 $\Gamma(i)$，得到

$$\mu_{E,F}^{-1}=\mu_{E,F}^{-1}\circ\Gamma(\rho)\circ\Gamma(i)=(\Gamma(\rho)\otimes_{C(T)}\Gamma(\rho))\circ\mu^{-1}\circ\Gamma(i)=\mu_{E,F}^{\dagger}$$

这证明了 $\mu_{E,\ F}$ 是酉的。 □

**定理 A.7**。 截面空间构造 $E\mapsto\Gamma(E)$ 构成一个 C*-$\otimes$-范畴的幺半等价

$$\Gamma\colon \mathsf{Hilb}_{\mathsf{fd}}(T)\to\mathsf{Hilb}_{\mathsf{fgp}}\mathsf{C}(\mathsf{T}).$$

证明。 我们在引理 A.2 中看到，$\Gamma$是一个 †-函子。我们也知道，根据引理 A.6，$\eta$ 和$\mu_{E,F}$ 是酉同构。我们只需验证幺半函子的相容性条件。由$\mu_{E,F}$ 的构造，以及结合子 $\alpha$ 由简单张量重新加括号确定这一事实，显然结合图 (1) 可交换。事实上，对于 $e\in\Gamma(E)$、$f\in\Gamma(F)$和$g\in\Gamma(G)$，注意到

$$\begin{array}{ccc}(e\otimes_{C(T)}f)\otimes_{C(T)}g & \xrightarrow{\ \alpha\ } & e\otimes_{C(T)}(f\otimes_{C(T)}g)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{E,F}\otimes\mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\mu_{F,G}}\\ (e\otimes f)\otimes_{C(T)}g & & e\otimes_{C(T)}(f\otimes g)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{E\otimes F,G}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{E,F\otimes G}}\\ (e\otimes f)\otimes g & \xrightarrow[\ \Gamma(\alpha)\ ]{} & e\otimes(f\otimes g)\end{array}$$

接下来，我们需要检查图表 (2) 和 (3) 是否满足幺元性。对于 $h\in C(T)$ 和$e\in\Gamma(E)$，注意到

$$\begin{array}{ccc} h(t)\otimes_{C(T)} e(t) & \xrightarrow{\eta\otimes\mathrm{id}} & (t,h(t))\otimes_{C(T)} e(t) \\ {\scriptstyle\lambda_{\Gamma(E)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu_{(T\times\mathbb{C}),E}} \\ h(t)e(t) & \xleftarrow[\Gamma(\lambda_E)]{} & (t,h(t))\otimes e(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} e(t)\otimes_{C(T)} h(t) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta} & e(t)\otimes_{C(T)} (t,h(t)) \\ {\scriptstyle\rho_{\Gamma(E)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu_{E,(T\times\mathbb{C})}} \\ e(t)h(t) & \xleftarrow[\Gamma(\rho_E)]{} & e(t)\otimes (t,h(t)) \end{array}$$

因此， $\Gamma$ 是一个幺单的 †-等价 $\mathrm{Hilb}_{\mathrm{fd}}(T) \to \mathrm{Hilb}^{\mathrm{fgp}}(C(T))$ □

## References


[1] Yuki Arano、Kan Kitamura 和 Yosuke Kubota， *Tensor category equivariant KK-theory*，《数学进展》 **453** 2024 109848, 72 4776902 ( )，论文编号：。MR B. Blackadar，，[2] *Operator algebras* 《数学科学百科全书》第122卷，Springer-Verlag，柏林，2006年， $C^*$代数与冯·诺依曼代数理论，《算子代数与非交换几何》第III卷。MR 2188261[3] Jos´e R. Carri´on、James Gabe、Christopher Schafhauser、Aaron Tikuisis 和 Stuart White，*Classifying *-homomorphisms I: Unital simple nuclear $C^*$-algebras*，（arXiv: 2307.06480）。[4] Lawrence Conlon， *Differentiable manifolds*，第二版，《现代 Birkhäuser 经典著作》，Birkhäuser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，2008年。MR 2413709[5] John Dauns 和 Karl Heinrich Hofmann， *Representation of rings by sections*，《美国数学学会回忆录》第83卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1968年。MR 247487[6] Jacques Dixmier， *$C^*$-algebras*，《北荷兰数学丛书》第15卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹-纽约-牛津，1977年，由Francis Jellett从法文译出。MR 458185[7] Siegfried Echterhoff、S. Kaliszewski、John Quigg 和 Iain Raeburn，*A categorical approach to imprimitivity theorems for $C^*$-dynamical systems* **180** 2006 ，《美国数学学会回忆录》（），第850号，viii+169。MR 2203930[8] Samuel Evington、Sergio Gir´ *Equivariant $\mathcal{D}$-stability for actions* on Pacheco 和 *of tensor categories* 2401 14238 Corey Jones，，（arXiv: .）。[9] J. M. G. Fell， *The structure of algebras of operator fields*，《数学学报》106（1961年），233–280。MR 164248[10] GIOVANNI FERRER， *Foundations for operator algebraic tricategories*，（arXiv:2404.05193）。[11] James Gabe 和 G´abor Szab´o， *The dynamical Kirchberg-Phillips theorem*，《数学学报》232（ 2024 1, 1 77 4747811 ），[12] 第 – 期。MR 亚历山大·格罗滕迪克， *Pursuing stacks*，（arXiv: 2111.01000）。[13] ， *Le groupe de Brauer. I. Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses [MR0244269 (39 #5586a)]* ´ 9, 1995, 论班》，第卷，法国数学会，巴黎，第Exp. No. 290，199–219。MR 1608798 –[14] Allen Hatcher， *Vector bundles & K-theory* `https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/` ，，。[15] `VB.pdf` 2003 Aaron Kettner， *Cuntz–Pimsner algebras of partial automorphisms twisted by vector bundles*，，（arXiv: .）。*I: Fixed point algebra simplicity and the tracial state space* 2408 10047 [16] Kan Kitamura， *Actions of tensor categories on Kirchberg algebras*，（arXiv:2405.18429）。[17] May Nilsen， *The Stone-Čech compactification of* Prim $A$，《澳大利亚数学会通报》52（1995年），第 3, 377 383 1358694 –期。MR Iain Raeburn 和 Dana P. Williams，[18] *Morita equivalence and continuous-trace $C^*$-algebras*，《数学调查与专著》第60卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1998年。MR 1634408

[19] Marc A. Rieffel, *Morita equivalence for operator algebras*, 《算子代数与应用》第一部分（安大略省金斯顿，1980年），《纯数学专题讨论会论文集》第38卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1982年，第285–298页。MR 679708[20] Richard G. Swan, *Vector bundles and projective modules*, 美国数学会会刊**105** （ 1962 264 277 143225 ），–。MR N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C*-algebras*, 《牛津科学出版物》，[21] 克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1993, 1222415 友好的入门读物。MR [22] Dana P. Williams, , *Crossed products of C*-algebras* 《数学调查与专著》第134卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2007年。MR 2288954

Department of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, OH 43210
*Email address*: faurot.3@osu.edu

*Email address*: ferrer.40@osu.edu