arXiv:2611.27892v1 [math.OA] 20 Nov 2026

临界伊辛与 Temperley–Lieb–Jones态：锥Haag对偶性与平凡代数对象

David E. Evans

2026年11月23日

摘要

我们在融合范畴对称性的算子代数框架中，计算了两个临界伊辛态的代数对象。边界子代数是 Pauli链的偶部，其 DHR范畴是环面码。我们研究两个模型。第一个是 Araki–Evans 以及 Evans–Lewis 的二维经典伊辛模型，通过其行转移矩阵进行研究。第二个是 Araki 和 Araki–Matsui 的横场伊辛链。对于临界转移矩阵态和临界链的基态，代数对象恰好是张量单位。该计算使用了显式的扇区代表，由此重数成为 Araki 和 Evans 关于福克态偶限制的等价判据。在临界性下，半直线对易子不是希尔伯特–施密特的，这一点由 Araki–Evans 以及 Araki–Matsui 发现，并且这排除了两个玻色扇区。Foit扭曲对偶性为任意纯准自由态给出锥Haag对偶性。在临界性下，半直线代数是因子，半直线场子空间是标准的。这两个态通过一个具有指数衰减局域性界的分次自同构相互关联。在第二部分，我们研究 $\delta = 2\cos(\pi/(k+2))$ 处的临界 Temperley–Lieb–Jones 链。对于每个 $k \geq 2$，由真空块选出的基态都是纯态，并且在偶部的 Drinfeld中心中具有平凡代数对象。在临界量子随机簇模型中，所有尺度上都存在分离环，这迫使每个带荷平移系数发生衰减。在 $k = 2$ 处，这恢复了临界伊辛链。

目录

1 引言 **2**

I 伊辛态 **4**
2 偶代数与两个临界态 **4**
3 纯准自由态的半直线对偶 **8**
4 代数对象的直接计算 **9**
5 共轭与两种动力学 **13**
6 坦普利–利布态及其共形解释 **15**
II 指标小于四的 Temperley–Lieb–Jones 链 **17**
7 Temperley–Lieb–Jones 链 **17**
8 环表示与无限体积态 **18**

9 纯性
3110 仿射模与缝合 11 带电衰减与代数对象 32

39

12 概述 41

A 临界半直线子空间的标准性 42

1 引言

物理边界包含关系 $B \subseteq A$ 将范畴数据赋予无限自旋链上的对称态 [20]。态 ϕ 其限制态到 B 是纯的，并确定一个连通代数对象 $H_\phi \in \mathrm{DHR}(B)$。拓扑态是指其代数对象为拉格朗日代数的态。该框架也预测了无能隙态；从范畴意义上说，这些态的代数对象与拉格朗日代数并非 Morita 等价。对伊辛模型的显式计算为这些定义在一个熟悉的临界系统中提供了检验。

我们取

$$A^P = \bigotimes_{j\in\mathbb{Z}} M_2(\mathbb{C}), \qquad B = (A^P)^\Lambda, \qquad \Lambda = \bigotimes_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ad}(\sigma_z^{(j)}).$$

该包含关系是一个物理边界包含，其对称性范畴为 $\mathrm{Vec}(\mathbb{Z}_2)$，并且

$$\mathrm{DHR}(B) \simeq \mathcal{Z}(\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}_2)),$$

环面码范畴 [30, 20]。其简单对象为$\mathbf{1}$、e、m、$f = em$，其中 e、m 是玻色子，而 f 是费米子。我们选取 e 标记无序扇区，并用 m 标记自旋-荷扇区。精确的代表元在第4节中确定。

1.1 两种伊辛模型

两种不同的伊辛模型在 A^P 上给出态。二者都用格点 $j \in \mathbb{Z}$ 处的泡利矩阵$\sigma_x^{(j)}$、$\sigma_y^{(j)}$、$\sigma_z^{(j)}$表示，而 Λ 是全局自旋翻转 $\sigma_x^{(j)} \mapsto -\sigma_x^{(j)}$, $\sigma_z^{(j)} \mapsto \sigma_z^{(j)}$。

二维经典模型。Araki–Evans 和 Evans–Lewis [7, 22]考虑了 $\mathbb{Z}^2$ 上的经典伊辛模型，其自旋为 $\xi_{j,\,k} = \pm 1$，能量为

$$H(\xi) = -\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \big(J_1\,\xi_{j,k}\xi_{j,k+1} + J_2\,\xi_{j,k}\xi_{j+1,k}\big), \qquad J_1, J_2 > 0,$$

其中 k 标记行。令 $K_i = \beta J_i$，并通过 $\tanh K_1^* = e^{-2K_1}$定义 K_1^*。将一行中的自旋与 $\sigma_x^{(j)}$的特征值对应起来，则逐行传递矩阵在相差一个正标量的意义下为，

$$T = Y^{1/2} X Y^{1/2}, \qquad Y = \exp\Big(K_2 \sum_j \sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(j+1)}\Big), \qquad X = \exp\Big(K_1^* \sum_j \sigma_z^{(j)}\Big), \tag{1}$$

在有限行上 [22, (2.4)]。有限体积传递矩阵的归一化佩龙–弗罗贝尼乌斯向量态收敛到一个 Λ-不变态 ϕ_β，属于 A^P，由命题 2.1 和 (17) 明确给出。临界逆温度 β_c 由 $K_1^* = K_2$ 给出，即 $\sinh(2K_1)\sinh(2K_2) = 1$。Araki 和 Evans 证明，$\phi_\beta$ 的 GNS表示在 $\beta \le \beta_c$ 时是因子的，在 $\beta > \beta_c$ [7, 时则具有二维中心，见定理 1]。他们的证明通过 [7, 定理 2 以及引理 5.1、5.2]，表明，ϕ_β 在 $\beta \le \beta_c$ 时是纯态，而在 $\beta > \beta_c$ 时是两个不等价纯态的平均。在临界性之外，这些纯态是一维动力学的基态，该动力学由传递矩阵确定；见命题 6.2]，当 $\beta > \beta_c$ 时谱隙为 $4(K_2 - K_1^*)$，当 $\beta < \beta_c$ [6, 时谱隙为 $2(K_1^* - K_2)$。我们记作 $\phi_c = \phi_{\beta_c}$。

量子链。Araki 和 Araki–Matsui [5, 8] 确定……的基态 XY链。其伊辛情形是横场哈密顿量

$$H_\lambda = -\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(j+1)} + \lambda\,\sigma_z^{(j)}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

这正是 [8, (1.1)] 的情形 $J = 1/4$, $\gamma = 1$ 。该无穷和规定的是一种相互作用及其动力学，而不是 A^P 的一个元素。根据 [8, 定理 1 和命题 3.3]， H_λ 在 $|\lambda| \geq 1$ 时具有唯一的基态，且该基态是纯的；而在 $0 < |\lambda| < 1$ 时，它恰好具有两个极端基态，它们是纯的，并由 Λ相互交换。单粒子能量为 $\varepsilon_\lambda(\theta) = (1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2)^{1/2} \geq |1 - |\lambda||$（见命题 2.2 的证明）。下确界 $|1 - |\lambda||$ 在 $\lambda > 0$ 时于 $\theta = 0$ 处取得，在 $\lambda < 0$ 时于 $\theta = \pi$ 处取得，因此单粒子谱恰在 $|\lambda| \neq 1$ 时具有正能隙。临界哈密顿量为

$$H_1 = -\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(j+1)} + \sigma_z^{(j)}), \tag{3}$$

并且 $\phi_\sharp$ 表示其唯一的基态。

两个临界态。 因此 ϕ_c 属于 β_c 处的经典模型，而 $\phi_\sharp$ 属于 $\lambda = 1$处的量子链。两者都是纯态，并且在 Λ 上具有 A^P-不变性，且在 B 上为纯态。对于任何有限的临界耦合，它们都彼此不同。量子链态在 Kramers–Wannier 对偶下保持不变，而转移矩阵态则不然（第 2 节）。态 $\phi_\sharp$ 是临界转移矩阵态的$K_2 = K_1^* \to 0$ 各向异性极限（注 5.4）。

1.2 结果

态 ϕ 在 A^P 上的限制态在 B 上为纯态，会诱导一个 DHR(B) 双模 H_ϕ，即 $L^2(B, \phi|_B)$ 的内部端，它是一个连通代数对象（第 2.1 节）。我们分析这两个临界态对应的代数对象。

定理 1.1（主要结果）。 对于这两个临界态，

$$H_{\phi_c} = H_{\phi_\sharp} = \mathbf{1}.$$

到 B 的两个限制态均满足零展宽的锥*Haag*对偶性，且它们的半直线可观测代数是因子。存在 A^P的一个分次、平移协变自同构 α ，其对 α 与 α^{-1}具有指数衰减的局域性界，使得

$$\phi_\sharp = \phi_c \circ \alpha.$$

该计　　算代数对象以及对偶定理均与此共轭无关 y.

扇区计算是要点。在 H_ϕ 中的每一重数记录一个DHR自同构是否可在 B 的、由该态定义的不可约表示中实现。借助显式扇区代表，这些重数恰好是Araki和Evans关于Fock态到偶代数之限制态的等价判据 [7, 引理4.2、4.3与定理 4]。在临界性下，半直线对易子不是希尔伯特–施密特的：对转移矩阵态由Araki–Evans得出，对量子链由Araki–Matsui得出，且两个玻色扇区均被排除。这直接确定了代数对象，而无须对所有Morita类进行分类，也无须从某一特定共轭的失效进行推断。

锥Haag对偶性有一个独立且更为一般的解释。Foit定理适用于每一个闭实单粒子子空间。显式地过渡到偶真空扇区，即可对任意纯准自由态的半直线可观测代数得到对偶性。一般位置并非必需

于该论证。尽管如此，我们仍对这两个临界投影确立一般位置。它表明半直线实子空间是标准的，从而福克真空对相应的场代数是循环且分离的。对于 ϕ_c，该证明归结为：具有奇数阶极点的有理函数不可能存在亚纯平方根。标准性并不能决定半直线代数的类型。在临界性下，我们由排除玻色扇区的同一半直线跳跃另行证明，半直线场代数与可观测量代数均为因子（命题 4.4）。

临界量子链态在 Temperley–Lieb 表示中同样是显式的。令m_{2j-1}、m_{2j} 为格点 j 处的两个马约拉纳算符（第2节）。则

$$e_k = \frac{1}{2}(1 + i m_k m_{k+1}), \qquad \phi_\sharp(e_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$

其马约拉纳协方差在非零奇数滞后上为 $2/(\pi n)$，在非零偶数滞后上为零。这些公式在范畴框架内识别出已知的临界伊辛基态。将其连续统诠释为自由马约拉纳／伊辛理论属于既有背景，而非仅由等式 $H_\phi = \mathbf{1}$ 得出的推论。

该哈密顿量结果推广到自由费米子之外。对于 $k \geq 2$ 与 $\delta = 2\cos(\pi/(k+2))$，令 C_k 为酉 Temperley–Lieb–Jones 范畴的偶部，B_k 为融合链 $\bigcup_n \mathrm{End}_{\mathcal{C}_k}(Y^{\otimes n})$，$Y = X \otimes X$，从而 $\mathrm{DHR}(B_k) \simeq \mathsf{Z}(\mathsf{C}_k)$。在 $k = 2$ 处，$B_2 = B$ 与 $-\sum_i e_i = H_1 +$ 为常数（注 7.1）。

设 ω_k 为有限体积哈密顿量的 Perron–Frobenius 基态向量在真空块$-\sum_i e_i$ $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, X^{\otimes 2N})$上的极限；这些空间是从张量单位出发的态射空间（第 7节）。

定理 1.2。 对于每个 $k \geq 2$，态 ω_k 是纯态且平移不变，并且 $H_{\omega_k} = \mathbf{1}$ 属于 $Z(C_k)$。当 $k = 2$ 时，$\omega_2 \circ \mathsf{E} = \phi_\sharp$。

其机制不同于定理 1.1。有限体积态是临界量子随机簇模型在 $q = \delta^2$ 处的期望。带荷平移系数变为仿射 Temperley–Lieb 模的矩阵系数；每个分隔两个插入的环都会带来一个小于一的因子，而穿越估计则给出对数数量级的这类环。因此，衰减排除了所有非平凡扇区。在 $k = 2$ 处，这些系数就是序、无序与费米子关联函数。

第一部分讨论伊辛态。第2 节确定态与符号约定。第3节证明一般的半直线对偶。第4 节计算代数对象。第5节证明共轭并比较动力学，第6 节给出 Temperley–Lieb 公式。第二部分讨论 Temperley–Lieb–Jones 链。第7 节介绍链及情形 $k = 2$，第8–9节构造该态，第10–11 节证明定理1.2，第12 节概述哪些结果可以推广，哪些问题仍未解决。附录A 确立半直线标准性。

第一部分

伊辛态

2 偶代数与两个临界态

2.1 范畴不变量

记 $\mathsf{E} : A^P \to B$ 为平均化条件期望，

$$\mathsf{E}(a) = \frac{1}{2}(a + \Lambda(a)).$$

A^P 上的对称态恰好是某个态 ψ 在 B上的 $\psi\circ$E。若 ψ 是纯态，则其 GNS表示的内部端是一个连通 Q系统 [20]

$$H_\psi = \underline{\mathrm{End}}(L^2(B,\psi)) \in \mathrm{DHR}(B). \tag{4}$$

当 $\phi = \psi\circ$E时，我们用 H_ϕ 表示同一对象。一个态若 H_ϕ 是辫交换的，则为局域；若它是拉格朗日的，则为拓扑；若它不与拉格朗日代数Morita 等价，则为无隙 [20, 第 5]节。后两个术语是范畴论定义。关于谱隙的断言需要指定的动力学。

在环面码中，连通交换Q系统为$\mathbf{1}$、 $\mathbf{1}\oplus e$和 $\mathbf{1}\oplus m$，后两者是拉格朗日的。与$\mathbf{1}$ Morita 等价的连通代数是某个简单对象的内部端 $X\otimes X$ X [40]；由于所有简单对象均可逆，此处它为 $\mathbf{1}$ 。因此张量单位是局域的，并且是范畴意义上的无能隙。没有拉格朗日性质的交换性并不能使态有隙。

2.2 正则反对易关系与Pauli约定

设 A^F 为以c_j, c_j^*为生成元的CAR代数，并令

$$a_j = c_j + c_j^*, \qquad b_j = -i(c_j - c_j^*), \qquad m_{2j-1} = a_j, \quad m_{2j} = b_j.$$

m_k 是满足以下条件的自伴酉元：$\{m_k$、 $m_l\} = 2\delta_{kl}$。偶代数的Jordan–Wigner识别给出

$$B = (A^P)_+ = (A^F)_+, \qquad \sigma_z^{(j)} = ia_jb_j, \quad \sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(j+1)} = ib_ja_{j+1}. \tag{5}$$

对于格点中的区间或射线 I， B_I 是由 I中的格点的Majorana 算子生成的偶CAR代数。这与支撑在 I中的Pauli可观测量的不动点代数一致。

对于自对偶CAR记法，取$\mathcal{K} = \ell^2(\mathbb{Z})\oplus\ell^2(\mathbb{Z})$,

$$C(f,g) = \sum_j (c_j^* f_j + c_j g_j), \qquad \mathfrak{c}(f,g) = (\bar g, \bar f).$$

这里， $\mathfrak{c}$ 是实现伴随的反酉对合， $C(\mathfrak{c}h) = C(h)^*$。我们采用对其第二个变量线性的内积。基投影是一个正交投影 E ，满足$\mathfrak{c}E\mathfrak{c} = 1 - E$。其纯准自由态由下式确定：

$$\omega_E(C(h)^*C(k)) = \langle h, (1-E)k\rangle. \tag{6}$$

因此， E 是在约定 $C(f,\ g) = c^*f + cg$下的占据负能投影。等价地， $\omega_E(C(h)C(k)^*) = \langle k,\ Eh\rangle$。特别地， $\omega_E(c_j^*c_j) = (E_{11})_{jj}$。与 $\mathfrak{c}$ 对易的酉元 v 诱导 $\tau(v)C(h) = C(vh)$，并且

$$\omega_E\circ\tau(v) = \omega_{v^*Ev}. \tag{7}$$

通过将偶CAR代数与 $B = (A^P)^\Lambda$进行 Jordan–Wigner识别（5），限制态 $\psi_E = \omega_E|_B$ 是 B上的一个态。其对称 Pauli扩张是 $\phi_E = \psi_E\circ$E上的态 A^P，其中 E 是第 2.1节中的平均化条件期望。它是唯一一个 Λ-不变态，且 A^P限制为 ψ_E。

限制态 ψ_E 是纯态，因为纯偶态限制到不动点代数后仍是纯态 [7, 引理 4。1]纯性会从纯偶态传递到其在不动点代数上的限制态，但不会从 ψ_E 向上延拓到 ϕ_E 在 A^P上。对于 $\beta > \beta_c$ 转移矩阵态ϕ_β ，其偶限制为纯态，并且是两个不等价纯态的平均值，正如第 1节中所述。

2.3 临界符号

在傅里叶表示中，定义

$$V(\Theta)=\begin{pmatrix}\cos\Theta & -i\sin\Theta\\ i\sin\Theta & -\cos\Theta\end{pmatrix},\qquad E(\Theta)=\frac{1}{2}(1-V(\Theta)). \tag{8}$$

基投影条件成立，当且仅当 $\cos\Theta$ 为偶函数且 $\sin\Theta$ 为奇函数，或者等价地$\Theta(-\theta)\equiv-\Theta(\theta)\pmod{2\pi}$。

对于转移矩阵态，回顾第 1.1 节，临界性为 $K_1^*=K_2=:K$，并令 $z=\tanh K\in(0,1)$。在键对称约定下，临界符号为

$$\Theta_\sharp(\theta)=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\theta,\qquad \chi_z(\theta)=\arg(1-z^2e^{i\theta}), \tag{9}$$

$$\Theta_c(\theta)=\Theta_\sharp(\theta)+\chi_z(\theta),\qquad E_\sharp=E(\Theta_\sharp),\quad E_c=E(\Theta_c), \tag{10}$$

对于 $-\pi<\theta<\pi$，各个端点处的取值无关紧要。这里 χ_z 是连续奇分支，且满足 $\chi_z(0)=0$。命题 2.1 直接推导出该符号并选定其分支，因为仅凭奇性无法区分投影与其补投影。公式中也允许 $z=0$，其中 $E_c=E_\sharp$表示当 $K\downarrow0$时的极限态。

命题 2.1 (转移约定与占据投影)。对于 $K>0$，取临界时的键对称转移矩阵 (1)，即 $K_1^*=K_2=K$，对有限区间求和并采用开边界条件。其归一化佩龙–弗罗贝尼乌斯向量态在每个局域泡利可观测量上收敛到具有占据投影 $E_c=(1-V(\Theta_\sharp+\chi_z))/2$的准自由态的对称扩张。

这是 Araki 和 Evans 构造的临界情形 [7, 第 3] 节。极限是单粒子生成元 H 的 [7, (3.5)], 的负谱投影所对应的福克态的偶限制态，其符号为 [7, (3.7)–(3.9)], ，而取极限的过程用到了[7, 引理 3.1–3。3]。我们按本文的约定给出推导，因为这确定了下文$\Theta_\sharp+\chi_z$ 所用的分支。

证明。设 $n(\theta)=\cos\theta\,\sigma_3+\sin\theta\,\sigma_2$, $c_K=\cosh(2K)$, $s_K=\sinh(2K)$, 且 $A_\theta=c_K-(c_K-1)\cos\theta$。场项和键项的正则反对易关系对易子给出共轭矩阵

$$U_T=e^{-Kn(\theta)}e^{2K\sigma_3}e^{-Kn(\theta)}=\cosh\gamma\,1+s_K(\sigma_3-A_\theta n(\theta)),\qquad \cosh\gamma=c_K^2-s_K^2\cos\theta.$$

有效单粒子哈密顿量为 $h_{\text{eff}}=-\log U_T$。令 $h_{\text{eff}}/\gamma=v_3\sigma_3+v_2\sigma_2$，并设 $\zeta=e^{i\theta}$ 和 $a=z^2$，可得

$$v_3+iv_2=\frac{s_K(A_\theta\zeta-1)}{\sinh\gamma},\qquad A_\theta\zeta-1=\frac{(\zeta-1)(1-a\zeta)}{1-a}.$$

此外

$$\sinh\gamma=\frac{2s_K|\sin(\theta/2)|\,|1-a\zeta|}{1-a}.$$

因此，在 $(-\pi,\ \pi)$ 上几乎处处，

$$v_3+iv_2=\frac{\zeta-1}{2|\sin(\theta/2)|}\frac{1-a\zeta}{|1-a\zeta|}=e^{i\Theta_\sharp(\theta)}e^{i\chi_z(\theta)}.$$

因此，$h_{\text{eff}}=\gamma V(\Theta_\sharp+\chi_z)$ 的负谱投影为 E_c。我们如下说明其与热力学转移矩阵态的对应关系。

令 $\Lambda_N = [-N, N]$，令 P_N为投影到这些格点上的两个自对偶分量的投影，并令 T_N 为所示的自旋转移矩阵，其中只包含位于 Λ_N 内的键。另将符号为 $n(\theta)$ 的 Laurent 算子记为 n ，并令

$$n_N = P_N n P_N, \qquad s_N = P_N \sigma_3 P_N, \qquad U_N = e^{-K n_N} e^{2K s_N} e^{-K n_N}.$$

这里的 U_N通过在 $(1-P_N)\mathcal{K}$ 上取恒等算子来扩展。有限 CAR 计算给出 $T_N C(f) T_N^{-1} = C(U_N f)$，其中 $f \in P_N \mathcal{K}$。对这一共轭作用取对数，得到

$$[-\log T_N, C(f)] = C(h_N f), \qquad h_N = -\log U_N.$$

事实上，在 T_N 的特征基中，其正特征值为 t_i；$\log(\mathrm{Ad} T_N)$ 和与 $\log T_N$的对易子作用于矩阵单位 e_{ij}时，均相当于乘以 $\log t_i - \log t_j$。因此， $-\log T_N$是符号为 h_N的二次哈密顿量（相差一个标量）。其基态向量是 T_N的主特征向量。

在乘积 σ_x 基下，场因子的矩阵元严格为正，而键因子是正对角矩阵。因此，根据 Perron–Frobenius 定理，该特征向量唯一。特别地，$h_N|_{P_N\mathcal{K}}$没有零模，且有限体积向量态是准自由态，其占据投影为 $E_N = \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(h_N)|_{P_N\mathcal{K}}$。此外， T_N与自旋翻转 $\prod_{j\in\Lambda_N} \sigma_z^{(j)}$对易，因此其唯一的向量态在自旋翻转下不变。

算子 n_N 和 s_N 强收敛到 n 和 σ_3 ，且范数均不超过一。因此，$U_N \to U_T$ 强收敛，并具有共同的谱界

$$e^{-4K} 1 \le U_N \le e^{4K} 1.$$

连续函数演算给出 $h_N \to h_{\mathrm{eff}}$ 强收敛。乘子 h_{eff} 在$\mathcal{K}$中没有零特征向量。事实上， $\gamma(\theta) > 0$ ，除 $\theta = 0$处外均成立，而该集合的测度为零。因此，谱投影强收敛定理给出

$$\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(h_N) \longrightarrow E_c \quad \text{strongly on } \mathcal{K}.$$

因此，具有固定有限支撑的所有二点函数均按约定（6）收敛，而 Wick 规则给出每个局域偶 CAR 代数上的收敛，进而在每个 B_I上收敛。自旋翻转不变性使所有局域奇 Pauli 期望值均为零。因此，完整的局域极限为 $\psi_{E_c} \circ \mathsf{E} = \phi_c$，如所述。 □

记 $\omega_c = \omega_{E_c}$ 和 $\omega_\sharp = \omega_{E_\sharp}$。令 $\psi_c = \psi_{E_c}$， $\psi_\sharp = \psi_{E_\sharp}$，并令 ϕ_c， $\phi_\sharp$ 表示它们的对称 Pauli 扩张。在 B 上的纯性由 [7, 引理 41]给出。临界自旋扩张的纯性也可由第 4节的扇区计算得出。

2.4 基态选择与 Kramers–Wannier 对偶

命题 2.2 （临界量子链态）。 态 $\phi_\sharp$ 是(3)的唯一基态。特别地，它在 A^P 上是纯态。

这是 $J = 1/4$， $\gamma = 1$， $\lambda = 1$ 属于 [8, 定理 1 和命题 3。3]。证明记录了基态与 $\psi_\sharp \circ \mathsf{E}$ 在我们约定中的对应关系。

证明。 在约定（5）–（6）中， H_λ 在（2）中的单粒子符号为

$$h_\lambda(\theta) = (\cos\theta - \lambda)\sigma_3 + \sin\theta\, \sigma_2,$$

其特征值为 $\pm\varepsilon_\lambda(\theta)$、 $\varepsilon_\lambda(\theta) = (1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2)^{1/2}$。在 $\lambda = 1$ 处，其特征值为 $\pm\varepsilon_\sharp(\theta)$，其中 $\varepsilon_\sharp(\theta) = 2|\sin(\theta/2)|$，并且

$$\frac{h_1(\theta)}{\varepsilon_\sharp(\theta)} = -|\sin(\theta/2)|\sigma_3 + \mathrm{sgn}(\theta)\cos(\theta/2)\sigma_2 = V(\Theta_\sharp(\theta))$$

几乎处处成立。因此，其负能投影为 $E_\sharp$。由于 $\varepsilon_\sharp > 0$ 几乎处处成立，单粒子生成元具有绝对连续谱，且 0 不是特征值。根据 [8,定理 3(1)], ， A^F 的准自由动力学因而有唯一的基态，即福克态；在该态中，负能单粒子向量对应的场湮灭真空。按约定 (6)，该态为 $\omega_\sharp$。任一泡利动力学基态在 B 上的限制态，都是共同偶动力学 [8, 的基态（见第 3] 节）。对于绝对连续谱，偶动力学有唯一基态，即限制态 $\omega_\sharp|_B = \psi_\sharp$ [8, 定理 4(1)(α)]。一个 Λ-不变态由其在 B上的限制态唯一确定，因此唯一的 Λ-不变基态为 $\psi_\sharp \circ \mathsf{E} = \phi_\sharp$ [8, 命题 3.2]。对于 $|\lambda| \geq 1$，该态是纯态，也是泡利动力学的唯一基态 [8, 命题 3.3(1)]，另见 [5]。

□

Kramers–Wannier 对偶是由 B 定义的有界扩散自同构:

$$\kappa(\sigma_z^{(j)}) = \sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(j+1)}, \qquad \kappa(\sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(j+1)}) = \sigma_z^{(j+1)}. \tag{11}$$

它的平方是格点平移。在 CAR 表示中，它是 $\tau(W)$ [22, 第 3], 节的限制态，其中

$$W(\theta) = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1-e^{i\theta} & 1+e^{i\theta} \\ -1-e^{i\theta} & e^{i\theta}-1 \end{pmatrix}, \qquad W^2 = e^{i\theta}1.$$

直接进行矩阵乘法可得

$$W^* V(\Theta) W = V(\pi - \Theta + \theta). \tag{12}$$

因此， $\psi_\sharp \circ \kappa = \psi_\sharp$，而 KW 将角度 $\Theta_c = \Theta_\sharp + \chi_z$ 变为 $\Theta_\sharp - \chi_z$。对于 $z > 0$，它们定义了不同的态。事实上，它们的 Fock 表示并不等价。它们的基投影之差是一个非零乘法算子，因此不是希尔伯特–施密特算子 [4]。它们的偶真空表示等价，将意味着诱导出的完整 CAR 表示等价，因此 ψ_c 也不是 κ-协变的。

注 2.3 （不变性无法选定基态）。 两者 $E_\sharp$ 和 $1-E_\sharp$ 都是被 W固定的基投影，且 $1-E_\sharp = E$（Θ） 对于奇角 $\Theta = \theta/2 -$ （$\pi/2$）sgn θ。因此，奇性和 KW 不变性无法刻画 $\phi_\sharp$。命题 2.2 通过单粒子能量的符号选定它。也可以根据第6节中的完整协方差检验 KW 不变性。仅仅知道生成元的期望值相等是不够的。

3 纯准自由态的半直线对偶

对于 B 上的纯态 ψ，有界扩散锥豪格对偶意味着存在某个 $R \geq 0$，使得

$$\pi_\psi(B_{L^c})' \subseteq \pi_\psi(B_{L^{(R)}})'' \quad \text{in } \mathcal{B}(L^2(B,\psi))$$

对每条射线 L。这里 $L^{(R)}$ 是格点晶格中 L 的 R-邻域。由于 B 是单的，这个条件意味着 H_ψ 是局域的 [20, 定理 5。6]。对于纯准自由态，与 $R = 0$ 的更强等式可直接由扭曲对偶推出。

定理 3.1 (可观测量对偶性)。 设 ω_E 是正则反对易关系链上的任意纯准自由态，且$\psi_E = \omega_E|_B$。那么，对于每条物理格点射线 L,

$$\pi_{\psi_E}(B_{L^c})' = \pi_{\psi_E}(B_L)'' \quad on\ L^2(B,\psi_E).$$

证明。 设 (π_E，$\mathcal{H}_E$，Ω_E) 为 ω_E 的 Fock 表示，且 P 是实现分次的自伴酉算子，其中 $P\Omega_E = \Omega_E$。真空是偶子空间中 $\pi_E(B)$ 的循环向量

$\mathcal{H}_E^+ = \ker(P-1)$，因此 $\mathcal{H}_E^+ = L^2(B,\ \psi_E)$。对于一组 S 马约拉纳指标，令 $A^F(S)$ 为这些指标上的 CAR 代数。在完整的 Fock 表示中，置

$$M_S = \pi_E(A^F(S))'', \qquad M_{S,+} = M_S \cap \{P\}', \qquad p_+ = \frac{1+P}{2}.$$

宇称平均与有界强逼近给出$M_{S,\ +} = \pi_E(A^F(S)_+)''$，从而将这些不动点冯·诺伊曼代数与局域可观测代数联系起来。

纯性提供一个复单粒子希尔伯特空间，其底层实希尔伯特空间即为实马约拉纳空间，并带有其原有的实内积。与 S 和 S^c 相关联的闭实场子空间因此互为实正交补。Foit抽象扭曲对偶定理 [24, 定理 2.4(v)]给出

$$M_S' = Z M_{S^c} Z^*, \tag{13}$$

其中 Z i 是Klein扭曲，即 P的一个酉函数。无需标准性假设。

我们明确过渡到偶真空扇区。冯·诺伊曼代数之交的交换子恒等式给出

$$M_{S,+}' = (M_S \cap \{P\}')' = M_S' \vee \{P\}'' = M_{S^c} \vee \{P\}''.$$

由于 p_+ 与$M_{S,\ +}$对易，其约化交换子为

$$(M_{S,+}|_{\mathcal{H}_E^+})' = p_+(M_{S^c} \vee \{P\}'')p_+|_{\mathcal{H}_E^+}. \tag{14}$$

代数 M_{S^c}由 P归一化。因此，$x + yP$的线性张成（其中 $x,\ y \in M_{S^c}$）在 $M_{S^c} \vee \{P\}''$中强稠密。此外，

$$p_+ x p_+ = p_+ \frac{x + PxP}{2} p_+.$$

因此，(14) 的右侧等于 $M_{S^c,\ +}|_{\mathcal{H}_E^+}$，它是弱闭的。取 S 包含射线上每个格点的两个马约拉纳算子，即可证明该结论；交换射线及其补投影，则得到所示的方向。

□

推论 3.2. ψ_c 和 $\psi_\sharp$ 均满足锥*Haag*对偶性，且 $R = 0$。它们的代数对象是局域的。

备注 3.3（标准性与区域约定）。若将可观测代数定义为整个集合上的 CAR代数的偶部，则该证明适用于任意集合 S。对于非连通集合，这一定义包含来自不同连通分支的奇场乘积，因此可能大于各连通分支的偶代数所生成的代数。我们只使用物理射线，因此无需对非连通区域作任何识别。

单粒子投影的一般位置并非定理 3.1 的前提条件，而是有另一项推论。半直线场子空间是标准的，福克真空对于其场代数是循环且分离的。我们在附录 A 中证明了临界态的这一附加性质。标准性和整体纯性都不能确定半直线冯·诺依曼代数的类型。临界半直线代数的因子性另在命题 4.4 中证明。

4 对代数对象的直接计算

对于一个基投影 E，记 π_E^+ 为 B 在偶数福克空间 $\mathcal{H}_E^+ = L^2(B,\ \psi_E)$ 上的表示，该表示见定理 3.1的证明。本节中，扇区的实现始终指在 π_E^+中的实现，而完整 CAR 自同构的实现则指在 $\mathcal{H}_E$ 上的实现。

4.1 扇区代表与奇偶性

设 Q_+ 和 Q_- 分别为格点 $j \geq 1$ 和 $j \leq 0$ 上的投影，其中包括两个自对偶分量。定义

$$\theta_- = Q_+ - Q_-, \qquad \Lambda_- = \tau(\theta_-).$$

令 $q = c_1 + c_1^*$ 为位于该割右端点的奇自伴酉元。四个扇区由下式表示：

$$\rho_1 = \mathrm{id}, \qquad \rho_e = \Lambda_-|_B, \qquad \rho_f = \mathrm{Ad}(q)|_B, \qquad \rho_m = \rho_f \rho_e, \qquad f = em. \tag{15}$$

这里 e 是无序扇区，而 m 是自旋-荷扇区。采用这些标记后，推论 4.5 中的高温端点态具有代数对象 $\mathbf{1} \oplus e$。因此，相对于e和 m，我们的标记互换了 [20,例 528]。

为完整起见，(15) 中的自同构对于区间网 B_I 是局域且可输运的。由 q 共轭得到的变换，在格点 1 以外的每个偶局部代数上都是恒等变换。半直线宇称在完全位于该割任一侧的每个偶局部代数上都是恒等变换。将马约拉纳 $q = a_1$ 移至另一个马约拉纳 m_k，可由偶酉算子 $m_k q \in B$ 实现，因为 $\mathrm{Ad}(m_k) = \mathrm{Ad}(m_k q) \circ \mathrm{Ad}(q)$。将割移动穿过有限个完整格点，可由这些格点的格点宇称算子的乘积实现 $\sigma_z^{(j)} = i\, a_j b_j$。对于可逆扇区 ρ，自编织 $\varepsilon(\rho, \rho) \in \mathrm{End}(\rho^2)$ 是一个标量，且与所选的局域化输运算子无关。使用上述输运算子，可得 $\varepsilon(\rho_f, \rho_f) = -1$ 以及 $\varepsilon(\rho_e, \rho_e) = +1$。半直线宇称是外自同构。它会改变 $i m_j m_k$ 的符号，其中 j 可任意远在左侧，而 k可任意远在右侧；与此同时，任意固定的局部偶算子都与这些双线性算子对易。因此，通过局部算子逼近可排除 B中的内实现算子。由此，它们就是 DHR(B) 的四个不同可逆扇区。其余的非平凡扇区 $m = ef$ 是另一个玻色子。在下文第 2], 节 [5], 所述的 [7, 交叉积 Jordan–Wigner 实现中，辅助自伴酉算子 T 实现 Λ_- 和 $\sigma_x^{(1)} = Tq$。因此

$$\mathrm{Ad}(\sigma_x^{(1)})|_B = \rho_m, \qquad A^P = B \rtimes_{\rho_m} \mathbb{Z}_2. \tag{16}$$

命题 4.1（重数）。设 E 是一个基投影，且 $X_E = L^2(B, \psi_E)$。 n

$$H_{\psi_E} = \underline{\mathrm{End}}(X_E) \cong \bigoplus_{a \in \{1,e,m,f\}} N_a\, a, \qquad N_a = \dim \mathrm{Hom}_B(\pi_E^+ \circ \rho_a, \pi_E^+) \in \{0, 1\},$$

当且仅当 $\psi_E \circ \rho_a$ 与 ψ_E 等价时，且 $N_a = 1$。记 $\sigma(E, F) = (-1)^{\dim(E \wedge (1-F))}$ 为满足 $E - F$ 希尔伯特–施密特 *[7, (5.3)]* 的基投影的 $\mathbb{Z}_2$-指标。于是

1. $N_f = 0$。
2. 当且仅当 $E - \theta_- E \theta_-$ 是希尔伯特–施密特且 $\sigma(E, \theta_- E \theta_-) = 1$ 时，$N_e = 1$。
3. 当且仅当 $E - \theta_- E \theta_-$ 是希尔伯特–施密特且 $\sigma(E, \theta_- E \theta_-) = -1$ 时，$N_m = 1$。

证明。重数公式是内部端的定义，其中扇区作用由与 ρ_a复合来实现。所有四个代表元都是对合，因此双模约定中可能出现的逆不会造成影响。由于 ρ_a 是自同构，且 π_E^+ 不可约，根据引理 4.1], $\pi_E^+ \circ \rho_a$ 是 $\psi_E \circ \rho_a$的不可约 GNS 表示，而舒尔引理给出了其余断言。由 (7), $\psi_E \circ \rho_e$ 是 $\omega_{\theta_- E \theta_-}$的偶限制。在[7, 第 4] 节的记号下，令 α 为分次，$\beta = \Lambda_-$ 和 $U = q$, 从而 $\psi_E \circ \rho_f = \psi_E \circ \mathrm{Ad}U$；又由于$\Lambda_-(q) = q$, $\psi_E \circ \rho_m = \psi_E \circ \beta \circ \mathrm{Ad}U$。于是，(1) 是引理 4.2],，(2) 是定理 4],，而 (3) 是引理 4.3] 结合定理 4] 以及福克态等价性的希尔伯特–施密特判据 [4]。

□

通过 [4], Λ_- 恰当时由$\mathcal{H}_E$ 实现，当 $[\theta_-, E] \in \mathcal{L}^2$,，此时由奇偶性为$\sigma(E, \theta_- E \theta_-)$的酉元实现，且在相差一个标量 [7, 的意义下唯一。第 7], 节另见 [22, (5.16)–(5.17)]。

4.2 临界态

引理 4.2（临界半直线交换子）。 对于 $E = E_c$ 和 $E = E_\sharp$，算子$E - \theta_- E\theta_-$，等价地说 $[\theta_-, E]$，不是希尔伯特–施密特算子。

证明。 对于 E_c 这是 [7, 引理 5。1]。它指出 ω_{E_c} 与 $\omega_{\theta_- E_c\theta_-}$ 不等价，这一点在 [7, 第6节(2)] 中根据符号在 $\theta = 0$处的跳跃得到证明。对于 $E_\sharp$ 情况是 $|\lambda| = 1$，$\gamma \neq 0$ 其中 [8, 引理 4.5(1)], 的结果在第 7 节中计算得到。 □

定理4.3（临界代数对象）。 两个临界态满足

$$H_{\phi_\sharp} \cong \mathbf{1}, \qquad H_{\phi_c} \cong \mathbf{1}$$

作为代数对象，属于 $\mathrm{DHR}(B)$。在两种情况下，每个非平凡扇区的重数均为零 .

证明。 由命题 4.1 和引理 4.2， $N_e = N_m = N_f = 0$。唯一保留下来的直和项是单位元，重数为一，其含幺代数结构即为单位代数。 □

根据命题 4.1中的重数，$\dim \mathrm{End}_{A^P} L^2(A^P, \phi_E) = 1 + N_m$，沿着 $A^P \cong \mathbf{1} \oplus m$ 作为 B–B 双模（16）进行归纳，并应用 Frobenius 互反律，参见 [20, 定理 5。12]。因此 $N_m = 0$ 就是对称泡利态的纯性。对于 ϕ_c，这是 [7, 定理 2 和引理 51],的临界情形；对于 $\phi_\sharp$，则是 [8,命题 3.3(1)。

对于 $\psi_\sharp$，还有另一条范畴论路径。推论 3.2 给出了局域性，而 KW 不变性会置换 e 和 m。在三个连通交换代数 $\mathbf{1}$、 $\mathbf{1} \oplus e$和 $\mathbf{1} \oplus m$中，只有$\mathbf{1}$ 保持不变。这就是 [20, 例 528]中的机制。上面的计算也适用于 ψ_c，它不是 KW 不变量，而且既不需要沿具有衰减尾部的自同构传输 DHR 扇区，也不需要对 Morita 类进行分类。

4.3 半直线因子

临界半直线交换子还决定了半直线代数的中心。对于一条物理射线 L，令 S_L 表示其格点的马约拉纳指标集合，并如定理 3.1的证明中那样，

$$M_L = \pi_E(A^F(S_L))'', \qquad M_{L,+} = M_L \cap \{P\}'.$$

记 θ_L 为 $\mathcal{K}$ 上的自伴酉算子，它在 1 的格点上取值为 L，并在 -1 的格点上取值为L^c。则 $\theta_L = \pm\theta_-$ 在格点平移意义下成立，因此引理 4.2 和平移不变性给出$[\theta_L, E] \notin \mathcal{L}^2$ 对于 $E \in \{E_\sharp, E_c\}$。

命题 4.4 (半直线因子)。 令 $E \in \{E_\sharp, E_c\}$，并令 L 为一条物理射线。则 M_L,$M_{L,+}$ 以及 $\pi_E^{\pm}(B_L)''$ 都是因子。

证明。我们使用分次定域性。 M_L 的偶元与 M_{L^c}对易，而M_L 的奇元与 M_{L^c}的奇元反对易。此外， $M_L \vee M_{L^c} = \pi_E(A^F)'' = \mathrm{B}(\mathrm{H}_E)$。如果酉元$u$ 作用在 H_E 上，与 M_L 对易，并且对于 $x \in M_{L^c}$满足 $uxu^* = PxP$，那么 $\mathrm{Ad}u$ 实现 $\tau(\theta_L)$。这是不可能的，因为 $[\theta_L, E] \notin \mathrm{L}^2$ [4]。交换 L 和 L^c 的角色时同样成立，因为 $\theta_{L^c} = -\theta_L$。

M_L. 由于 $\mathrm{Ad}P$ 保持 M_L，它也保持其中心；每个中心元都是偶中心元与奇中心元之和。偶中心元与 M_L 对易，并且根据分次定域性，也与 M_{L^c} 对易，因此它是一个标量。若 γ 是非零奇中心元，则 $\gamma^*\gamma$ 为偶中心元，因而是正标量，我们可以令 γ 为酉元。它与 M_L 对易，与 M_{L^c} 的偶部对易，并与其奇部反对易。因此，它在 L 的场上作用平凡，在 L^c 的场上按分次作用；这将实现 $\tau(\theta_L)$，而第一段已排除这种可能。因此， M_L 是一个因子。

$M_{L,+}$。 选取一个奇自伴酉元 $a \in \pi_E(A^F(S_L))$，例如一个马约拉纳算子。于是 $M_L = M_{L,+} + M_{L,+}a$，且 $\sigma = \mathrm{Ad}a$ 限制为中心的一个对合自同构

M_L的 Z，$_+$。Z 中被 σ 固定的元素与 M_L、$_+$ 和 a对易，因此它属于 M_L的中心，并且是一个标量。若 $y \in$ Z 满足 $\sigma(y) = -y$，则 y^*y 被 σ固定，因而是一个标量。对于任意两个这样的元素 y_1、y_2，$y_1 y_2^*$同样是一个标量。因此，对于某个满足 $aua = -u$ 的酉元 u，Z $\subseteq \mathbb{C}1 + \mathbb{C}u$；由于 u^2 是一个标量，我们可以取其为自伴的。这样的 u 是偶的，在 M_L的中心内，$_+$ 并且与 a反对易，因而与 M_L的每个奇元素反对易。根据分次定域性，它与 M_{L^c}对易。因此，Adu 在 M_{L^c} 上是恒等算子，而在 M_L上实现分次；交换 L 和 L^c 后，根据第一段可知这是不可能的。因此 Z $= \mathbb{C}1$。

$\pi_E^{\pm}(B_L)''$。由定理 3.1 的证明 $M_{L,\,+} = \pi_E(B_L)''$，且 $p_+ = (1+P)/2$ 属于其交换子。因此 $\pi_E^{\pm}(B_L)'' = M_{L,\,+}p_+$，并且 $x \mapsto xp_+$ 是从 $M_{L,\,+}$ 到该代数上的正规 $*$-同态。其核是一个弱闭双边理想，因此具有 $M_{L,\,+}(1-z)$ 的形式，其中 z 是中心投影。由于 $M_{L,\,+}$ 是因子且 $p_+ \neq 0$，核为零。因此 $\pi_E^{\pm}(B_L)'' \cong M_{L,\,+}$ 是一个因子。 □

远离临界性时，半直线扭曲可由实现元实现。根据推论 4.5及平移不变性，$\tau(\theta_L)$ 有一个实现元 U 作用于 $\mathcal{H}_E$，它在相差一个标量的意义下唯一；对于 $\beta < \beta_c$ 为偶，对于 $\beta > \beta_c$为奇。于是，因子性恰好在两个半直线代数中的一个失效，具体取决于 U的奇偶性。

若 $\beta < \beta_c$，则 $N_e = 1$，且 U 在 H_E^+ 上限制为 $\tau(\theta_L)|_B$ 的实现元 U_+。它与 $\pi_E^{\pm}(B_L)$ 和 $\pi_E^{\pm}(B_{L^c})$ 对易，因为 $\tau(\theta_L)$ 在任一半直线的偶代数上都是平凡的。由定理 3.1，U_+ 属于 $\pi_E^{\pm}(B_L)''$ 的中心。它不是标量，因为 ρ_e 不是恒等算子，而且 π_E^+ 在单代数 B 上是忠实的。因此，$\pi_E^{\pm}(B_L)''$ 及其对应的 M_L、$_+$ 都不是因子。另一方面，M_L 是因子。在命题 4.4 的证明中，M_L 的非标量中心元会给出 $\tau(\theta_L)$ 的奇实现元；但这样的实现元不存在，因为 U 是偶的。

若 $\beta > \beta_c$，则 $N_m = 1$，且 U 是奇的。它与 M_L 对易，而 PU 与 M_{L^c} 对易。由扭曲对偶 (13)，$PU \in M_{L^c}' = ZM_LZ^*$。对于奇的 x，Z^*xZ 是 Px 的标量倍数，因为 Z 是 Klein 扭曲。因此 $U \in M_L$。于是，U 是 M_L 中一个非标量的奇中心元，且 M_L 不是因子。依照命题 4.4 证明中关于 M_L 的论证，M_L 的中心是 $\mathbb{C}1 + \mathbb{C}U$，其偶部为 $\mathbb{C}1$。在关于 M_L 的论证中，$_+$，非标量中心元 u 将是 $\tau(\theta_{L^c}) = \Theta \circ \tau(\theta_L)$ 的偶实现元，其中 $\Theta = \tau(-1)$ 是分次，其实现元是奇酉元 PU 的倍数。因此，M_L、$_+$ 是因子，$\pi_E^{\pm}(B_L)'' \cong M_L$、$_+$ 也如此。

因此，对于 $\beta < \beta_c$ 半直线场代数是因子，而半直线可观测代数不是。对于 $\beta > \beta_c$ 则相反。在 β_c 两者都是因子（命题4.4）。场代数的行为与 Lewis 和 Winnink 的结果一致：态在半直线 CAR 代数上的限制态对于 $\beta < \beta_c$ 是主态，而对于 $\beta > \beta_c$ [34]不是主态，正如 [7, 第 1]节中所回顾的那样。

4.4 非临界标定

固定铁磁耦合 J_1，$J_2 > 0$。对于 $0 < \beta < \infty$，令 ϕ_β 为第1.1节泡利代数 A^P 上的 Araki–Evans 态。这是行传递矩阵（1）的 Perron–Frobenius 向量态的极限，其中 $K_2 = \beta J_2$ 且tanh $K_1^* = e^{-2\beta J_1}$。令 $a = K_2$ 且 $b = K_1^*$。根据[7, 引理 3。2]，$\phi_\beta = \psi_{E_\beta} \circ$E 在 E_β 上的基投影$\mathcal{K}$，其符号为

$$U_{a,b}(\theta) = e^{-an(\theta)} e^{2b\sigma_3} e^{-an(\theta)}, \qquad E_\beta(\theta) = E_{a,b}(\theta) = 1_{(-\infty,0)}(-\log U_{a,b}(\theta)), \tag{17}$$

其中 $n(\theta) = \cos\theta\,\sigma_3 + \sin\theta\,\sigma_2$。这里$U_{a,b}$是 [7, (3.5)]，中单粒子传递算子$e^{2H}$ 在命题 2.1 约定下的符号，而 $E_\beta = 1_{(0,\infty)}(H)$ 是投影到那些向量 h 上的投影，对这些向量 $C(h)$ 湮灭真空，如 (6) 中所述。它恰好是 [22, (2.18)–(2.20)]，中的投影$E_\beta = (1 - V_\beta)/2$，等价地即 [7, (3.7)–(3.9)]。Araki 和 Evans 用补投影 $E_- = 1 - E_\beta$ 标记同一个福克态，即 H 对应于 $(-\infty, 0)$ 的谱投影。在两种描述中，湮灭算子都是 $C(h)$，其中 h 位于 E_β [7, (3.4) 与引理 3.2] 的值域内。态 ϕ_0 与 ϕ_∞ 分别是极限 $\beta \to 0$ 与 $\beta \to \infty$，其中

$E_0=(1+\sigma_3)/2$ 与 $E_\infty=(1-n(\theta))/2$。唯一的临界逆温度满足 $a=b$，且 $\phi_{\beta_c}=\phi_c$。这里 β 是二维经典模型的逆温度，而 ϕ_β是转移矩阵态，并非 H_1 的有限温吉布斯态。

推论 4.5 （两个有间隙的相）. 对于 *Araki–Evans*态 ϕ_β、$0\le\beta\le\infty$,

$$H_{\phi_\beta}\cong\begin{cases}\mathbf{1}\oplus e, & 0\le\beta<\beta_c,\\ \mathbf{1}, & \beta=\beta_c,\\ \mathbf{1}\oplus m, & \beta_c<\beta\le\infty.\end{cases}$$

证明。由 [7, 引理 5.1]，$E_\beta-\theta_-E_\beta\theta_-$ 对 $\beta\neq\beta_c$ 是希尔伯特–施密特的，并且由 [7, 引理 5.2],$\sigma(E_\beta,\theta_-E_\beta\theta_-)$ 对 $\beta<\beta_c$ 为 $\mathbf{1}$，对 $\beta>\beta_c$ 为 -1。端点 $\beta=0$、∞ 是 [7, 第6节(3)] 的情形 $K_2=0$ 与 $K_1^*=0$ 。Araki 和 Evans 针对补投影 $1-E_\beta$ 陈述了这些结果。由于 $\mathfrak{c}\{E\wedge(1-F)\}\mathfrak{c}=(1-E)\wedge F$，指标与 [7, 第 5] 节相同。命题 4.1 现在给出 $\beta<\beta_c$ 的 $N_e=1$、$N_m=0$，以及 $\beta>\beta_c$ 的 $N_e=0$、$N_m=1$，且全程有 $N_f=0$。临界情形是定理 4.3。在 $\mathbf{1}\oplus e$ 与 $\mathbf{1}\oplus m$ 上，连通的 $\mathbb{Z}_2$ 代数结构在同构意义下是唯一的，方法是将其生成交织算子重新标度，使其平方为 $\mathbf{1}$。

□

相	代数对象	对称自旋态
$\beta<\beta_c$	$\mathbf{1}\oplus e$	纯态，无序
$\beta=\beta_c$	$\mathbf{1}$	纯态，临界
$\beta>\beta_c$	$\mathbf{1}\oplus m$	两个有序纯态的混合

在采用标签（15）时，第一行和第三行给出了 [20,例 528], 中的非临界代数对象，其中 e 和 m 互换。它们在范畴意义上是拓扑的，而临界行在范畴意义上无能隙。纯度列为 [7, 定理 1 和 2]。这里不假设态的自同构等价具有完备性定理。

5 共轭与两种动力学

固定 $z\in[0,1)$，并使用（9）–（10）中的临界角。差值 χ_z 是解析的。将其去除相当于旋转协方差，但要在泡利代数上得到局域性陈述，则需要自旋扩张。其存在性是 Araki 的一条定理。若 CAR 代数的准自由动力学的符号在 $e^{i\theta}$ 单位圆附近全纯，则该动力学唯一延拓为泡利代数上的强连续单参数自同构群 [6, 命题 51], ，依据 Evans–Lewis 判据[22]。我们所补充的是一致指数局域性界；为此，我们将该延拓实现为偶相互作用的演化。

对于 $z=0$, $w_t=1$ 和 $\alpha_t=$ 恒等。因此假设 $0<z<1$，并将 χ_z 简记为 χ。

命题 5.1 （具有一致指数局域性的自旋扩张）。 固定 $0<z<1$，记作$a=z^2$，并设

$$\chi(\theta)=\operatorname{Im}\log(1-ae^{i\theta})=-\sum_{n\ge1}\frac{a^n}{n}\sin(n\theta),\quad d(\theta)=\frac{1}{2}\chi(\theta)\sigma_1,\quad w_t=e^{itd}.$$

存在唯一的强连续群 α_t，其由泡利代数的自同构组成，且其在 B 上的限制态为 $\tau(w_t)|_B$ *[6, 命题 5.1]*。该群具有分级结构且平移协变；对于每个 $0<\mu<$ –对数 a 和每个 $T<\infty$，存在 $C_{\mu,\,T}<\infty$ 使得对于每个有限区间$I\subset\mathbb{Z}$、每个 $r\in\mathbb{N}_0$, $|t|\le T$以及 $A\in A_I^P$,

$$\operatorname{dist}\big(\alpha_t(A),A_{I^{(r)}}^P\big)\le C_{\mu,T}\|A\|e^{-\mu r}.$$

该常数与 I 的位置和长度无关。此估计同样适用于$\alpha_t^{-1}=\alpha_{-t}$。

证明。 符号 $\chi(\theta)=\frac{1}{2i}(\log(1-az)\ -\log(1-a/z))$, $z=e^{i\theta}$, 在环带中是全纯的$a<|z|<1/a$，因此 [6, 命题 5.1] 给出了 α_t的存在唯一性。现在我们将 α_t 构造为偶相互作用的动力学。由唯一性可知，这就是同一个群；该构造给出了分次、协方差和局域性界。自伴矩阵 d 满足$\mathfrak{c}d\mathfrak{c}=-d$, 因此 w_t 与 $\mathfrak{c}$对易。其空间矩阵系数满足 $\|d_{j,k}\|\le Ca^{|j-k|}/|j-k|$对于 $j\neq k$，以及 $d_{j,j}=0$。在有限区间 Λ中，令

$$Q_\Lambda=\frac{1}{2}\sum_{u,v\in\Lambda\times\{1,2\}}(d_\Lambda)_{uv}C(e_u)C(e_v)^*,\qquad d_\Lambda=P_\Lambda dP_\Lambda.$$

正则反对易关系蕴含 $[Q_\Lambda,C(f)]=C(d_\Lambda f)$，因此其海森堡演化为 $\tau(e^{itd_\Lambda})$。按照端点区间将两个格点上的二次项分组，并对这些偶项应用 Jordan–Wigner变换。这得到一个平移不变的偶自旋相互作用 Φ ，其支撑在区间上，其中

$$\|\Phi([j,j+n])\|\le C\frac{a^n}{n},\qquad n\ge 1.$$

事实上，端点为 j， $j+n$ 的二次费米子项会变为包含于$[j,j+n]$中的泡利串，且范数不变。对于任意 $0<\nu<-\log\ a$,

$$\sup_x\sum_{X\ni x}|X|e^{\nu\operatorname{diam}X}\|\Phi(X)\|\le C\sum_{n\ge1}(n+1)^2e^{\nu n}\frac{a^n}{n}<\infty.$$

因此，热力学极限自旋动力学存在，并满足指数 Lieb–Robinson界，参见 [37, 定理 3.1 和第 3 节。3]。有限体积中的自旋演化与费米子演化在公共偶代数上相一致。取极限可得 $\alpha_t|_B=\tau(w_t)|_B$。偶性和平移协变性也传递到极限。

为明确说明所述的一致性，取 $\mu<\nu<-\log\ a$，并应用带有指数衰减 F-函数的 Lieb–Robinson估计。对于 $A\in A_I^P$ 和局域 $D\in A^P{}_{(I^{(r)})^c}$，它给出对 $|t|\le T$ 一致成立的

$$\|[\alpha_t(A),D]\|\le C\|A\|\|D\|\sum_{x\in I}\sum_{y\notin I^{(r)}}e^{-\mu|x-y|}\le\frac{2Ce^{-\mu(r+1)}}{(1-e^{-\mu})^2}\|A\|\|D\|.$$

最后的估计是对 I 的两个端点求和的几何级数，并且不依赖于 $|I|$。将乘积迹条件期望作用到 $A^P_{I^{(r)}}$上，如 [37, 推论 4.4], 中那样，即可证明所声称的距离界。该构造对正时间和负时间均成立，从而对逆也证明了同样的估计。

□

若没有局域性界，则延拓 α_1，从而推论 5.2的等价性因此已由 Araki 的构造给出 [6, 第 3 节和命题 5.1]。

Cor推论 5.2 （共轭与传递对偶性）。 设 $w=w_1$ 与 $\alpha=\alpha_1$。该 n

$$\phi_\sharp=\phi_c\circ\alpha,\qquad\kappa_c=\alpha|_B\circ\kappa\circ(\alpha|_B)^{-1}\quad satisfies\quad\psi_c\circ\kappa_c=\psi_c.$$

特别地,

$$\kappa_c=\tau(w)^2\circ\kappa=\kappa\circ\tau(w)^{-2}\quad on\ B.$$

Proof. 将 $V(\Theta)=R(\Theta)^*\sigma_3R(\Theta)$ 写成含 $R(s)=e^{-is\sigma_1/2}$ 与 $\Theta_c=\Theta_\sharp+\chi$ 的形式，可得 s

$$w^*V_cw=V_\sharp,\qquad\omega_c\circ\tau(w)=\omega_\sharp.$$

态在 B 上的对称自旋扩张，是其与分次期望的复合。由于 α 具有分次，在 B 上的等式给出了泡利代数上的所断言等式。传递对偶性固定 ψ_c，因为 $\psi_\sharp$具有 κ不变性。矩阵 W与 σ_1反对易，因此 $WwW^{-1}=w^{-1}$且 $\kappa\tau\ (w)\ \kappa^{-1}=\tau\ (w)\ ^{-1}$，从而得到最终公式。

□

注 5.3。 仅凭 CAR 乘子的指数局域性，无法确立任意自旋扩张的指数局域性。上述相互作用构造补足了这一步，其中还包括对逆的统一控制。它并未确立有界扩展范围，也不能依据假设有界扩展范围的定理来传递范畴不变量。应当分别独立计算这两个态的不变量。

注 5.4（各向异性极限与连续极限）。 极限 $z \to 0$ 去除了解析因子 χ，并在算子范数下给出 $E_c \to E_\sharp$。这是转移矩阵族的各向异性哈密顿量极限。连续统缩放极限还会同时重新缩放空间与时间，是一种不同的构造。协方差计算和自同构 α 本身并不能构造该缩放极限，也不能证明中心荷得以保持。因此，最好将共形解释描述为临界链已确立的伊辛/自由马约拉纳解释，而不要将其表述为由这一共轭所证明的新定理。

5.1 色散关系的比较

传递矩阵色散关系为 双曲余弦 $\gamma =$ 双曲余弦 $2K_1^*$ 双曲余弦 $2K_2 -$ 双曲正弦 $2K_1^*$ 双曲正弦 $2K_2$ 余弦 θ[7, （3.8）], [22,（2.18）], 可追溯至昂萨格和考夫曼。在临界性处，它满足

$$\cosh\gamma(\theta) = \cosh^2(2K) - \sinh^2(2K)\cos\theta, \qquad z = \tanh K.$$

因此,

$$\sinh\big(\gamma(\theta)/2\big) = \sinh(2K)\,|\sin(\theta/2)|. \tag{18}$$

T归一化后的单粒子符号为 V_c 和 $V_\sharp$。用 $w = e^{i\chi\sigma_1/2}$ 共轭得到

$$w^*(\gamma V_c)w = \gamma V_\sharp,$$

而临界量子链哈密顿量的符号为 $\varepsilon_\sharp V_\sharp$，其中 $\varepsilon_\sharp = 2|\sin(\theta/2)|$。因此，共轭使基态投影相匹配，但并不交织这两种特定的动力学。它们在低动量处的速度分别为 $\sinh(2K)$ 和 1。

当 $K \to 0$ 时， $\gamma(\theta) = 4K|\sin(\theta/2)| + O(K^3)$ 在 θ 上一致成立，因此将转移矩阵生成元按 $1/(2K)$ 重新缩放，即可恢复量子链的色散关系。这与 $E_c \to E_\sharp$ 一致，因为 $z \to 0$。这是晶格模型族中的一个极限，而非连续统理论的构造。

6 坦普利–利布态与共形诠释

6.1 完整的晶格协方差

公共的偶代数由以下元素生成：

$$e_{2j-1} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_z^{(j)}), \qquad e_{2j} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(j+1)}). \tag{19}$$

它们满足投影归一化的坦普利–利布关系

$$e_i^2 = e_i = e_i^*, \qquad e_i e_{i\pm1} e_i = \frac{1}{2}e_i, \qquad [e_i, e_j] = 0 \quad (|i-j| \geq 2).$$

用马约拉纳记号表示，这些关系统一为 $e_k = (1 + i m_k m_{k+1})/2$。因此， $H_1 = -\sum_k e_k$（略去其形式加法常数），而 KW 是平移 $e_k \mapsto e_{k+1}$。马约拉纳平移在偶代数 [22, 上实现了这一平移（见注 3.2]）。

对于平移不变马约拉纳态，将其实反对称协方差定义为

$$\Omega(n) = \frac{i}{2}\omega([m_k, m_{k+n}]). \tag{20}$$

对于 $n \neq 0$，这等于 $\omega(i m_k m_{k+n})$，而 $\Omega(0) = 0$。未中心化的表达式 $\omega(i m_k^2)$ 是 i，并非对角协方差。

P命题 6.1. 对于 $\omega_\sharp$，协方差与起始指标无关，且为

$$\Omega(n) = \begin{cases} 2/(\pi n), & n \ odd, \\ 0, & n \ even. \end{cases} \tag{21}$$

特别地，$\omega_\sharp$ 在 *Majorana* 平移下保持不变，且 $\psi_\sharp$ 是 *KW* 不变量。

证明。 采用傅里叶约定

$$G_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\Theta_\sharp(\theta)} e^{-in\theta}\, d\theta.$$

由于 $e^{i\Theta_\sharp} = i\mathrm{sgn}(\theta) e^{i\theta/2}$，令 $u = 1/2 - n$，可得

$$G_n = \frac{i}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{iu\theta}\, d\theta - \int_{-\pi}^{0} e^{iu\theta}\, d\theta\right) = -\frac{1}{\pi u} = \frac{2}{\pi(2n-1)}.$$

CAR 协方差（6）给出

$$\omega_\sharp(i a_j b_{j+r}) = -G_{-r}, \qquad \omega_\sharp(i b_j a_{j+r+1}) = G_{r+1}.$$

二者均为 $2/(\pi(2r+1))$。同一子晶格内不同格点处的协方差为零，因此偶数滞后的情形成立。于是，所有二点函数（包括对角 CAR 项）在 Majorana 平移下均保持不变。进而，准自由性保证整个态保持不变，而不仅仅是各个生成元的期望值。

□

推论 6.2. 对于每个 k,

$$\psi_\sharp(e_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}, \qquad \phi_\sharp(\sigma_z^{(j)}) = \phi_\sharp(\sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(j+1)}) = \frac{2}{\pi}.$$

证明。 使用 $\psi_\sharp(e_k) = (1 + \Omega(1))/2$ 和 (19)。 □

对于互不相同的指标 $j_1, \ldots, j_{2s}$，Wick 规则为

$$\omega_\sharp(m_{j_1}\cdots m_{j_{2s}}) = \mathrm{Pf}\, K, \qquad K_{ab} = -i\Omega(j_b - j_a) \quad (a<b), \quad K_{ba} = -K_{ab}. \tag{22}$$

奇数次单项式的期望值为零。要计算一个 TL 字，将每个 e_k展开，利用正则反对易关系约化重复的 Majorana 算子，并应用 (22)。此公式中的 i 因子至关重要。由此可确定 B的每个局部元素上的态。

6.2 范畴不变量所记录的内容

上述哈密顿量和协方差属于标准临界伊辛链。其自由 Majorana 连续统描述的中心荷为 $c = 1/2$, 例如参见文献中对连续极限的明确讨论 [44]。这种共形识别是关于这一特定临界动力学的背景知识。我们并未从 H_ϕ推断中心荷，也未证明它在拟局部代数的任意自同构下保持不变。

等式 $H_\phi = \mathbf{1}$ 表明，三个非平凡环面码扇区中，没有任何一个能在偶真空表示中实现。它并不能区分所有具有相同对称性的临界理论，确定它们的应力张量，也不能对其连续极限进行分类。传递矩阵与量子链态通过第 4节中的独立计算，得到相同的代数对象。它们之间的指数局域共轭是另一项晶格陈述。第 II 部分的 Temperley–Lieb–Jones 链给出了代数对象平凡、但中心荷不同的临界态（第 12节）。

范畴无隙性与谱无隙性的区别在这里也很具体。对于 H_1，$\varepsilon_\sharp(\theta) = 2|\sin(\theta/2)|$ 存在任意小的正值。(18)中的传递矩阵色散关系

也具有相同性质。动量接近零的单粒子和双粒子波包，分别在完整的 Fock 表示和偶真空扇区中具有趋于零的能量。因此，这些特定的临界动力学没有正谱隙。计算代数对象并不需要选定这些哈密顿量。

第二部分

指标四以下的 Temperley–Lieb–Jones 链

7 Temperley–Lieb–Jones 链

固定一个整数 $k \geq 2$，并令 $\delta = 2\cos(\pi/(k+2))$，从而 $\delta^2 \in [2,4)$。令 $\mathcal{T}_k$ 为酉 Temperley–Lieb–Jones 范畴，其中 Jones–Wenzl 幂等元 p_{k+1} 为零。记基本对象为 X，$Y = X \otimes X$，并将 $\mathcal{C}_k = \langle Y \rangle$ 记为偶部。我们使用未归一化的球迹、$\mathrm{Tr}_A(\mathrm{id}_A) = d(A)$、一个固定的酉严格模型，以及共轭方程的标准解。令

$$B_k(I) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}_k}(Y^{\otimes |I|}), \qquad B_k = \overline{\bigcup_I B_k(I)},$$

包含关系由添加恒等线给出。内积关于第二个变量线性，正如第 2.2 节所述。链的 X-股线由 $i \in \mathbb{Z}$ 编号，而股线 $2j-1, 2j$构成 Y-格点 j。令 $R_X\colon\ \mathbf{1} \to X \otimes X$ 为自对偶对象 X的共轭方程标准解，使得 $R_X^* R_X = \delta$。我们将 R_X 画作杯，将 R_X^* 画作帽。对于 $i \in \mathbb{Z}$ 令

$$E_i = \mathrm{id} \otimes R_X R_X^* \otimes \mathrm{id}, \qquad e_i = \delta^{-1} E_i,$$

其中 $R_X R_X^*$ 作用于股线 i和 $i+1$，恒等元则作用于其他股线上。因此 E_i 就是图 1(a) 中的杯–帽。对于每个包含这些股线所在格点的 I 的 Y-格点区间 i和 $i+1$，这定义了元素 $E_i, e_i \in B_k(I) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}_k}(X^{\otimes 2|I|})$，并且与包含关系相容。是 Temperley–Lieb 生成元。它们满足 $E_i^2 = \delta E_i$ 以及

$$e_i = e_i^* = e_i^2, \qquad e_i e_{i\pm1} e_i = \delta^{-2} e_i, \qquad [e_i, e_j] = 0 \ (|i-j| \geq 2).$$

由于 End($X^{\otimes 2n}$) 是 Temperley–Lieb 代数对由 p_{k+1}生成的理想取商所得，因此，每个 $B_k(I)$ 都由两股线均位于 I 中的 e_i 生成。这些关系以及由 Jones–Wenzl 幂等元生成的理想在 $e_i \mapsto e_{i+1}$ 下保持不变，且局部代数是有限维的，并具有唯一的 C^*-范数。因此，存在 B_k 的一个自同构 ς，使得

$$\varsigma(e_i) = e_{i+1},$$

且 ς^2 是平移一个 Y-格点。由于 $Y \supseteq \mathbf{1}$ 张量生成 $\mathcal{C}_k$，Y的某个幂包含$\mathcal{C}_k$中的每个简单对象，并且

$$\mathrm{DHR}(B_k) \simeq \mathcal{Z}(\mathcal{C}_k)$$

[30], 另见 [31, 例 2.5 和第 6]节。这是偶部的中心，而不是包含 X的整个范畴的中心。它是类型为 A_{k+1}的 Jones 子因子的量子双，其偶部为$\mathcal{C}_k$；Evans 和 Kawahigashi 通过 Ocneanu 的渐近包含计算得出 [18, 第 4]节。纯态 ω 的范畴不变量 B_k 为$H_\omega = \mathrm{End}(L^2(B_k, \omega)) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C}_k)$，如第 2.1 节所述；局域、拓扑和无隙这些术语含义相同。

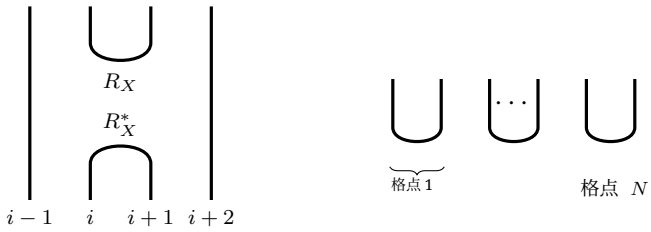
令 $I_N=\{x\in\mathbb{Z}:\,-\lfloor N/2\rfloor<x\le\lceil N/2\rceil\}$ 为原点附近由 N 个格点构成的区间，其上承载股线 $2x-1,2x$，对应于 $x\in I_N$；令 S_N 为两条股线都位于 I_N 中的生成元 e_i 之和。有限体积哈密顿量及其真空块为

$$h_N=-S_N,\qquad V_N=\mathrm{Hom}(\mathbf{1},X^{\otimes 2N}).$$

每个局域 $a\in B_k(I)$ 与 $I\subseteq I_N$ 通过复合作用于 V_N，并且 V_N 具有内积 $\langle v,\ w\rangle=v^{*}w\in\mathrm{End}(\mathbf{1})=\mathbb{C}$。杯向量为

$$\mathrm{cup}_N=R_X^{\otimes N}\in V_N,$$

这 N 两个相邻的杯，每个分别位于 Y 格点 I_N（图 1（b））。其范数为 $\delta^{N/2}$，而 $\xi_N=\delta^{-N/2}$ 杯 $_N$ 是归一化的杯向量。



（a） $E_i=\delta e_i$　　（b）杯 $_N=\delta^{N/2}\xi_N$

图 1：（a）杯帽 E_i。它是在股线 $i,i+1$ 上的帽 R_X^*，后接杯 R_X，其余股线上为恒等映射。图从下往上读。（b） $V_N=\mathrm{Hom}(\mathbf{1},X^{\otimes 2N})$ 中的杯向量，每个 Y 格点上有一个杯。

注 7.1（情形 $k=2$）。在 $k=2,\delta=\sqrt{2}$ 和 $\mathsf{C}_2^{-}\simeq\mathrm{Vec}(\mathbb{Z}_2)$ 中。式（19）中的元素 $\frac{1}{2}(1+i\,m_im_{i+1})$ 满足上述关系，其中 $\delta^{-2}=\frac{1}{2}$（第6节），并且当 $E_i=\sqrt{2}e_i$ 时，Jones–Wenzl 幂等元 $p_3=1-\sqrt{2}(E_1+E_2)+(E_1E_2+E_2E_1)$ 在克利福德代数中为零。由于两个局部代数的维数均为 2^{2n-1}，映射 $e_i\mapsto\frac{1}{2}(1+i\,m_im_{i+1})$ 可扩张为从 B_2 到第一部分的偶泡利代数 B 的同构，其中 $\varsigma=\kappa$ 由式（11）给出。在该同构下，$\mathrm{DHR}(B_2)$ 是第一部分中的环面码，且 $-\sum_i e_i=H_1+$ 为常数。杯向量 ξ_N 在每个 e_{2j-1} 下均保持不变，这使它在 B_{I_N} 的两个不可约表示中对应于 V_N，并对应于开放链 I_N 的偶子空间中满足 $\sigma_z^{(j)}=+1$ 的向量。下文构造的态 ω_2 是 H_1 的偶动力学的基态（命题 8.5），因此根据 [8, 定理 4(1)(α)]，，可如命题 2.2 的证明中那样得到。

8 环表示与无限体积态

本节构造态 ω_k 以及第9–11节所用的概率工具。有限体积基态由路径表示中的佩龙–弗罗贝尼乌斯定理得到（第8.1节）。Aizenman 和 Nachtergaele 所采用形式的指数时间序展开，将其虚时间关联转化为环模型的期望。该环模型是簇权重为 $q=\delta^2$ 的量子随机簇模型在自对偶点处的像（第8.2节）。 ξ_N 的杯给出自由边界条件，因此该态仅由自由测度构造，其极限就是自由无限体积测度 ϕ^0。缠绕测度仅用于比较。对区域外的构型进行条件化，会在该区域上诱导出一种介于自由边界条件与缠绕边界条件之间的边界条件。原始穿越在自由边界条件下最不可能发生，而对偶穿越在缠绕边界条件下最不可能发生。对于该模型，Duminil-Copin、Li 和 Manolescu 证明了 Russo–Seymour–Welsh交叉界，并证明自由测度与缠绕测度重合，$\phi^0=\phi^1$（引理8.1）。交叉界在

每个尺度上均成立，且与外部构型无关。结合正关联和区域马尔可夫性质，这些界在每个尺度的环带中都保证存在分离圈（引理8.2），并给出环大小的多项式界（引理8.3）。这些分离圈推动了热力学极限、纯性（第9节）以及带电系数的衰减（第11节）。等式 $\phi^0 = \phi^1$ 仅用于混合性。远处构型诱导的任意边界条件都介于 ϕ^0 与 ϕ^1之间；由于二者重合，这种边界条件会被遗忘（引理8.3，注8.4）。由此得到热力学极限 ω_k，即一个平移不变基态（命题8.5）。

8.1 正性与有限体积基态

我们在图上使用路径表示 A_{k+1} [41, 27, 32, 19]，并采用佩龙–弗罗贝尼乌斯权重

$$\mu_a = \sin\frac{a\pi}{k+2}, \qquad \sum_{b\sim a}\mu_b = \delta\mu_a .$$

空间 V_N 以 A_{k+1} 上从顶点 1 到自身、长度为 $2N$ 的路径为基。生成元 e_i 作用在第 i 步。对于一条在位置 $i-1$、i、$i+1$ 处分别经过 a、b、a 的路径，它通过秩一投影作用到

$$\textstyle\sum_{b\sim a}\sqrt{\mu_b/(\delta\mu_a)}\,|b\rangle,$$

并且除非两个外侧顶点一致，否则它为零。这是坦普利–利布平面代数在图 A_{k+1} [32]的平面代数中的嵌入，另见 [28, 第 2 节。2]。因此， e_i 在路径基中的所有矩阵元均为非负。从 1 到 1 的每条路径都可通过降低峰化为交错路径 1、2、1、.....、1，且每一次降低及其逆在某个 e_i 中都有正的矩阵元。因此， S_N 在 V_N 上的矩阵是非负且不可约的，佩龙–弗罗贝尼乌斯定理适用于它。其最大特征值是单的，对应一个坐标为正的特征向量 Ω_N，我们将其归一化。等价地，最低特征值

$$\epsilon_N = \min \mathrm{Spec}(h_N|_{V_N})$$

其中 $h_N = -S_N$ 是单的，特征向量为 Ω_N，而 $h_N|_{V_N}$ 的其余谱均位于$[\epsilon_N + g_N, \infty$ 内，其中 $g_N > 0$ 为某个值。因此，当 e^{-T} 趋于无穷时，$(h_N-\epsilon_N)\to |\Omega_N\rangle\langle\Omega_N|$ 趋于 $T\to\infty$，从而

$$e^{-T(h_N-\epsilon_N)}\psi_N \longrightarrow \langle\Omega_N,\psi_N\rangle\,\Omega_N \qquad (T\to\infty) \tag{23}$$

对于每个 $\psi_N \in V_N$ 都成立；当 $\Omega_N, \psi_N \neq 0$ 时，极限非零，尤其对于每个坐标均非负的非零 ψ_N 都成立。我们使用第 7 节的杯向量 ξ_N，它在路基中是交替路径 1, 2, 1, . . . , 1 所对应基向量的正倍数，因为从顶点 1 开始的杯会经过其唯一的邻点 2。因此，$\Omega_N, \xi_N > 0$。选取它并非因为 (23)，而是因为它使 $\omega_{N,T}$ 成为时间方向上具有自由边界条件的环期望（第8.2节）。记 $\omega_N(a) = \Omega_N, a\Omega_N$ 为有限体积基态。

施温格函数。 固定一个虚时间截断 $T > 0$。对于局域 a_1，.....，$a_r \in B_k$ 支撑于 I_N（第7节）以及时间 $-T \le t_1 \le \cdots \le t_r \le T$，有限体积施温格函数是虚时间关联函数

$$\mathcal{S}_{N,T}(a_1,t_1;\ldots;a_r,t_r) = \frac{\langle \xi_N, e^{-(T-t_r)h_N} a_r e^{-(t_r-t_{r-1})h_N}\cdots e^{-(t_2-t_1)h_N} a_1 e^{-(T+t_1)h_N}\xi_N\rangle}{\langle \xi_N, e^{-2Th_N}\xi_N\rangle}. \tag{24}$$

在第8.2节的环图中，如图3(a)所示，虚时间是竖直坐标$t \in [-T, T]$。向量 ξ_N位于底边 $t = -T$，其伴随位于顶边$t = T$，因子 $e^{-(t_{j+1}-t_j)h_N}$ 作用于相邻插入之间的时间区间，而 a_j 插入在高度 t_j处。在时间 0 处进行一次插入，得到态

$$\omega_{N,T}(a) = \mathcal{S}_{N,T}(a,0) = \frac{\langle \xi_N, e^{-Th_N} a e^{-Th_N}\xi_N\rangle}{\langle \xi_N, e^{-2Th_N}\xi_N\rangle}. \tag{25}$$

由（23）当 $T\to\infty$ 施温格函数收敛到有限体积基态的施温格函数时 e,

$$\mathcal{S}_{N,T}(a_1,t_1;\dots;a_r,t_r)\longrightarrow\langle\Omega_N,a_re^{-(t_r-t_{r-1})(h_N-\epsilon_N)}\cdots e^{-(t_2-t_1)(h_N-\epsilon_N)}a_1\Omega_N\rangle,$$

尤其是 $\omega_{N,\ T}\to\omega_N$作用于局域元素。长度为 r的字是生成元的乘积 $W=e_{i_1}\cdots e_{i_r}$。每个 B_k（I） $=\mathrm{End}_{\mathcal{C}_k}(X^{\otimes 2|I|})$ 都由字张成 [27],，因此只需处理由字构成的插入。

8.2 圈律

第 $E_i=\delta e_i$ 7 节的杯帽 满足 $E_i^2=\delta E_i$，并且 $S_N=\delta^{-1}\sum_i E_i$是对 $2N-1$ 中的键求和，I_N是连接股线 i 和 i 的键 $i+1$。（26）中的公式将 e^{tS_N} 的幂级数写成杯帽时序积之和。每一项都是一个带正权重的 Temperley–Lieb 图，因此，权重归一化后便构成图上的概率测度。Aizenman 和 Nachtergaele 将相同的展开写成关于泊松过程的期望 [2,第 2.2 节，（2.11）–（2.12）]。

构型。事件是一个键 i和一个时间 τ组成的有序对 $(i,\ \tau)$。时间区间 $[s,t]$ 上的构型 Γ是一个有限事件集，其时间属于 $[s,t]$，而 $n(\Gamma)$ 表示其中的事件数。含有 n 个事件、键标签为 i_1，……，i_n的构型（按时间递增排列）由单纯形 $s<\tau_1<\dots\dots<\tau_n<t$参数化。我们用 $d\Gamma$ 表示构型上的测度：在每个这样的单纯形上取勒贝格测度，再对 n 及键标签求和。

展开。对于 $t\geq 0$,

$$e^{tS_N}=\int\delta^{-n(\Gamma)}\,E(\Gamma)\,d\Gamma=\sum_{n\geq 0}\sum_{i_1,\dots,i_n}\int_{0<\tau_1<\cdots<\tau_n<t}\delta^{-n}\,E_{i_n}\cdots E_{i_1}\,d\tau_1\cdots d\tau_n,\qquad(26)$$

其中积分遍及 $[0,t]$ 上的构型，而 $E(\Gamma)$ 是对 Γ 的各个事件依次取 E_i 的乘积，时间较晚的事件排在左侧。事实上，单纯形的体积为 $t^n/n!$，因此含有 n 个事件的项为 $\frac{t^n}{n}!$ $\left(\delta^{-1}\sum_i E_i\right)^n=\frac{t^n}{n}!\ S_N^n$。每个事件的权重均为 δ^{-1}，无论其位于奇键还是偶键上。测度 $e^{-(2N-1)t/\delta}\delta^{-n(\Gamma)}d\Gamma$ 是各键上速率为 $1/\delta$ 的独立泊松过程的分布；以这种形式，（26）即为 [2, (2.10)–(2.12)], ，其中 $h_b=E_i$、$J_b=1/\delta$ 和 $\beta=t$。戴森级数按时间有序的带标签事件参数化（标签上取计数测度，按序排列的时间上取勒贝格测度）可追溯至 Davies [12]，以及 Evans 和 Lewis [21, (2.11)–(2.16)]，对完全正映射半群的研究。时间记录因子的顺序，并在时空图像中为每个杯–帽指定一个高度。在 $[-T,T]$ 上的构型 Γ 可画成一幅包含 $2N$ 条竖直股的图；对于 Γ 中的每个事件 (i,τ)，在高度 τ 处于股线 i 和 $i+1$ 之间画一个杯–帽。在顶部和底部用 ξ_N 的 N 个杯闭合后，便得到一幅由闭圈构成的平面图（图3(a)）。我们也用字母 Γ 表示这幅图及其环，并以 $\ell(\Gamma)$ 表示环的数量。这就是第 2.1 节和图 1], 中的 [2, 圈分解，其中以边界向量 ξ_N 代替迹，正如其在第 2.4.b 节] 对开路径的处理。

求值。令 杯$_N=\delta^{N/2}\xi_N$ 为第 7 节中的未归一化杯向量，并令 $E(\Gamma_+)$和 $E(\Gamma_-)$ 为 E_i 在事件 $(i,\tau)\in\Gamma$ 上的时序积，其中 $\tau>0$ 且 $\tau<0$。对于支撑在 $b\in B_k$ 中的 I_N，在时间 Γ 处插入 b 后的求值为 0 是

$$\mathrm{ev}_\Gamma(b)=\langle\mathrm{cup}_N,E(\Gamma_+)\,b\,E(\Gamma_-)\,\mathrm{cup}_N\rangle.\qquad(27)$$

这是将 b 的图插入 Γ 在时刻0 处得到的闭合图的值（图2）。

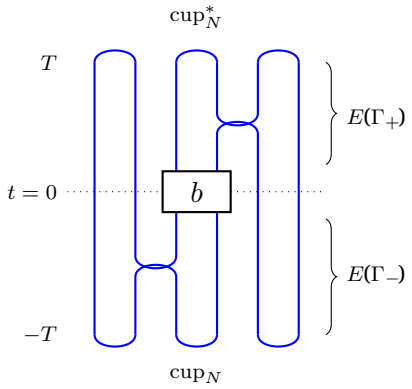


图 2：求值（27）对应于 $N=3$。它展示了底部的 杯$_N$ 、负时间处事件的杯帽 Γ 、时间 b 处的元素 0、正时间处的杯帽，以及顶部的 杯$_N^*$。对于 $b=1$ ，闭合图有 $\ell(\Gamma)$ 个环，值为 $\delta^{\ell(\Gamma)}$。

无荷求值为$\mathrm{ev}_\Gamma(1)=\delta^{\ell(\Gamma)}$。对于字 $W=e_{i_1}\cdots e_{i_r}$，$\mathrm{ev}_\Gamma(W)=\delta^{\ell(\Gamma;W)-r}$，其中 $\ell(\Gamma;\ W)$ 是插入 r 的杯帽 W 在时刻0后环的数量。对于两个时间区间26中的（ $[-T,0]$ 和 $[0,T]$） ，由式（25）的分子和分母中的杯具有相同的归一化，

$$\omega_{N,T}(b)=\frac{\int \delta^{-n(\Gamma)}\,\mathrm{ev}_\Gamma(b)\,d\Gamma}{\int \delta^{-n(\Gamma)}\,\delta^{\ell(\Gamma)}\,d\Gamma},$$

两个积分都取遍 $[-T,T]$ 上的构型。有限体积环定律是概率测度

$$d\nu_{N,T}(\Gamma)=\frac{\delta^{-n(\Gamma)}\,\delta^{\ell(\Gamma)}}{Z_{N,T}}\,d\Gamma,\qquad Z_{N,T}=\int \delta^{-n(\Gamma)}\,\delta^{\ell(\Gamma)}\,d\Gamma, \tag{28}$$

由此得到

$$\omega_{N,T}(b)=\mathbb{E}_{\nu_{N,T}}\Big[\frac{\mathrm{ev}_\Gamma(b)}{\delta^{\ell(\Gamma)}}\Big],\qquad \omega_{N,T}(W)=\mathbb{E}_{\nu_{N,T}}[f_W],\qquad f_W(\Gamma)=\delta^{\ell(\Gamma;W)-\ell(\Gamma)-r}\in[\delta^{-2r},1]. \tag{29}$$

f_W 的取值范围之所以成立，是因为每插入一个杯帽，要么将两个环合并为一个，要么将一个环分裂成两个，因此环的数量变化 ±1。在时刻 t_j插入长度为r_j 的字 W_j 时，同样的计算可得

$$\mathcal{S}_{N,T}(W_1,t_1;\dots;W_s,t_s)=\mathbb{E}_{\nu_{N,T}}\big[\delta^{\ell(\Gamma;W_1,\dots,W_s)-\ell(\Gamma)-\sum_j r_j}\big],$$

其中， $\ell(\Gamma;\ W_1,\dots,W_s)$ 统计所有插入操作后的环数。

随机簇模型。构型定义在时空条带 $I_N\times[-T,T]$ 上，我们将其视为 $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ 的子集，其中格点 $x\in I_N$ 给出第一个坐标，时间 $t\in[-T,T]$ 给出第二个坐标。 Y 格点 x 的原始线是位于其两股线 $2x-1$ 和 $2x$ 正中间的竖直线 $\{x\}\times\mathbb{R}$ ，因此它穿过 ξ_N 的杯。对偶线 $\{x+\frac{1}{2}\}\times\mathbb{R}$ 位于格点 x 和 $x+1$ 的正中间（图 3）。空间以 Y 格点为单位，时间则是 e^{-th_N} 的虚时间参数 t ，其中 $h_N=-S_N$ 是第 7 节中的有限体积哈密顿量。若 $i=2x-1$，则键 i 为奇键，连接格点 x 的两股线 $2x-1$、 $2x$ ；若 $i=2x$，则为偶键，连接相邻格点 x 和 $x+1$ 的股线 $2x$ 和 $2x+1$。 Γ 在时间 t 发生于格点 x 内的奇键上的事件，是在 t 处切断原始线 x 的割。发生在格点 x 和 $x+1$ 之间偶键上的事件是一个桥，即连接.....的水平线段

原始线 x 和 $x+1$ 高度 t处。原始构型 ω 是移除割并加入桥后的原始线的并集。其连通分支就是原始簇。对偶地，一个桥会切断对偶线 $x+\frac{1}{2}$，而在 x处对线 t的切割会形成一个对偶桥，连接对偶线 $x\pm\frac{1}{2}$。由此得到对偶构型 ω^*及对偶簇。原始路径与对偶路径永不相交。通过棋盘式着色 [2]，Γ的环是原始簇薄邻域的边界，每个环都将一个原始簇与一个对偶簇分隔开。

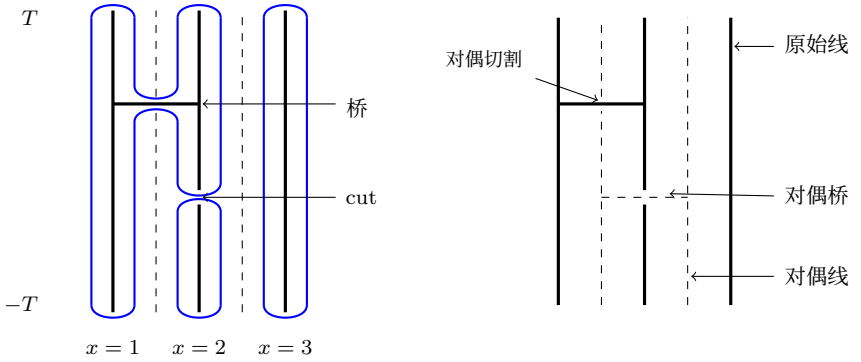


图 3: （a）三个 Y-格点上的一个构型 Γ，其中一个事件发生在格点 2 内部的奇键上（股线 3、4），另一个事件发生在格点 1 和 2 之间的偶键上（股线 2、3），并由顶部和底部的 ξ_N 杯闭合。原始线用实线表示，对偶线用虚线表示。第一个事件切断原始线 $x=2$，第二个事件是原始线 $x=1$ 和 $x=2$ 之间的一座桥。（b）原始构型 ω （实线）和对偶构型 ω^* （虚线）。这座桥切断对偶线 $x=\frac{3}{2}$，而该切割上带有一座对偶桥。（a）中的环在原始簇与对偶簇之间延伸。它们是三个原始簇的薄邻域的边界曲线，在此分别为 $N=3$、 $c=b=1$、 $c_0=3$、 $c_0^*=1$ 和 $\ell=c_0+c_0^*-1=2c_0-(N+c)+b=3$。

我们现在来计数这些环。对于一个具有 c 个切割和 b 条桥的构型，将原始构型视为一个平面图，其顶点是它的 $N+c$ 条未切割竖直段，其边是它的 b 条桥。设 c_0 为其连通分支（即原始簇）的数目。 Γ 的每一个环恰好是恰好一个原始簇的薄邻域的一条边界曲线，因此 $\ell=\ell(\Gamma)$ 是这些边界曲线的总数。一个具有 v 段和 e 桥的簇是一个具有 v 个顶点和 e 条边的连通平面图，因此由欧拉公式，它有 $e-v+1$ 个有界面。它的薄邻域是一个圆盘，每个有界面对应一个孔洞，并且有 $1+(e-v+1)=2-v+e$ 条边界曲线。对这 c_0 个簇求和得到$\ell=2c_0-(N+c)+b$。设 c_0^*为对偶簇的数目，其中与$\Delta_{N,T}=I_N\times[-T,T]$的边界相遇的对偶簇计为一个。原始簇的每一个有界面恰好包含其余对偶簇中的一个，因此 $c_0^*-1=c_0-(N+c)+b$ 并且

$$\ell=c_0+c_0^*-1.$$

每个原始簇都有一个外边界圈，而每个非外部的对偶簇还有另一个环。给定 $n(\Gamma)=c+b$ 以及 $q=\delta^2$ 圈定律的权重（28）为

$$\delta^{-n(\Gamma)}\delta^{\ell}=\delta^{-1}\,(\delta^{-1})^{c}\,(\delta^{-1})^{b}\,\sqrt{q}^{\,c_0}\,\sqrt{q}^{\,c_0^*}.$$

切割与桥具有相同的权重 δ^{-1}，圈权重为 $\sqrt{q}$ 每个原始簇以及$\sqrt{q}$ 每个对偶簇。平移一条弦会交换原始线与对偶线、奇键与偶键以及切割与桥，并且在远离边界处保持该权重。这就是该模型的自对偶。由 [16] 给出的结果仅针对原始簇上的权重陈述。消去 c_0^* 得到

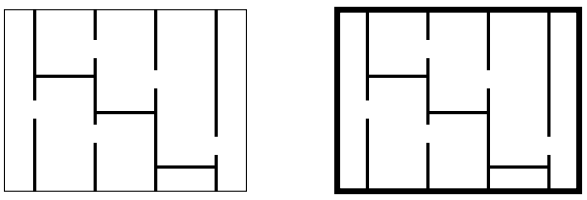
$$\delta^{-n(\Gamma)}\delta^{\ell}=\delta^{-N}\,(\delta^{-2})^{c}\,1^{b}\,q^{c_0},$$

从而全部权重都落在原始簇上，其中切割的权重为 δ^{-2} ，桥的权重为1。若改为消去 c_0 ，则将权重 $q^{c_0^*}$ 置于对偶簇上，并交换切割与桥的权重。因此$\nu_{N,\,T}$是 $\omega \mapsto \Gamma$ 下随机簇测度的像，其簇权重为q，切割强度为 $\lambda_{\mathrm{c}} = \delta^{-2}$，桥强度为 $\lambda_{\mathrm{b}} = 1$，位于矩形$\Delta_{N,\,T} = I_N \times [-T, T]$上，带自由边界条件，按此刻所回顾的意义。比值 $\lambda_{\mathrm{b}}/\lambda_{\mathrm{c}} = q$ 是消去对偶计数之后上述对称权重的迹。它是该模型的自对偶点 [16, 第 5 节。1]。无需Potts实现，因此非整数的 q 是允许的。

有限体积、边界条件与无穷体积测度。有限体积是一个有界区域 $\Delta \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$，它是矩形 ($[a, b] \cap \mathbb{Z}$) $\times [c, d]$的有限并。构型ω 在 Δ 中由原始线上的切割以及两端都位于 Δ中的桥组成，并如上所述，被视为未切割线段与桥的并。边界条件 ζ 是边界 Δ上的原始线各点之间的一个等价关系，记录哪些点在 Δ之外相连。在 Δ 上取边界条件 ζ 的随机簇测度为

$$d\phi_{\Delta}^{\zeta}(\omega) = \frac{q^{k^{\zeta}(\omega)}\, \lambda_{\mathrm{c}}^{c(\omega)}\, \lambda_{\mathrm{b}}^{b(\omega)}}{Z_{\Delta}^{\zeta}}\, d\omega,$$

其中， $d\omega$ 是构型上的如下测度。具有 c 个切割和 b 座桥的构型，由每条原始线上的切割时刻以及相邻线之间每个间隙中的桥的时刻决定。在每条线和每个间隙上按递增顺序列出这些时刻，就将每条线和每个间隙中具有给定数量切割与桥的构型对应于 $\mathbb{R}^{c+b}$中的单纯形乘积。测度 $d\omega$ 是在这些乘积上的勒贝格测度，并像上面的 $d\Gamma$ 一样，对切割数和桥数求和。它是定义在有限个切割与桥的位置上的测度，而不是定义在线本身上的测度。此外， $c(\omega)$和 $b(\omega)$分别是切割数和桥数， $k^{\zeta}(\omega)$是在将由 ζ 确定等价的边界点识别后， ω 的簇数（簇计数），而 Z_{Δ}^{ζ} 起归一化作用。除归一化外，$\lambda_{\mathrm{c}}^{c}\lambda_{\mathrm{b}}^{b}\, d\omega$ 是这样的独立泊松过程的分布：每条原始线上强度为 λ_{c} 的切割过程，以及相邻线之间强度为 λ_{b} 的桥过程；这正是 [2], [16, 第1节3]¡[29, 第 9]章所采用的形式。自由边界条件 $\zeta = 0$ 不识别任何点，因此在 Δ之外没有任何连接。接线边界条件 $\zeta = 1$ 识别所有边界点，仿佛整个边界是一条相连的导线，因此所有与边界相交的簇都计为同一个簇（图 4）。当 q 为整数时，随机簇模型是 q态 Potts模型的 Fortuin–Kasteleyn表示。自由和接线边界条件分别对应于 Potts自旋的自由边界条件和固定边界条件。在接线情形下，边界自旋都被设为同一个固定值；由于 Potts模型的对称性，取哪个值并不重要 [2, 第 3]节。这里的 $q = \delta^2$ 通常不是整数，因此只采用随机簇表述。



(a) 自由， $\zeta = 0$　　(b) 接线， $\zeta = 1$

图 4：矩形 Δ 中的一个构型，分别采用自由和接线边界条件。在 (a) 中，与边界相交的簇分别计数于 $k^0(\omega)$中。在 (b) 中，所有边界点均被识别并绘制为粗边界，因此所有与边界相交的簇在 $k^1(\omega)$中构成一个簇。

构型　构型按照平面子集的包含关系排序。我们写作 $\omega \le \omega'$ 当 $\omega \subseteq \omega$　　′.

移除一条切割会填补原始线中的一个间隙，从而扩大该子集；添加一座桥也会扩大它。因此，$\omega \le \omega'$ 当且仅当 ω' 的每一条切割都是 ω 的切割，且 ω的每一座桥都是 ω'的桥时，构型的顺序为 [2, 第 3 节和（II.1）], ，其中其 A-键和 B-键分别是我们的切割和桥。若一个事件在转到更大的构型时仍被保留，则称其为递增事件；若其补投影是递增的，则称其为递减事件。原始连接事件是递增的，而对偶连接事件是递减的。对于 $q \ge 1$ 该模型具有以下三个性质 [29, 章 9], 中的连续版本，这些性质分别对应于 [25]以及经典的比较性质和马尔可夫性质。

(i) 正关联与 Fortuin–Kasteleyn–Ginibre（FKG）不等式 [25], [2, 附录 II]。在任意 ϕ^{ζ}_{Δ} 下，递增事件均呈正相关，递减事件亦然。(ii) 边界条件比较。在随机支配意义下，我们有 $\phi^{0}_{\Delta} \le \phi^{\zeta}_{\Delta} \le \phi^{1}_{\Delta}$ ，其中 $\mu \le \mu'$ 表示对于每个递增事件 E， $\mu(E) \le \mu'(E)$；等价地，对于每个有界递增函数 f [2, ， $\int f\,d\mu \le \int f\,d\mu'$ （II.3）、（II.5）]。因此，递增事件在自由边界条件下发生的可能性最低，在接线边界条件下最高；递减事件则相反。(iii) 区域马尔可夫性质。对于有限体积 $\Delta' \subseteq \Delta$，给定 $\Delta\setminus\Delta'$中的构型后， Δ' 中的构型服从 $\phi^{\xi}_{\Delta'}$，其中 ξ 是由 ζ 及 $\Delta\setminus\Delta'$中的连接所诱导的边界条件。

若 $\Delta \subseteq \Delta'$，则由 (iii) 可知，将 $\phi^{0}_{\Delta'}$ 限制到 Δ 中的构型上，得到的是测度ϕ^{ξ}_{Δ}的平均，而每个测度都由 (ii) 可知支配 ϕ^{0}_{Δ} 。因此，对于每个仅依赖于 Δ中构型的递增事件 E，都有 $\phi^{0}_{\Delta'}(E) \ge \phi^{0}_{\Delta}(E)$；也就是说， ϕ^{0}_{Δ} 随 Δ 增加而按随机序递增。同理， ϕ^{1}_{Δ} 按随机序递减。对于仅依赖于某个有界区域内构型的递增事件 E， $\phi^{0}_{\Delta}(E)$ 因而随 Δ 递增且不超过 1，并且当 $\Delta \uparrow \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$时收敛。这些极限确定了一个概率测度 ϕ^{0}，即自由无限体积测度；递减极限则确定了接线无限体积测度 ϕ^{1} [29, 第 9], 章，另见[2, 定理 4 的证明。2]。对于区域 U，令 $\mathcal{F}_U$ 为构型空间上的 σ-代数，它由 U的博雷尔子集中切割和桥的数量生成。当且仅当某个事件或函数仅依赖于 U中所含的切割和桥时，它才是 $\mathcal{F}_U$-可测的。

对于 $z \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ 和 $r > 0$ ，令 $Q_r(z)$ 表示以 z 为中心、半径为 r 的时空正方形，即将 ($[-r,r]\cap\mathbb{Z}$) $\times [-r,r]$ 平移 z。对于一个在空间方向边长为 $2a$、在 ^ 时间方向边长为 $2b$ 的矩形 R，令 $m = \min(a,b)$。放大后的矩形 R 具有相同的中心，边长为 $2a+m$ 和 $2b+m$，因此其边界与 R 之间的边距等于其较短边长的四分之一。原始路径是包含于 ω 中的连续曲线，也就是说，它沿着原始线的未切割线段和桥延伸；对偶路径则是包含于 ω^* 中的连续曲线。R 的原始穿越是指 R 内连接其两条较短边的原始路径，对偶穿越则是指 R 内连接这两条边的对偶路径。令 C(R) 表示 R 存在原始穿越这一事件，令 C^*(R) 表示 R 存在对偶穿越这一事件。R 的纵横比是其较长边与较短边之比（图5）。

引理8.1的思路是这样的。第（1）部分表明，在自对偶点，边界的影响会消失。无论远处施加何种边界条件，固定有界区域内的构型在极限下都具有相同的分布。第（2）部分体现了尺度不变性。矩形发生交叉的概率，除相差常数因子外，仅取决于其形状，而与尺寸无关，因此在所有尺度下都远离0 。偏离自对偶点时，这一性质便不再成立，大矩形发生交叉的概率会变得极高或极低。（2）中的界是在给定区域之外所有信息的条件下陈述的 Δ' ，该区域包含扩大的矩形。外部发生的一切只会对 Δ' 产生边界条件的作用，而最不利的边界条件分别是原始穿越对应的自由边界条件，以及对偶穿越对应的连通边界条件。因此，无论外部信息如何，发生交叉的概率始终至少为 $c(\rho)$。

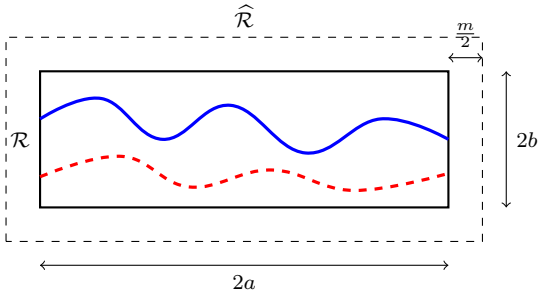


图5：一个矩形$\mathcal{R}$ 满足 $a > b$，因此 $m = b$，且纵横比为 a/b，位于其扩张区域 $\widehat{\mathcal{R}}$ （虚线）内。原始穿越（实线）和对偶穿越（虚线）连接两条较短的边。这里，较长的边沿空间方向。

引理8.1 （临界随机簇测度）。设 $q = \delta^2 \in [2, 4)$ 且$(\lambda_c,\ \lambda_b) = (\delta^{-2},\ 1)$。以下常数依赖于 k。

1. 自由和连线无限体积测度相同。测度 $\phi = \phi^0 = \phi^1$ 在整数空间平移和实数时间平移下保持不变。对于任意有界的 $B \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 R，使得对于每个包含 B 的 R-邻域的有限体积 Δ 以及每个边界条件 ζ，ϕ_Δ^ζ 和 ϕ 在 F_B 上的限制态在全变差意义下相差至多 ε。

2. （*Russo–Seymour–Welsh*（*RSW*）性质。）对于每个 $\rho > 1$，存在 $c(\rho) > 0$ 和 $s(\rho) > 0$，具有如下性质。设 R 是一个纵横比为 ρ 的矩形，其较长边沿空间或时间方向，且较短边至少为 $s(\rho)$。设 $\Delta' \subseteq \Delta$ 是满足 $\widehat{R} \subseteq \Delta'$ 的有限体积，且 ζ 是 Δ 上的一个边界条件。那么，几乎必然有

$$\phi_\Delta^\zeta(C(\mathcal{R}) \mid \mathcal{F}_{\Delta\setminus\Delta'}) \geq c(\rho), \qquad \phi_\Delta^\zeta(C^*(\mathcal{R}) \mid \mathcal{F}_{\Delta\setminus\Delta'}) \geq c(\rho).$$

证明。对于 (1)，按照 [16] 的记号，割和桥的强度分别为 λ 和 μ，对于 $q \in [1, 4]$和 $\mu/\lambda = q$，Duminil-Copin、Li 和 Manolescu 证明了 $\phi^0 = \phi^1$ 并且不存在无限簇 [16, 定理 1。5]。这里 $\lambda_b/\lambda_c = q$。根据单调性，极限 ϕ^0 不依赖于有限体积的递增序列，因此在保持模型不变的平移下具有不变性。

对于全变差界，令 Q 为 B 和 $\Delta \supseteq Q$的 R-邻域。根据 (iii)，ϕ_Δ^ζ 在 FQ 上的限制态是测度 ϕ_Q^ξ的平均；根据 (ii)，每个 ϕ_Q^ξ以及 ϕ的限制态，都在随机序意义下介于 ϕ_Q^0 和 ϕ_Q^1之间。令 μ 为这些测度之一。根据 Strassen定理 [43, 定理 11]，存在一个耦合，使 μ 和 ϕ_Q^1 保持序关系；也就是说，存在一个定义在构型对上的概率测度，其边缘分布为 μ 和 ϕ_Q^1，且集中于满足 $\omega \leq \omega'$的构型对 (ω, ω') 所构成的集合上。用 (ω^μ, ω^1) 表示服从该耦合分布的一对构型，因此 $\omega^\mu \leq \omega^1$ 以概率一成立；另见引理 II.2]的 [2, 证明。令 N_c 和 N_b 分别表示 B中的割数和桥数。如果 ω^μ 和 ω^1 在 B中不同，那么$N_c(\omega^\mu) - N_c(\omega^1) + N_b(\omega^1) - N_b(\omega^\mu) \geq 1$，且每个差值都非负。由于 N_c 是递减的，而 N_b 是递增的，

$$\mathbb{P}(\omega^\mu|_B \neq \omega^1|_B) \leq \eta_R := \mathbb{E}_{\phi_Q^0}[N_c] - \mathbb{E}_{\phi_Q^1}[N_c] + \mathbb{E}_{\phi_Q^1}[N_b] - \mathbb{E}_{\phi_Q^0}[N_b].$$

这些计数是一致可积的。添加一个割会使 ϕ_Δ^ζ 定义中的簇计数 k^ζ 改变0或1，而添加一座桥则使其改变0或 -1。因此，在每个 ϕ_Δ^ζ 下，切割的条件强度位于 $[\lambda_c, q\lambda_c]$ 中，桥的条件强度位于 $[\lambda_b/q, \lambda_b]$中。此处 $q\lambda_c = \lambda_b = 1$，故 N_c 与N_b 被均值为 B中原始线总长度及桥接间隙总长度的泊松变量随机支配，且对 Δ 和 ζ一致成立。当 $R \to \infty$ 时，这些期望因此

单调收敛到 ϕ^0 与 ϕ^1下的期望，且二者重合。因此 $\eta_R \to 0$。通过 ϕ^1_Q 比较 ϕ^ξ_Q 与 ϕ ，可将它们在$\mathcal{F}_B$ 上的全变差距离控制在 $2\eta_R$以内，从而证明了(1)。

对于 (2)，Duminil-Copin、Li 和 Manolescu 在 [16, 第 5 节2], 中证明，对于 $q \in [1,4]$ 和 $\mu/\lambda = q$，上文的量子随机簇模型（即定义在 $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ 上的模型 ϕ^ζ_Δ ）具有 [16, 引理 31]中 (BXP) 形式的 RSW 性质。对于每个 $\rho > 1$ 和 $\nu_0 > 0$ ，都存在 $\delta_1 > 0$ ，使得对于所有足够大的 n，在扩张了边距 $\nu_0 n$的矩形上施加自由边界条件时，边长为 $2\rho n$ 和 $2n$的矩形中的原始水平和垂直交叉，其概率至少为 δ_1 ；而对偶交叉在该处施加接线边界条件时的概率至少为 δ_1 。他们在变形等半径方格晶格上得到了统一的交叉概率界，并将其推广到量子随机簇模型 [16, 命题 5.1 和 53]。我们取 $\nu_0 = \frac{1}{2}$ ，即 ^R 的边距。它们的强度之比为 q ，但具有不同的共同尺度。将两个强度都乘以 α ，会使构型在垂直方向上按 $1/\alpha$ [16, 第 1 节3],中的方式扩张，从而使纵横比改变一个固定因子。由于 (BXP) 对每个 $\rho > 1$都成立，这些界适用于长方向上的交叉。考虑一个矩形$[-a,a]\times[-b,b]$短方向上的交叉，其中 $b > a$，例如。子矩形 $[-a,a]\times[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]$的纵横比为 2，其^扩张区域包含在 R 内。该子矩形中沿长方向的每个交叉，都是 R 中沿短方向的交叉。因此，在 $(\lambda_c,\lambda_b) = (\delta^{-2},1)$ 处，这些界在两个方向上均成立，常数为 $c(\rho) > 0$。模型在整数空间平移和实数时间平移下保持不变，因此这些界适用于所有矩形。现在设 R Δ', Δ, ζ如 (2) 中所述。由 (iii)，在给定 $F^{\Delta\setminus\Delta'}$ 以及随后给定 $\Delta'\setminus$ ^R 中的构型后， ^R 中的构型服从 ϕ^ξR 在某个诱导边界条件 ξ下的分布。事件 C(R) 是递增事件，因此由 (ii) 得 ϕ^ξR(C(R)) $\geq \phi^0$R(C(R)) $\geq c(\rho)$。事件C^*(R) 是递减事件，因此对其而言，最不利边界条件是接线边界条件，并且ϕ^ξR(C^*(R)) $\geq \phi^1$R(C^*(R)) $\geq c(\rho)$。对 $\Delta'\setminus$ ^R 中的构型取平均，即得 (2)。

□

我们将无限体积环律 ν 定义为 ϕ 在 $\omega \mapsto \Gamma$下的像。由于$\nu_{N,T}$ 是 $\phi^0_{\Delta_N\text{的像},T}$，引理 8.1(1) 使得 ν 成为$\nu_{N,T}$ 在取决于有界区域内构型的事件上的极限。

8.3 分隔环

固定一个中心 $z \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$，并将 $Q_r = Q_r(z)$ 简写为 $R > 0$。对于 $L_* = 180$，令 $r_i = 2\cdot 6^{i-1}R$ 表示$i = 1$、2、3，并且

$$A_R = Q_{L_*R}\setminus Q_R, \qquad A_R^{(i)} = Q_{5r_i/2}\setminus Q_{r_i/2}, \qquad C_R^{(i)} = Q_{2r_i}\setminus Q_{r_i}.$$

因此， $A_R^{(1)} = Q_{5R}\setminus Q_R$、 $A_R^{(2)} = Q_{30R}\setminus Q_{6R}$和 $A_R^{(3)} = Q_{180R}\setminus Q_{36R}$是 A_R 的互不相交的子环域，按从内到外的顺序排列。每个子环域都包含核心环带 $C_R^{(i)}$ ，其两侧各有宽度为 $r_i/2$ 的缓冲带。围绕 Q_R 的原始回路是（第8节中定义的）一条闭合原始路径，绕Q_R一周；围绕 Q_R 的对偶回路是绕 Q_R一周的闭合对偶路径。令 P_1 和 P_3分别表示在 $C_R^{(1)}$ 和 $C_R^{(3)}$ 中存在围绕 Q_R 的原始回路的事件，并令 P_2^* 表示在 $C_R^{(2)}$ 中存在围绕 Q_R 的对偶回路的事件。令 $G_R = P_1\cap P_2^*\cap P_3$。见图 6。

引理 8.2 的思路是： 将四个矩形放置在方形环带周围，并让每个矩形沿长边方向被穿越，它们便会连接成一条围绕内方形的闭曲线（图7）。根据引理8.1(2)，每个穿越事件的概率至少为 $c(4)$；根据正关联，四个事件同时发生的概率至少为 $c(4)^4$。一条 Γ 环是原始簇与对偶簇之间的界面，因此要在 Q_R 周围得到环，就需要两种类型的回路。被对偶回路包围的原始回路会在它们之间形成一条环，而再在外侧放置一条原始回路则会形成第二条环。由于每个概率界在给定外部条件下仍然成立，因此可以将这三个回路置于三个互不相交的环带中，并将它们的概率相乘。

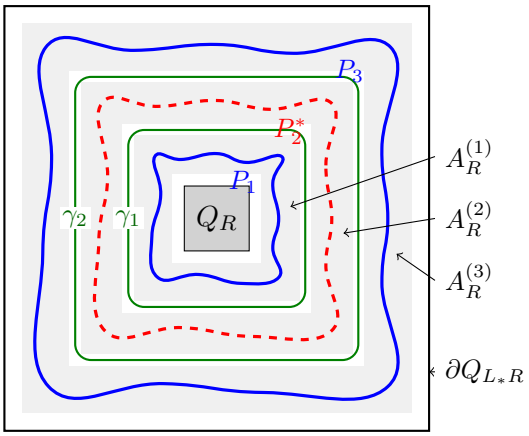


图 6：引理8.2的示意图，未按比例绘制。阴影带为子环域$A_R^{(1)}$， $A_R^{(2)}$， $A_R^{(3)}$，属于 $A_R = Q_{L_*R} \setminus Q_R$。在 G_R 上，第一处和第三处有原始回路（实线），第二处有对偶回路（虚线）。环 γ_1 从外侧包围内侧回路的原始簇，环 γ_2 从外侧包围对偶回路的对偶簇；二者都包围 Q_R，位于 A_R中，且彼此不同。

引理 8.2 （一致条件分离环）。令 $c_* = c(4)^4$ 且 $p_* = c_*^3$，其中 $c(4)$ 来自引理*8.1(2)*，且 $R_* = s(4)/2$。设 $R \geq R_*$，设 Δ 为包含 Q_{L_*R}的有限体积，并设ζ 为 Δ上的边界条件。则几乎必然，

$$\phi_\Delta^\zeta(G_R \mid \mathcal{F}_{\Delta\setminus A_R}) \geq p_*. \tag{30}$$

事件 G_R 仅依赖于 A_R中的构型。在 G_R 上， Γ 的环包含两个位于 A_R 内并环绕 Q_R的不同环。界 (30) 对无穷体积测度 ϕ同样成立。

证明。固定 i 并记为 $r = r_i$。考虑四个矩形

$$[-2r, 2r] \times [r, 2r], \quad [-2r, 2r] \times [-2r, -r], \quad [-2r, -r] \times [-2r, 2r], \quad [r, 2r] \times [-2r, 2r]$$

相对于 z，每个矩形的纵横比为4，短边为 $r \geq 2R \geq s$(4)。前两个在长方向上的原始穿越是水平的，后两个是竖直的。它们的并包含 $C_R^{(i)}$ 中环绕 $Q_r \supseteq Q_R$的一条原始回路，因为每条水平穿越都与两条竖直穿越相交。第一个矩形的扩张区域是 $[-\frac{9}{4}r, \frac{9}{4}r] \times [\frac{3}{4}r, \frac{9}{4}r]$，且四个扩张区域均位于 $A_R^{(i)}$ 的内部（图 7）。由(iii)，在条件$\mathrm{F}^{\Delta\setminus A_R^{(i)}}$ 下，$\bar{A}_R^{(i)}$ 中的构型服从诱导边界条件 ξ下的定律 $\phi^\xi_{A_R^{(i)}}$。由带 $\Delta' = A_R^{(i)}$ 的引理8.1(2)，四条穿越中每一条的条件概率至少为 c(4)。它们是递增事件，因此对 $\phi^\xi_{A_R^{(i)}}$ 应用FKG不等式(i)，可将四者同时发生、从而一条原始回路发生的条件概率从下方界为 $c(4)^4 = c_*$。对于 $i = 2$，用对偶穿越作同样的论证；对偶穿越是递减事件，因而也正关联，由此得到对偶回路。因此，几乎必然，

$$\phi_\Delta^\zeta(P_1 \mid \mathcal{F}_{\Delta\setminus A_R^{(1)}}) \geq c_*, \qquad \phi_\Delta^\zeta(P_2^* \mid \mathcal{F}_{\Delta\setminus A_R^{(2)}}) \geq c_*, \qquad \phi_\Delta^\zeta(P_3 \mid \mathcal{F}_{\Delta\setminus A_R^{(3)}}) \geq c_*.$$

后文只会用到它们的组合（30）。

$C_R^{(i)}$ 中的原始路径或对偶路径由 $C_R^{(i)}$ 中的线段、桥和割组成。因此， P_1、 P_2^*和 P_3 仅取决于 $C_R^{(1)}$、 $C_R^{(2)}$ 和 $C_R^{(3)}$ 中的构型，而 G_R 仅取决于 A_R中的构型。事件 P_1 和 P_3 相对于$\mathcal{F}^{\Delta\setminus A_R^{(2)}}$以及$\mathcal{F}_{\Delta\setminus A_R} \subseteq \mathcal{F}^{\Delta\setminus A_R^{(2)}}$ 是可测的。先对 $A_R^{(2)}$ 、再对 $A_R^{(1)}$ 迭代条件期望，

$$\phi_\Delta^\zeta(P_1 \cap P_2^* \cap P_3 \mid \mathcal{F}_{\Delta\setminus A_R}) \geq c_*\, \phi_\Delta^\zeta(P_1 \cap P_3 \mid \mathcal{F}_{\Delta\setminus A_R}) \geq c_*^2\, \phi_\Delta^\zeta(P_3 \mid \mathcal{F}_{\Delta\setminus A_R}) \geq c_*^3.$$

在 G_R中，令 γ_1 为包含内侧回路的原始簇的薄邻域的外边界，并令 γ_2 为包含对偶回路的对偶簇的薄邻域的外边界。这些是 Γ 围绕 Q_R 的环（图8）。原始簇无法穿过对偶回路，对偶簇也无法穿过原始回路。因此， γ_1 位于对偶回路内部，而 γ_2 位于对偶回路与外侧原始回路之间。二者都包含于 A_R中，并且由于对偶回路将二者分隔开来，它们彼此不同。

对于 ϕ，设 F 是一个事件，它取决于 A_R以外某个有界区域内的构型。界 $\phi^0_\Delta(G_R \cap F) \geq p_* \phi^0_\Delta(F)$ 由引理8.1(1) 推得极限情形下仍成立。根据单调类定理，它可推广到所有 $F \in \mathcal{F}^{A_R^c}$，即对30式中的 ϕ。

□

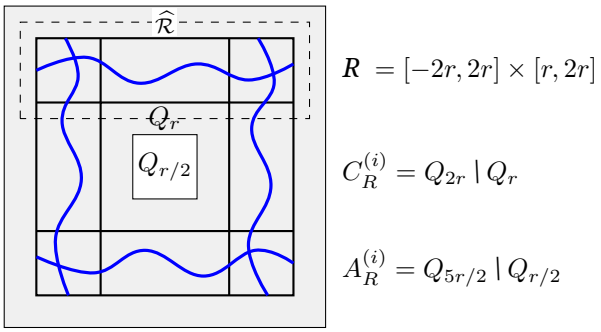


图 7：核心环带 $C_R^{(i)}$ 被四个纵横比为 4 的矩形覆盖。^四个矩形各自沿长方向的原始穿越构成一条环绕 Q_r的回路。顶端矩形的扩张区域$\mathcal{R}$ 以虚线标出，且四个扩张区域均位于缓冲环带 $A_R^{(i)}$（阴影部分）的内部。

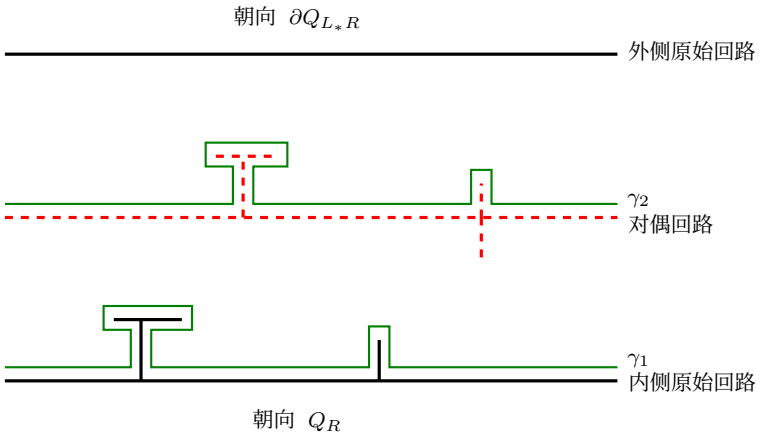


图 8：引理的证明 8.2 在回路附近，环带 A_R 沿一条半径剖开，因此左右边被识别，径向方向朝上。内侧回路的原始簇（实线）无法穿过对偶回路（虚线），而该簇的外边界γ_1 的薄邻域的外边界 γ_2 位于它们之间。对偶回路的对偶簇的薄邻域外边界位于对偶回路与外侧原始回路之间。对偶回路将 γ_1 与 γ_2分隔开。

引理的思想 8.3。 单个环带包含一对分离环的概率至少为 p_*，但该概率不会趋近于 1。在 K 与距离 R 之间，按几何增长的尺度大约有 $\log R / \log L_*$ 个不相交环带，每个环带在其自身尺度上都是图 6 的一个副本（图 9）。无论其外部发生什么，每个环带都提供至少 p_*的全新机会。因此，它们全部失败的概率至多为 $(1-p_*)^{\log R / \log L_*}$，这是 R的负幂。环

不会相交，因此，围绕 K 的单个分离圈会将所有与 K 相交的环限制在其内部。混合性也有类似的解释（注8.4）。

引理 8.3 (环路尾部与混合性)。 设 $K \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ 有界，并选取 z 和 $R_0 \geq R_*$，使得 $K \subseteq Q_{R_0}(z)$。令 $\beta_0 = -\log(1-p_*)/\log L_*$，并令 $C_K = R_0^{\beta_0}/(1-p_*)$。对于每个 $R \geq R_0$,

$$\mathbb{P}(\textit{some loop meeting } K \textit{ leaves } Q_R(z)) \leq C_K R^{-\beta_0}, \tag{31}$$

对于 $\mathbb{P}=\nu$，以及对于 $\mathbb{P}=\nu_{N,\,T}$，只要 $Q_R(z)\subseteq\Delta_{N,\,T}$。在 ν 条件下，所有与 K 相交的环几乎必然都是有限的。测度 ϕ，因而圈定律 ν，在沿原始列进行一个单位的空间平移以及在时间平移下都是混合的。

证明。下面的事件都是随机簇构型的事件；我们也用 $\mathbb{P}$ 表示 ϕ，以及 $\phi^0_{\Delta_N,\,T}$，它们在 $\omega\mapsto\Gamma$ 下的像分别为 ν 和 $\nu_{N,\,T}$。令 m 为满足 $L_*^m R_0 \leq R$ 的最大整数。令 $R_j = L_*^j R_0$ 表示 $0\leq j<m$。环带 $A_{R_j} = Q_{R_{j+1}}\setminus Q_{R_j}$ 的内部两两不相交，且位于 $Q_R\setminus K$ 中。令 $G_j = G_{R_j}$ 为 A_{R_j} 中引理 8.2 所述的事件。根据该引理，G_j 仅取决于 A_{R_j} 中的构型，因此 G_0^c、……、G_{m-2}^c 关于 σ-代数 $\mathrm{F}^{A^c_{R_{m-1}}}$ 可测，该代数由 $A_{R_{m-1}}$ 之外的构型生成。根据条件期望的塔式性质，

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j<m} G_j^c\Big) = \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\bigcap_{j<m-1}G_j^c}\,\mathbb{P}(G_{m-1}^c \mid \mathcal{F}_{A^c_{R_{m-1}}})\Big].$$

由（30），$\mathbb{P}(G_{m-1}\mid \mathcal{F}^{A^c_{R_{m-1}}}) \geq p_*$ 几乎必然成立，因此期望中的条件概率至多为 $1-p_*$，并且

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j<m} G_j^c\Big) \leq (1-p_*)\,\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j<m-1} G_j^c\Big).$$

由归纳法，$\mathbb{P}\big(\bigcap_j G_j^c\big) \leq (1-p_*)^{\,m}$。这里没有用到环带之间的独立性。根据 m的选取，$m>\log(R/R_0)/\log L_* - 1$，并且由于 $1-p_*<1$，可得

$$(1-p_*)^m \leq (1-p_*)^{-1}(1-p_*)^{\log(R/R_0)/\log L_*} = (1-p_*)^{-1}(R/R_0)^{-\beta_0} = C_K R^{-\beta_0}.$$

在 G_j 上有一个环 $\gamma\subset A_{R_j}$ 包围着 $Q_{R_j}\supseteq K$。环彼此不相交，因此一个与 K相交且离开 Q_R 的环会同时与 γ的内部和外部相交，从而必然等于 γ，而它与 K不相交。这就证明了（31），令 $R\to\infty$ 即可得到有限性。

对于混合性，设 τ 是沿 n 个原始列或沿时间 n的平移，并设 F、G 是有界区域 B内构型的有界函数。给定 $\varepsilon>0$，取 R 如引理 8.1(1)中所述，并令 Q 为 B的 R邻域。当 $|n|$ 足够大时，τB 位于 Q之外，因此 $G\circ\tau$是关于F^{Q^c}可测的。对于足够大的有限体积 Δ，（iii）和引理 8.1(1)给出

$$\big|\mathbb{E}_{\phi^0_\Delta}[F\,G\circ\tau] - \mathbb{E}_\phi[F]\,\mathbb{E}_{\phi^0_\Delta}[G\circ\tau]\big| = \big|\mathbb{E}_{\phi^0_\Delta}\big[(\mathbb{E}_{\phi^\xi_Q}[F]-\mathbb{E}_\phi[F])\,G\circ\tau\big]\big| \leq \varepsilon\|F\|_\infty\|G\|_\infty.$$

由 $\Delta\uparrow\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$引理8.1(1)，并利用 $\mathbb{E}_\phi[G\circ\tau]=\mathbb{E}_\phi[G]$，可得 $|\mathbb{E}_\phi[F\,G\circ\tau] - \mathbb{E}_\phi[F]\mathbb{E}_\phi[G]| \leq \varepsilon\|F\|_\infty\|G\|_\infty$对所有充分大的 $|n|$成立。有界可测函数是这类局域函数的 $L^1(\phi)$极限，而平移不变性使得该逼近关于 n一致。映射$\omega\mapsto\Gamma$ 与这些平移可交换，因此混合性传递到 ν。□

注 8.4（为何存在混合性）。 由区域马尔可夫性质，远离方框 B 的构型对 B 中构型的影响，仅通过它在 B周围的大方框上所诱导的边界条件来实现。由边界条件比较，每一个这样的测度都介于自由边界条件与接线边界条件之间，而在临界性下它们具有相同的极限，$\phi^0=\phi^1$ [16, 定理 1。5],因此边界条件被遗忘。从几何上看，引理8.2中围绕 B的对偶回路与原始回路在每一尺度上以有下界的概率出现，并充当自由与接线边界条件，从而屏蔽 B，使其与远处区域隔开。屏蔽是逐尺度发生的，该论证并不给出指数速率。

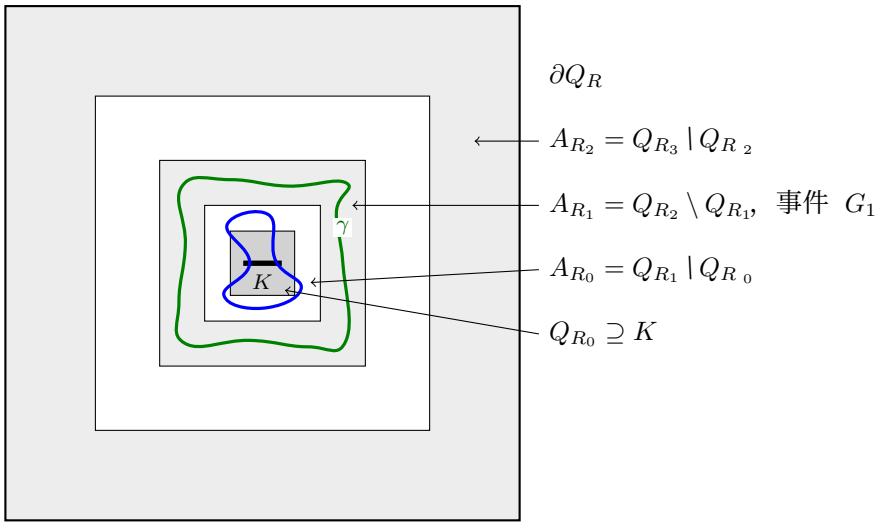


图 9：引理的示意图 8.3，未按比例绘制。在 $K \subseteq Q_{R_0}$ 和 ∂Q_R 之间是环带 $A_{R_j} = Q_{R_{j+1}} \setminus Q_{R_j}$，$R_j = L_*^j R_0$，交替着色。每个环带都是图 6 按比例$R_j$的副本。这里事件 G_1 发生，其环 γ 围住 K。由于各环互不相交，每个与 K （实线，蓝色）相交的环都留在 γ内。每个 G_j 的条件概率至少为 p_*，给定 A_{R_j}外部的构型，因此它们全部失败的概率至多为 $(1-p_*)^m$。

8.4 热力学极限

命题 8.5 （态 ω_k）。极限 $\omega_k(a) = \lim_{N\to\infty} \omega_N(a)$ 对每一个局域 a 都存在。对于字 W，它由 $\omega_k(W) = \mathbb{E}_\nu[f_W]$ 给出，并且当 N 与 T 共同趋于无穷时，$\omega_{N,T}(W) \to \mathbb{E}_\nu[f_W]$。态 ω_k 在 ς^2 下不变，并且是相互作用 $-\sum_i e_i$ 的基态。

证明。设 $W = e_{i_1} \cdots e_{i_r}$是一个长度为 r（第8节）的字，支撑在区间 I内，并设 $K = I \times \{0\}$为插入该字的股线位置集合。按引理 8.3 选取 z 和 R_0。令 E_R 表示每个与 K 相交的环都包含在 $Q_R(z)$ 内这一事件。在 E_R 上，$\ell(\Gamma; W) - \ell(\Gamma)$ 表示经过 K 的环数量的变化，它由这些环如何连接 K处的股线决定。每个环都是沿着构型追踪而得，因此在 E_R 上，这些环由 $Q_R(z)$ 中的构型决定（图 10）。因此，存在一个由 $Q_R(z)$ 中的构型确定、取值于 $[\delta^{-2r}, 1]$ 的函数 $f_W^{(R)}$，它在 E_R 上等于 f_W。该函数通过追踪 K 内部 $Q_R(z)$ 中的环来计算；若其中一个环到达 $Q_R(z)$ 的边界，则令 $f_W^{(R)} = 1$ 取相应值。f_W和 $f_W^{(R)}$都取值于 $[\delta^{-2r}, 1]$，所以 $|f_W - f_W^{(R)}| \le 1$，并且 $f_W - f_W^{(R)}$ 在 E_R 上为零。E_R 的补事件是 (31) 中所述的事件：某个与 K 相交的环离开 $Q_R(z)$。因此 $|\mathbb{E}_\mathbb{P}[f_W] - \mathbb{E}_\mathbb{P}[f_W^{(R)}]| \le \mathbb{P}(\mathsf{E}_R^c)$，由 (31) 得

$$\left|\mathbb{E}_\mathbb{P}[f_W] - \mathbb{E}_\mathbb{P}[f_W^{(R)}]\right| \le C_K R^{-\beta_0} \qquad (\mathbb{P} = \nu \text{ or } \nu_{N,T},\ Q_R(z) \subseteq \Delta_{N,T}).$$

给定 $\varepsilon > 0$，选取满足 $C_K R^{-\beta_0} < \varepsilon$ 的 R，然后根据引理 8.1(1)，取 $B = Q_R(z)$，使得存在一个有限体积 $Q \supseteq Q_R(z)$，满足只要 $\Delta_{N,T} \supseteq Q$，就有 $|\mathbb{E}_{\nu_{N,T}}[f_{(R)W}] - \mathbb{E}_\nu[f_{(R)W}]| < \varepsilon$。结合 (29)，可得对于所有此类 N, T，都有 $|\omega_{N,T}(W) - \mathbb{E}_\nu[f_W]| < 3\varepsilon$。固定 N 并令 $T \to \infty$，则对于所有足够大的 N，有 $|\omega_N(W) - \mathbb{E}_\nu[f_W]| \le 3\varepsilon$。因此 $\omega_N(W) \to \mathbb{E}_\nu[f_W]$，由线性性可知，对于每个局域 a，$\omega_N(a)$ 都收敛。正性和归一化在取极限时得以保留，而 ς^2-不变性则源于 ν 在沿一个原始列平移时的不变性。

局域 a 保持 V_N，因此

$$\omega_N(a^*[h_N, a]) = \langle a\Omega_N, (h_N - \epsilon_N) a\Omega_N \rangle \ge 0.$$

For 大的 N, $[h_N, a]$ 不依赖于 N，且极限就是基态不等式。 □

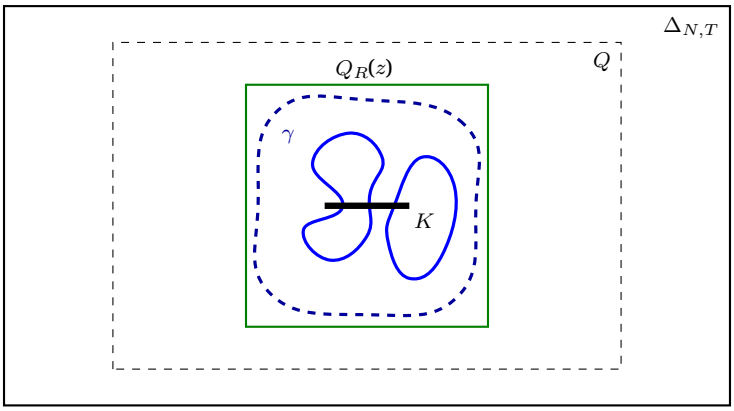


图 10：命题 8.5 的证明中的截断。字 W 被插入到 $K = I \times \{0\}$ 上。在 $\mathcal{E}_R$ 上，与 K 相交的环（实线）位于 $Q_R(z)$ 中，因此 $f_W = f_W^{(R)}$ 由 $Q_R(z)$ 中的构型决定。包围 K、位于 $Q_R(z)$ 内部的环 γ（虚线）将它们限制在其中；根据引理 8.3 $\mathcal{E}_R$ 失败的概率至多为 $C_K R^{-\beta_0}$。一旦 $\Delta_{N,\,T}$ 包含有限体积 Q，引理 8.1(1) 就使 $\nu_{N,\,T}$ 下构型在 $Q_R(z)$ 中的分布与 ν 之相差至多 $C_K R^{-\beta_0}$。

该态由杯边界向量和真空块选定。对于 $k \geq 3$，我们不声称对无限体积基态进行分类。对于 $k = 2$，基态由 [8] 唯一确定。

9 纯性

本节通过从环表示推出虚时间聚类并应用 Borchers–Arveson 定理，证明 ω_k 是纯态（命题 9.2）。令 $(\pi, \mathrm{H}, \Omega)$ 为 ω_k 的 GNS表示。有限程相互作用的动力学 $\alpha_t(a) = \lim_N e^{ith_N} a e^{-ith_N}$ 对局域 a 存在，且可作为范数极限得到（见第6节）。2]，证明只需用到这样一个事实：B_k 中支撑于互不相交区间的元素彼此对易。由于 ω_k 是基态，α_t 在 π 中由 e^{itL} 实现，其中 $\mathrm{L} \geq 0$ 且 $\mathrm{L}\Omega = 0$ [10，（见第 5 节）。3]。

引理 9.1（虚时间聚类）。对于局域 a，$b \in B_k$，

$$\lim_{s\to\infty} \langle \pi(a)\Omega, e^{-sL}\pi(b)\Omega\rangle = \omega_k(a^*)\,\omega_k(b).$$

证明。由线性性，我们可以设 a 和 b 为字，长度分别为 r_a 和 r_b。令 $G(s) = \langle \pi(a)\Omega\ e^{-sL}\pi(b)\Omega\rangle$ 其中 $s \geq 0$。证明分为三个步骤。

步骤 *1*，有限体积。在条带 $I_N \times [-T, T+s]$ 上，分别于时间 0 插入 b、于时间 s 插入 a^* 时，二插入施温格函数为

$$G_{N,T}(s) = \frac{\langle \xi_N, e^{-Th_N} a^* e^{-sh_N} b e^{-Th_N} \xi_N\rangle}{\langle \xi_N, e^{-(2T+s)h_N}\xi_N\rangle}.$$

由（23），由于 $\langle \Omega_N,\ \xi_N\rangle \neq 0$，

$$\lim_{T\to\infty} G_{N,T}(s) = \langle a\Omega_N, e^{-s(h_N-\epsilon_N)} b\Omega_N\rangle =: G_N(s).$$

步骤 *2*，$G_N(s) \to G(s)$。由极化可知，只需取 $a = b$。设 $m_{N,\,a}$ 是算子 $h_N - \epsilon_N$ 在 V_N 上、作用于向量 $a\Omega_N$ 所对应的谱测度，它是 $[0,\infty)$ 上总质量为 $\omega_N(a^*a)$ 的正测度。其傅里叶变换为

$$\int e^{it\lambda}\, dm_{N,a}(\lambda) = \langle a\Omega_N, e^{it(h_N-\epsilon_N)} a\Omega_N\rangle = \omega_N(a^*\alpha_t^{(N)}(a)), \qquad \alpha_t^{(N)}(a) = e^{ith_N} a e^{-ith_N},$$

因为 $h_N\Omega_N = \epsilon_N\Omega_N$。由于 $N\to\infty$， $\alpha_t^{(N)}(a)\to\alpha_t(a)$在范数意义下收敛，且 $\omega_N\to\omega_k$在局域元素上成立（命题 8.5），因此傅里叶变换收敛到

$$\omega_k(a^*\alpha_t(a)) = \langle \pi(a)\Omega, e^{it\mathcal{L}}\pi(a)\Omega\rangle = \int e^{it\lambda}\, dm_a(\lambda),$$

其中 m_a 是$\mathcal{L}$ 在 $\pi(a)\Omega$中的谱测度；由于$\mathcal{L}\ge 0$，它是 $[0,\infty)$上的正测度。总质量也收敛，因此根据列维连续性定理，$m_{N,\,a}\to m_a$ 弱收敛。函数 $\lambda\mapsto e^{-s\lambda}$ 在承载所有这些测度的 $[0,\infty)$上有界且连续，因此$G_N(s)=\int e^{-s\lambda}dm_{N,\,a}\to\int e^{-s\lambda}dm_a = G(s)$。

步骤 *3*，环表示以及 $s\to\infty$。与（29）中一样，

$$G_{N,T}(s) = \mathbb{E}[f_s^{(2)}], \qquad f_s^{(2)}(\Gamma) = \delta^{\ell(\Gamma;b,a^*)-\ell(\Gamma)-r_a-r_b}\in[\delta^{-2(r_a+r_b)},1],$$

期望取自条带 $I_N\times[-T,T+s]$的圈定律，而 $\ell(\Gamma;\,b,\;a^*)$表示在时刻 0 插入 b 并在时刻 s插入 a^* 之后的环数。命题8.5证明中的截断论证表明，对于时刻 0 的两个插入集 K_0 和时刻 s的 K_s，当 N和 T同时趋于无穷时，$G_{N,\,T}(s)\to\mathbb{E}_\nu[f_{(2)s}\ ]$；尤其是 $\lim_N\lim_T G_{N,\,T}(s) = \mathbb{E}_\nu[f_{(2)s}\ ]$。结合步骤 1 和 2， $G(s)=\mathbb{E}_\nu[f_{(2)s}\ ]$。

现在令 E_s 表示以下事件：每个与 K_0 相交的环都包含于 $Q_{s/3}(z_0)$ 中，且每个与 K_s 相交的环都包含于 $Q_{s/3}(z_s)$ 中，其中 z_0 和 $z_s=z_0+(0,s)$ 是 K_0 和 K_s 的中心。在 E_s 上，没有环同时与 K_0 和 K_s 相交。时间 0 处的手术操作只改变经过 K_0 的环，而它所产生的新环由这些环的弧以及 K_0 附近的弧组成，因此与 K_s 不相交。因此，时间 s 处的手术操作在手术操作前后作用于同一批环。环数量的变化相加，并且

$$f_s^{(2)} = f_b\cdot(f_{a^*}\circ\tau_s) \qquad \text{on } E_s,$$

其中 $f_{a^*}\circ\tau_s$ 是 a^* 在时间 s 插入后的一次插入估计量。令 K' 为 a^* 在时间 0 的插入集合，因此 K_s 是其经过 s 平移后的集合。根据（31）以及 ν的时间平移不变性， $\nu(E_s^c)\le(C_{K_0}+C_{K'})(s/3)^{-\beta_0}$。所有估计量的取值都属于 $[0,1]$,，因此

$$\big|G(s)-\mathbb{E}_\nu[f_b\cdot(f_{a^*}\circ\tau_s)]\big|\le 2\nu(E_s^c)\to 0.$$

由时间混合性（引理 8.3）， $\mathbb{E}_\nu[f_b\cdot(f_{a^*}\circ\tau_s)]\to\mathbb{E}_\nu[f_b]\,\mathbb{E}_\nu[f_{a^*}]=\omega_k(b)\,\omega_k(a^*)$，最后一个等式使用命题8.5 得出。 □

命题 9.2. *ω_k 是纯的。*

证明。由于 $s\to\infty$, $e^{-s\mathcal{L}}$ 强收敛到投影 P_0，其值域为 L 的核。在稠密集 $\pi(B_{k,\mathrm{loc}})\Omega$ 上，引理 9.1 给出 $P_0=|\Omega\rangle\langle\Omega|$。由于 $\Omega\in$ L 的核对于 $\pi(B_k)$ 是循环的，基态子空间 L 的核是生成的，因此 π 连同实现 $e^{it\mathcal{L}}$ 是 [38]意义下的基态表示。根据 Borchers–Arveson 定理的形式 [38, 命题 2.7]，正实现因而是极小的，特别是 $e^{it\mathcal{L}}\in\pi(B_k)''$，另见 [10, 第 5 节3]。因此，每个 $x\in\pi(B_k)'$ 都与 P_0 对易，所以 $x\Omega=c\Omega$，而循环性给出 $x=c\mathbf{1}$。 □

10 仿射模与缝合

本节与下一节证明剩余断言 $H_{\omega_k}\cong\mathbf{1}$ （定理11.4）。此处我们给出将带电系数转化为由环控制的量的两个要素。第10.1节回顾希尔伯特仿射 Temperley–Lieb 模 $\mathscr{V}_Z$ （中心对象 Z [13] 的），并证明仿射估计（引理10.2）。平凡仿射图相对于其环的数目作用，其范数至多为 $\delta^{(m+n)/2}\gamma_Z^{\lfloor r/2\rfloor}$，其中 r 为本质圆的数目，且$\gamma_Z=(\mu_Z/\delta)^2<1$ 对 $Z\ncong\mathbf{1}$ 成立，这由 μ_Z 的显式值得出（命题10.1）。第10.2节定义

带电系数$\langle \xi \otimes_{\Omega} U_Z^n(\eta \otimes \Omega)\rangle$，并证明缝合引理（引理10.4）。对每个环配置，带电求值是某一仿射图的矩阵系数，该仿射图的本质圆即分隔两个插入的环。二者共同给出带荷估计量的界（40）。第11 节将其与引理8.2 的分离环相结合，以证明衰减（命题11.1），并推出 $H_{\omega_k} \cong \mathbf{1}$（由刚性，引理11.3）。

10.1 中心对象的仿射表示

仿射图。仿射图 $D:(m,\epsilon) \to (n,\eta)$画在内圆与外圆之间的环带中，内圆有 $2m$ 个标记点，外圆有 $2n$ 个标记点。它由互不相交的弦以及有限多个互不相交的方框组成：每条弦或者连接两个标记点，或者是闭合的；每个方框由C_k 中 X的张量幂之间的一个态射标记，其腿是弦的端点。弦永不交叉。互补区域交替着色，而 $\epsilon,\eta \in \{+,-\}$记录内圆和外圆上一个特定标记点旁的着色。图在逐点固定两个圆的同痕意义下取值，因此绕环带缠绕的弦与不缠绕的弦不同痕。我们称 m 为仿射次数，而 $2m$ 个标记点承载 $Y^{\otimes m} = X^{\otimes 2m}$的股线。无框仿射Temperley–Lieb图是不含方框的仿射图。它有三类弦。贯穿弦连接内圆与外圆。弧连接同一圆上的两个点。其余的弦是闭圈。一条闭圈或者在环带中围成一个圆盘，此时称为可缩的，或者绕内圆缠绕一次，此时称为本质的（图12）。

对于 $Z \in \mathcal{Z}(\mathcal{C}_k)$，记其底层对象为 z，其半编织为 $\sigma_{z,\,Q}:\ z\otimes Q \to Q\otimes z$。令$\mathscr{V}_Z$ 为对偶对象 Z的 Hilbert 仿射模，其中

$$\mathscr{V}_Z(m,+) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_k}(\bar{z}, Y^{\otimes m}), \qquad \langle v,w\rangle = \mathrm{Tr}_{\bar{z}}(v^* w). \tag{32}$$

方程（32）定义了空间 $\mathscr{V}_Z(m,+)$，其边界的指定区域未着色。指定区域着色的边界带有第二族空间 $\mathscr{V}_Z(m,-)$，它们通过对偶着色在 [13] 中定义。二者共同构成 [13], 的带着色仿射模 $\mathscr{V}_Z$，其中仿射图 $D:(m,\epsilon) \to (n,\eta)$ 将 $\mathscr{V}_Z(m,\epsilon)$ 映射到 $\mathscr{V}_Z(n,\eta)$。我们仅通过零边界空间 $\mathscr{V}_Z(0,-)$对$m=0$使用 $-$-空间。沿接缝割开仿射图 $D:(m,+) \to (n,+)$；接缝是一条从内圆到外圆、避开方框并与弦横向相交于偶数个 $2r$ 点的径向弧；这样可将环带变为矩形，并将 D变为 C_k 的一个态射 $f:\ Y^{\otimes m}\otimes Q \to Q\otimes Y^{\otimes n}$，其中为 $Q = Y^{\otimes r}$。采用标准余评价R_Q， D 的作用为（图11 ）

$$\rho_Z(D)v = (R_Q^*\otimes \mathrm{id}_{Y^{\otimes n}})(\mathrm{id}_{\overline{Q}}\otimes f)(\mathrm{id}_{\overline{Q}}\otimes v\otimes \mathrm{id}_Q)(\mathrm{id}_{\overline{Q}}\otimes \sigma^{-1}_{\bar{z},Q})(R_Q\otimes \mathrm{id}_{\bar{z}}). \tag{33}$$

半编织的自然性带来切割无关性，而其张量相容性带来复合。共轭方程给出杯和帽的消去。幺正性给出$\langle v,\ \rho_Z(D)w\rangle = \langle \rho_Z(D^*)v,\ w\rangle$内积（32）以及其在 $-$-空间上的对应形式，其中 D^* 是交换两个圆的 D 反射。

只有 $Q \in \mathcal{C}_k$ 会出现。完整的阴影希尔伯特模（包括负零空间）与 Das–Ghosh–Gupta 的一致；其主要定理将偶部的中心识别为具有有限支撑 [13, 定理 5。13]的局部有限希尔伯特仿射表示。在有限深度情形下，支撑条件自动成立。

化归为普通图。范畴$\mathcal{C}_k$ 是 Temperley–Lieb–Jones 范畴的偶部，其张量幂之间的态射空间是由 Temperley–Lieb 图（边界点 [27] 的不交配对）张成的空间的商。因此，仿射图 D 的每个盒标记都是 Temperley–Lieb 图的线性组合。将这些展开式代入各方框，可将 D 写成普通仿射 Temperley–Lieb图 D'的线性组合；由于（33）关于 f是线性的， $\rho_Z(D)$就是相同线性组合的算子

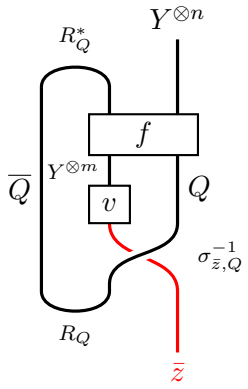


图 11：作用（33），从下往上读取。杯 R_Q 生成 QQ，弦Q 通过逆半编织穿过 $\bar{z}$，应用 $v: \bar{z} \to Y^{\otimes m}$，接着应用切割图 $f: Y^{\otimes m} \otimes Q \to Q \otimes Y^{\otimes n}$，帽 R_Q^* 以 Q 闭合 Q。以这种方式围绕 Q 闭合，就是切割图在环带上的缠绕。

$\rho_Z(D')$。因此，模 $\mathscr{V}_Z$ 由普通仿射Temperley–Lieb图的作用决定。

零空间与单圆映射。零空间为 $\mathscr{V}_Z(0,+) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_k}(\bar{z}, 1)$ 和$\mathscr{V}_Z(0,-)$。单圆映射是两个算子 C_+: $\mathscr{V}_Z(0,+) \to \mathscr{V}_Z(0,-)$ 和 C_-:$\mathscr{V}_Z(0,-) \to \mathscr{V}_Z(0,+)$，它们由不含标记点且带有一个本质圆的平凡仿射图给出，该圆两侧的着色不同。交换两个圆的反射会将其中一个图变为另一个，因此 $C_- = C_+^*$。复合映射 C_-C_+ 由两个平行的本质 X圆组成，也就是一个本质 Y圆，它通过半编织作用于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_k}(\bar{z}, 1)$。若 $\mathbf{1} \not\subseteq z$，则 $\mathscr{V}_Z(0,+) = 0$。每个单圆映射的定义域或值域都是 $\mathscr{V}_Z(0,+)$，因此二者都为零，于是令 $\mu_Z = 0$。若 $\mathbf{1} \subseteq z$，则下文的命题 10.1 表明 $\mathscr{V}_Z(0,+)$ 是一维的，并且本质 Y圆以标量 μ_Z^2 作用于其上，且 $\mu_Z \geq 0$。那么

$$\|C_+\| = \|C_-\| = \|C_-C_+\|^{1/2} = \mu_Z.$$

数值 μ_Z 是 Jones 和 Reznikoff 分类中希尔伯特模 $\mathscr{V}_Z$ 的参数 [33]。我们不使用该分类。μ_Z 的取值由 SSU(2)的 $_k$-矩阵计算得到。

命题 10.1 (μ_Z的取值)。 设 $Z \in Z(\mathcal{C}_k)$ 是单的，且满足 $\mathbf{1} \subseteq z$。则$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_k}(\bar{z}, \mathbf{1})$ 是一维的，且本质的 Y-圆群在其上的作用为 μ_Z^2，其中 $\mu_Z = |2\text{余弦}\ {}^{\pi}{}_{(a+1)_{k+2}}|$，标签$a$ 由 Z 按如下方式确定，或者为 $\mu_Z = 0$。

1. 对于奇数 k, $Z = a \boxtimes \bar{a}$，其中 $a \in \{0, 2, \ldots, k-1\}$。

2. 对于偶数 $k = 2n$，要么 Z是满足 $0 \leq a \leq k$和 $a \neq n$的类 $[a, a]$，要么 $Z = (n, n)_+$并且 $\mu_Z = 0$。

特别是，对于每个单对象 Z，都有 $0 \leq \mu_Z \leq \delta$，并且

$$0 \leq \mu_Z < \delta \qquad \textit{for every simple } Z \ncong \mathbf{1}. \tag{34}$$

证明。对于奇数 k，SU(2)$_k$ 的简单流具有奇数自旋，因此偶部$\mathcal{C}_k$（其简单对象为偶数标签 $a \in \{0, 2, \ldots\ldots, k-1\}$）是模的，且 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}_k) \simeq \mathcal{C}_k \boxtimes \mathcal{C}_k^{\mathrm{rev}}$。这个分解由 [9, 推论 3.10]给出，其包含关系是平凡的，另见 [36]。[9] 的子因子框架并不构成限制，因为酉融合范畴总能通过 Popa 作用于超有限 II$_1$ 因子，见

其中的讨论，见 [11] 和 [20, 第 1.3] 节。简单对象为 $Z = a \boxtimes b$，其底层对象为 $z = a \otimes b$。所有标签都是自对偶的，因此仅当 $a = b$ 时才有 $\mathbf{1} \subseteq z$，此时 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_k}(\bar{z}, \mathbf{1})$ 是一维的。绕着荷的一个 c 环从弦 a 上方经过，并从弦 $\bar{a}$ 下方经过。它与 a 构成一个霍普夫链环，作用为 S_{ca}/S_{0a}，其中 $S_{ab} = \sqrt{2}/(k+2)\sin\frac{(a+1)(b+1)\pi}{k+2}$。由于 $Y = X \otimes X \cong 0 \oplus 2$ 且 $S_{2a}/S_{0a} = (S_{1a}/S_{0a})^2 - 1$，本质的 Y-圆周作用为 $(S_{1a}/S_{0a})^2$，，因此

$$\mu_{a\boxtimes\bar{a}} = \left|\frac{S_{1a}}{S_{0a}}\right| = \left|2\cos\frac{(a+1)\pi}{k+2}\right|.$$

当 $k = 2n$ 为偶数时，单纯流 $J = k$ 属于 C_k，且与 C_k 中所有对象的编织均为平凡。因此 C_k 是退化的，$\mathrm{Z}(\mathsf{C}_k)$ 不能分解为因子。Evans 和 Kawahigashi 在渐近包含 [18, Section 4] 中对此作了描述。其简单对象是标签对 $0 \le a$、$b \le k$ 的等价类 $[a, b]$，其中 $a + b$ 为偶数，并按关系 $(a, b) \sim (k - a, k - b)$ 取商。唯一的不动点对是 (n, n)，它对应两个对象 $(n, n)_+$ 和 $(n, n)_-$。共有 $k^2/4 + k/2 + 2$ 个简单对象 [18, Corollary 4.3]。$[a, b]$ 的底层对象是 $a \otimes b$。根据 [18, Theorem 4.2]，$(n, n)_+$ 和 $(n, n)_-$ 的底层对象，分别是 $n \otimes n$ 中模 4 同余于 0 和 2 的标签之和。在 $\mathrm{SU}(2)_k$ 中，乘积 $a \otimes b$ 仅当 $a = b$ 时包含 $\mathbf{0}$，且只包含一次。因此，只有当 $[a, a]$ 时才有 $\mathbf{1} \subseteq z$；对于 $(n, n)_+$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_k}(\bar{z}, \mathbf{1})$ 是一维的。对于等价类 $[a, b]$，若 $(a, b) \neq (n, n)$，则相应的中心对象由量子双构造中 Evans 和 Kawahigashi 的 (a, b) 对得到 [18, Section 4]。在 Longo–Rehren 描述中，两个手性因子分别承载编织与相反编织 [9, Sections 2.2 and 4]。等价地，$a \otimes b$ 与对象 Q 的半编织在 a 弦上方、b 弦下方穿过，

$$\sigma_{a\otimes b,Q} = (\mathsf{c}_{Q,a}^{-1} \otimes \mathrm{id}_b) \circ (\mathrm{id}_a \otimes \mathsf{c}_{b,Q}),$$

其中 c 是 $\mathrm{SU}(2)_k$的编织。张量因子的排列顺序以及将哪一个交叉绘制为上方交叉的约定都不起作用。重要的是，两个因子使用相反编织。这里不使用 [9, 推论 4.8]，因为它假设编织是非退化的，而$\mathcal{C}_k$ 对于偶 k是退化的。 [9,第 2.2 节和 4] 中介绍的一般半编织与相对编织无需这一假设，而将中心对象与等价类 $[a, b]$对应起来的方式正是 [18, 第 4]节中的方式。因此，对于 $[a, a]$，与偶对象 Y 的半编织经过 Y 一条 a弦的上方，并经过另一条弦的下方。所以，对奇 k 的计算保持不变，并给出 $\mu_{[a,a]} = |2\cos\frac{(a+1)\pi}{k+2}|$；对于 a 和 $k - a$也是如此。$(n, n)_+$ 的零空间就是 $n \otimes n$的零空间，因此 $\mu_{(n,n)_+} = |2\cos\frac{\pi}{2}| = 0$。

在这两种情况下，$|2\cos\frac{(a+1)\pi}{k+2}| \le 2\cos\frac{\pi}{k+2} = \delta$，等号仅当 $a \in \{0, k\}$。当 k 为奇数时，标记 a 是偶数且至多为 $k - 1$，因此等号成立意味着 $a = 0$，也就是说 $Z = \mathbf{1}$。当 k 为偶数时，等价类$[0, 0]$ 和 $[k, k]$ 重合，且为 $\mathbf{1}$。这就证明了（34）。 □

引理 10.2 (仿射图估计)。 设 $D : (m, \epsilon) \to (n, \eta)$ 是一个无框仿射*Temperley–Lieb*图。设 $c(D)$ 为其中可缩闭环的数量，$r(D)$ 为其中本质闭环的数量，并设 $\ell(D)$ 为用固定的不交配对填满两个孔洞后环的数量。对于 $v \in \mathscr{V}_Z(n, \eta)$、$w \in \mathscr{V}_Z(m, \epsilon)$ 和 $\gamma_Z = (\mu_Z/\delta)^2$，，有

$$\frac{|\langle v, \rho_Z(D) w\rangle|}{\delta^{\ell(D)}} \le \delta^{(m+n)/2}\|v\|\|w\|\,\gamma_Z^{\lfloor r(D)/2\rfloor}. \tag{35}$$

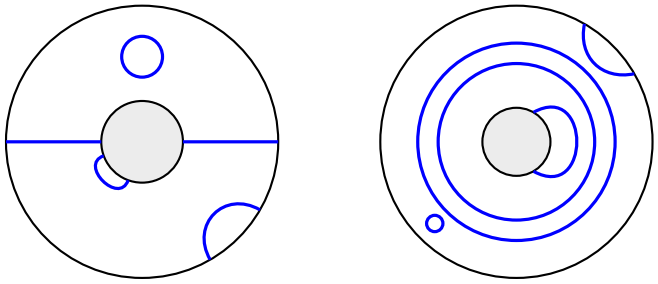
这里是 $0^0 = 1$。

证明。 可缩圆贡献 $\delta^{c(D)}$。本质圆将内圆与外圆分隔开，因此贯穿弦与本质圆不会同时出现。若有 $2h > 0$ 贯穿弦，则不存在本质圆，旋转是酉元，且每条 $m + n - 2h$ 边界弧的范数为 $\sqrt{\delta}$，因此 $\|\rho_Z(D)\| \le \delta^{c(D)+(m+n)/2}$。假设没有贯穿弦。两端都位于同一圆上的弧会从环带中切出一个圆盘，而本质圆避开这些圆盘。因此，除可缩圆外，$D = D_{\mathrm{out}} \circ C_r \circ \cdots \circ C_1 \circ D_{\mathrm{in}}$，其中 $D_{\mathrm{in}} : (m, \epsilon) \to (0, \epsilon')$

由内圆上的弧组成，$D_{\mathrm{out}}:(0,\eta')\to(n,\eta)$ 由外圆上的弧组成，而$C_1,\dots,C_r$, $r=r(D)$ 是单圆映射。因此，D通过零边界空间分解，且 $\|\rho_Z(D)\|\le \delta^{c(D)+(m+n)/2}\mu_Z^{r(D)}$。由于 $\ell(D)\ge c(D)+r(D)$ 且 $\delta\ge 1$,

$$\frac{\|\rho_Z(D)\|}{\delta^{\ell(D)}}\le \delta^{(m+n)/2}\Big(\frac{\mu_Z}{\delta}\Big)^{r(D)}\le \delta^{(m+n)/2}\gamma_Z^{\lfloor r(D)/2\rfloor},$$

利用 $0\le\mu_Z/\delta\le 1$ （命题 10.1）。在有贯穿弦的情形中，同样的计算，连同 r（D） $=0$，给出最终因子为 1 的界。这两种情形如图 12。 □



(a) 贯穿弦　　(b) 本质圆

图 12：两个孔之间环带中的普通仿射Temperley–Lieb图。所有图都是平面的，因此弦从不交叉。在 (a) 中，两条径向弦是贯穿弦，每个圆上各有一条弧，且闭圈是可缩的。在 (b) 中没有贯穿弦。内圆与外圆上的弧切出圆盘，且该图经由零边界空间作因子分解。两条本质圆各自贡献一个范数为μ_Z的单圆映射。(b) 中的小环是可缩的。

注 10.3（$k=2$）。在 $k=2$ 处，Z(Vec($\mathbb{Z}_2$)) 的四个对象具有 $z\in\{1,\psi\}$。对于 m 与f, $z=\psi$，因此 $\mathscr{V}_Z(0,+)=0$且 $\mu_Z=0$。对于 1 与 e， $z=1$，且与 Q的半编织是 Q之奇偶性的特征标 χ，对 1 为平凡，对 e为符号。对于 e，此半编织对应于 (15) 的半直线宇称 $\rho_e=\Lambda_-|_B$。两条平行的本质 X-圆构成一条本质Y-圆，它通过 $\sum_{a\subset Y}d_a\chi(a)=1+\chi(\psi)$ 作用在 $\mathscr{V}_Z(0,+)$ 上。因此 $\mu_1^2=2=\delta^2$ 且 $\mu_e=0$。于是，对每个非平凡的 Z，两个单圆映射都为零。对于 m 与 f，其中一个的定义域为零，另一个的目标为零；而对于 e，它们为零是因为 $\mu_e=0$。现设 D 为满足 $r(D)\ge 1$ 的平凡仿射图。它没有贯穿弦，且引理 10.2 的证明将 $\rho_Z(D)$ 写成包含 $r(D)$ 个单圆映射的复合。因此 $\rho_Z(D)=0$。在下文引理 10.4 的缝合中， D_Γ 的本质圆是 Γ 中分离两个插入的环，因此在 $k=2$ 处，单个分离圈零化带电求值。

10.2 带荷系数

对于 $Z\in\mathcal{Z}(\mathcal{C}_k)$，局部对应空间为

$$\mathrm{Y}_Z(I)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_k}(Y^{\otimes|I|},Y^{\otimes|I|}\otimes z),\qquad a\xi b=(a\otimes \mathrm{id}_z)\xi b,\qquad \langle\xi,\eta\rangle_{B_k}=\xi^*\eta.$$

令 $A=Y^{\otimes|I|}$ 和 $Q=Y^{\otimes r}$。令 J 为紧邻 I 右侧的 r 个格点所构成的区间，并令 J' 为紧邻其左侧的 r 个格点所构成的区间。在右侧添加 Q，可通过以下方式将 $\mathrm{Y}_Z(I)$ 嵌入 $\mathrm{Y}_Z(I\cup J)$

$$\iota_Q^R(\xi)=(\mathrm{id}_A\otimes\sigma_{z,Q})(\xi\otimes\mathrm{id}_Q),\tag{36}$$

并在左侧添加 Q，通过 $\xi\mapsto\mathrm{id}_Q\otimes\xi$ 将 $\mathrm{Y}_Z(I)$ 嵌入 $\mathrm{Y}_Z(J'\cup I)$。半编织恒等式和幺正性使这些嵌入彼此相容且为等距映射，取完备化后得到

DHR 双模 Y_Z [31, 第6节.2]。将一个区间重新标记为平移一个格点后的区间，定义了 Y_Z 的酉元 s_Z，满足 $s_Z(a\xi b) = \varsigma^2(a)s_Z(\xi)\varsigma^2(b)$ 且 $s_Z\xi, s_Z\eta = \varsigma^2(\xi,\eta)$，并将 $\mathrm{Y}_Z(I)$ 映到 $\mathrm{Y}_Z(I+1)$ 上。令 U为 H 上满足 $U\pi(a)\Omega = \pi(\varsigma^2(a))\Omega$ 的酉元；它存在是因为 ω_k 具有 ς^2-不变性，并令

$$\mathcal{K}_Z = \mathrm{Y}_Z \boxtimes_{B_k} \mathcal{H}, \qquad \pi_Z(b)(\xi\otimes v) = b\xi\otimes v, \qquad U_Z(\xi\otimes v) = s_Z(\xi)\otimes Uv.$$

则 U_Z 是酉元，$U_Z\pi_Z(b)U_Z^* = \pi_Z(\varsigma^2(b))$，带有局域 ξ 的向量 $\xi\otimes\Omega$ 稠密，并且

$$\langle \xi\otimes\Omega, U_Z^n(\eta\otimes\Omega)\rangle = \omega_k(\langle \xi, s_Z^n\eta\rangle_{B_k}). \tag{37}$$

对于 $A = Y^{\otimes p}$ 端点映射（图 15(a)）及其逆映射为

$$J_A(\xi) = (\mathrm{id}_{\overline{A}A}\otimes \overline{R}_z^*)(\mathrm{id}_{\overline{A}}\otimes\xi\otimes\mathrm{id}_{\bar z})(R_A\otimes\mathrm{id}_{\bar z}) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_k}(\bar z, \overline{A}A) = \mathscr{V}_Z(2p,+),$$
$$J_A^{-1}(v) = (\overline{R}_A^*\otimes\mathrm{id}_{Az})(\mathrm{id}_A\otimes v\otimes\mathrm{id}_z)(\mathrm{id}_A\otimes R_z),$$

使用 $\overline{A}A\cong Y^{\otimes 2p}$。共轭方程给出 $\langle J_A\xi,\ J_A\eta\rangle = \mathrm{Tr}_A(\xi^*\eta)$ 和 $\|J_A\xi\| \le \delta^p\|\xi$ $\|$.

带荷插入。设 $\xi\in\mathrm{Y}_Z(I)$ 和 $\eta\in\mathrm{Y}_Z(J)$，其中 I 和 J 是由 p 个和 p' 个格点构成的区间，且 I 位于 J 左侧。设它们之间严格相隔的格点数为 $g\ge 0$，并令

$$A = Y^{\otimes p}, \qquad M = Y^{\otimes g}, \qquad B' = Y^{\otimes p'},$$

使得 $AMB' = Y^{\otimes|K|}$对于区间 K从 I的左端到 J的右端。间隙词 M由 Y股线组成，这些股线对应于 I与 J之间的格点。为了比较 ξ和 η在 $\mathrm{Y}_Z(K)$中，将 ξ 按式（36）在右侧添加 MB'，并将 η 在左侧添加 AM。因此，它们的内积为

$$b_{\xi,\eta} = \langle \iota^R_{MB'}(\xi), \mathrm{id}_{AM}\otimes\eta\rangle_{B_k} = (\xi^*\otimes\mathrm{id}_{MB'})(\mathrm{id}_A\otimes\sigma^{-1}_{z,MB'})(\mathrm{id}_{AM}\otimes\eta) \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}_k}(AMB') = B_k(K), \tag{38}$$

使用 $\sigma^* = \sigma^{-1}$。从下往上读，η 在右侧生成带荷腿 z，逆半编织将它沿着 M 和 B'的股线传送到左侧，而 ξ^* 在左侧将其吸收（图 13）。对于系数 (37)，相关元素为 $\langle \xi, s_Z^n\eta\rangle_{B_k} = b_{\xi,s_Z^n\eta}$，其中$s_Z^n\eta\in\mathrm{Y}_Z(J+n)$ 是将 η平移 n 个格点所得的构型；n 足够大，使得 $J+n$位于 I的右侧。其间隙词为 $Y^{\otimes g_n}$，其中有 $g_n = g+n$。

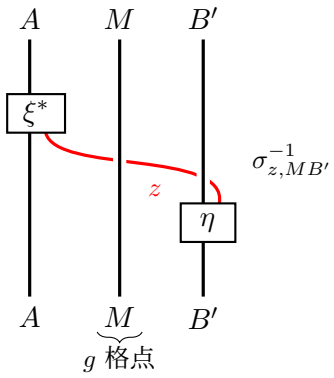


图 13：带荷插入 $b_{\xi,\ \eta}$ （38）从下往上读取。股线 A，M，B'分别属于 I、间隙和 J所在的格点。方框 η 发出荷线 z，该荷线通过逆半编织从 B' 和 M 的股线下方穿过，并被 ξ^*吸收。

引理 10.4 (缝合)。 设 ξ,η 和 $b_{\xi,\eta}$ 如上所述，且 $K\subseteq I_N$。对于 Δ_N 上的每个构型 $\Gamma,\ T$ 都存在一个无框仿射*Temperley–Lieb*图 $D_\Gamma:(2p',+)\to(2p,+)$，使得带电求值 (27) 为（图 *15(b)*）

$$\mathrm{ev}_\Gamma(b_{\xi,\eta})=\langle J_A(\xi),\rho_Z(D_\Gamma)J_{B'}(\eta)\rangle.$$

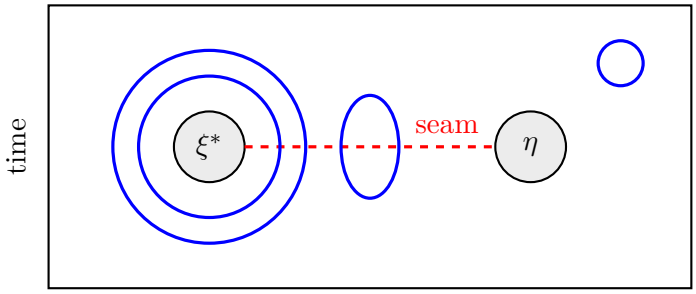
用 id_A 和 $\mathrm{id}_{B'}$ 的配对填充 D_Γ 的孔洞，即可恢复 Γ的图，因此 $\ell(D_\Gamma)=\ell(\Gamma)$。$D_\Gamma$ 的本质圆就是 Γ 中分隔两个插入 ξ^* 和 η的环。

证明。将 b_ξ、η 插入 Γ 的闭合环图中，时间取 0，并将所得的闭合平面图视为绘制在球面上。在方框 ξ^* 和η周围移去互不相交的小圆盘。其补投影是一个环带，穿过间隙的荷线在其中成为一条特定的接缝（图14）。当且仅当 Γ 的一条环在环带中是本质圆时，它才恰好包围两个圆盘之一；换言之，它分隔这两个插入。沿接缝切开（切开后被其穿过的 Temperley–Lieb 线保持不变），得到一个平凡仿射图 D_Γ：$(2p',+)\to(2p,+)$，其中有 $4p$ 和 $4p'$ 个边界点。用标准解 R_A、$R_{B'}$ 弯折 A-弦和 B'-弦，并用 R_z^* 弯折荷腿，恰好得到$J_A(\xi)$和 $J_{B'}(\eta)$（图15(a)）。将荷弯折穿过接缝时，使用

$$(\sigma_{z,Q}\otimes\mathrm{id}_{\bar z})(\mathrm{id}_z\otimes\sigma_{\bar z,Q})(\overline{R}_z\otimes\mathrm{id}_Q)=\mathrm{id}_Q\otimes\overline{R}_z,\qquad Q\in\mathcal{C}_k,$$

并结合 Q 的共轭方程，可得到 $(\sigma_z^{-1},_Q)^\vee=\sigma_{\bar z}^{-1},_Q$，即式（33）中的交叉。将输出端缝合到反射的第一个端点，得到 $\mathrm{Tr}_{\bar z}(J_A(\xi)^*\rho_Z(D_\Gamma)J_{B'}(\eta))$（图15(b)）。该论证只使用了三个事实。根据共轭方程，可以撤销端点映射，即 $J_A^{-1}J_A=\mathrm{id}$。所示恒等式将荷弯曲移过接缝。半编织具有自然性，并且与张量积相容。这些事实都不取决于 Γ 的股线如何缠绕两个插入，因此该恒等式对每个构型 Γ都成立。消去带荷插入即可恢复 AMB'上的恒等算子，而孔洞则由旋转后的恒等配对填充。

□



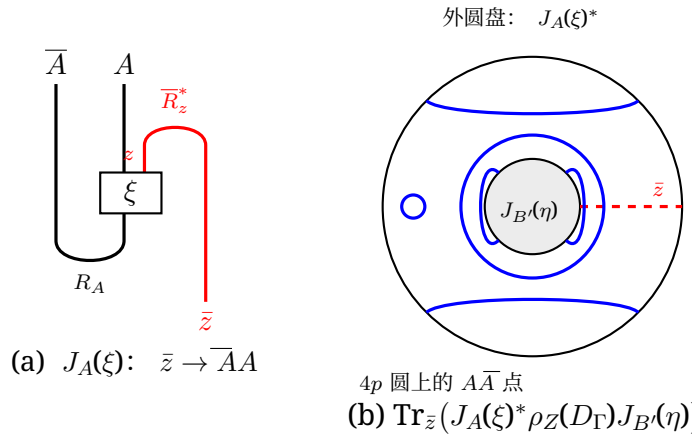
空格

图14：引理的缝合 10.4。在两个带荷插入周围移除小圆盘后，球面上留下一个环带，其中荷线成为接缝。围绕圆盘的两个环 ξ^* 将两个孔分隔开，并且在环带中是本质的。不围绕圆盘而穿过接缝的环，以及右侧的环，在环带中都是可缩的，因此仅通过 $\delta^{c(D)}$产生贡献。

无荷求值为$\mathrm{ev}_\Gamma(1)=\delta^{\ell(\Gamma)}$，权重 $\delta^{-n(\Gamma)}$ 以及边界杯对于带荷和无荷求值是相同的。因此（29）给出

$$\omega_{N,T}(b_{\xi,\eta})=\mathbb{E}_{\nu_{N,T}}[F_{\xi,\eta}],\qquad F_{\xi,\eta}(\Gamma)=\frac{\mathrm{ev}_\Gamma(b_{\xi,\eta})}{\mathrm{ev}_\Gamma(1)}=\frac{\langle J_A(\xi),\rho_Z(D_\Gamma)J_{B'}(\eta)\rangle}{\delta^{\ell(\Gamma)}},\tag{39}$$

酉商中的一个求值恒等式，它不依赖于$b_{\xi,\ \eta}$的Temperley–Lieb展开。令 $r(\Gamma)$ 表示分隔两个插入的 Γ 的环数。根据



(a) $J_A(\xi)$： $\bar{z} \to \overline{A}A$

(b) $\mathrm{Tr}_{\bar{z}}\big(J_A(\xi)^* \rho_Z(D_\Gamma) J_{B'}(\eta)\big)$

图15：引理 10.4 中的端点弯曲和迹。(a) 端点映射。这里$\xi \in \mathsf{Y}_Z(I) = \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}_k}(A, A \otimes z)$，其中 z 是 Z（第10节）的底层对象，因此方框 ξ有输入 A 以及输出 A 和 z。杯 R_A 将 ξ 的输入 A-弦弯入 AA，帽 R_z^* 将荷腿 z 连接到输入 $\bar{z}$。类似地， $J_{B'}(\eta)$： $\bar{z} \to B'B'$。(b) 在球面上，围绕 η 的圆盘承载 $J_{B'}(\eta)$，内圆上有 $B'B'$ 个 $4p'$ 点，而补圆盘承载$J_A(\xi)^*$。环带承载 D_Γ，这里两条圆上都有弧，其中一条是本质圆，另一条是可缩圈。荷线 $\bar{z}$ 沿接缝延伸，并通过公式 (33) 的逆半编织穿过股线。闭合 $\bar{z}$得到 $\mathrm{Tr}_{\bar{z}}$，根据公式 (32)，它等于$J_A(\xi)\ \rho_Z(D_\Gamma) J_{B'}(\eta)$。

引理 10.4， $r(\Gamma) = r(D_\Gamma)$ 和 $\ell(D_\Gamma) = \ell(\Gamma)$，因此引理 10.2结合 $m = 2p'$， $n = 2p$ 以及 $\|J_A\xi\|$和 $\|J_{B'}\eta\|$的界，得到

$$|F_{\xi,\eta}(\Gamma)| \le \delta^{2(p+p')} \|\xi\| \|\eta\| \, \gamma_Z^{\lfloor r(\Gamma)/2 \rfloor}. \tag{40}$$

该常数不依赖于插入之间的间隔、事件数或有限体积截断。

11 带电衰减与代数对象

命题 *11.1*（带电系数的衰减）。设 $Z \in Z(\mathcal{C}_k)$ 是单的，且具有 $Z \not\cong \mathbf{1}$；并设U_Z 是作用于 $K_Z = Y_Z \boxtimes_{B_k} H$ 上的酉元，由 $U_Z(\xi \otimes v) = s_Z(\xi) \otimes Uv$ 给出，它在表示 π_Z （第*10*节）中实现平移 ς^2。那么，当 $|n| \to \infty$ 时， $U_Z^n \to 0$ 在弱算子拓扑下收敛。

证明。由（34）， $\gamma_Z < 1$。设 $\xi \in \mathsf{Y}_Z$（I） 和 $\eta \in \mathsf{Y}_Z$（J）是局域的，分别支撑在 p 和 p'格点上。由（37）及（38）之后的讨论，

$$\langle \xi \otimes \Omega, U_Z^n(\eta \otimes \Omega) \rangle = \omega_k(b_{\xi, s_Z^n \eta})$$

对所有足够大的 $n > 0$ 和 $\|s_Z^n\eta\| = \|\eta\|$。在 $I \times \{0\}$ 上选择一个中心 z，以及 $R_0 \ge R_*$，使得 $Q_{R_0}(z)$ 包含插入点 ξ^* 周围的小圆盘。对于足够大的 n，令 $a(n)$ 为满足 $L_*^{a(n)} R_0 < n/2$ 的最大整数，从而 $a(n) \ge \log(n/(2R_0))/\log L_* - 1$，且 $Q_{L_*^{a(n)} R_0}(z)$ 不会与 $s_Z^n\eta$ 的插入相交。令 $R_j = L_*^j R_0$，并令 $G_j = G_{R_j}$ 为环带 $A_{R_j} = Q_{R_{j+1}}(z) \setminus\setminus Q_{R_j}(z)$ 中引理 8.2 的事件，其中 $0 \le j < a(n)$。在 G_j 上， A_{R_j} 中有两个不同的环环绕 ξ^* 的插入点，但不环绕 $s_Z^n\eta$ 的插入点，并且不同环带中的环彼此不同。因此

$$r(\Gamma) \ge 2 \sum_{j < a(n)} \mathbf{1}_{G_j}(\Gamma), \qquad \gamma_Z^{\lfloor r(\Gamma)/2 \rfloor} \le \prod_{j < a(n)} \gamma_Z^{\mathbf{1}_{G_j}(\Gamma)}.$$

对于单个环带，(30) 给出 $\mathbb{E}[\gamma_Z^{\mathbf{1}_{G_j}}\,|\mathcal{F}_{A^{\mathrm{c}}_{R_j}}] = 1-(1-\gamma_Z)\,\mathbb{P}(G_j\,|\mathcal{F}^{A^{\mathrm{c}}}_{R_j}) \le 1-p_*(1-\gamma_Z)$。按照引理 8.3 的证明，从最外层向内依次对环带的补集进行条件化，而不假设环带之间具有任何独立性，

$$\mathbb{E}_{\nu_{N,T}}\big[\gamma_Z^{\lfloor r(\Gamma)/2\rfloor}\big] \le \big(1-p_*(1-\gamma_Z)\big)^{a(n)} \le C_Z(1+n)^{-\varepsilon_Z}, \qquad \varepsilon_Z = -\frac{\log(1-p_*(1-\gamma_Z))}{\log L_*} > 0,$$

只要 $\Delta_{N,\,T}$ 包含 $Q_{R_{a(n)}}(z)$，且 $b_{\xi,\;s_Z^n\eta}$的支撑满足条件。结合（39）和（40），对于所有这类 N，T，有 $|\omega_{N,\,T}(b_{\xi,\;s_Z^n\eta})| \le_\delta 2^{(p+p')}\|\xi\|\|\eta\|C_Z(1+n)^{-\varepsilon_Z}$。命题 8.5 给出，对于局域 b，$\omega_k(b) = \lim_N \lim_T \omega_{N,\,T}(b)$，因此

$$|\langle \xi\otimes\Omega, U_Z^n(\eta\otimes\Omega)\rangle| \le C'_{\xi,\eta}(1+n)^{-\varepsilon_Z}$$

当 $n>0$ 足够大时。负的 n 由幺正性推出。事实上，$\langle v,\;U_Z^{-n}w\rangle = \overline{\langle w,\;U_Z^n v\rangle}$，因此 $|\langle v,\;U_Z^{-n}w\rangle| = |\langle w,\;U_Z^n v\rangle|$。向量 $\xi\otimes\Omega$ 的稠密性以及 U_Z 的幺正性给出了所需结论。 □

注记 11.2（环状结构的作用）。环状 Temperley–Lieb 结构在本文中仅通过命题 11.1 发挥作用。引理 10.4 的缝合将一个带荷系数——其中的弦可能绕着插入物缠绕，且涉及无界多个事件——转化为 Hilbert 仿射模 $\mathscr{V}_Z$ 中单个算子 $\rho_Z(D_\Gamma)$ 的矩阵系数；根据定理 5.13，它仅依赖于 Z。分隔两个插入物的环变成了 D_Γ 的本质圆。每个本质圆带来一个因子 μ_Z/δ，而根据命题 10.1 的显式取值，对于每个单$Z \ncong \mathbf{1}$ 都有 $\mu_Z < \delta$。若 $\mathbf{1}\not\subseteq z$，单个分离圈就会使该系数消失。引理 8.2 提供了对数多个分离圈，每个环上的收缩$\mu_Z/\delta<1$ 将其转化为衰减。对于 $Z=\mathbf{1}$，分离圈不产生代价，因此没有衰减。对于 $k=2$，该不等式在注 10.3 中直接验证，而第一部分不使用环状结构。对于 $k\ge 3$，该不等式可从 SU(2)$_k$ 的 S-矩阵中读出：奇数 k [9]时通过双倍的因子分解，偶数 $k=2n$ 时则通过对双倍的描述，其中不动点 (n,n) 已被解析 [18]，并结合 Longo–Rehren 半编织 [9, 第 2.2 节和 4]。Jones 和 Reznikoff 对 Hilbert 环状 Temperley–Lieb 模的分类[33] 无需这些取值，即可一次性给出所有 k 对应的相同不等式。由此得到的衰减速率 ε_Z 并非最优。

下一步只用到纯性、双模的平移协变性以及$\mathcal{Z}(\mathcal{C}_k)$的刚性。

引理 11.3 (刚性)。设 ω 是 B_k 上的纯 ς^2-不变态，H、U、K_Z 和 U_Z 如上由 ω 构造，并且对每个非平凡单 Z，$U_Z^n\to 0$ 弱成立。则$H_\omega=\mathbf{1}$。

证明。令 $\mathrm{Int}_Z = \mathrm{Hom}^{B_k}(\mathrm{H},\mathrm{K}_Z)$ 为从 π 到 π_Z 的交织算子空间。对 S、$S'\in$，由纯性可得 Int_Z,$S^*S'\in\pi(B_k)'=\mathbb{C}\mathbf{1}$，从而由 $S^*S'=S,S'\mathbf{1}$ 定义内积。我们证明 Int_Z 是有限维的。设 Φ_1,$\ldots,\Phi_m$ 为一组标准正交向量，因此 $\Phi_i^*\Phi_j=\delta_{ij}\mathbf{1}$ 且 $\sum_i \Phi_i\Phi_i^*\le\mathbf{1}$。令 $R\colon\ \mathbf{1}\to Z\otimes Z$ 和 $R\colon\ \mathbf{1}\to Z\otimes Z$ 为 Z 在 DHR(B_k)–≃Z(C$_k$) 中共轭方程的标准解，使得 $(R^*\otimes\mathrm{id}_Z)(\mathrm{id}_Z\otimes R) = \mathrm{id}_Z$，$(R^*\otimes\mathrm{id}_Z)(\mathrm{id}_Z\otimes R) = \mathrm{id}_Z$ 且$R^*R=R^*R=d_Z$ [35]。作为 DHR 双模的态射，R是一个双模映射 $B_k\to \mathrm{Y}_Z\boxtimes_{B_k}\mathrm{Y}_Z$，并且

$$R_{\mathcal{H}} = R\boxtimes\mathrm{id}_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}=B_k\boxtimes_{B_k}\mathcal{H}\longrightarrow \mathrm{Y}_{\overline{Z}}\boxtimes_{B_k}\mathrm{Y}_Z\boxtimes_{B_k}\mathcal{H}=\mathrm{Y}_{\overline{Z}}\boxtimes_{B_k}\mathcal{K}_Z$$

是诱导的交织算子，其中 $R_{\mathcal{H}}^*R_{\mathcal{H}}=d_Z\mathbf{1}$。令 $S_i=(\mathrm{id}_{\mathrm{Y}_Z}\boxtimes\Phi_i^*)R_{\mathcal{H}}\colon\mathcal{H}\to\mathcal{K}_{\overline{Z}}$，由于 Φ_i^* 是 B_k-线性的，因此定义良好。于是 $\sum_i S_i^*S_i = R_{\mathcal{H}}^*(\mathrm{id}\boxtimes\sum_i\Phi_i\Phi_i^*)R_{\mathcal{H}}\le d_Z\mathbf{1}$。第一个共轭方程给出 $\Phi_i^*=(R^*\boxtimes\mathrm{id}_{\mathcal{H}})(\mathrm{id}_{\mathrm{Y}_Z}\boxtimes S_i)$，因此 $1=\|\Phi_i\|\le\sqrt{d_Z}\|S_i\|$。根据纯性，每个 $S_i^*S_i$ 都是标量，至少 $1/d_Z$，所以 $m/d_Z\le d_Z$ 和 $m\le d_Z^2$。

平移以酉方式作用于 Int_Z，由 $\Theta_Z(S)=U_ZSU^*$ 给出。若 $\mathrm{Int}_Z\neq 0$，取满足 $\Theta_Z(S)=\lambda S$ 的特征向量 S。由于 $S^*S=c\mathbf{1}$ 且 $c>0$，$S\Omega\neq 0$；又由于 $U\Omega=\Omega$，$U_ZS\Omega=\lambda S\Omega$。因此，对于所有 n，都有 $|\langle S\Omega\;U_Z^nS\Omega\rangle| = \|S\Omega\|^2$，这与弱衰减矛盾。因此，对于非平凡的 Z，$\mathrm{Int}_Z=0$；根据纯性，对于 $Z=\mathbf{1}$，它是 $\mathbb{C}$。这些就是内部端的重数，其代数结构因此为 $\mathbf{1}$。□

定理 11.4 (临界 TLJ 态)。 对于每个 $k \geq 2$， ω_k 是 $-\sum_i e_i$ 的纯 ς^2-不变基态，并且

$$H_{\omega_k} \cong \mathbf{1} \quad in\ \mathcal{Z}(\mathcal{C}_k).$$

特别地， ω_k 是局域的，而 H_{ω_k} 不是拉格朗日代数。

证明。 命题 8.5、9.2 和 11.1，以及引理 11.3。张量单位是交换的，并且它不是拉格朗日代数，因为 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}_k) \not\simeq \mathrm{Vec}$。 □

在 $k = 2$ 处，张量单位也不与拉格朗日代数 Morita 等价（第2.1节），所以 ω_2 在范畴意义上是无能隙的。

注 11.5 (与第 I部分的比较)。 在 $k = 2$， $\omega_2 = \psi_\sharp$ (第 7节)，定理 11.4再次证明了 $H_{\phi_\sharp} = \mathbf{1}$。除局域向量的选择外，系数（37）就是序、无序与费米子关联函数

$$\langle \sigma_x^{(0)} \sigma_x^{(n)} \rangle, \qquad \Big\langle \prod_{0<j\leq n} \sigma_z^{(j)} \Big\rangle, \qquad \langle i\, b_0 a_n \rangle.$$

在 $\phi_\sharp$ 处，第一个按 $n^{-1/4}$ [42]衰减；第二个与第一个相等，因为 $\kappa(\sigma_x^{(0)}\sigma_x^{(n)}) = \prod_{j=1}^n \sigma_z^{(j)}$和 $\psi_\sharp \circ \kappa = \psi_\sharp$，而第三个是 $2/(\pi(2n-1))$ 由命题 6.1得出。根据注 10.3，在 $k = 2$处，该系数的上界为一个常数乘以两个插入之间没有环分隔的概率。

在第 I 部分中，可实施性判据对于准自由态既是必要条件也是充分条件，并且还给出 $\mathbf{1} \oplus e$ 以及 $\mathbf{1} \oplus m$ 在临界性之外的结果（推论 4.5），而衰减仅是充分条件。偏离自对偶点时，当 $\lambda_\mathrm{b}/\lambda_\mathrm{c} < q$ [16, 定理 1。5],时，原连接呈指数衰减；当 $\lambda_\mathrm{b}/\lambda_\mathrm{c} > q$时，对偶连接呈指数衰减，因为平移一条弦会交换原簇和对偶簇，同时也交换奇数和偶数速率。在半径为 R的插入周围的一条环，围住一个直径至少为约 R的原簇和一个对偶簇。这类环极为罕见，只有有限多个环会分隔相距很远的插入。因此，该论证无法给出衰减，这与非零的无序或有序关联函数相一致。因而，对扇区的排除来自每个尺度上的分离环。

12 概述

定理 11.4 将定理1.1关于哈密顿量的部分推广到了所有指标四以下的酉Temperley–Lieb–Jones链。第 I 部分的其他结果使用了准自由结构，而它们的延拓仍是开放问题。这涉及转移矩阵态、非临界代数对象、锥Haag对偶性、半直线代数的因子性、标准性以及 α的共轭。

对于转移矩阵态，临界伊辛转移矩阵 (1) 除了一个标量因子外为

$$T_K = \exp\Big(K \sum_j e_{2j}\Big) \exp\Big(2K \sum_j e_{2j-1}\Big) \exp\Big(K \sum_j e_{2j}\Big),$$

这对任意 k 都有意义。由于 $e^{2Ke} = 1 + u\,E$且 $u = (e^{2K} - 1)/\delta$， T_K^M的主体会以相同权重在奇数键和偶数键上插入杯帽。这是正方晶格上自对偶点处的各向异性随机簇模型。矩形晶格是等半径的，因此 [16] 是穿越估计的来源，但我们尚未完成其余步骤。纯性是主要障碍。 T_K 选取的态不同于 $-\sum_i e_i$ ($\phi_c \neq \phi_\sharp$ 处的 $k = 2$)，因此第 9 节不适用。在 $k = 2$ 处， ϕ_c 的纯性由 [7, 定理 2 和引理 5 得出。1]。对于 $k \geq 3$，目前尚不清楚是否存在以此态为基态的动力学。

该哈密顿量 $-\sum_i e_i$ 是临界受限固态链 [3], , 等价于反铁磁任意子链 [23]。其在物理学文献中的标准共形描述是中心荷为 $1 - 6/((k+1)(k+2))$的幺正极小模型。如第6节所述，

这一对应关系是背景知识，并非 $H_{\omega_k}=\mathbf{1}$ 的推论；我们也不证明 $-\sum_i e_i$ 对于 $k\ge 3$ 具有谱无隙性。

将指标限制在四以下是至关重要的。对于 $\delta>2$，即 $q>4$，Temperley–Lieb 范畴虽为酉的，但具有无限深度，因此不存在可替代$\mathcal{C}_k$ 的融合范畴， [20] 框架也无法照此应用。在自对偶点，量子随机簇模型随后出现共存相。有线测度具有无限簇，而自由连接呈指数衰减 [16, 定理 1。5]。第 8 节所使用的穿越估计失效，衰减论证也无法得出任何结论。通过同一环表示，Aizenman、Duminil-Copin 和 Warzel 证明了当圈权重大于二时平移对称性会破缺。例如，具有投影相互作用的自旋-S 反铁磁链的二聚化， $S>1/2$以及 XXZ 链在 $\Delta>1$ [1]处的奈尔序，都是这类例子。相应地，平面 Potts 模型和随机簇相变在 $1\le q\le 4$ [17]时是连续的，而在 $q>4$ [15]时则是一阶的。对于 $q>4$，相变点处的关联长度是有限的。因此不存在发散的关联长度，也不存在尺度不变共形描述。物理学文献通过复不动点 $q=4$ 解释了略高于 [26]时的弱一级行为。

链 $-\sum_i e_i$ 也不例外，因为其基态由同一个量子随机簇模型支配。对于 $\delta=2\cos\gamma\le 2$，库仑气体的中心荷为 $c=1-6\gamma^2/(\pi(\pi-\gamma))$[39], ；在 $\gamma=\pi/(k+2)$ 时，该值等于 $1-6/((k+1)(k+2))$，而在 $\delta=2$ 时为 1。对于 $\delta=2\cosh\lambda>2$，XXZ 链在 $\Delta=\cosh\lambda$ 处的 Bethe Ansatz 仅在 $\lambda\to 0$ 时出现间隙闭合，类似于 $\exp(-\pi^2/(2\lambda))$ [14]。由于 $q-4=4\sinh^2\lambda$，这与二维关联长度相符。将 c 的公式延拓至 $\gamma=i\lambda$ 会得到复中心荷，这对应于 [26] 的非厄米不动点，而非 $-\sum_i e_i$ 的基态。这些陈述仅涉及自对偶哈密顿量 $-\sum_i e_i$。

临界半直线子空间的标准性

本附录将证明一项对偶定理之外的性质。一个射线 L 是一个半直线$\{k\ge k_0\}$ 或 $\{k\le k_0\}$ 指标。在 §A.1 中，指标是马约拉纳指标；在 §A.2 中，指标是格点，每个格点都承载两个马约拉纳算子。令 Q_L 为复化实马约拉纳空间中支撑于 L的向量所张成的投影，并令 E 为该表示中态的基投影。若这对 (E,Q_L) 处于一般位置，则

$$\begin{aligned}\operatorname{ran}E\cap\operatorname{ran}Q_L&=\ker E\cap\operatorname{ran}Q_L=0,\\ \operatorname{ran}E\cap\ker Q_L&=\ker E\cap\ker Q_L=0.\end{aligned}\tag{41}$$

引理 A.1。 若 (41) 成立，则闭实半直线场子空间 M_L 在福克单粒子希尔伯特空间中是标准的。也就是说，

$$M_L\cap iM_L=0,\qquad \overline{M_L+iM_L}=\mathcal{H}_1.$$

因此，福克真空对于半直线场代数是循环且分离的。

证明。令 J 为实马约拉纳空间上的正交复结构。它在复化空间上的两个谱投影是 E 和 $1-E$，其顺序取决于福克约定。若实向量 v和 Jv都支撑于 L，则向量 $(v+iJv)/2$和 $(v-iJv)/2$分别属于两个交集 $\operatorname{ran}E\cap\operatorname{ran}Q_L$ 和 $\ker E\cap\operatorname{ran}Q_L$。它们均为零，从而证明 $M_L\cap iM_L=0$。对 L^c 应用同样的论证可知， M_L+iM_L 的实正交补为零。关于真空的断言见 [24,命题 2.5]。

□

A.1 量子链态

根据（21），矩阵元为 $\Omega(j-k)$ 的卷积算子在 $i\operatorname{sgn}(p)$ 上的傅里叶乘子为 （$-\pi$， π），使用 $\widehat{f}$（p） $=\sum_k f_k e^{ikp}$。因此，马约拉纳坐标中的两个投影 E和 $1-E$为

乘子 $\mathbf{1}_{(0,\pi)}$ 和 $\mathbf{1}_{(-\pi,0)}$。由于交换这两个投影时，（41）保持不变，因此任选其一都能得到相同的论证。该傅里叶变换将Q_L 在 $L=\{k\geq 0\}$ 上的函数映射为到 H^2（$\mathbb{T}$）上的 Hardy投影，并将 $L=\{k\geq k_0\}$ 映射为到 $e^{ik_0p}H^2$（$\mathbb{T}$）上的投影。由于 E 与平移可交换，且（41）关于$Q_L\leftrightarrow 1-Q_L=Q_{L^c}$具有对称性，因此只需处理 $L=\{k\geq 0\}$。

命题 A.2 节。 对于 $\omega_\natural$，对每条马约拉纳射线，数对 (E,Q_L) 都处于一般位置 .

证明。 非零 Hardy 函数不可能在一个正测度集合上边界值为零。属于 ran$E\cap H^2$的函数在 $(-\pi,0)$ 上为零，而属于 ker $E\cap H^2$的函数在 $(0,\pi)$ 上为零。这两个交集都只有零向量。 H^2的正交补是 H_0^2，复共轭则将另外两个交集化归为同一个边界唯一性结论。根据上述化归，这涵盖了所有射线。

□

A.2 传递矩阵态

我们在格点上使用含两个分量的傅里叶表示。对于格点射线 $L=\{j\geq 1\}$,Q_L ，它是投影到 $H^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)$ 上的 Hardy投影。对于 $\{j\geq j_0\}$，它是经由乘以 $e^{\pm i(j_0-1)\theta}$与前者共轭得到的，符号取决于傅里叶约定。与 §A.1 中一样，平移不变性以及 (41) 在 $Q_L\leftrightarrow Q_{L^c}$ 下的对称性将每条物理射线化归为 $L=\{j\geq 1\}$。 $V(\Theta_c)$ 的 (-1)-特征线由以下向量张成

$$\begin{pmatrix} i\sin(\Theta_c/2)\\ \cos(\Theta_c/2)\end{pmatrix}.$$

我们用 亚纯有界型 表示圆盘上有界全纯函数的商，且分母非零。这类函数构成一个域，包括在圆盘内有极点的有理函数，并由其几乎处处的非切向边界值唯一确定。由两个 Hardy 函数之商得到的边界类也相同。例如，一个外乘子可以同时将两个 H^2 函数变为有界函数。边界唯一性可由交叉相乘和 Hardy 唯一性推出。

引理 A.3. $H^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)$ 中存在一个非零的$\mathrm{ran}E_c$ 截面，当且仅当 $e^{i\Theta_c}$ 是某个亚纯有界型函数的边界函数。

证明。 对于一个非零 Hardy 截面（f_1,f_2），特征线条件为

$$\frac{f_1}{f_2}=\tau:=i\tan(\Theta_c/2)\quad \text{almost everywhere.}$$

它的第二个分量不可能恒等于零，因为 $\cos(\Theta_c/2)\neq 0$ 几乎处处成立。因此τ 是亚纯有界型。反过来，设 $\tau=p/q$ 可写成有界全纯函数 p,q。那么（p,q）是一个非零 Hardy 截面。最后，

$$\tau=\frac{e^{i\Theta_c}-1}{e^{i\Theta_c}+1},\qquad e^{i\Theta_c}=\frac{1+\tau}{1-\tau},$$

并且有界型场在这些变换下保持不变。 □

命题 A.4 (奇数阶阻碍)。 对于 $0\leq z<1$，对每条物理射线，配对 (E_c,Q_L) 均处于一般位置。其实半直线场子空间是标准的。

证明。 令 $w=e^{i\theta}$。临界符号的平方为

$$e^{2i\Theta_c}=-w\frac{1-z^2w}{1-z^2/w}=-\frac{w^2(1-z^2w)}{w-z^2}=:G(w).\tag{42}$$

若 $e^{i\Theta_c}$ 是亚纯函数的边界函数 h 且该函数为有界型，那么边界唯一性将推出 $h^2 = G$ 在圆盘上成立。对于 $0 < z < 1$， G 在 z^2处有一个简单极点，而亚纯函数的平方的每个极点的阶数都是偶数。对于 $z = 0$，$G(w) = -w$ 有一个简单零点，因此同样产生矛盾。因此，引理 A.3 证明了 值域$E_c \cap$值域$Q_L = 0$。

互补特征线的分量比为 $1/\tau = -i\cot(\Theta_c/2)$。有界型函数域在取倒数下的封闭性表明，该比值同样不是有界型的，从而得到 $\ker\, E_c \cap \mathrm{ran} Q_L = 0$。对于 $\ker Q_L = H_0^2(\mathbb{T};\, \mathbb{C}^2)$ 中的截面，复共轭产生一个比值为 $-\tau$ 或 $-1/\tau$ 的 Hardy 截面，因为 Θ_c 是实的。二者皆不可能。这就证明了 $L = \{j \geq 1\}$ 的全部四个交，因而对每一条物理射线都成立。应用引理 A.1。 □

奇数阶论证独立于第 5 节中的共轭，证明了标准性。无需援引 Foit 对偶定理，且因子性（命题4.4）并非由它推出。

人工智能的使用

Claude Opus5.5 用于协助完成证明并绘制图，ChatGPT 用于审校文稿。

致谢

我要感谢 Corey Jones 提出计算临界态（尤其是 Temperley-Lieb-Jones 模型）的代数对象这一问题，并与我进行了多次讨论。我感谢 Magdalena Musat 和 Mikael Rørdam 在我于2026年5月访问哥本哈根大学期间的款待，以及 Denjoe O'Connor 在我于2026年10月至11月访问都柏林 DIAS 期间的款待。本研究得到 Leverhulme Trust 通过 Leverhulme 荣休学者奖学金的资助，并部分得益于通过面向学术研究人员的 ChatGPT 计划获得的 OpenAI 模型使用权限资助。

参考文献

[1] M. Aizenman、H. Duminil-Copin 和 S. Warzel，《通过共同的环表示研究不同量子自旋链中的二聚化与奈尔序》，《亨利·庞加莱年刊》21 (2020)；DOI:10.1007/s00023-020-00924-2。[2] M. Aizenman 和 B. Nachtergaele，《量子自旋态的几何方面》，《数学物理通讯》164 (1994)，17–63。[3] G. E. Andrews、R. J. Baxter 和 P. J. Forrester，《八顶点 SOS 模型与广义 Rogers–Ramanujan 型恒等式》，《统计物理学杂志》35 (1984)，193–266。[4] H. Araki，《关于正则反对易关系的准自由态与 Bogoliubov 自同构》，《数学科学研究所出版物》6 (1970/71)，385–442。DOI:10.2977/PRIMS/1195193913。[5] H. Araki，《关于双边无限链上的 XY 模型》，《数学科学研究所出版物》20 (1984)，277–296。[6] H. Araki，《二维伊辛模型关联函数的解析性》，《数学物理通讯》106 (1986)，241–266。[7] H. Araki 和 D. E. Evans，《采用 C^* 代数方法研究二维伊辛模型中的相变》，《数学物理通讯》91 (1983)，489–503。

[8] H. Araki 和 T. Matsui，《XY 模型的基态》，《数学物理通讯》101 (1985)，213–245。DOI:10.1007/BF01218760。[9] J. Böckenhauer、D. E. Evans 和 Y. Kawahigashi，《由α-归纳产生的 Longo–Rehren 子因子》，《数学科学研究所出版物》37 (2001)，1–35。[10] O. Bratteli 和 D. W. Robinson，《算子代数与量子统计力学 2》，第2版，Springer，柏林，1997年。[11] Q. Chen、R. Hernández Palomares、C. Jones 和 D. Penneys，《C*2-范畴的 Q 系统完备化》，《功能分析杂志》283 (2022)，论文编号 109524。[12] E. B. Davies，《量子随机过程》，《数学物理通讯》15 (1969)，277–304。[13] P. Das、S. K. Ghosh 和 V. P. Gupta，《平面代数的 Drinfeld 中心》，arXiv:1203.3958。[14] J. des Cloizeaux 和 M. Gaudin，《各向异性线性磁链》，《数学物理杂志》7 (1966)，1384–1400。[15] H. Duminil-Copin、M. Gagnebin、M. Harel、I. Manolescu 和 V. Tassion，《具有 $q > 4$ 的平面随机簇模型与 Potts 模型的相变不连续性》，《高等师范学院科学年刊》（第4辑）54 (2021)，1363–1413。[16] H. Duminil-Copin、J.-H. Li 和 I. Manolescu，《等辐图上随机簇模型的普适性》，arXiv:1711.02338。[17] H. Duminil-Copin、V. Sidoravicius 和 V. Tassion，《具有 $1 \le q \le 4$ 的平面随机簇模型与 Potts 模型的相变连续性》，《数学物理通讯》349 (2017)，47–107。[18] D. E. Evans 和 Y. Kawahigashi，《由 Hecke 代数导出的轨形子因子 II：量子双与编织》，《数学物理通讯》196 (1998)，331–361。[19] D. E. Evans 和 Y. Kawahigashi，《算子代数上的量子对称性》，牛津大学出版社，牛津，1998年。[20] D. E. Evans 和 C. Jones，《晶格上融合范畴对称性的算子代数方法》，arXiv:2507.05185，第3版（2026年4月）。[21] D. E. Evans 和 J. T. Lewis，《动力半群的膨胀》，《数学物理通讯》50 (1976)，219–227。[22] D. E. Evans 和 J. T. Lewis，《采用 C^* 代数方法研究二维伊辛模型中的相变。II》，《数学物理通讯》102 (1986)，521–535。DOI:10.1007/BF01221645。[23] A. Feiguin、S. Trebst、A. W. W. Ludwig、M. Troyer、A. Kitaev、Z. Wang 和 M. H. Freedman，《拓扑量子液体中的相互作用任意子：黄金链》，Phys. Rev. Lett. 98 (2007)，160409。[24] J. J. Foit，《量子自由费米场的抽象扭曲对偶性》，《数学科学研究所出版物》19 (1983)，729–741。[25] C. M. Fortuin、P. W. Kasteleyn 和 J. Ginibre，《若干偏序集上的关联不等式》，《数学物理通讯》22 (1971)，89–103。[26] V. Gorbenko、S. Rychkov 和 B. Zan，《行走、弱一级相变与复共形场论》，J. High Energy Phys. 2018，第10期，108。

[27] F. M. Goodman、P. de la Harpe 与 V. F. R. Jones，《Coxeter 图与代数塔》，MSRI 出版物 14，Springer，纽约，1989年。[28] A. Guionnet、V. F. R. Jones、D. Shlyakhtenko 与 P. Zinn-Justin，环模型、随机矩阵与平面代数，《数学物理通讯》316（2012年），45–97。[29] G. Grimmett，《图上的概率：图和格上的随机过程》，剑桥大学出版社，剑桥，2010年。[30] C. Jones，准局域代数的 DHR 双模与对称量子元胞自动机，arXiv:2304.00068。[31] C. Jones、P. Naaijkens、D. Penneys、D. Wallick 与 M. Izumi，局域拓扑序与边界代数，《数学论坛·西格玛》13（2025年），e135。DOI:10.1017/fms.2025.16。[32] V. F. R. Jones，二分图的平面代数，载于：《希腊的纽结 '98》，世界科学出版社，里弗埃奇，新泽西州，2000年，94–117。[33] V. F. R. Jones 与 S. A. Reznikoff，环状 Temperley–Lieb 代数的希尔伯特空间表示，《太平洋数学杂志》228（2006年），219–249。[34] J. T. Lewis 与 M. Winnink，伊辛模型相变与克利福德代数上的态的指标，载于：《随机场》（埃斯泰尔戈姆，1979年），雅诺什·博亚伊数学学会讨论会 27，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1981年。[35] R. Longo 与 J. E. Roberts，维数理论，K 理论 11（1997年），103–159。[36] M. Müger，从子因子到范畴与拓扑 II：张量范畴与子因子的量子双，《纯粹与应用代数杂志》180（2003年），159–219。[37] B. Nachtergaele、R. Sims 与 A. Young，量子格点系统的准局域性界。I. Lieb–Robinson 界、准局域映射与谱流自同构，《数学物理杂志》60（2019年），061101。arXiv:1810.02428。[38] K.-H. Neeb 与 F. G. Russo，拓扑群的基态表示，《数学年刊》388（2024年），615–674。[39] B. Nienhuis，二维自旋模型的临界行为与库仑气体中的电荷不对称性，《统计物理学杂志》34（1984年），731–761。[40] V. Ostrik，模范畴、弱 Hopf 代数与模不变量，《变换群》8（2003年），177–206。[41] V. Pasquier，由 Dynkin 图标记的二维临界系统，《核物理 B》285（1987年），162–172。[42] P. Pfeuty，带横场的一维伊辛模型，《物理年刊》57（1970年），79–90。[43] V. Strassen，具有给定边缘分布的概率测度的存在性，《数学统计年刊》36（1965年），423–439。[44] N. Seiberg 与 S.-H. Shao，马约拉纳链与伊辛模型——（不可逆）平移、反常与涌现对称性，《SciPost 物理》16（2024年），064。DOI:10.21468/SciPostPhys.16.3.064；arXiv:2307.02534。

David E. Evans evansde@caerdydd.ac.uk 卡迪夫大学计算与数学科学学院，卡迪夫，威尔士，英国